LP2020 – SYMÉTRIE

10 juin 2021

Deleuze Julie & Jocteur Tristan

Bibliographie

✍ *Symétrie*, **Sirvadière**
✍ *Cours de Mécanique Analytique*, **Sylvain Lacroix**

Prérequis

➢ Electromgnétisme dans le vide

➢ Mécanique analytique, point de vue lagrangien

➢ Transition ferro-para dans le modèle d'Ising

Table des matières

Remarques sur les leçons précédentes

Introduction

✍ Taillet p525

La plupart des notions physiques ont déjà été vues ici (sauf le théorème de Noether), on revient dessus (L3) pour détailler l'aspect symétrie. De toute façon ça n'a aucun sens de faire semblant qu'on apprend à calculer un champ électrique en même temps que la mécanique analytique et les transitions de phase. A la limite, on fait comme si on avait calculé que des champs hyper simples jusque là.

symétrie : un système physique ou sa description sont dit symétriques sous une certaine transformation (ou possède une certaine symétrie) s'il est inchangé sous l'effet de cette transformation.

exemple du carré, exemple du cercle

En physique, la notion de symétrie va un peu plus loin que notre intuition en considérant par exemple des transformations sur le temps. Quoiqu'il en soit, c'est un outil précieux qui permet de simplifier voire de théoriser pas mal de problèmes.

1 Symétrie et résolution

1.1 Principe de Curie

✍ Sivardière p528

La symétrie peut permettre de simplifier un problème physique pour le résoudre plus simplement. En première approche, on peut s'appuyer pour cela sur le principe de Curie.

Considérons un système physique, i.e. un objet et son environnement, et étudions une propriété physique de ce système. On appellera alors **cause** le système et **effet** la propriété physique que l'on étudie. Le principe de Curie s'énonce alors :

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. [1]

Attention toutefois, le principe de Curie n'est valable que dans le cas où la solution au problème est unique !

Ce principe nous permet donc de déduire certaines propriétés de la propriété physique à étudier avant même de connaître les équations ou les principes qui régissent son évolution.

Appliquons cela à l'électromagnétisme

1.2 Application à l'électromagnétisme

✍ Sivardière p47 pour la définition polaire/axial.
✍ Sivardière p503 pour le retour à la physique.

Pour pouvoir réellement tirer profit de ce principe, nous avons besoin d'un peu plus de formalisme supplémentaire. En effet, il existe deux types de grandeurs en physique : les grandeurs polaires et les grandeurs axiales, et celles-ci n'ont pas le même comportement sous certaines opérations de symétrie. Il convient donc tout d'abord de les définir.

1. La réciproque n'est pas vraie, on peut avoir des effets avec plus de symétrie que les causes.

Pour décrire la nature, nous avons établi de nombreuses conventions comme l'orientation de l'espace, du temps ou encore le signe des charges électriques. Pour autant la nature ne prête guère attention à ses conventions et la physique en reste inchangée. Il apparaît alors deux types de grandeurs physiques :

- Les grandeurs **polaires** : ce sont les grandeurs "réelles", leur signe est une propriété intrinsèque, non-modifiée par les conventions. Par exemple, le vecteur position $\vec{r}$ et le vecteur impulsion $\vec{p}$ sont des vecteurs polaires.
- Les grandeurs **axiales** (ou pseudo-grandeurs) : dont le signe dépend des conventions et donc n'a pas de signification physique réelle. Par exemple, le vecteur moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ est un vecteur axial, ou pseudo-vecteur, car il est défini par le produit vectoriel qui nécessite une convention d'orientation d'espace[2].

Mais alors pourquoi ces deux types de grandeurs ne se transforment pas de la même façon sous une opération de symétrie ? Prenons le cas particulier des vecteurs. **exemple Fig 1 p 504**.

Pour ce cours on retiendra la chose suivante : les effets (grandeur physique étudié) vectoriels polaires sont contenus dans les plans de symétrie des causes (système) et sont orthogonaux aux plans d'antisymétrie des causes alors que les effets axiaux sont orthogonaux aux plans de symétrie des causes et contenus dans les plans d'antisymétrie des causes. Appliquons ça à l'électromagnétisme !

