

# LP28 ONDES ELECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX DIELECTRIQUES

10 juin 2020

MONNET Benjamin &

## Niveau : L2

## Commentaires du jury

## Bibliographie

- ⚡ *Électromagnétisme 4*, **Bertin Faroux Renault** → Apporte plein de précisions
- ⚡ *Ondes MP-PC-PSI*, **Hprépa** → La base du cours
- ⚡ *Milieux diélectriques*, **Garing** → Électron élastiquement lié

## Prérequis

- Électromagnétisme dans le vide
- Mécanique du point

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Equations de Maxwell dans un diélectrique</b>	<b>2</b>
1.1	Réponse du milieu . . . . .	2
1.2	Equations de Maxwell . . . . .	2
1.3	Cas d'un milieu LHI . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Propagation d'onde électromagnétiques dans les diélectriques</b>	<b>4</b>
2.1	Equation de propagation . . . . .	4
2.2	Relation de dispersion . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Modèle de l'électron élastiquement lié</b>	<b>4</b>
3.1	Position du problème . . . . .	4
3.2	Réponse et indice du milieu . . . . .	5
3.3	Formule de Cauchy . . . . .	5

## Introduction

Nous avons étudié la propagation des ondes dans le vide mais nous ne nous sommes pas intéressés à la matière, à sa réponse et à la propagation des ondes dans la matière. Dans cette leçon, nous allons donc étudier la réponse d'un milieu à un champ électrique, étudier la propagation des ondes dans le milieu puis essayer de développer un modèle microscopique.

## 1 Equations de Maxwell dans un diélectrique

### 1.1 Réponse du milieu

Dans un milieu donné, on peut trouver deux types d'électrons :

- Les électrons libres, qui se déplacent l'ensemble du matériau : on a alors un milieu conducteur. On parle de **charges libres** et de **courants libres**
- Les électrons liés, qui ne bougent que sur des distances typiques inférieures à la distance atomique et qui restent proche de leur noyau

Nous allons nous intéresser dans cette leçon en particulier aux **milieux diélectriques** : ce sont des milieux isolants, qui ne possèdent pas de charges libres. Les charges sont donc uniquement liées. Néanmoins, une charge négative reliée à une charge positive, ça réagit à un champ électrique et ça les écarte l'une de l'autre : ça génère donc un dipôle.

Il y a donc apparition de dipôles induits dans le milieu diélectriques. On note  $d\vec{p}$  la somme de tous les dipôles induits dans un volume  $d\tau$ . La **polarisation** (en  $C.m^{-2}$ ) est alors définie par :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

Il peut y avoir plusieurs origines à la polarisation induite :

- La polarisation électronique, que l'on vient d'évoquer
- La polarisation d'orientation : si le milieu est constitué d'atomes avec un moment dipolaire de base, ces derniers peuvent s'orienter selon le champ électrique, moyennant les effets d'agitation thermique
- La polarisation ionique : C'est la même chose que la polarisation induite mais à plus grande échelle : cela concerne les solides ioniques

**Remarque** : on s'intéressera surtout à la polarisation électronique dans cette leçon.

La présence de moments dipolaires crée alors une densité volumique de charge (faire un schéma ou dire que ce sera démontré en TD ?) :

$$\rho_l = -div\vec{P}$$

Afin de respecter la conservation de la charge  $\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + div\vec{j}_l = 0$ , on trouve donc qu'il apparaît un courant de polarisation  $\vec{j}_l$  :

$$\vec{j}_l = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

### 1.2 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell se mettent donc à présent sous la forme :

$$\begin{aligned} div\vec{D} &= \rho & r\vec{\partial}t\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} &= 0 & r\vec{\partial}t\left(\frac{B}{\mu_0} - \vec{M}\right) &= \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

avec  $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$  le **déplacement électrique**. Autrement dit, actuellement nous avons :

