

LP27 – PROPAGATION GUIDÉE DES

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Niveau : jsp

Prérequis :

- Ondes acoustiques dans les fluides

Bibliographie

- ✚ http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf Cours d'Etienne Thibierge très quali
✚ Physique 2nde année PC-PC*, Olivier Tec Doc

Table des matières

1	Un cas simple : la fibre à saut d'indice	2
1.1	Condition de propagation	2
1.2	Modes de propagation	3
1.3	Dispersion	5
2	Guidage acoustique	6
2.1	Rappels sur les ondes sonores	6
2.2	Relation de dispersion	6
2.3	Dispersion dans une conduite de section variable : le pavillon acoustique	8
3	Guidage d'ondes EM	9
3.1	Modes TE et TM	9
3.2	Étude d'un mode TE	10
3.3	Mode TEM et extension au guide d'onde rectangulaire	12
3.4	Câble coaxial	13

Remarques sur les leçons précédentes

- **2014** : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation. Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation guidée. Exemples et applications. **2012, 2013** : Les notions de modes et de fréquence de coupure doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques. **2010** : La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques. Il faut insister sur les conditions aux limites introduites par le dispositif de guidage. **2009** : La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques. **2007** : Il s'agit d'une nouvelle leçon consacrée à la propagation guidée des ondes et à ses applications, importantes dans le domaine des télécommunications par exemple.

Gneugneugneu la propagation guidée ne concerne pas que les ondes EM ou optiques... Va falloir faire les ondes sonores alors. La première partie du cours de Thibierge est à reprendre quasiment à l'identique selon moi : en gros faire apparaître les caractéristiques de la propagation guidée à partir d'une approche interférentielle dans le cas simple de la fibre optique. Ensuite on peut faire les ondes sonores ça s'appuie aussi sur une approche interférentielle pour la continuité. L'exo du pavillon sonore c pas mal pour montrer la dispersion liée au guidage je trouve à voir si ça rentre. Et ensuite le guide d'onde rectangulaire tavu on a traité toute la physique en une leçon. C le plan des Cléments mais Corentin s'est aussi bcp basé sur Thibierge mais il fait pas les ondes sonores. L'exo du pavillon c'est chez Francis mais je l'ai aussi fait dans la leçon adaptation d'impédance. Je pense qu'il faut arriver au câble coaxial sinon on aura pas étudié de système réel pour les OEM ça serait dommage.

Introduction

Nous avons étudié précédemment le caractère propagatif des ondes dans différents domaines de la physique. Cette propriété fondamentale est utilisée aujourd'hui pour le transport de l'information, notamment dans le domaine des télécommunications (transmission d'information par des moyens électroniques et informatiques). Ce transport se fait majoritairement grâce aux ondes électromagnétiques car leur vitesse de propagation est rapide (en comparaison avec des ondes acoustiques par exemple). Nous avons aussi étudié un cas particulier de propagation : la propagation libre.



Nécessité du guidage

⚡ BUP 742, p.385 ou Quaranta I, p. 467



Propagation libre d'une onde sonore On utilise un couple émetteur récepteur ultrasons Jeulin (P.73.23) à 40 kHz : à 2m, sans tuyau, quasiment aucun signal. Avec un tuyau de faible diamètre (<5mm). MAIS : avec un tuyau de plus grand diamètre (25mm) on voit tout un tas de nouveaux signaux qui arrivent. Le signal est donc déformé.

Peut-on comprendre l'apparition de ces nouveaux signaux ? Peut-on toujours les éviter ? Bien entendu, on ne se restreindra pas à l'acoustique car la plupart des signaux que l'on transmet sont plutôt des ondes électromagnétiques ou des signaux électriques.

1 Un cas simple : la fibre à saut d'indice

⚡ Thibierge à partir de la p47 en vrai c giga clean jsp quoi rajouter. Bien insister sur les caractéristiques de la propagation guidée qu'on fait apparaître une à une. Attention à être clair sur l'approche interférentielle le jury avait pas bien compris ce qui interférait avec quoi quand Etienne était passé (je trouve pas son CR à ce batard)

Commençons par présenter la phénoménologie associée au guidage des ondes sur l'exemple du guidage d'une onde lumineuse par une fibre optique à saut d'indice

1.1 Condition de propagation

Commençons par un modèle rudimentaire de fibre optique, où la géométrie est simplifiée au maximum. On considère la propagation dans un milieu d'indice n_1 d'épaisseur a , limité par deux interfaces planes parallèles avec un milieu d'indice n_2 . Supposons en première approche que la lumière se propage comme un rayon lumineux, de longueur d'onde donnée. Ce rayon peut se réfracter et se réfléchir aux interfaces, en suivant les lois de Snell-Descartes.

