PC*3 PHYSIQUE DS N°02 DURÉE : 4 HEURES

CENTRALE NUCLÉAIRE À EAU PRESSURISÉE

Dans une centrale nucléaire à eau pressurisée, l'uranium U^{235} est le siège de réactions nucléaires dans le coeur du réacteur, mettant en jeu la production de neutrons par des réactions en chaînes et leur diffusion dans un matériau modérateur (partie **1**).

La chaleur dégagée par le réacteur est récupérée via un écoulement d'eau primaire qui circule dans le réacteur, avant d'être cédée à l'écoulement secondaire d'eau, qui décrit un cycle thermodynamique au cours duquel on récupère de la puissance mécanique. En adoptant un modèle analogue pour les échanges avec la source froide, on montre qu'il existe un choix industriel maximisant la puissance mécanique (partie **2**).

En réalité, l'eau du circuit secondaire ne décrit pas un cycle de CARNOT car il convient de prendre en compte des contraintes technologiques (partie **3**).

Enfin, le refroidissement au contact de la source froide est assuré via un circuit d'eau tertiaire mettant en jeu une tour de refroidissement qui constitue la partie la plus visible d'une centrale nucléaire (partie **4**).

Les données concernant l'eau seront extraites du diagramme (T, s) fourni en **ANNEXE** *à rendre avec la copie*, sur lequel ont été tracés un réseau d'isobares graduées en bars et un réseau d'isenthalpiques graduées en $kJ.kg^{-1}$. On fournit en outre un extrait des tables de pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température :

température en $°C$	10	20	30	100	180	264
pression en Pa	$1,2.10^2$	$2,4.10^2$	$4,3.10^2$	1.10^5	1.10^6	5.10^6

Dans tout le problème, on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur.

1. Stabilité d'un réacteur nucléaire

On modélise le coeur d'un réacteur nucléaire par un unique barreau d'uranium U^{235} cylindrique d'axe Ox, de section S, compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. En présence de neutrons, il se produit une réaction en chaîne conduisant à une production nette de neutrons : si $n(M,t)$ désigne le nombre de neutrons par unité de volume, le nombre de neutrons créés dans un volume élémentaire $d\tau$ pendant une durée dt s'écrit $\delta^2 N_c = K\, n\, d\tau\, dt$ où la constante positive K est une caractéristique des réactions nucléaires.

En réalité, le barreau est divisé en un grand nombre de crayons autour desquels circule de l'eau liquide sous une pression $p = 250$ bar (circuit primaire). Les neutrons diffusent dans l'eau : au cours de la marche au hasard associée, ils cèdent progressivement leur énergie à l'eau avant de participer de nouveau aux réactions en chaîne. On décrit la diffusion par un vecteur $\vec{j} = j(x,t)\,\vec{u_x}$ satisfaisant à la loi de FICK avec un coefficient de diffusion D.

1.1 On envisage la tranche du coeur comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

1.1.a Exprimer la variation d^2N du nombre de neutrons contenus dans (C) entre les instants t et $t + dt$ en fonction de $\partial n/\partial t$, S, dx et dt.

1.1.b Exprimer le nombre de neutrons $\delta^2 N_e$ entrant dans (C) pendant dt en fonction de D, $\partial^2 n/\partial x^2$, S, dx et dt.

1.1.c En déduire que $n(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$D\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + K\,n = \frac{\partial n}{\partial t} \qquad (E)$$

$\delta^2 N_e = \vec{j} \cdot dS\, dt$
$= -D\, \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot dS \cdot dt$

1.2 On se place en régime stationnaire et on note $n_s(x)$ la solution correspondante.

1.2.a Comment se simplifie l'équation (E) ? Exprimer sa solution générale en posant $\delta = \sqrt{D/K}$.

1.2.b On suppose que les bords du coeur imposent les conditions aux limites $n(x=0,t) = 0$ et $n(x=L,t) = 0$ à tout instant. Justifier que nécessairement $\delta = L/\pi$ et expliciter $n_s(x)$ à une constante multiplicative A près.

1.2.c Exprimer la valeur moyenne spatiale $\overline{n}_s$ de $n(x)$ sur le domaine $0 \leq x \leq L$ en fonction de A.