- 6 équations de Maxwell + 6 équations qui viennent des relations entre E,P,D et H,M,B = 12 équations
- 18 inconnues (3\*6) : E,P,D,H,M,B

Le système n'est donc pas fermé! Il manque 6 équations. On s'intéressera à des milieux donc l'aimantation est négligeable. Autrement dit,  $\vec{M} \approx \vec{0}$ . Il nous reste encore 3 inconnues... On utilise alors une équation de fermeture! On pose

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0[\chi_E](E, \omega, \vec{r})\vec{E}(\omega)$$

Ainsi, on fait disparaître à travers cette équation constitutive le fait que la polarisation dépend du champs électrique et on introduit une grandeur adimensionnée  $[\chi_E]$  qui est à priori un tenseur dépendant du champ électrique. Plusieurs remarques :

- **Attention** : cette relation n'est valable que dans le domaine des pulsations! Néanmoins, on ne s'intéressera qu'à des ondes monochromatiques durant toute la leçon. On supposera donc que cette équation est aussi valable dans le domaine temporelle
- Dans cette expression, on suppose que le champ électrique à prendre en compte est le champ macroscopiquement appliqué au milieu... Or la présence des autres dipôles génère un champ supplémentaire. On supposera donc que le milieu est suffisamment **dilué** pour que l'on considère ce champ supplémentaire négligeable

### 1.3 Cas d'un milieu LHI

La relation de structure proposée est, dans l'état actuelle, dure à utiliser. Tout d'abord, on peut montrer que le tenseur de susceptibilité est symétrique : il peut donc se diagonaliser. On va donc faire plusieurs hypothèses :

- Le milieu est **linéaire** : cela signifie que le champ électrique étant pas trop important, on peut supposer que la susceptibilité électrique n'en dépend pas  $[\chi_E](E, \vec{r}) \Rightarrow [\chi_E](\vec{r})$
- Le milieu est **homogène** :  $[\chi_E](\vec{r}) \Rightarrow [chi_E]$
- Le milieu est **isotrope** : aucune direction n'est privilégiée donc  $[chi_E] \Rightarrow chi_E$

La relation de fermeture devient finalement uniquement :

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_E\vec{E}$$

Finalement, dans un DLHI, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D} = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{E} = 0 & r\vec{ot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 & r\vec{ot}\vec{B} &= \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{B} = r\vec{ot}\vec{B} = \frac{\epsilon_r}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

avec  $\epsilon_r$  la **permittivité relative** du milieu.

gaz (20°C-1 atm)	$10^6 \chi_e$	liquides (20°C)	$\epsilon_r$	solides	$\epsilon_r$
Hélium	65	Eau	80,36	Diamant	5,5
Néon	127	CCl <sub>4</sub>	2,238	Chlorure de sodium	6,12
Argon	517	Benzène	2,284	Silice pure	3,78
Hydrogène	254	Nitrobenzène	35,74	Paraffine	2,20
Oxygène	495	Acide acétique	6,15	Nylon	3,5
Azote	547	Éthanal	4,34	Polyéthylène	2,3
Gaz carbonique	921	Éthanol	25,1	Verres	4 à 7
Air sec	537	Glycérol	43,5	Mica	~7
		Acétone	21,2	Plexiglass	3,4
				Teflon	2,1
				Titanate de Baryum	~1 500

## 2 Propagation d'onde électromagnétiques dans les diélectriques

### 2.1 Equation de propagation

On prend les équations de Maxwell, on fait un coup de rot de rot et hop :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On remarque que :

- On a presque la même forme que dans le vite, ua  $\epsilon_r$  près
- $\epsilon_r$  peut être complexe !