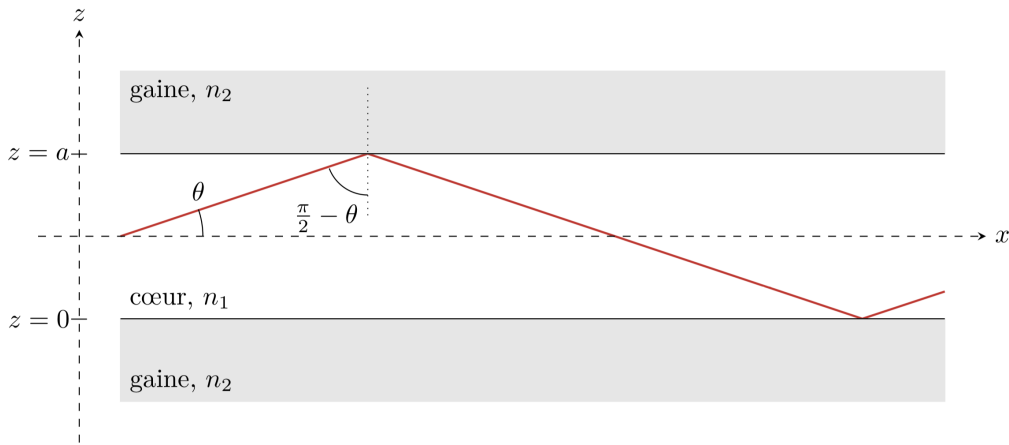


FIGURE 1 – Modèle simplifié de fibre optique. Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur, fait en matériau diélectrique d'indice n_1 , entouré d'une gaine, fabriquée dans un matériau diélectrique différent, d'indice $n_2 < n_1$. Pour simplifier l'étude, on se restreint au guidage dans un plan. Une source émet en entrée de la fibre un rayon lumineux, incliné d'un angle θ par rapport à l'axe de la fibre, qui se propage le long de celle-ci par réflexions successives.

Pour que le guidage dans le cœur soit efficace, il ne faut pas que l'amplitude de l'onde soit diminuée par la partie réfractée : on doit être dans les conditions de la réflexion totale. Les matériaux sont donc choisis tels que

$$n_2 < n_1$$

et l'angle θ est tel que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > \frac{n_2}{n_1} \quad \text{soit} \quad \cos \theta > \frac{n_2}{n_1}$$

Par réflexions successives, l'onde va être maintenue dans le cœur et guidée le long de la direction x . L'utilisation d'interfaces (de conditions aux limites) judicieusement choisies permet le guidage d'une onde. c'est-à-dire son confinement dans une région restreinte de l'espace et sa propagation dans une direction donnée

1.2 Modes de propagation

Associons une onde plane à chaque rayon lumineux. Elle est supposée monochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ , et sa direction est celle du rayon. Lorsque la condition de guidage est satisfaite, la fibre contient une superposition de toutes les ondes réfléchies, qui interfèrent entre elles, comme représenté figure 3.2. Exactement comme dans un interféromètre de Fabry-Pérot, les ondes qui se propagent sans atténuation sont celles pour lesquelles toutes les interférences sont constructives, ce qui signifie que leurs plans d'onde sont confondus.

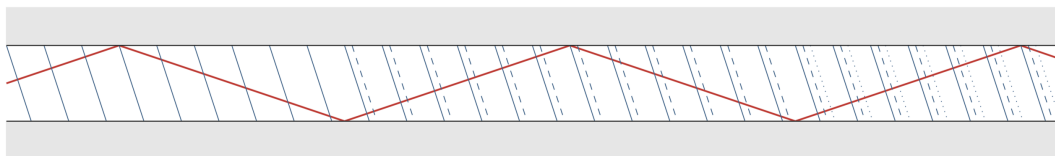


FIGURE 2 – Interférences entre ondes réfléchies dans une fibre optique. Une onde plane est associée à chaque rayon lumineux, les plans d'onde étant orthogonaux à la direction du rayon. Les plans d'ondes de l'onde entrant dans la fibre sont représentés en traits pleins, ceux de l'onde réfléchie deux fois en traits tiretés, ceux de l'onde réfléchie quatre fois en traits pointillés. Ils ne sont pas nécessairement confondus.

Pour trouver la condition d'interférences constructives, il faut calculer le déphasage entre deux ondes réfléchies successives, et imposer à celui-ci d'être un multiple de 2π . Pour ce faire, calculons une différence de marche géométrique puis un déphasage, à l'aide de la figure.

Les ondes étant planes, il faut définir une référence arbitraire de phase : prenons-la nulle pour le plan d'onde passant par S_0 . Par stigmatisme du dioptrique supérieur du guide, après la première réflexion, la phase de l'onde réfléchie est identique à celle qu'elle aurait si la référence était S_1 , symétrique de S_0 par rapport à l'interface entre l'âme et la gaine,

et donc telle que $S_0S_1 = a$. Après deux réflexions, le même argument de stigmatisme indique que la bonne référence des phases est S_2 , symétrique de S_1 par rapport à la deuxième interface, et donc telle que $S_1S_2 = 3a$, soit $S_0S_2 = 2a$

