

LP26 - Propagation avec dispersion

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

Résumé

Bibliographie

- Propagation des ondes, **Etienne Thibierge** http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf
- Hprépa : Ondes 2e année, **Brébec**
- Propagation des ondes, vitesse de phase - vitesse de groupe, **B. Lahaye**, BUP n°649
- Physique PC-PC*, **Olivier, Tec Doc**
- http://thierry.chave.free.fr/ondes_acoustiques.pdf pour le pavillon exponentiel
- Pour les lasers femtoseconde et la compression : <https://www.refletsdelaphysique.fr/articles/refdp/pdf/2019/01/refdp201961p13.pdf>

Pré-requis :

- Equation de d'Alembert
- Onde progressive plane harmonique
- Transformée de Fourier
- Ondes acoustiques ??
- Electrocinétique

Table des matières

1	Onde dans un plasma	3
1.1	Description du système	3
1.2	Equation constitutive	3
1.3	Relation de dispersion	3
1.4	Vitesse de phase	4
2	Notion de paquet d'ondes	4
2.1	Extension spatiale et spectrale	4
2.2	Vitesse de groupe	5
2.3	Etalement	5

3 Application : le transfert d'information	5
3.1 Le câble coaxial	6
3.2 Conséquences	6
3.3 Bonus : les solitons	6

Commentaires du jury

- 2016 : Il s'agit d'une leçon qui porte sur la dispersion et non sur la propagation.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir sur les notions de vitesse de groupe et de vitesse de l'énergie quine s'identifient pas forcément. Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.
- 2012, 2013 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
- 2009, 2010 : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.
- 2007, 2008 : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- 2001 : La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sur s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.
- 2000 : Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde tridimensionnel, beaucoup de candidats oublient que k_x , k_y , k_z et ω sont reliés par la relation de dispersion.
- 1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.
- 1998 : Un battement n'est pas un paquet d'ondes. Le choix d'une représentation de Fourier spatiale ou temporelle pour représenter un paquet d'ondes dépend de la nature du problème de propagation étudié. Le concept de vitesse de groupe n'a de sens que si le phénomène de propagation étudié est associé à une relation de dispersion. La vitesse de groupe n'est pas toujours la vitesse de propagation de l'énergie.

Introduction

Latitude sur ce plan : l'étalement est mis dans la partie 2, j'ai longuement hésiter à la mettre dans la 3...

La partie 3 peut être enrichie en parlant de débit d'infos.

à faire : tester le câble coax, la chaîne de pendules couplés, les animations Python et le diapo

Le contenu est ambitieux.

On a vu l'équation de d'Alembert. Mais on se doute que ça ne suffit pas : on n'entend pas les sons à une portée infinie tels qu'ils sont émis par exemple. On peut apporter des corrections, que ce soit dû à la géométrie du problème considéré ou aux équations constitutives du milieu.

Un autre exemple de déformation du signal : l'arc-en-ciel.

Lampe QI envoyée sur un prisme : on voit plusieurs couleurs émerger. Les caractéristiques de la propagation sont modifiées par le milieu (verre) en fonction de la fréquence de l'onde incidente. Il y a de la dispersion.

Problématique : Qu'est-ce que la dispersion ? Comment est-ce provoqué ? Quelles conséquences sur l'onde transmise ? C'est l'objet de cette leçon.

Et pour commencer, étudions le plasma.

1 Onde dans un plasma

1.1 Description du système

Source : Bouquins de prépa ?

Ensemble neutre d'ions positifs et d'électrons, densité n . Propagation d'une OPPH, polarisée rectilignement : $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$. Idem pour $\vec{B}$ selon la relation de structure.

Hypothèses :

- Dynamique des électrons uniquement (au vu des masses)
- Force de Lorentz = seule force non-négligeable
- Pas d'interactions entre particules
- Particules non-relativistes

1.2 Equation constitutive

Application du PFD : $m_{e^-} \dot{\vec{v}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

ODG : $\frac{vB}{E} \simeq \frac{v}{c}$ (relation de structure) ce rapport vaut $\frac{1}{\alpha}$ où α constante de structure fine vaut environ 137, faudrait regarder dans un bouquin de méca Q

Donc $m_{e^-} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{m_{e^-}} \vec{E}$$

En appliquant cela sur $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} \dots$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 ne^2}{m_{e^-}} \vec{B}$$

1.3 Relation de dispersion

On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}; \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_{e^-}}$$

C'est l'**équation de Klein-Gordon**. On la retrouve pour d'autres systèmes : par ex., c'est pareil pour une chaîne de pendules couplés aux faibles angles.

