

27 juin 2020

# LP28 - Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

Gauthier Legrand et Francis Pagaud

27 juin 2020

## Bibliographie

- Physique PC-PC\*, **Olivier**
- Electromagnétisme 4, **BFR**
- Cours d'Ulm, [Par ici](#)
- Ondes PC-PC\*, **Brébec Hprépa**
- Optique expérimentale, **Sextant** (Brewster p. 270)
- Optique, **Pérez** (Biréfringence p. 475)
- Optique, **Houard** (Biréfringence p. 268)
- EM 1, **Feynman** (explication qualitative des charges et courants liés)
- Electromagnétisme : ondes et propagation guidée, dispo sur Scholarvox et contient les bases de la leçon.

## Pré-requis : Niveau L3

- Equations de Maxwell dans la matière
- Ondes électromagnétiques dans le vide
- 

## Table des matières

<b>1 Propagation d'une onde dans un diélectrique</b>	<b>3</b>
1.1 Milieu diélectrique homogène isotrope . . . . .	3
1.2 Etablissement de l'équation d'onde . . . . .	3
1.3 Un vecteur d'onde complexe . . . . .	4

<b>2 Dispersion et absorption</b>	<b>4</b>
2.1 Modèle de l'électron élastiquement lié	4
2.2 Conséquences sur l'onde	5
<b>3 Importance de la polarisation</b>	<b>6</b>
3.1 Relations de passage	6
3.2 Réfraction d'une onde polarisée	6
3.3 L'incidence de Brewster	6
3.4 Cas des milieux anisotropes	7
3.5 La biréfringence	7

C'est très très dense. Mieux vaut se concentrer sur les ondes plutôt que le modèle de l'électron élastiquement lié. Il faut faire une répète avec et sans. Penser à bien mettre des ODG.

**Reste à faire :** Py, diapo, expérience PVC, on peut illustrer Brewster par un Py.

## Commentaires du jury

**2017** Cette leçon ne doit pas se limiter à un cours sur les milieux diélectriques ; cela n'en est pas l'objet.

**Jusqu'en 2013** le titre était : Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.

**2009-2010** Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.

**2006** Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation.

**2001** Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.

**1999** Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas toujours bien compris. Il est trop souvent assimilé au rayon vecteur noyau-électron, le lien entre le terme de rappel et la force électrostatique n'est pas fait et l'origine du terme de frottement fluide n'est pas interprétée.

## Introduction

On a vu la propagation d'onde électromag dans le vide. Seulement on n'est jamais dans le vide, même l'air est constitué de particules, la transition de l'un à l'autre n'est pas si trivial.

**Diélectriques :** Définition. On ne va pas se placer dans le cadre magnétique.

Problématique : Quelle équation de propagation et quels comportements typiques des diélectriques dans ce processus ? Quel lien au matériau diélectrique ?

## 1 Propagation d'une onde dans un diélectrique

### 1.1 Milieu diélectrique homogène isotrope

BFR4 p. 30, Olivier p. 741, cours d'Ulm p. 307

Hyp : Milieu dilué, pas de charge libre ni de courant libre, pas d'aimantation.

-Rappel des équations de Maxwell (sur slide ?) :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

et relation constitutive :  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

→ 12 inconnues ( $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{B}$ ) pour 9 équations, Comment fermer le système ?

-Milieu diélectrique en un endroit donné. On a un **milieu dilué** (champ local = champ ext). On s'attend à ce qu'il y ait une réponse en tout point de l'espace au passage de l'onde = convolution. Si on passe en Fourier :  $\underline{\vec{E}} \propto e^{i\omega t}$  et  $\underline{\vec{P}} = \sum_i \underline{\alpha}_i(\vec{r}, \omega) \underline{\vec{E}}^i(\omega)$ . N.B. : Pas d'effet de  $\vec{B}$ , on suppose les charges non-relativistes.