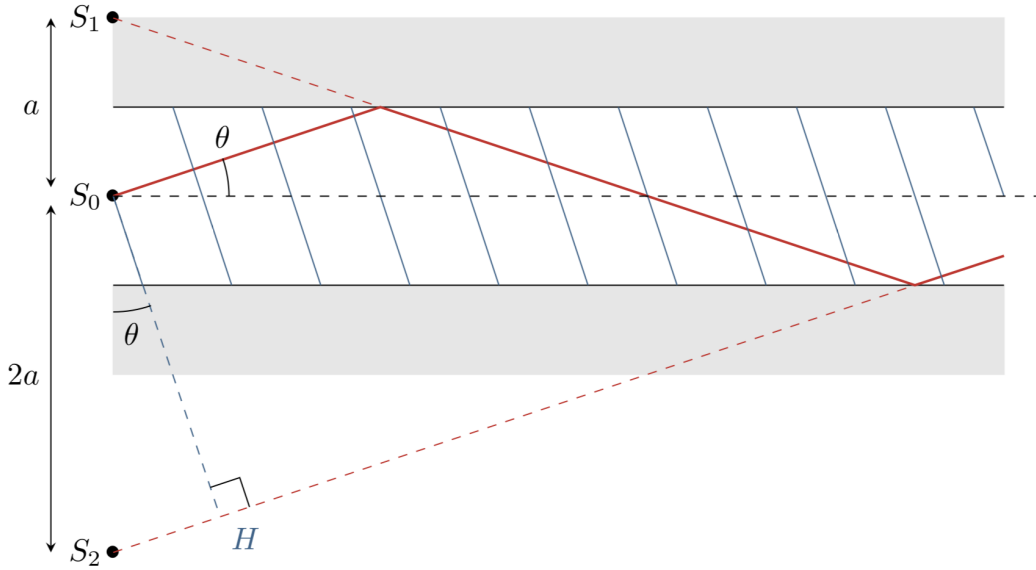


FIGURE 3 – Calcul de la différence de marche entre deux ondes réfléchies successives. S_0 et H appartiennent au même plan d'onde, H étant le projeté orthogonal de S_0 sur le rayon réfléchi deux fois.

En vertu du principe de retour inverse de la lumière et du théorème de Malus, le déphasage entre l'onde issue de S_0 et celle issue de S_2 vaut

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{S_2H}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \Delta\phi = \frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

Remarque : Il n'y a pas besoin de prendre en compte l'indice optique n_1 ici. En effet, λ est défini comme étant la longueur d'onde dans le vide. Dans la gaine, $\lambda' = n_1\lambda$, et le chemin optique $(S_2H) = n_1S_2H$. Les indices se simplifient donc

Pour tenir compte du nombre infini de réflexions dans la fibre, c'est un réseau infini de sources espacées de $2a$ qu'il faut considérer. Toutes les ondes réfléchies interfèrent en phase si

$$\Delta\phi = \frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda} = 2p\pi, p \in \mathbb{N}$$

On choisit d'écrire $p \in \mathbb{N}$ et non pas $p \in \mathbb{Z}$ en prenant l'angle θ positif par convention, le cas $\theta < 0$ s'en déduisant immédiatement. Cette condition sur le déphasage se traduit par une condition sur les angles θ permis, à savoir

$$\sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a}, p \in \mathbb{N}$$

Remarque : Cette définition est cohérente avec la définition générale d'un mode. Un mode de propagation de la fibre est bien une solution propagative, harmonique (l'onde est monochromatique à λ fixée), et compatible avec les conditions aux limites, ici prises en compte par le biais des interférences. Néanmoins, on fait systématiquement l'abus de langage de caractériser un mode de propagation par la seule donnée de p , oubliant le caractère harmonique. C'est ce que l'on fera par la suite en parlant " du mode p de la fibre " pour désigner l'ensemble des ondes harmoniques dont la propagation dans la fibre est caractérisée par l'indice p .

Remarquons que toutes les longueurs d'ondes ne peuvent pas se propager dans tous les modes, puisque $\sin \theta_p \leq 1$. Ainsi, une onde de longueur d'onde λ dans l'espace libre ne peut se propager dans le mode p que si $\lambda \leq \frac{2a}{p}$ ce qui s'écrit en termes de pulsation

$$\omega \geq p \frac{\pi c}{a} \stackrel{\text{déf.}}{=} \omega_{c,p}$$

Revenir sur l'expérience introductive pour bien remonter que la taille du guide joue un rôle dans le nombre de modes transmis et que ces modes dépendent également de l'angle de départ

Remarque : Le seul mode qui n'a pas une telle pulsation de coupure est le mode $p = 0$. Il est cependant possible d'en étendre la définition en posant $\omega_{c,0} = 0$.

1.3 Dispersion

Calculons le temps τ_p mis par un plan d'onde du mode p pour parcourir la distance L le long de l'axe de la fibre, sachant qu'il s'y propage à la vitesse (de phase) $v = c/n_1$. Un raisonnement géométrique simple montre qu'au lieu de parcourir la distance L , il parcourt

$$L_p = \frac{L}{\cos \theta_p}$$

d'où

$$\tau_p = \frac{L_p}{v} = \frac{Ln_1}{c \cos \theta_p}$$

Ainsi, la vitesse effective de propagation du mode p vaut

$$v_p = \frac{c}{n_1} \cos \theta_p$$

Or θ_p dépend évidemment de p ! Ainsi, à pulsation ω fixée, une onde se propage avec une célérité (effective) différente selon le mode qui la propage, donnant lieu à de la dispersion.

La dispersion intermodale ou dispersion de mode caractérise la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation (ω fixée) mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde. Cette dispersion n'est donc pas due au milieu de propagation, et diffère en cela de celle étudiée au chapitre 2. Par ailleurs, l'indice optique du cœur n_1 dépend de la longueur d'onde par l'intermédiaire de la loi de Cauchy,

$$n_1 = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2}$$

Par conséquent, si on considère un même mode, c'est-à-dire un même p , deux ondes de fréquences différentes dans ce même mode vont se propager à des vitesses différentes. On retrouve alors de la dispersion, qui a cette fois une double origine : une partie est due aux propriétés intrinsèques du milieu, l'autre à la dépendance en fréquence de θ_p liée aux conditions aux limites.

La dispersion intramodale caractérise la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques portées par un même mode (p fixé) mais de pulsations différentes. Elle est due à la fois aux propriétés intrinsèques du milieu de propagation et aux conditions aux limites.