Prenons comme premier exemple un fil parcouru par un courant I et étudions le champ magnétique créé par celui-ci en un point M. Plaçons nous dans le repère cylindrique dont l'axe (Oz) coïncide avec le fil et déterminons les plans de symétrie du système, représenté ici par la distribution de courant. On voit que le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie du système. Or le vecteur champ magnétique est un vecteur axial (Cf loi de Biot et Savart). Il est donc orthogonal à ce plan. On en déduit alors directement l'orientation de $\vec{B}$:

$$\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta \tag{1}$$

Très bien, mais est-ce qu'on ne peut pas aller un peu plus loin ? Eh bien si. On peut aussi remarquer que le système est invariant par translation selon z et invariant par rotation autour de (Oz), i.e. invariant par translation selon θ. D'après le principe de Curie, le champ magnétique doit donc au moins être invariant selon ces transformations de symétrie ! Le champ magnétique ne dépend donc ni de z, ni de θ, il ne dépend que de r :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta \tag{2}$$

Intérêt de la résolution complète avec le théorème d'Ampère ici ? je ne sais pas, à voir...

On pourrait faire la même chose avec le cas d'un fil infini chargé en sachant cette fois que le champ électrique est un vecteur polaire. L'étude des symétries d'un problème nous permet donc de simplifier grandement un problème. Toutefois rien d'indispensable, ici, on aurait pu tout faire par intégration !

Oui mais ok c'est super pratique mais je peux l'appliquer quand en fait ?

2 Brisure de symétrie

2.1 Brisure spontanée et valeur critique

Parfois, la symétrie d'un système peut s'abaisser spontanément. Étudions un cas précis. On considère une masse m se déplaçant sur un anneau de rayon R tournant autour de son axe à la vitesse angulaire ω. La masse est repérée par sa coordonnée angulaire θ. Dans le référentiel rattaché à l'anneau, la masse est soumise à son poids et à la force centrifuge. Le potentiel effectif est donc (on regarde que la coordonnée en θ des forces) :

$$U(\theta) = mgR\left((1-\cos\theta) - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \sin^2\theta\right) \tag{3}$$

2. On a pris que des grandeurs vectorielles comme exemple ici mais ça s'applique aussi aux scalaires

On peut alors étudier les positions d'équilibre associées à ce potentiel (**Python** uniquement). On voit que lorsque que $\omega < \omega_c$, il existe une unique position d'équilibre située en $\theta = 0$. Le système présente alors une symétrie autour de l'axe de rotation. Mais lorsque que la vitesse angulaire du cerceau dépasse une certaine valeur ω_c, on obtient deux positions d'équilibre, situées de part et d'autre de l'axe de rotation. Lorsque la masse se situe sur une de ces nouvelles positions d'équilibre, la symétrie du système est brisée : on n'a plus de symétrie de révolution autour de l'axe de rotation ! On parle alors de brisure spontanée de symétrie puisque rien d'asymétrique n'a été induit pour faire ce passage, on a seulement fait varier continument un paramètre jusqu'à ce qu'il atteigne une certaine valeur critique.

En réalité ce n'est pas tout à fait exact. En fait, la position d'équilibre stable est simplement devenue instable et a laissé place à l'apparition de deux nouvelles positions d'équilibre stable. Il suffit alors d'une légère perturbation au système pour basculer dans une autre positon d'équilibre : c'est la perturbation qui induit l'asymétrie.

Mais alors le principe de Curie est faux ? Non ! Comme on l'a dit le principe de Curie est valable lorsque le problème a une solution unique, sinon il est vrai "en moyenne". En effet, en moyenne la masse a autant de chance de se retrouver sur la position d'équilibre de gauche que de droite. En moyenne la symétrie par rapport à l'axe de révolution est donc bien conservée.

2.2 Transitions de phase selon Landau

C'est une partie courte, juste pour évoquer le principe.

Un autre exemple simple de brisure spontanée de symétrie est la cristallisation d'un liquide : alors que le phase liquide a une symétrie maximale, la phase cristalline n'est invariante que sous certaines opérations d'un groupe d'espace. Landau a en fait montré que de nombreuses transitions de phase correspondent en fait à des brisures de symétrie. Souvent, le paramètre variable est la température (par rapport à la vitesse de rotation précédemment) : en-dessous d'une certaine température, la symétrie du système est brisée spontanément, on change de phase brusquement. C'est le cas notamment de la solidification de l'eau : en-dessous de $T = 0^o C$, on perd la symétrie sphérique des interactions intermoléculaires dans le liquide pour se retrouver dans la phase cristalline.

L'état d'équilibre n'est pas caractérisé cette fois par une position comme la position de la masse sur le cerceau mais par un autre paramètre que l'on appelle paramètre d'ordre. En général, on choisit le paramètre d'ordre est choisi de telle sorte qu'il soit nul dans la phase la plus symétrique et non nul dans la phase la moins symétrique. Si on prend l'exemple de la transition ferro-para, le paramètre d'ordre est l'aimantation : elle est nulle dans la phase paramagnétique mais non-nulle dans la phase ferromagnétique. La température critique est alors la température de Curie. **Diagramme de bifurcation**

En appliquant ce raisonnement à différentes transitons de phase il est possible de les classer et d'univeraliser ce phénomène.

