LP48 Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

25 mars 2020

MONNET Benjamin &

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✍ *Cap prépa MPSI-PCSI-PTSI*, [1]
- ✍ *Milieux diélectriques*, **Garing**
- ✍ *Mécanique quantique*, **Basdevant, Dalibard**

Prérequis

- ➢ Electronique : loi des mailles, loi des noeuds et fonctions de transfert
- ➢ Electromagnétisme dans la matière : suceptibilité, indice
- ➢ Principe fondamentale de la dynamique
- ➢ Mécanique quantique avec notations brakets et matricielles

Expériences

- ☕ Ressort au bout d'une masse ?
- ⟶ RLC série
- ⟶ Modèle de l'électron élastiquement lié
- ⟶ effet MASER

Table des matières

1 Résonance d'un circuit électrique **2**
1.1 Fonction de transfert . . . 2
1.2 Etude de la résonance ? . . . 2
1.3 Résonance en intensité . . . 3
1.4 Résonance en puissance . . . 3

2 Oscillateurs à plusieurs degrés de liberté **3**
2.1 Oscillateurs couplés . . . 4
2.2 La corde de Melde : résonance en amplitude . . . 4
2.3 La corde de Melde : résonance en énergie ? . . . 5

3 Résonance en électromagnétisme **5**
3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié . . . 5
3.2 Calcul de l'indice du milieu . . . 5

4 Bonus : Résonance en mécanique quantique : l'effet MASER **6**
4.1 Rappel sur les états propres du hamiltonien de l'ammoniac . . . 6
4.2 Effet MASER . . . 6
4.3 Application : les horloges atomiques . . . 7

5 La corde de Melde ? Analogie LASER ? **7**

6 Effet Larsen ? Analogie LASER ? **7**

Introduction

Expérience avec un ressort ?

Il faut distinguer deux types de résonances : la résonnance d'un système et la résonnance d'une grandeur. Un système entre en résonance lorsque la puissance transmise est maximale. Une grandeur entre en résonance quand elle atteint son maximum en fonction d'un paramètre.

1 Résonance d'un circuit électrique

✍ Cap prépa MPSI-PCSI-PTSI p265 **Pour la résonance en intensité, le faire en direct devant le jury.**

1.1 Fonction de transfert

On s'intéresse ici au signal aux bornes du condensateur. La loi des mailles donne $e = Ri + L\frac{di}{dt} + u_c$. Avec $e(t) = E_o\cos(\omega t)$ et $i = C\frac{dU}{dt}$, on a l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = E_0\omega_0^2 \quad \text{avec} \quad 2\lambda = \frac{R}{L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On obtient ici l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti forcé à la pulsation ω. En passant en RSF, on a :

$$\frac{U}{E} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega}$$

Afin de simplifier la suite, on adimensionne le problème en posant $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ce qui donne :

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

1.2 Etude de la résonance ?

Il vaut mieux sauter cette partie pour aborder la résonance en puissance à la fin et pour éviter la redondance.

Pour obtenir la résonnance en tension, il nous faut calculer le module de U.

$$\frac{|U|}{E} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Pour étudier la résonance, on cherche le maximum de cette fonction, et donc le minimum de la fonction $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

$$\frac{df}{dx} = x\left(\frac{2}{Q^2} - 4 + 4x^2\right)$$

On cherche à annuler cette expression. On doit alors distinguer deux cas :

- $Q < \frac{1}{2}$: dans ce cas là , $\frac{df}{dx} < 0$ et il n'y a pas de maximum
- $Q > \frac{1}{2}$: on trouve que la fonction est maximale pour $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

A la résonance, on a alors :

$$|U| = E\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx QE \quad \text{si} \quad Q \gg 1$$

La résonance en tension n'est donc pas tout à fait à la pulsation ω_0 mais toujours à une pulsation plus faible.