Pour le résumer qualitativement,

- dans le cadre de la dispersion intermodale, toutes les ondes se propagent à la même vitesse réelle (car ω est fixée) mais parcourent des distances différentes (car p donc θ varie), donnant lieu à des vitesses effectives différentes.
- dans le cadre de la dispersion intramodale, non seulement les ondes parcourent des distances différentes (p est fixé mais θ_p dépend de la fréquence) et en plus elles le font à des vitesses différentes (car ω varie et le milieu est dispersif), donnant lieu à des vitesses effectives différentes.

Ce qu'on voit dans l'expérience, c'est la dispersion intermodale : chaque "sous-burst" correspond à un mode. Pour voir la dispersion intra-modale, il faudrait zoomer sur chaque sous-burst pour espérer voir des paquets dans lesquels les basses fréquences sont plus avancées.

Au cours de cette première section, nous avons montré qualitativement les principales spécificités de la propagation guidée par rapport à la propagation libre. Récapitulons ces idées clés avant de passer à une étude ondulatoire complète. Nous avons d'abord vu que l'utilisation de conditions aux limites bien choisies permet le confinement d'une onde dans une région restreinte de l'espace et le guidage de sa propagation dans une direction choisie. Cela n'est cependant possible que sous certaines conditions, donnant naissance à des modes discrets de propagation. À chaque mode est associée une fréquence de coupure en dessous de laquelle une onde ne peut pas être guidée. Enfin, l'existence de modes entraîne l'apparition d'une nouvelle cause de dispersion, due aux conditions aux limites, qui s'ajoute à la dispersion intrinsèque au milieu de propagation.

2 Guidage acoustique

✎ toujours Thibierge hein

On a vu comment la réflexion optique selon les lois de Descartes permettaient de confiner et de guider une onde lumineuse. Nous allons maintenant étudier le guidage d'ondes acoustiques

2.1 Rappels sur les ondes sonores

Rappelons que les grandeurs couplées des ondes acoustiques sont la surpression p_1 et la vitesse acoustique $\vec{v}_1$. Les conditions aux limites doivent donc être exprimées en termes de ces grandeurs

L'écoulement associé aux ondes acoustique étant supposé parfait, au niveau d'une paroi solide de normale $\vec{n}_\perp$, il faut traduire le fait que le fluide ne peut pas pénétrer la paroi. En un point P de la paroi, le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ est donc tangent à celle-ci, ce qui s'écrit mathématiquement

$$\vec{v}_1(P \in \text{paroi}) \cdot \vec{n}_\perp = 0$$

Considérons maintenant un tuyau sonore rigide d'axe $\vec{n}$, cylindrique ou rectangulaire. Dans un tel tuyau, les conditions aux limites impliquent qu'en n'importe quel point des parois $\vec{v}_1$ est parallèle à $\vec{n}$. Or une onde acoustique plane est une onde longitudinale, et si sa direction de propagation est $\vec{n}$, alors elle vérifie nécessairement les conditions aux limites. La présence du tuyau n'implique aucune contrainte pour l'onde, qui se propage donc de façon identique à sa propagation libre.

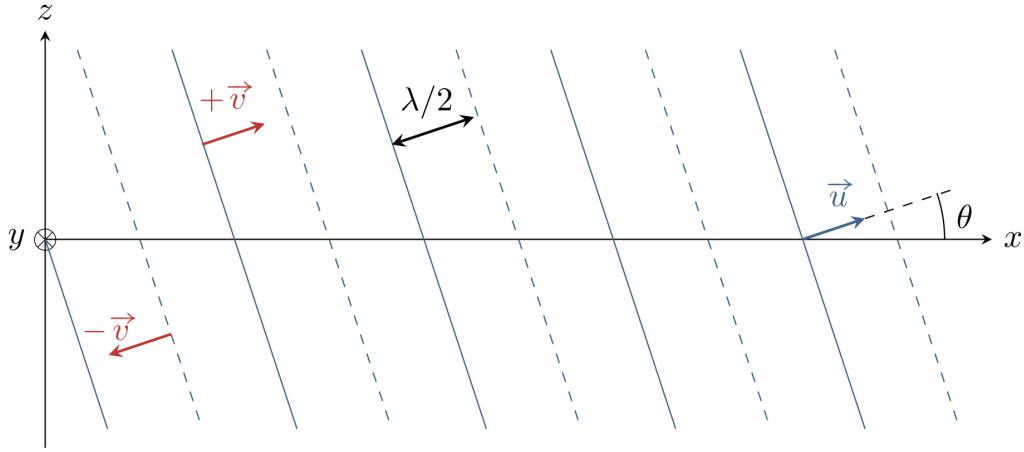
Une onde acoustique plane peut se propager sans déformation dans un tuyau sonore sa direction de propagation est confondue avec l'axe du tuyau

La partie précédente a montré que les modes propagatifs d'un guide plan pouvaient s'étudier de façon simple en considérant la superposition de deux OPPH images l'une de l'autre par réflexion sur les parois du guide. Techniquement, cela se traduit par le fait que les deux OPPH forment un angle $\pm\theta$ avec l'axe du guide. Adoptons à nouveau cette approche pour comprendre la propagation dans un tuyau sonore

2.2 Relation de dispersion

Considérons une OPPH acoustique, de longueur d'onde λ et de direction de propagation $\vec{u}$ formant un angle θ avec l'axe $\vec{e}_x$. Représentons figure 3.8 les plans d'ondes de cette onde à un instant donné, pour lesquels la norme du vecteur vitesse acoustique $\vec{v}_1$ est maximale. Ces plans sont distants de $\lambda/2$, et $\vec{v}_1$ est égal à $\pm v\vec{u}$

Superposons l'onde acoustique avec son onde réfléchi. La propagation des ondes acoustiques étant linéaire, le vecteur vitesse acoustique total est simplement la somme des vecteurs vitesse acoustique de chacune des ondes. On obtient alors par la construction graphique représentée les vecteurs $\vec{v}_1$ aux différents points d'intersection des différents plans d'onde.