-Milieu linéaire :  $\underline{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \underbrace{[\underline{\chi}_e(\vec{r}, \omega)]}_{\text{Rép du milieu, matriciel}} \underline{\vec{E}}(\omega)$

-Milieu homogène :  $\underline{\vec{P}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 [\underline{\chi}_e(\vec{r}, \omega)] \underline{\vec{E}}(\omega)$

-Milieu isotrope,  $\chi_e$  devient scalaire :  $\underline{\vec{P}}(\omega) = \epsilon_0 \underline{\chi}_e(\omega) \underline{\vec{E}}(\omega)$

Donc  $\underline{\vec{D}} = \epsilon_0 (1 + \underline{\chi}_e) \underline{\vec{E}} = \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_r}_{\epsilon} \underline{\vec{E}}$

C'est une loi phénoménologique (champs faibles pour la réponse linéaire). ODG pour  $\underline{\chi}_e$ , cf. BFR4 p. 32 (eau, air, éthanol, diamant, attention à convertir  $\epsilon_r$  en  $\chi_e$ )

### 1.2 Etablissement de l'équation d'onde

BFR4 p. 200, Ulm p. 327

Faut aller vite mais attention à la rigueur, faut expliquer pourquoi on peut sortir les  $\epsilon$  des dérivées

---

1. Cette convention donne  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$

-On va regarder la réponse pour une pseudo-onde plane progressive harmonique :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  et  $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

Simplification de Maxwell (J'ai pas mis les notations complexes partout car flemme, mais faut pas les oublier) :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \epsilon(\omega) \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \epsilon(\omega) \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon(\omega) \omega \vec{E} \end{cases}$$

Observation :  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$  orthogonaux tout comme  $\vec{B}$  + on a toujours le trièdre direct.

On en déduit en faisant le produit vectoriel avec  $\vec{k}$  dans la deuxième équation :

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon(\omega) \vec{E}$$

$$\boxed{k^2 \vec{E} = \omega^2 \mu_0 \epsilon(\omega) \vec{E}}$$

### 1.3 Un vecteur d'onde complexe

On a alors  $\underline{k} = k' - ik''$  (Attention, c'est une relation vectorielle), parler de l'indice complexe et relier ça à l'optique. On réécrit l'exponentielle, vitesse de phase. Il faut un schéma, Py : Onde atténuée.py. Juste dire qu'il y a atténuation sans plus.

Cool, tout est comme dans le vide, sauf ce vecteur d'onde complexe dû au  $\epsilon$  complexe. Mais il faut qu'on en sache plus sur  $\epsilon$  : modèle micro.

## 2 Dispersion et absorption

### 2.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Hprépa p. 260, Ulm p. 256

Après réflexion, je mettrais pas mal de cette partie en pré-requis, histoire de juste choper le résultat et montrer sur slide les parties importantes.

Cadre de l'étude : on fait les dessins. Système : nuage électronique non-relativiste. Atome sous un champ  $\vec{E}$  homogène (justification des ordres de grandeurs,  $\lambda \gg r$ , vrai hors rayons X). L'atome est polarisable, on obtient un moment dipolaire  $\vec{p} = -Ze\vec{r} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$ .

-Bien expliquer l'origine du terme de rappel. A l'équilibre statique, la force de Lorentz compense la force de rappel :  $\vec{f}_{rappel} = +Ze\vec{E} = \frac{Ze}{\epsilon_0 \alpha} \vec{p} = -\frac{(Ze)^2}{\epsilon_0 \alpha} \vec{r}$ .

Force de frottements : rayonnement, collisions.

Le passage de la force d'Abraham-Lorentz à la force proportionnelle à la vitesse est expliqué qualitativement dans Ulm p. 259

*CALCULS, BFR p.86*

On obtient la polarisabilité. On le relie à la susceptibilité. On trace les parties réelles et imaginaires au tableau.

Conclusion : champ trop lent, polarisabilité qui s'adapte en conséquence en phase (IR). Champ trop rapide, pas de polarisabilité car les molécules n'ont pas le temps (UV +). Entre les deux, il peut exister un déphasage = absorption.