1.3 Résonance en intensité

Pour obtenir l'expression de l'intensité, on utilise tout simplement $i = C\frac{du}{dt}$ donc :

$$I = jC\omega E\frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = \frac{E}{R}\frac{1}{jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

En posant $I_0 = E\sqrt{\frac{C}{L}}$, on a :

$$I = I_0\frac{Q}{\sqrt{1+Q^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

On a donc une résonance en intensité pour $\omega = \omega_0$, contrairement au cas de la tension. La pulsation de résonance de l'intensité et celle de la tension étant différente, on peut se demander ce qu'il en est de la puissance.
On peut s'intéresser ensuite à la qualité de la résonance, i.e. à quelle poit est-elle centrée autour de $x = 1$. Pour ce faire, on définit $\Delta\omega$ par la bande de pulsation sur laquelle $I > \frac{I_{max}}{2}$. Dans notre cas, cela revient à résoudre :

$$Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

Ce qui donne :

$$x = \pm\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4} \text{ en ne gardant que les x positifs}$$

Cela nous permet de trouver :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

On en déduit que plus le facteur de qualité est élevée, plus la résonance est piquée.

1.4 Résonance en puissance

Dans notre circuit, la puissance totale $e(t)i$ vaut :

$$P_G = e(t)i = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right) = P_J + P_M + P_E$$

Comme nous nous situons dans un cas où nous somme en régime sinusoïdale forcé, la moyenne de cette égalité sur un nombre entier de périodes donne :

$$\langle P_G\rangle = \langle P_J\rangle$$

Or $Ri^2 = Rii* = RI^2$ donc :

$$\langle P_G\rangle = \frac{E^2}{R}\frac{1}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

Cette fonction a donc un maximum en $x = 1$, ce qui correspond à la résonnance en puissance et donc à la résonance ce notre système ! En résumé :

- L'intensité résonne pour $x = 1$
- La puissance et donc notre système pour $x = 1$
- On peut montrer que la tension a une résonnance pour $x < 1$

On dit donc que notre système résonne à $\omega = \omega_0$.

2 Oscillateurs à plusieurs degrés de liberté

✍ Hprépa, Ondes p16

2.1 Oscillateurs couplés

On considère deux masses m reliées par un ressort de raideur K et chaque masse est elle-même relié à une paroi par un ressort de raideur K. Dans le cas où l'on force une des deux masses par un mouvement sinusoïdale, on trouve les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{\Psi}_1 + 2\omega_0^2\Psi_1 - \omega_0\Psi_2 &= \tfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)\\ \ddot{\Psi}_2 + 2\omega_0^2\Psi_2 - \omega_0\Psi_1 &= 0\end{aligned}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$. En posant $u = \Psi_1 + \Psi_2$ et $v = \Psi_1 - \Psi_2$, on trouve :

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \omega_1^2 u &= \tfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)\\ \ddot{v} + \omega_2^2 v &= \tfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)\end{aligned}$$

avec $\omega_1^2 = \omega_0^2$ et $\omega_2^2 = 3\omega_0^2$ qui sont donc les deux pulsations caractéristiques de norte système. Afin de s'en assurer, on peut remonter à l'amplitude du mouvement que l'on notera $\Psi_i = A_i\cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned}A_1(\omega) &= \tfrac{F_0}{2m}\left(\tfrac{1}{\omega_1^2-\omega^2} + \tfrac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right)\\ A_2(\omega) &= \tfrac{F_0}{2m}\left(\tfrac{1}{\omega_1^2-\omega^2} - \tfrac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right)\end{aligned}$$

On donc bien que l'on a une résonance en amplitude pour $\omega = \omega_i$. L'augmentation du nombre de degré de liberté a donc augmenté le nombre de pulsation de résonance. Afin d'approfondir cette remarque, nous allons nous intéresser maintenant à un système dont le nombre de degré de liberté est infini : la cordede Melde.