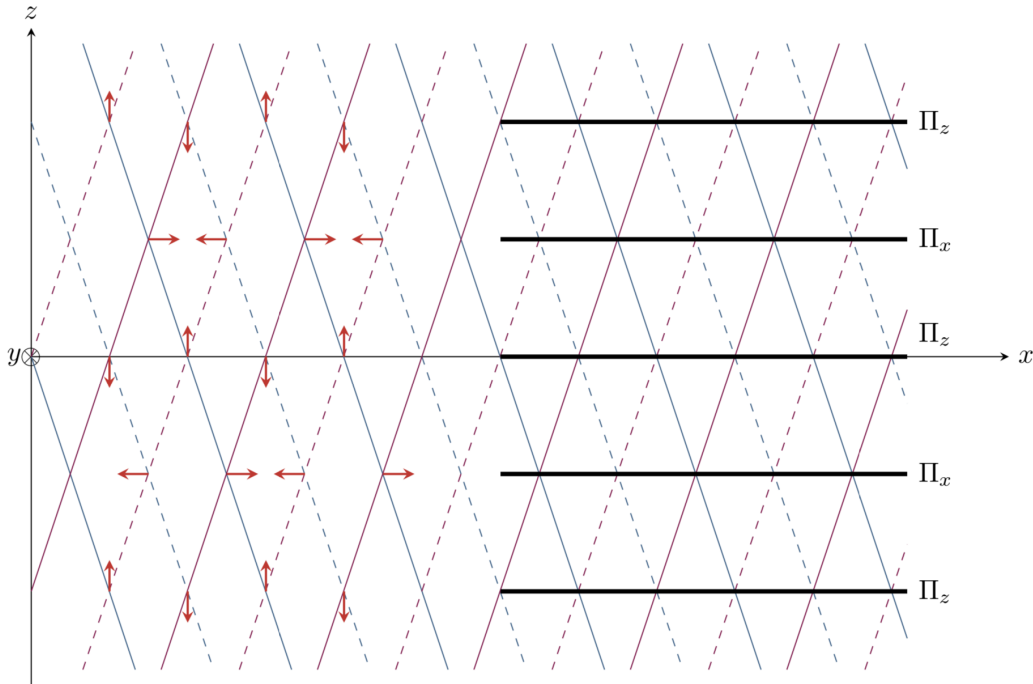


Il apparaît donc des familles de plans parallèles à (yOz) , régulièrement espacés, dans lesquels le vecteur vitesse est porté alternativement par $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$. Pour simplifier la suite de la discussion, on parlera de plans Π_x et Π_z . On remarque que deux plans Π_x et Π_z adjacents sont distants de

$$d = \frac{\lambda}{4 \sin \theta}$$

De plus, l'onde totale est spatialement périodique dans la direction x , de période spatiale

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos \theta}$$



Étudions maintenant la possibilité pour une telle onde d'être guidée par un « tuyau » composé de deux plans distants de a . Cette étude se généralise aisément au guidage par un guide plus réaliste qui serait de section rectangulaire.

Les conditions aux limites sont telles que la vitesse du fluide doit être tangente aux parois. Ceci impose donc que la distance a corresponde à un multiple de la distance $2d$ entre deux plans Π_x , c'est-à-dire

$$a = 2pd, p \in \mathbb{N}$$

Il apparaît donc des modes propagatifs quantifiés du fait des conditions aux limites imposées par le guide. À longueur d'onde λ hors guide donnée, le mode p correspond à la superposition de deux ondes planes se propageant en zig-zag

avec un angle θ_p avec l'axe du guide tel que $\sin \theta_p = p\lambda/(2a)$. Ces modes se propagent sans déformation à l'intérieur du guide. Au contraire, si l'on envoie une onde plane à une incidence différente de celle des modes du guide, la superposition donne lieu à une onde évanescence. En moyenne dans le temps, toute l'énergie est réfléchi hors du guide.

Combinons les résultats obtenus pour le mode p sous la forme

$$\begin{cases} \cos \theta_p = \frac{\lambda}{\lambda_g} \\ \sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a} \end{cases}$$

Remarque : On met ici clairement en évidence la signification de la longueur d'onde guidée, et en particulier que $\lambda \neq \lambda_g$. Cela conduit à

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_g^2} + \frac{p^2\lambda^2}{4a^2} = 1$$

soit

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{p^2}{4a^2}$$

Remarquons l'apparition d'une longueur d'onde de coupure haute,

$$\lambda_c = \frac{2a}{p}$$

Ainsi, si la longueur d'onde libre est plus grande que cette longueur d'onde de coupure, l'onde ne pourra être guidée par le guide étudié que si elle n'est pas inclinée. Remarquons qu'on retrouve exactement le critère établi pour les ondes électromagnétiques. Cela n'a rien de surprenant, puisque le raisonnement consiste dans les deux cas à étudier les plans d'onde, sans s'intéresser vraiment à la nature des grandeurs ondulatoires.

Les instruments de musique ont souvent des pavillons (adaptation d'impédance), quel est l'effet de cette section variable sur la propagation ?