Mais la symétrie ne permet pas seulement d'étudier les changements, elle permet aussi d'étudier et d'expliquer les conservations !

3 Symétrie et conservation

✍ Sylvaing Lacroix

3.1 Symétries en mécanique analytique

En mécanique analytique, on peut montrer qu'à chaque symétrie du système on peut associer une quantité conservée, appelée charge. Mais tout d'abord comment définir une symétrie dans le mécanisme de la mécanique analytique ?

Considérons un système décrit par les coordonnées (q,t) décrit par le lagrangien $\mathcal{L}(q,t)$. Considérons une transformation des coordonnées inversible $(q,t) \to (q',t')$. On dit que cette transformation est une symétrie du système si et seulement si elle laisse invariante les équations du mouvement (i.e. les équations d'Euler-Lagrange). On peut montrer que cette condition est vérifiée si et seulement si on a :

$$\mathcal{L}\left(q', \dot{q}', t\right) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}\mathcal{G}(q,t)}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

i.e. le lagrangien est inchangé à une dérivée totale près. Cela correspond donc à une invariance de l'action du système.

On considère maintenant une famille de transformations de coordonnées $q \mapsto q^{(\alpha)} = f(q,t,\alpha)$ dépendant continûment d'un paramètre réel α et telle que la transformation pour $\alpha = 0$ soit triviale, i.e. $f(q,t,\alpha=0) = q$. On dit que cette transformation est une symétrie continue du lagrangien $\mathcal{L}$ si elle est une symétrie pour toute valeur du paramètre α. En utilisant la définition précédente d'une symétrie, on en déduit que la transformation est une symétrie continue de $\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe $\mathcal{G}(q,t,\alpha)$ telle que

$$\mathcal{L}\left(q^{(\alpha)}, \dot{q}^{(\alpha)}, t\right) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}\mathcal{G}(q,t,\alpha)}{\mathrm{d}t}$$

Dans ce cas, on sait de plus que $\mathcal{G}(q,t,\alpha=0) = 0$ car la transformation à $\alpha = 0$ est égale à l'identité.

Considérons maintenant le cas d'une transformation infinitésimale proche de l'identité, i.e. considérons la transformation ci-dessus pour un paramètre $\alpha = \epsilon + o(\epsilon)$ et effectuons un développement limité à l'ordre 1 en $\epsilon . q^{(\alpha)}$ dépendant de α de manière lisse et étant égal à q pour $\alpha = 0$, on peut écrire, à l'ordre 1 en ϵ, $q^{(\alpha)} = q + \delta q = q + \epsilon \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} + o(\epsilon)$. De même, on développe $\mathcal{G}$ à l'ordre 1 en ϵ comme $\mathcal{G}(q,t,\alpha) = \epsilon \mathcal{F}(q,t) + o(\epsilon)$. En développant la condition de symétrie continue à l'ordre 1 en ϵ, on obtient

$$\delta\mathcal{L} := \mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \epsilon \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t} + o(\epsilon)$$

On parle alors de symétrie infinitésimale du lagrangien $\mathcal{L}$. **exemple de la particule en chute libre et de la translation infinitésimale selon z**

3.2 Théorème de Noether

Énoncons maintenant le théorème de Noether. On considère un lagrangien $\mathcal{L}$ possédant une symétrie infinitésimale

$$q_i' = q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon g_i(q,t)$$

La symétrie revient alors à l'existence d'une quantité $\mathcal{F}$ dépendant de q et de t telle que :

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\dot{\delta q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \epsilon \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}t} + o(\epsilon)$$

Le théorème de Noether stipule alors que la quantité

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i - \mathcal{F}$$

est conservée au cours du temps. On appelle cette grandeur la charge de Noether associée à la symétrie.

3.3 Exemples de charges conservées

On considère un système à une dimension composé de deux particules interagissant via un potentiel $V\left(|q_1 - q_2|\right)$. Pour une translation infinitésimale i.e. $\delta q_i = \varepsilon$ on a $\dot{q}_i' = \dot{q}_i$ et $q_1' - q_2' = q_1 - q_2$. On a le Lagrangien suivant :

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - V\left(|q_1 - q_2|\right)$$

Il est ainsi invariant sous la transformation de coordonnées. On applique le théorème de Noether avec ici $F = 0$, la charge conservée est alors :

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2$$

Pour une translation spatiale, la charge conservée est la quantité de mouvement totale !

énergie et moment cinétique si le temps le permet mais probablement pas là hihi

Conclusion

Noether résiste aux avancées de la physique.