2.2 La corde de Melde : résonance en amplitude

On considère une corde fixée à deux parois distantes de L. Pour rappel, les hypothèses de l'étude de la corde de Melde sont :

- On considère une corde linéique de masse linéique μ
- Le poids de la corde est négligée
- Tout type de frottement est négligé
- Les déformations sont supposées petites ($\frac{dy}{dx} \ll 1$) et uniquement selon l'axe Oy

On trouve alors que la déformation suit l'équation suivant :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où T_0 est la composante de tension horizontale de la corde (assurée par exemple par la présence d'une masse au bout de celle-ci). On trouve alors la vitesse de propagation d'une onde $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ et la relation de dispersion $kc = \omega$. L'espace étant borné, on a des solutions stationnaires de la forme $y(x,t) = A\cos(\omega t + \Phi)\cos(\omega t + \phi)$. On cherche ici à étudier la résonance de la corde de Melde. Pour cela, on impose donc à une extrémité de la corde une excitation sinusoïdale. Les conditions limites s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}y(0,t) &= a_0\cos(\omega t)\\ y(L,t) &= 0\end{aligned}$$

Cela amène la solution suivante :

$$y(x,t) = a_0\cos(\omega t)\frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}$$

On remarque alors que l'amplitude diverge pour $L = p\frac{\lambda}{2}$, $p \in \mathbb{Z}$. Bien sûr, la divergence ne s'observe pas réellement et vient du fait que de nombreuses hypothèses ont été faites afin de développer le modèle. De cela, on tire $\omega_p = p\frac{\pi c}{L}$ les fréquences de résonance. On remarque donc qu'il y en a cette fois une infinité !

☕

Corde de Melde

✍ ⏲

Montrer différents modes.

2.3 La corde de Melde : résonance en énergie ?

3 Résonance en électromagnétisme

✍ Garing, milieux diélectriques p93

3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

On remarque que la vapeur de sodium absorbe à $\lambda = 589nm$ et on souhaiterait comprendre d'où vient cette raie d'absortion. On considère pour cela pour chaque une atome une électron élastiquement lié par une force $-m\omega_0^2\vec{r}$ à l'atome. On considère de plus que l'électron est soumis à des forces de frottements de la forme $-m\gamma\dot{\vec{r}}$. On plonge les atomes dans un champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\vec{u_x}$. Le principe fondamentale de la dynamique donne :

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\gamma\dot{\vec{r}} - e\vec{E}$$

Ce qui donne, en passant en RSF :

$$\underline{\vec{r}} = \frac{\frac{e\vec{E}}{m}}{\omega - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

On observe ici une forme mathématique analogue à celle du RLC série. Ce la vient du fait que l'on a aussi des termes de dérivées nulles, premières et secondes (inertie, frottements et force de rappel). Néanmoins , la grandeur qui nous intéresse ici n'est pas $\vec{r}$ mais l'indice du milieu $n(\omega)$. La quite de l'étude ne se fait donc pas par simlpe analogie.

3.2 Calcul de l'indice du milieu

Il faut dans un premier temps calculer la suceptibilité. Pour cela, on utilise $\vec{p} = -e\vec{r}$ et donc $\vec{T} = -Ne\vec{r}$ avec N le nombre d'atomes par unité de volume. Finalement, en posant $\Omega^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ appelée pulsation plasma, on trouve :

$$\vec{P} = -\frac{\epsilon_0\Omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}\vec{E}$$

Ce qui permet d'en déduire la suceptibilité électrique ξ :

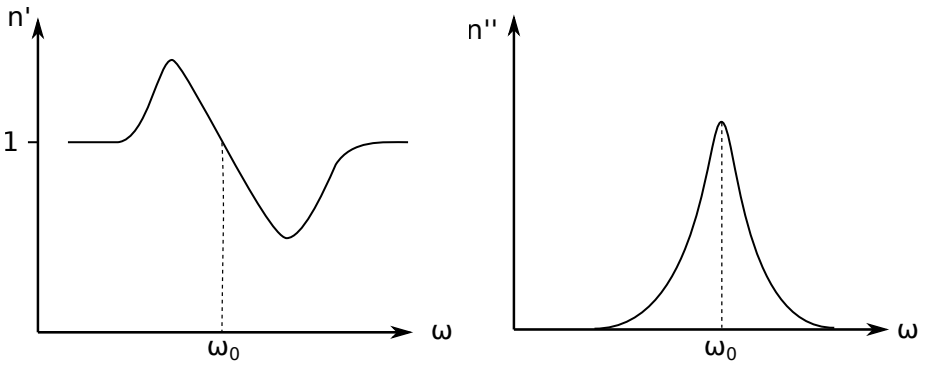
$$\xi = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Finalement, avec la relation $n = \sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{\xi}{2}$ pour les milieux dilués, on trouve :

$$n' = 1 + \frac{\Omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)/2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{et} \quad n'' = \frac{\Omega^2\gamma\omega/2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Pour l'absorption, c'est l'indince n'' qui nous intéresse. Si on trace $n''(\omega)$, on obtient la courbe suivante :

Remarque : En réalité, les calculs dans la bande d'absorption sont délicats car l'hypothèse $\xi \ll 1$ n'est plus valable. De plus, il faudrait apporter une correction quantique à $n^2(\omega)$.