2.3 Dispersion dans une conduite de section variable : le pavillon acoustique

➤ Olivier page 727 et http://thierry.chave.free.fr/ondes_acoustiques.pdf

On démontre l'équation d'onde pour un onde acoustique guidée dans un pavillon dont les parois s'élargissent exponentiellement : $S(x) = S_0 e^{-\sigma x}$ Première étape : conservation de la masse - Masse qui entre en x : $\mu_0 S(x) v_1(x, t)$ - Masse qui sort en $x + dx$: $\mu_0 S(x + dx) v_1(x + dx, t)$ - Variation de masse dans le volume infinitésimal en x entre t et $t + dt$ (approximé comme un cylindre à l'ordre 1) : $\frac{\partial \mu}{\partial t} S(x) dx dt$ - conservation de la masse +DL de S

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 v_1 \sigma$$

3 Deuxième étape : équation d'Euler linéarisée

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

Troisième étape : évolution isentropique

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

On suit les particules donc on utilise des dérivées eulériennes $\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt} \Big|_S = \frac{1}{\mu} \frac{D\mu/Dt}{Dp/Dt}$ que l'on évalue à l'ordre 1 car les dérivées convectives sont d'ordre 2. On obtient alors l'équation d'onde

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$

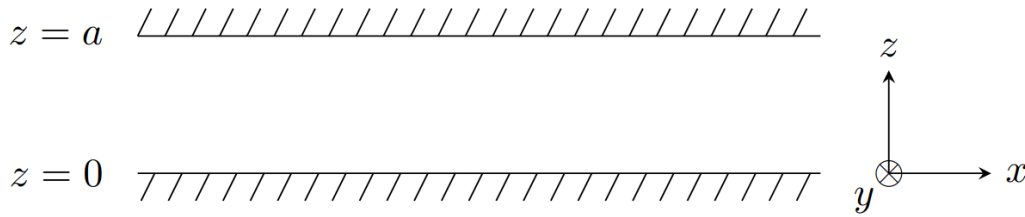
Ce n'est pas une équation de d'Alembert, et la relation de dispersion s'écrit : $k^2 - i\sigma k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$, que l'on résout pour ω réel. On distingue alors deux cas, selon ω et $\omega_c = \frac{\sigma c}{2}$ et on cherche $k = k' + ik''$ $-\omega < \omega_c$: $k' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\omega^2}{c^2} - \sigma^2}$ et $k'' = \frac{\sigma}{2}$. On a propagation avec amplification de l'amplitude de l'onde. $-\omega < \omega_c$: alors $k' = 0$ et $k'' = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\omega^2}{c^2}}$. Il n'y pas de propagation, on a donc un passe-haut, la fréquence de coupure vaut en odg (en prenant $\sigma = 10 \text{ m}^{-1}$ pour un cornet de taille centimétrique) $f_c = \frac{\sigma c}{4\pi} \simeq 300 \text{ Hz}$

3 Guidage d'ondes EM

🔱 toujours Thibierge

3.1 Modes TE et TM

Revenons aux ondes électromagnétiques et essayons de décrire leur propagation guidée en menant une étude plus quantitative à partir d'une description électromagnétique complète. Afin de simplifier le problème, on considère le dispositif suivant :



On a deux plans parfaitement conducteurs englobant un milieu d'indice unité. Ainsi, la réflexion sur les parois est totale et on s'affranchit ainsi d'effets de transmission. Par ailleurs le milieu d'indice unité nous permet de nous affranchir de problèmes de dispersion non essentiels ici. Si l'on reprend les relations de passage des milieux conducteurs (Cf Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs) on a :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_S \wedge \mathbf{n} \quad (1)$$

On a alors annulation de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique à l'interface, soit :

$$\begin{cases} \vec{B}(z=a^-) \cdot (-\vec{e}_z) = \vec{B}(z=0^+) \cdot (+\vec{e}_z) = \vec{0} \\ \vec{E}(z=a^-) \wedge (-\vec{e}_z) = \vec{E}(z=0^+) \wedge (+\vec{e}_z) = \vec{0} \end{cases} \quad (2)$$

L'équation vérifiée par les champs reste ici toujours la même puisque l'on se place dans le vide :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (3)$$

Reprenons depuis le début en ré-écrivant les équations de Maxwell dans le cas de notre problème. Dans le guide d'onde considéré, la propagation se fait nécessairement selon l'axe (Ox) et le problème est invariant par translation selon (Oy), les champs ne dépendent donc pas de la composante spatiale y . On peut alors ré-écrire les équations de Maxwell comme suit :

$$\text{div } \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_z E_z = 0 \quad (4)$$

$$\text{div } \vec{B} = \partial_x B_x + \partial_z B_z = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{bmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \begin{bmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

On remarque alors que toutes les composantes des champs ne sont pas couplées entre elles ! Notamment on observe deux groupes de composantes couplées : (E_y, B_x, B_z) et (B_y, E_x, E_z) . On a alors apparition de deux groupes de modes de propagation indépendants. Le premier groupe est appelé groupe transverse électrique puisqu'il concerne une propagation transverse du champ électrique (selon $\vec{e}_y$) et le second est appelé groupe transverse magnétique pour les mêmes raisons. A la manière de la décomposition des solutions sur la base des modes propres pour la corde de Melde, les modes¹ TE et TM permettent une décomposition des solutions du guide d'onde uniaxe par linéarité de l'équation de D'Alembert. On appelle alors mode hybride une solution combinaison linéaire des deux types de modes.