-Limites du modèle (pas de réponse de la matière = milieu dilué, potentiel coulombien devient harmonique, il faudrait de la quantique pour justifier tout ça, résultat dans le BFR p. 54. C'est très phénoménologique)

On peut parler des caractéristiques des atomes, différentes polarisabilités, BFR p. 55. De plus, on n'a considéré que la polarisation électronique. Faut refaire pareil pour la polarisation ionique, qui concerne les noyaux, et la polarisation d'orientation, qui mérite un traitement différent.

## 2.2 Conséquences sur l'onde

*Olivier p. 743+*

On en déduit la susceptibilité, graphe BFR p. 92. On peut montrer des vraies courbes issues de <https://refractiveindex.info/?shelf=main&book=H2O&page=Segelstein> se mettre en échelle logarithmique et tester différentes phases, différents matériaux... L'échelle log est utile.

On réécrit l'exponentielle de l'OPPH en disant à quoi sont égaux les termes  $k'$  et  $k''$ . Il y a dispersion, ce qui nous amène à avoir la loi de Cauchy, mais on a aussi atténuation.

**Choix n°1** : Faire passer une onde centimétrique à travers une couche de PVC

Qu'est-ce qu'il en est de cette décroissance ? On fait le calcul de Poynting avec l'introduction de la longueur typique d'absorption. (on peut détailler les calculs, c'est intéressant, BFR4 p. 204) On retrouve Beer-Lambert en faible absorption.

**Choix n°2** : Montrer Beer-Lambert avec une eau de Dakin.

On peut faire un ODG sur l'observation expérimentale pour retrouver  $n''$ .

Une conséquence : on n'utilise pas de radar pour les sous-marins mais des sonars, car les ondes EM seraient absorbées très rapidement.

*Transition* : Mais c'est pas les seuls aspects importants qu'ont les diélectriques, la polarisation l'est aussi.

### 3 Importance de la polarisation

#### 3.1 Relations de passage

*Ulm p. 336*

-Polarisation de l'interface : les barycentres des charges ne sont plus confondus, BFR4 p. 10.

-Dédution de la relation de passage :  $\vec{D}_2 - \vec{D}_1 = \sigma \vec{n}$

Pour le champ magnétique :  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \vec{0}$

#### 3.2 Réfraction d'une onde polarisée

*Source : Hprépa Ondes p. 281, Houard p.266*

Pour le Houard, il est scanné en LP30.

On pose le cadre de l'étude qui va mener au tracé des coeffs de réflexion et de transmission. On ne détaille pas les modes TE/TM même s'il faut être au taquet dessus, on se place juste comme il faut.

On peut faire le poly d'Ulm p. 338 pour les calculs, mais c'est vraiment axé optique, il n'y a pas les susceptibilités.

Sinon on peut trouver l'expression de l'angle tel que seule la réfraction est possible, cf. Hprépa. On remplace  $n^2$  par  $\epsilon_r$  et on est content.

$$i_B = \tan \frac{n_2}{n_1}$$

#### 3.3 L'incidence de Brewster

*Source : Sextant p. 270*

(La page wiki anglaise donne une visualisation intéressante + application à la photo. Le Houard + Sextant c'est très bien)

L'onde en sortie est polarisée rectilignement, on le voit bien avec le graphe Houard p. 268. On peut tracer un Python.

Interprétation via le rayonnement dipolaire : les molécules du diélectriques ont un moment dipolaire dans la direction du champ  $\vec{E}$ . Or, il ne rayonne pas dans cette direction, d'où l'absence de cette polarisation dans le rayon réfracté (schéma de la page Wiki)

Animation Wolfram ou Py. <https://www.youtube.com/watch?v=VJc2NGnP8F0>

On peut tenter l'expérience de la page 270.

### 3.4 Cas des milieux anisotropes

Source : Pérez p. 475, Houard p. 269

Changeons de milieu : milieu anisotrope (attention, notations complexes)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \vec{E}$$

Comment est-ce possible ? image du Houard p. 269, direction préférentielle par la configuration du cristal.

Comment la lumière se propage là-dedans ?  $\vec{D}$   $\vec{E}$  ne sont plus forcément colinéaires !