Interprétation : On trace la courbe de k^2 vs ω^2 .

Régimes extrémaux Cas $\omega \gg \omega_p$: On retrouve la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert.

Cas $\omega < \omega_p$: il n'y a pas de propagation possible, $k^2 < 0$. On peut prendre un $\mathbf{k}$ complexe et on obtient une onde plane pseudo-progressive harmonique.

On écrit l'exponentielle avec $k = k' + ik''$. La partie réelle, c'est la propag', la partie imaginaire c'est l'atténuation.

Ainsi, on voit que la propagation se fait à la vitesse de phase dans l'exponentielle : $v_\phi = \frac{\omega}{k'}$

Ici, k est imaginaire pur, il y a une décroissance exponentielle et pas de propagation spatiale. C'est une **onde évanescence** : stationnaire, pas de transport d'énergie, il y a réflexion.

On peut essayer de voir la pulsation de coupure sur la chaîne de pendules couplés.

1.4 Vitesse de phase

Pour le plasma : $\frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{\omega}{k}(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1-(\frac{\omega_p}{\omega})^2}}$. On peut la tracer (oui c'est plus grand que c , on y reviendra)

ODG de la pulsation de coupure ionosphère : 10^7 Hz d'où l'application à la réflexion des ondes radio

Si elle dépend de ω , la propagation est dispersive. C'est un cas où la dispersion est causée par les propriétés constitutives du milieu. On peut en avoir par sa géométrie également : le pavillon exponentiel. En effet une onde couple les variations temporelles et spatiales au travers d'une équation aux dérivées partielles, très sensibles aux conditions limites.

On peut le montrer sur slide, en expliquant le principe : conservation de la masse, cf. Olivier p.727. On obtient une autre équation de dispersion.

Transition : La vitesse de la phase de l'OPPH est donc changée selon sa fréquence. Mais en soi, cela ne change pas grand-chose. Par contre un signal est composé de plusieurs fréquences.

2 Notion de paquet d'ondes

(Cours de Jérémie)

2.1 Extension spatiale et spectrale

Nous avons fait l'étude précédente pour des OPPH : c'est la base des fonctions temporelles, tout signal est composé de multiples OPPH, vérifiant une relation de dispersion non-linéaire. La dispersion aura donc un effet sur ce signal donné, qui est une CL des OPPH.

En toute généralité, par TF :

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

(intégrale continue car le signal est quelconque, et non pas périodique).

Or, le signal est une onde : **inégalité d'Heisenberg**, $\Delta X \Delta K \geq 1/2$. Ainsi, le signal ne peut être une OPPH, il a une certaine extension spatiale dépendant de son extension spectrale.

Ces notions vont permettre de définir la vitesse de groupe.

2.2 Vitesse de groupe

Prenons un signal de faible extension spectrale, de sorte que $\frac{d\omega}{dk} \gg \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} (k - k_0)$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk}(k - k_0) + \mathcal{O}((k - k_0)^2)$$

On fait le DL dans l'exponentiel, on écrit $\hat{A} = |\hat{A}(k)| \exp\{i\phi(k_0)\} \exp\{i\phi'(k_0)(k - k_0)\}$ et on sort de l'intégrale $\exp\{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))\}$. On obtient :

$$A(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0))} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{A}(k)| e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)} e^{i \left[(k - k_0)x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0)t \right]}$$

Ce facteur là, c'est similaire à une OPPH, de vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$.

Mais cela est modulé par une enveloppe, qui est le terme intégrale. Or, ce terme se balade à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$: **la vitesse de groupe**.

Animation Python pour montrer le glissement de phase. Le centre du signal se déplace à v_g .

Si l'on revient au plasma :

$$v_g = \dots = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

C'est la vitesse de l'énergie, donc on ne dépasse pas la vitesse de la lumière.