4 Bonus : Résonance en mécanique quantique : l'effet MASER

✍ Basdevant, p145

4.1 Rappel sur les états propres du hamiltonien de l'ammoniac

On va ici étudier la molécule d'ammoniac. Pour cela on rappelle que le système de l'ammoniac peut se décrire de la manière suivante : on a deux états $|\psi_g\rangle$ et $|\psi_d\rangle$ qui correspondent à l'état "la particule est à gauche/droite" qui sont tous d'eux d'énergie E_0. On note A l'énergie d'échange qui correspond au coup en énergie pour passer de $|\psi_g\rangle$ à $|\psi_d\rangle$ (cela correspond au renversement de la molécule d'ammoniac). On a donc l'Hamiltonien suivant :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & A \\ A & E_0 \end{pmatrix}$$

Dont les vecteurs propres sont $|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_g\rangle + |\psi_d\rangle$ avec une énergie $E_0 - A$ et $|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_d\rangle - |\psi_g\rangle)$ avec une énergie $E_0 + A$.

On travaillera dans la suite avec la base $(|\psi_S\rangle, |\psi_A\rangle)$.

4.2 Effet MASER

On peut montrer qu'en rajoutant en champ électrique $\epsilon = \epsilon_0 \cos(\omega t)$, le Hamiltonien devient :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - A & -\eta\cos(\omega t) \\ -\eta\cos(\omega t) & E_0 + A \end{pmatrix}$$

où $\eta = d_0\epsilon_0$ avec d_0 un paramètre introduit ici état lié au moment dipolaire de la molécule. On introduit trois pulsations caractéristiques de notre système :

$$\omega \quad \omega_0 = \frac{2A}{\hbar} \quad \omega_1 = \frac{\eta}{\hbar}$$

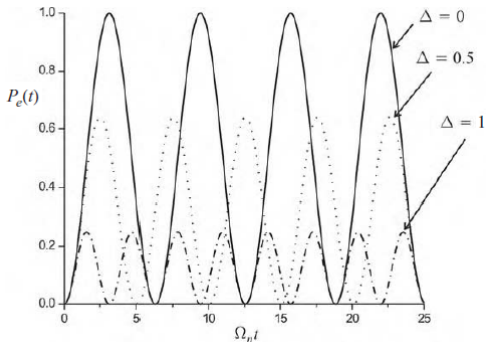
Si on considère que ntore système est dans l'état $|\psi_S\rangle$ à $t = 0$, on peut alors montrer que la probabilité de la trouver dans l'état $|\psi_A\rangle$ à t vaut :

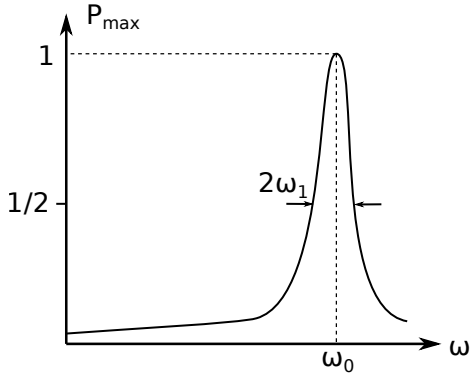
$$P(t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} \sin^2\left(\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}\,\frac{t}{2}\right)$$

La probabilité maximale vaut donc :

$$P_{max} = \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}$$

Ce qui donne les courbe suivantes :