On sent bien ici que les deux groupes jouent des rôles symétriques, c'est pourquoi on va étudier uniquement un mode TE pck grosse flemmasse.

3.2 Étude d'un mode TE

On recherche donc une solution harmonique à l'équation de propagation avec un champ électrique transverse, i.e. de la forme générale :

$$\vec{E} = \vec{E}(x, z, t) = E(z) \cos(\beta x - \omega t) \vec{e}_y \quad (8)$$

La partie progressive de l'onde est caractérisée par la constante de propagation β , qui joue un rôle analogue à celui d'un vecteur d'onde dans la direction de propagation. Par analogie, la période spatiale de l'onde dans la direction de propagation est appelée longueur d'onde guidée,

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta}$$

Attention toutefois, l'onde générale considérée ici n'est pas plane donc on ne peut parler de vecteur d'onde et encore moins utiliser la relation de structure associée pour déterminer le champ magnétique !

Trouvons maintenant $E(z)$. Le champ complexe associé,

$$\vec{E}(x, z, t) = E(z) e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_y,$$

doit vérifier l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites, qui lui imposent de s'annuler en $z = 0$ et $z = a$ (puisque'il est totalement tangent à la surface conductrice). Pour ce champ, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit en écrivant explicitement les dérivées

$$-\beta^2 E(z) e^{i(\beta x - \omega t)} + \frac{d^2 E}{dz^2} e^{i(\beta x - \omega t)} + \frac{\omega^2}{c^2} E(z) e^{i(\beta x - \omega t)} = 0$$

d'où l'équation différentielle ordinaire sur E ,

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) E(z) = 0$$

La nature des solutions de cette équation dépend du signe de $\omega^2/c^2 - \beta^2$.

- Si $\omega^2/c^2 - \beta^2 < 0$, la solution est une somme d'exponentielles réelles, qui ne peut pas s'annuler deux fois à moins d'être identiquement nulle. Donc on s'en branle.
- Si $\omega^2/c^2 - \beta^2 = 0$, la solution est une fonction affine, qui ne peut pas non plus s'annuler deux fois à moins d'être identiquement nulle. Donc on s'en branle.
- Si $\omega^2/c^2 - \beta^2 > 0$, la solution est une somme de sinus et cosinus, qui peut cette fois s'annuler deux fois de façon non triviale. Donc ça peut être une solution propagative intéressante !

1. Un mode correspond à la fois à une décomposition sur la base des structures et sur la base des fréquences, i.e. une solution harmonique d'un des groupes

Plaçons-nous donc dans le dernier cas, et introduisons un réel K tel que

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \stackrel{\text{déf.}}{=} K^2.$$

La solution de l'équation différentielle (3.24) est alors

$$E(z) = A \cos(Kz) + B \sin(Kz)$$

où A et B sont à déterminer à partir des conditions aux limites. Celles-ci imposent

$$\begin{cases} E(z=0) = 0 \\ E(z=a) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} A = 0 \\ Ka = p\pi, p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\vec{E}_p = E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_y, p \in \mathbb{N}^*$$

Un mode TE est donc entièrement caractérisé par un entier naturel non nul p . Ce n'est en aucun cas une onde plane, on a une forme stationnaire dans la direction transverse avec l'apparition de noeuds et de ventres.

En injectant cette solution dans l'équation de D'Alembert on a alors la relation de dispersion dans le guide uniaxe :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \quad (9)$$

pour une fréquence donnée, l'onde peut se propager que sur un nombre fini de modes (et donc de β associés). On parle alors de dispersion intramodale. Si on s'intéresse à la propagation d'un mode (donc à p fixé), la propagation est possible lorsque β est réel, soit :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi p}{h}\right)^2 > 0 \quad (10)$$

On voit donc apparaître une pulsation de coupure pour chaque mode :

$$\omega_{cp} = \frac{p\pi c}{a} \quad (11)$$

On a donc un comportement passe-haut (avec une coupure nrv). On parle cette fois de dispersion intramodale. Pour l'ordre $p = 1$, avec $h = 5$ mm, on trouve $\omega_{c,1} = 1.88 \times 10^{11}$ rad/s soit $f_{c,1} = 30$ GHz. Pour une utilisation pratique, les dimensions du guide doivent être adaptées à l'onde que l'on souhaite guider. Pour du 50 Hz, on a h de l'ordre de la centaine de km donc ce n'est pas approprié pour les basses fréquences.

Pour résumer :



On appelle dispersion intermodale ou dispersion de mode la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde. La dispersion intramodale caractérise la différence de vitesse effective de propagation entre deux harmoniques portées par le même mode (p fixé) mais de pulsation différentes. Elle est due aux propriétés intrinsèques du milieu (milieu dispersif) et aussi aux conditions limites (ici c'est que les conditions aux limites en l'occurrence).

En utilisant les relations de couplage pour le groupe TE, on peut déduire le champ magnétique associé :

$$\vec{B} = -E_{0,p} \frac{p\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \sin(\beta x - \omega t) \vec{e}_x + \frac{\beta}{\omega} E_{0,p} \sin\left(\frac{p\pi z}{a}\right) \cos(\beta x - \omega t) \vec{e}_z \quad (12)$$

ce qui nous permet alors de calculer le vecteur de Poynting associé :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{E_0 \beta_p}{2\mu_0 \omega} \sin^2 \frac{p\pi}{a} z \vec{e}_x \quad (13)$$

L'énergie se propage donc sans atténuation dans la direction du guide.