2.3 Étalement

Par contre, il existe un autre problème. Il peut exister de l'étalement. Prenons un signal carré en x_0 de largeur initiale Δx_0 en $t = 0$, se propageant donc à la vitesse v_g . Cette vitesse peut dépendre de ω . La position du centre à l'instant t est : $x' = x_0 + v_g t$.

Alors $\Delta x' = \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta v_g^2 t^2}$. Ainsi, il peut y avoir étalement du paquet d'ondes.

On peut le retrouver dans les équations précédentes avec un DL à l'ordre 2 $\omega(k) =$

$$\omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk}(k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}(k - k_0)^2 + \mathcal{O}((k - k_0)^3)$$

Animation Python d'étalement.

3 Application : le transfert d'information

Alternative : ondes de surface

3.1 Le câble coaxial

Source : Thibierge p. 32 à 36.

On rajoute les pertes, cf. n'importe quel livre. Le tout sur slide.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega(r\Gamma + \Lambda g) + rg$$

C'est clairement dispersif, on va avoir glissement de phase. Mais si on détecte un pulse à la sortie, ce n'est pas grave.

Expérience : étalement du paquet d'ondes, cf. Hprépa p.58

3.2 Conséquences

Dans le câble coax : la dérivée seconde de ω par rapport à k est... (faire le calcul), donc il y a étalement. L'information peut être déformée. Des pulses peuvent se chevaucher, mélange de l'information.

Ce qu'on peut faire : annuler cette dispersion via la condition d'Heaviside, cf. cours de Thibierge. Lorsque l'on a fait ça, historiquement, le débit a été multiplié par 10 ! Problème : la longueur d'atténuation devient faible, on peut perdre de l'info sur les grandes lignes, donc on est passé à autre chose.

Souvent : dispersion = problème. Mais on peut l'utiliser à notre avantage ! Dans le cas de l'arc-en-ciel, on voit que la dispersion sépare les composantes de la lumière. Ainsi, avec une dispersion bien connue, on peut faire de la spectro.

Encore mieux ! Compression d'impulsions extra-courtes, cf. **ATTENTION FAUT NOTER LA REF, ça doit être "exercices d'optique PC" de je-ne-sais-plus-qui**. Deux réseaux en regard, on voit que cette dérivée est négative ! Présentation sur slide.

Alors là, c'est typique d'un cas spécial. Dans ce genre de situation, v_g peut être supérieure à c , parce que le DL n'est plus valable. Il faut notamment vérifier que l'énergie se propage bien à v_g .

3.3 Bonus : les solitons

c'est l'une des trois équations dans laquelle la non linéarité compense la dispersion : Sine-Gordon, Schrödinger NL, Korteweg - de Vries

Conclusion

La propagation est très souvent dispersive, il existe deux sources à cela : les équations constitutives du milieu et les conditions aux limites.

A partir d'une relation de dispersion : interprétation riche. Quel type de propagation ? Il y a-t-il propagation, atténuation, absorption, onde évanescente... ?

Toutes ces questions : fondamentales pour la propagation d'infos. À quelle vitesse je peux enchaîner les pulses ? Ça dépend de l'étalement. Tout l'intérêt de ce genre d'études. On pourra voir en TD d'autres exemples de milieux dispersifs.

On pourra se pencher plus en profondeur durant la prochaine séance sur le transfert d'infos, où la dispersion est induite via les CL pour ce qu'on appelle les guides

d'ondes, et l'on pourra se pencher sur des questions telles que pourquoi la fibre optique, pourquoi telle géométrie, quel débit d'infos... ?

Questions

Le lien entre absorption et dispersion est-il général ? Oui, Kramers-Krönig

Pourquoi $u(x+dx, t)$ devient $u(x, t)$ dans la loi des mailles ?

La dispersion a-t-elle un intérêt ? Prismes

Pour le modèle de Lorentz (électron élastiquement lié), que se passe-t-il si les électrons sont considérés comme quantiques ? Pourquoi v est petit par rapport à c pour l'électron ?

Où a-t-on de la dispersion, à part le coax ?

Question d'élève : comment voir la dispersion sans calcul, sans équation ?