Retour aux équations de Maxwell (Pérez p. 467).

1.  $\vec{D}$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux.
2.  $\vec{B}$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux.
3.  $(\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$  forme un trièdre direct.

Et pour le champ  $\vec{E}$  ? il est toujours relié au vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$ , les trois forment un trièdre direct et c'est bien le vecteur  $\vec{\Pi}$  que l'on voit à l'issue d'un laser.

En faisant comme on l'a fait avant :

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\mu_0 \omega^2 \vec{D}$$

$$k^2 \times \vec{E} - \mu_0 \omega^2 [\epsilon] \vec{E} = \vec{k} \cdot \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{\neq 0}$$

Pas très trivial, plaçons-nous dans un cas particulier.

### 3.5 La biréfringence

"milieu uniaxe", à symétrie de révolution. Alors on a deux directions similaires (selon x et y, directions d'indice o en se plaçant dans la bonne base), une troisième extraordinaire (z, indice e).

Ce qu'il se passe, c'est qu'on a une permittivité selon chaque direction, donc un indice qui dépend de la direction.  $k_o^2 = \epsilon_o \mu_0 \omega^2$  et  $k_e^2 = \epsilon_e \mu_0 \omega^2$ , mais selon la direction  $\vec{k}$ , on en sait rien...

Les calculs sont pas passionnants. Si on veut passer à la physique, on dit qu'il existe deux directions de même indice, une troisième d'indice différents, si on se propage dans cette direction là, pas de problème. Mais si on est pas dans ces directions... Les calculs montrent qu'on est sur une ellipse d'indice.

Revenons à la formulation avec  $\vec{D}$  :

$$k^2 \times \vec{E} - \mu_0 \omega^2 \vec{D} = \vec{k} \cdot \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{\neq 0}$$

On projette selon les trois directions pour obtenir  $D_x, D_y, D_z$ . Une fois qu'on l'a, on l'injecte dans  $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$  et BIM, on a l'équation suivante :

$$2\epsilon_o \frac{k_o^2}{k^2 - k_o^2} + \epsilon_e \frac{k_e^2}{k^2 - k_e^2} = 0$$

Pour obtenir l'équation de l'ellipse des indices, Pérez p.469.

Sauter les calculs nous emmène ici.

On trace l'ellipse des indices, Pérez p. 477. Définition de l'axe optique.

Exemple de construction des rayons, Pérez p. 477 : la polarisation associée à une direction possède un indice particulier associé. Ainsi chaque pola a son propre indice et les deux se séparent.

Les équations de Maxwell montrent que le vecteur de Poynting est perpendiculaire à la surface des indices, ainsi on peut déduire les deux trièdres.

Quelle pola pour quelle direction ? Hé bien si on se propage le long de l'axe optique, les deux pola sont le long des directions ordinaires, on est sur le cercle des indices. Maintenant on tourne de  $90^\circ$ , la pola extraordinaire se retrouve dans la direction de propagation précédente, dans la direction de l'axe optique. Ainsi, la pola ordinaire est orthogonale à l'axe optique, la pola extraordinaire a une composante selon l'axe optique.

En traçant les trièdres on voit que la pola ordinaire  $\vec{E}_e$  est colinéaire à  $\vec{D}_e$

Mille applications expérimentales, on peut montrer une lame à face parallèles pour illustrer la direction de propagation.

## Conclusion

Voili voilou, atténuation, absorption, polarisation.

*Ouvertures possibles* : Des milieux non-linéaires pour les lasers par exemple, l'étude de la biréfringence en TP.

## Commentaires pendant la prépa aux oraux

- Se renseigner sur les ferroélectriques
- Le cours d'Ulm, notamment à partir du V/2., est à connaître sur le bout des doigts.
- Connaître le BFR sur le bout des doigts.
- Le modèle quantique de l'électron lié est dans le cours d'Ulm.
- Se renseigner sur les lasers solide [Génération de seconde harmonique](#)
- Connaître l'effet Kerr, l'effet Pockels
- Les charges libres sont les électrons de la bande de conduction.