4.3 Application : les horloges atomiques

Pour les horloges atomiques, ce n'est pas de l'ammoniac mais du Césium 133 qui est utilisé. Le niveau de l'atome de Césium est clivé par l'intéraction magnétique des électrons avec le moment magnétique du noyau de l'atome. Il y a ainsi 2 niveau d'énergie $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ dont la différence d'énergie est telle que $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h} = 9129631770Hz$. Dans un premier temps , un jet d'atomes de césium dans l'état $|g_1\rangle$ est généré (avec un champ électrique inhomogène, cf Basdevant p143). Ils traverses ensuite un champ électrique oscillant à la fréquence ν qui est verrouillée sur la fréquence ν_{12} à l'aide de la résonnance. Cette méthode permet d'atteindre des précisions de l'ordre de $10^{-15}s$ et est utilisé pour les GPS par exemple.

5 La corde de Melde ? Analogie LASER ?

✍ BUP 851 cahier 1, Garing ondes mécaniques
Exemple classique de résonnance. On peut calculer l'énergie des modes, l'énergie des modes excités, ect...
L'analogie avec le LASER est loin d'être évidente et est proposée dans le BUP851 cahier 1.
Un point commun de l'effet Larsen, les LASER et la corde de Melde : on a une cavité résonnante.

6 Effet Larsen ? Analogie LASER ?

✍ BUP 794 p907 Voir schéma du BUP.
Comme le micro est loin du haut parleur, le signal reçue est diminué d'un facteur β par l'atténuation géométrique. Néanmoins, un AO avecun gain de $\frac{R_2}{R_1}$ réamplifie le signal. Avec le condition $\beta\frac{R_2}{R_1}$, on a une résonance. Les modes possibles sont directement liés à la distance entre le micro et le récepteur : pour avoir des oscillations auto-entretenues, on a à la fois une condition enamplitude et en phase. On montre alors qu'il faut :

$$d = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda \Leftrightarrow f_p = \frac{c}{d\left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

On retrouve là une condition analogue à la résonnance d'un LASER qui provient du confinement dans la cavité. L'amplification vient quant à elle du pompage optique qui provoque une inversion de population.
Une étude plus poussée de l'effet Larsen est proposée dans le BUP 794

Questions

- Interprétations du facteur de qualité ? *Nombre d'oscillations du transitoire. Il compare deux temps caractéristique : ω_0 et $\frac{1}{\gamma}$ ou $\frac{L}{R}$.*
- Pour le ressort, tu peux parler du cas où la fréquence est très basse ou très haute et montrer que finalement on a un juste milieu pour la résonance ? *A très basse fréquence, il suit facilement masi à haute fréquence, il arrive pas à suivre*
- T'as dis si y'a pas de frottements alors y'a pas de résonnance mais c'est faux : cf oscillateur harmonique excité à ω_0.
- T'as fait le choix de présenter que des équations linéaires et avec l'excitation dans le membre de droite. Est-ce que tu connais des excitations différentes que sous la forme d'une fonction de transfert ? Indice : excitation sinusoidale mais avec m ou k qui dépend du temps. *Amplification paramétrique (non linéarité).* Exemple : balançoire. Tu modifie le moment d'inertie sinusoidalement.
- En quoi la phase peut être relié au transfert de puissance ? *En quadrature, moyenne vaut 0.*
- Tu connais des oscillateurs non linéaires ? *Oscillateurs à Quartz avec élément NL. Oscillateurs à résistance négatives. Pendule simple aux grands angles.*
- Pourquoi l'amplitude de la corde de Melde ne diverge pas ? *Les hypothèses deviennent fausses : les petites déformations (donc linéarité) ne sont plus viables ainsi que les frottements.*
- Equivalent à Fabry-Pérot mais périodique ? *Réseaux de Bragg. pleins de miroir qui imposent les modes*
- Qu'est ce qui fait la différence entre un RLC suramorti (0 fréquence de résonance) et un LC (1 fréquence de résonance) or le nombre de degré de liberté est le même. Qu'est ce qui pourrait changer les nombre de fréquence de résonance autre que le nombre de degré de liberté ? *L'ordre de l'équation... ?*
- Peux-tu parler de dispersion anormale ?

Remarques

- Trop de temps à mettre en équations et pas assez sur la résonnance en elle-même.
- Peut-être faire une partie de moins et plus parler de la résonance en elle-même