Comment mesurer expérimentalement la vitesse de phase et la vitesse de groupe ?

Quand on envoie à l'aide d'un GBF via un haut parleur un signal d'une fréquence que mesure-t-on, la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ? Et si on frappe dans les mains ?

L'air est-il un milieu dispersif pour les ondes sonores ? Dans le cadre d'un concert que se passe-t-il, qu'entendons-nous si on est tout près, à un mètre, ou à un kilomètre ?

Signification du temps caractéristique dans la relation de dispersion du conducteur ?

Comment démontre-t-on l'expression de la vitesse de phase ? Idem pour la vitesse de groupe ; ne pas faire la démo, mais donner le principe physique qui permet de la faire.

Air vraiment pas dispersif pour les ondes électromagnétiques ?

Cas où k imaginaire pur, quel type d'onde obtient-on ? Est-ce un problème que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière ? Onde évanescente

Quelle loi permet d'écrire la première équation pour le cornet acoustique ?

Pourquoi utilise-t-on habituellement une décomposition en séries de Fourier pour caractériser une onde plane et une transformée de Fourier dans le cas d'un paquet d'onde ? Une onde plane est périodique, elle peut se décomposer en séries de Fourier et son spectre est donc discret. Un paquet d'onde n'est pas périodique, et on ne peut pas le décomposer en séries de Fourier. Il faut alors introduire la notion de transformée de Fourier afin de remonter à son spectre continu.

Pourquoi considère-t-on les noyaux immobiles dans le modèle de l'électron élastiquement lié ? La masse d'un électron étant très inférieure à celle d'un noyau, son mouvement peut être négligé. C'est l'approximation de Born-Oppenheimer.

Quelle est l'origine du terme de frottement fluide dans le modèle de l'électron élastiquement lié ? Le terme de frottement fluide est introduit de manière phénoménologique dans le modèle. Il permet de prendre en compte la dissipation par rayonnement de l'électron, ainsi que les collisions dans un gaz ou les interactions avec les vibrations du réseau cristallin dans un solide.

Que représentent les parties réelles et imaginaires d'un vecteur d'onde ? On décompose habituellement le vecteur d'onde de la forme $k = k' + ik''$. Sa partie réelle k' est liée à la dispersion de l'onde, et sa partie imaginaire k'' correspond à l'évolution de son amplitude au cours de sa propagation. Si $k'' < 0$, le milieu est absorbant, c'est le cas de la plupart des milieux. Si $k'' > 0$, le milieu est amplificateur, les cavités laser en sont un exemple.

Comment sont reliés les phénomènes de dispersion et d'absorption ? La partie réelle k' et la partie imaginaire k_j d'un vecteur d'onde sont reliées par les relations de Kramers-Kronig.

Est-ce que la vitesse de propagation de l'énergie est toujours égale à la vitesse de groupe ? Non, ce n'est pas le cas lorsque les milieux sont fortement dispersifs et avec un étalement important. La résonance d'une onde dans un diélectrique est un bon contre-exemple, car la vitesse de groupe est alors supérieure à la célérité de la lumière.

Citer un exemple d'onde se propageant dans un milieu dispersif mais pour laquelle sa dispersion est compensée. Un soliton (ou onde solitaire) se propage sans se déformer dans un milieu dispersif à cause des non-linéarités du milieu. C'est une solution de l'équation de Korteweg-de Vries qui modélise par exemple les ondes à la surface de l'eau dans le cas d'une faible profondeur.

Pour les exemples présentés, la pulsation ω est réelle et le vecteur d'onde k est complexe, est-ce que l'inverse est possible ? Lorsque l'on fixe la pulsation ω d'une onde, on étudie sa propagation dans l'espace en remontant à son vecteur d'onde k , qui peut être complexe. Mais par analogie il serait également possible de fixer son vecteur d'onde k réel, puis d'étudier l'évolution temporelle de l'onde avec sa pulsation ω , qui pourrait être complexe.

Bande passante de l'oscilloscope ? Ca dépend du modèle mais environ 100 MHz.

Exemple de dispersion classique ? Prisme, on peut aussi parler de la ionosphère, chaîne de pendules couplés, fibre optique.