## Questions

- Vitesse de phase, groupe expression ? Définition ? Milieux dispersif ? Loi de Cauchy, pourquoi définie à partir de la partie réelle de  $\epsilon_r$  ? Ré-expliciter deux trois points pour un élève. Si dans le modèle de l'électron classiquement lié on fait  $E = 0$ , on a  $r$  (distance noyau/électron) qui tend vers 0 à cause du terme de frottement fluide, ce n'est pas ce qui se passe en réalité pourquoi ? Quelles sont les expressions de  $\chi'$  et  $\chi''$  dans un modèle quantique ? Que doit-on considérer comme interaction ? J'avais donné des ODG pour  $\epsilon_r$ , dans le cas de l'eau pourquoi n'a t'on pas  $\epsilon_r = n^2$  ? De quoi cela dépend-il ?
- Justifier la force de rappel élastique, la force de frottement fluide ? Milieu à polarisation spontanée ? Il voulait entendre parler de ferroélectricité. Comportement non linéaire, comment changer la relation de fermeture ? Comment décrire un tel problème ? (j'ai parlé d'ensemble canonique comme pour le paramag, ça lui allait) Matériaux anisotropes, comportement des cristaux liquides, forme de la susceptibilité diélectrique ? Pourquoi Maxwell = 6 équations ? Pourquoi en complexe pour calculer B on multiplie  $k$  et E mais pour  $\vec{H}$  on multiplie E et  $B^*$  ? Exemple d'effets non linéaire sur les diélectrique ? J'ai parlé de doublement de fréquence. Un autre exemple ? J'en avais pas Le modèle de l'électron élastiquement lié permet de prédire la couleur des rubis par exemple ? Je crois que non mais je ne sais plus d'où ça vient. Pourquoi une telle différence entre la susceptibilité de l'eau liquide et de la glace ?

## Passage de Léonard Aubry

Polarisation d'orientation, ionique et ???

- C'est quoi physiquement le vecteur polarisation  $\vec{P}$  ? Comment on le relie aux moments dipolaires ?
- L'air c'est un diélectrique ? Oui. D'autres exemples de diélectriques gazeux ? le modèle du plasma
- Exemple de capteur de polarisation d'orientation ? Piezoélectricité
- Comment expliquer le caractère intensif du vecteur polarisation ?
- Pourquoi on a commencé à regarder les diélectriques (historiquement) ? Le condensateur !
- D'où vient  $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  ? regarder la quantité de charge qui passe à travers une surface quand  $\vec{P}$  varie
- D'où vient  $\rho_{\text{liée}} = \text{div} \vec{P}$  ? Regarder Feynman EM 1
- Comment ça se passe si le milieu n'est plus linéaire ?
- Relations de passage ?
- Comment mesurer  $\epsilon_r$  de l'eau ? Capacité dans des éprouvettes
- La manip marche ? Impuretés de l'eau ça change drastiquement la valeur parce que les impuretés sont généralement des ions **ça vaudrait le coup de voir comment on fait industriellement : sûrement de manière optique**

- Les piezo sont très utilisés pour les piezos
- Modèle de l'électron élastiquement lié : ils sont accélérés comment les électrons ? Il faut considérer que les électrons ont une trajectoire circulaire avec le rayon environ le rayon de Bohr
- Pourquoi c'est  $-e\vec{r}$  le moment dipolaire ?
- Si on considère plusieurs électrons, on doit sommer en parallèle ou en série les élastiques ? (c'est pour ça que si on considère  $N$  électrons ça revient au même : c'est cohérent avec le fait que  $\alpha$  est intensif!)
- Quelle différence entre réflexion diélectrique et réflexion métallique ? Quand on a réflexion totale sur le diélectrique c'est à peu près pareil que pour le métal
- Lien entre  $\underline{n}$  et  $\underline{k}$  ?
- c'est possible de communiquer avec des micro-ondes sous l'eau ?
- Sur les graphes en fréquences c'est cool de mettre la gamme du visible