A la limite si on se place entre la première et la deuxième pulsation de coupure on peut éviter la dispersion intermodale mais il nous restera toujours de la dispersion intramodale puisque la relation de dispersion est non linéaire. Est-il impossible d'avoir une propagation sans dispersion dans un guide ?

3.3 Mode TEM et extension au guide d'onde rectangulaire

Si on résout les équations associées aux modes TM, on obtient des solutions du même type. Enfin presque ! Puisque cette fois l'ordre 0 ne correspond pas à une onde nulle mais à une onde de la forme :

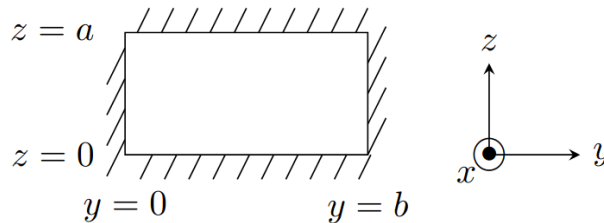
$$\begin{cases} \vec{B} = B_0 e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_y \\ \vec{E} = c B_0 e^{i(\beta x - \omega t)} \vec{e}_z \end{cases} \quad (14)$$

On a donc existence d'un mode transverse électromagnétique TEM. La relation de dispersion alors associée est directement :

$$\omega = \beta c \quad (15)$$

On n'a donc pas de dispersion intramodale sur ce mode et pas de pulsation de coupure, on peut donc guider l'onde sans aucune dispersion tant que l'on se place à une pulsation inférieure à la première pulsation de coupure des modes TE et TM.

En pratique, vous vous doutez bien que l'on ne peut pas créer des guides infinis comme celui que l'on a étudié. Celui qui s'en rapproche le plus est le guide rectangulaire :



On rajoute alors une direction de confinement, ce qui, par une résolution équivalente, donne des modes TE et TM se propageant suivant une relation de dispersion analogue :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 \quad (16)$$

Ils sont alors indicés cette fois par deux indices entiers mais la physique reste la même.



Relation de dispersion avec le banc hyperfréquences

⚡ Poly de TP EM



On précise qu'à cette fréquence on est entre la première et la deuxième pulsation de coupure donc un seul mode se propage. On ajoute un point sur la relation de dispersion.

Oui fin là on a oublié le mode TEM qui peut se propager à n'importe quelle fréquence ! Eh bien non... Le problème c'est que le mode TEM a besoin d'une géométrie très particulière pour pouvoir exister. Un théorème de topologie fait qu'un guide simplement connexe ne peut pas transporter de mode TEM, i.e. si le guide est creux c'est foutu adieu la non dispersion...

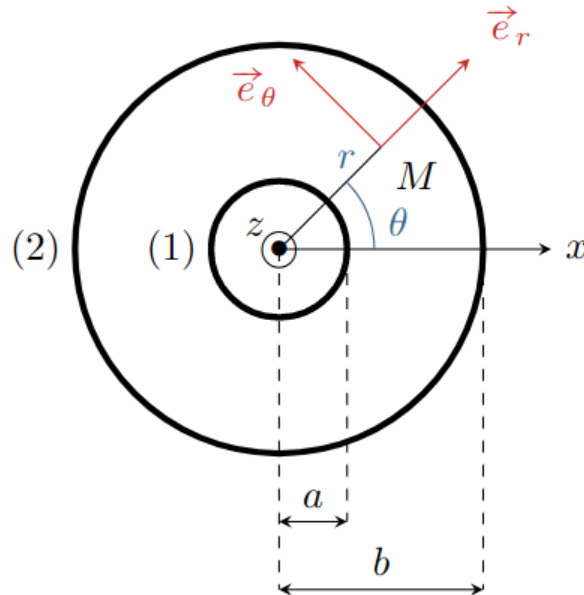
Eh mais un câble coaxial c'est pas simplement connexe !



3.4 Câble coaxial

✚ Thibierge section 3.4

Bien dit Bérangère ! Si on se rappelle de la structure d'un câble coaxial :



Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, de rayons a et $b > a$, séparés par un isolant. Pour s'affranchir des propriétés diélectriques de l'isolant, on l'assimile au vide. La recherche des solutions suit alors le même principe mais est beaucoup plus technique. Finalement on peut montrer que les fréquences de coupure des deux premiers modes TE et TM sont de la forme :

$$f_c = \frac{c}{2(b-a)} \quad (17)$$

$$f_c = \frac{c}{\pi(b+a)} \quad (18)$$

On a donc finalement des résultats très similaires mais ce qui change c'est que le guide n'est cette fois pas simplement connexe ! C'est une condition nécessaire mais pas suffisante mais on montre toutefois par le calcul son existence et la relation de dispersion associée :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (19)$$

On a donc bien un mode fondamental sans dispersion ! Donc en se plaçant dans la bonne gamme de fréquences on peut dire adieu à la dispersion intra et intermodale ! Pour un câble de télévision de rayons $a = 2.4$ mm et $b = 8.8$ mm, la fréquence de coupure la plus basse est de l'ordre de 8.5 GHz. Pour l'utilisation habituelle avec des fréquences au plus de l'ordre du MHz, seul le mode fondamental contribue à la propagation. Ouf !

Conclusion

On peut dériver de la forme du mode TEM le modèle des constantes réparties (sans résistance). Or ça c'est en ayant assimilé le milieu intermédiaire à du vide (et des conducteurs parfaits). Un modèle plus réaliste fait inclure une résistance dans ce modèle et fout en l'air tout notre idéal de non-dispersion.