↓ *L'équation est linéaire, donc on peut utiliser la décomposition de Fourier et s'intéresser à des ondes monochromatiques.*

### 2.2 Relation de dispersion

On cherche donc la relation entre la pulsation temporelle  $\omega$  et la pulsation spatiale  $k$  d'une onde plane monochromatique de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  :

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$$

où on a posé  $n^2 = \epsilon_r$ . Ce dernier pouvant être complexe, on écrit  $\vec{k} = \vec{k}' - i\vec{k}''$  et l'onde a donc la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \cos(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})$$

La partie imaginaire du vecteur d'onde représente donc l'atténuation du milieu et la partie réelle la propagation. On définit alors les vitesses de phases et de groupe par :

$$\begin{cases} v_\phi = \frac{\omega}{k'} \\ v_g = \frac{d\omega}{dk'} \end{cases}$$

↓ *On aimerait retrouver les résultats expérimentaux avec un modèle théorique...*

## 3 Modèle de l'électron élastiquement lié

### 3.1 Position du problème

On considère :

- Un électron de valence lié à un noyau fixe par une force élastique
- Tous les atomes sont identiques (milieu homogène)
- Milieu dense : le champ  $\vec{E}$  est le champ appliqué macroscopiquement
- L'électron subit aussi une force de frottement

On applique alors le TRC dans le référentiel lié au noyau supposé galiléen :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -k \vec{r} - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - e \vec{E} \\ \Leftrightarrow \vec{r} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} &= -\frac{e}{m} \vec{E} \end{aligned}$$

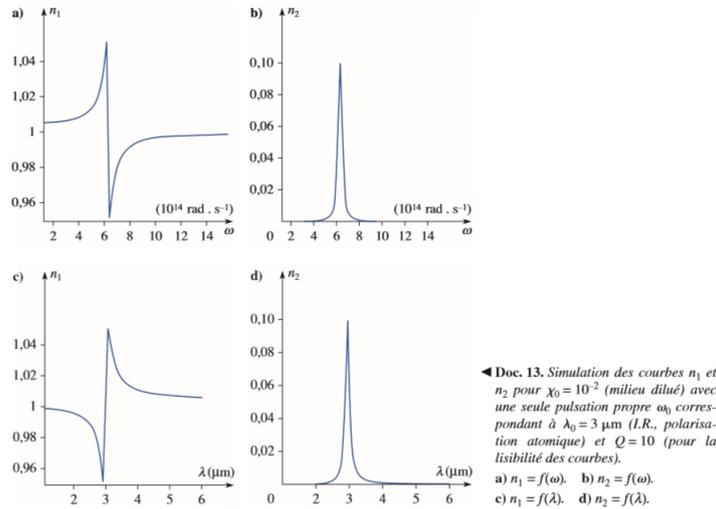
avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $Q = \omega_0 \tau$

### 3.2 Réponse et indice du milieu

On peut relier le moment dipolaire au vecteur position par :  $\vec{P} = ne\vec{r}$ . En passant en RSF, on a :

$$\vec{P} = \frac{ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{Q}} \vec{E}$$

On a donc trouvé la susceptibilité électrique! On peut en sortir les parties réelles et imaginaires et on obtient :



Quelques ordres de grandeurs :

- Polarisation électronique :  $f \approx 10^{14} - 10^{15}$  Hz
- Polarisation ionique :  $f \approx 10^{12} - 10^{15}$  Hz
- $Q \approx 10^4$  en moyenne

Et quelques remarques :

- La partie réelle de  $\chi_E$  est souvent très grande devant sa partie imaginaire
- Il y a un pic d'absorption! On peut l'exploiter... avec un micro-onde par exemple!

### 3.3 Formule de Cauchy

Dans le verre, pour le domaine visible, on a  $\omega \ll \omega_0$  et on considère  $Q \approx \infty$  :

$$\epsilon_r = 1 + \chi_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

avec  $\chi_0 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$  et donc on peut faire un développement limité pour obtenir n :

$$n \approx 1 + \chi_0 + \chi_0 \left( \frac{n\pi c}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2}$$

Ça explique la dispersion de la lumière dans un prisme

### Questions

- 

### Remarques

-