1.3 En régime dépendant du temps, on admet qu'il faut chercher une solution de la forme $n(x,t) = f(t)\, n_s(x)$.

1.3.a Écrire l'équation différentielle dont est solution $f(t)$.

1.3.b Un réacteur initialement au repos (c'est-à-dire tel que $n(x, t=0) = 0$ pour tout x) peut-il tendre vers le régime stationnaire $n_s(x)$?

1.4 En réalité le coefficient D de diffusion des neutrons dans l'eau dépend de la moyenne *spatiale* $\overline{n}(t)$ de neutrons à l'instant t, ce qu'on écrit en première approximation :

$$D = D_s\left(1 + \alpha\left(\overline{n}(t) - \overline{n}_s\right)\right) \qquad \text{avec} \qquad D_s = \frac{K L^2}{\pi^2} \qquad \text{et } \alpha \text{ constante phénoménologique.}$$

1.4.a La marche au hasard des neutrons dans l'eau est pilotée par leur vitesse quadratique moyenne v^* et leur libre-parcours-moyen l^*. Exprimer par analyse dimensionnelle le coefficient de diffusion D en fonction de l^* et v^*. On omettra le préfacteur numérique.

1.4.b Lorsque le nombre moyen de neutrons augmente, la température de l'eau augmente. Comment varie la densité de l'eau ? En déduire le signe de α.

1.5 On reprend l'étude de la question **1.3**.

1.5.a Montrer que $f(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dt} = -K\,\alpha\,\overline{n}_s\, f\,(f-1) \qquad (E^*)$$

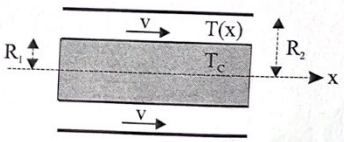
et en déduire l'existence de deux régimes stationnaires caractérisés par $f_1(t) = A_1$ et $f_2(t) = A_2 < A_1$. Interpréter concrètement ces régimes.

1.5.b On pose $f(t) = A_1\,(1+\varepsilon(t))$. Linéariser (E^*) et conclure quant à la stabilité du régime stationnaire $f_1(t) = A_1$.

1.5.c Discuter de même la stabilité du régime $f_2(t) = A_2$. Quelle conclusion peut-on en tirer quant au fonctionnement du réacteur nucléaire ?

2. Optimisation de la puissance

2.1 On assimile l'écoulement d'eau liquide autour des barreaux d'uranium dans le coeur du réacteur à l'écoulement d'eau à vitesse v uniforme et constante dans une canalisation cylindrique d'axe Ox creuse, de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2, comprise entre $x = 0$ et $x = L$. La canalisation est calorifugée en $r = R_2$. Le cylindre plein de rayon R_1 modélise le barreau d'uranium qu'on assimile à une source de température uniforme et constante T_C.



On suppose le régime stationnaire et on note $T(x)$ la température dans l'écoulement d'eau. Pendant une durée dt, la tranche de barreau comprise entre x et $x+dx$ cède à l'eau une chaleur donnée par la loi de NEWTON $\delta^2 Q_u = h\,(T_C - T(x))\,dS\,dt$ où dS est la surface de contact entre l'eau et le barreau. On note μ_e la masse volumique de l'eau et c_e sa capacité thermique massique, supposées constantes pour simplifier.

2.1.a On isole le système fermé (S) constitué à l'instant t de l'eau contenue dans la canalisation entre les abscisses x et $x+dx$. Où se situe ce système à l'instant $t+dt$? En déduire l'expression de sa variation d'énergie interne d^2U en fonction de μ_e, c_e, v, R_1, R_2, dx, dt et dT/dx. Que vaut la variation d'énergie cinétique d^2E_c de (S) ?

2.1.b On néglige la diffusion thermique dans l'eau. Exprimer la chaleur reçue par (S) entre les instants t et $t+dt$ en fonction de R_1, h, T_C, $T(x)$, dx et dt.

2.1.c Justifier que le travail des forces de pression est nul dans le cadre des approximations choisies.

2.1.d En déduire que $T(x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\delta \frac{dT}{dx} + T = T_C \qquad \text{avec} \qquad \delta = \frac{\mu_e \left(R_2^2 - R_1^2\right) c_e \, v}{2 \, R_1 \, h}$$

2.1.e Exprimer $T(x)$ en fonction de T_C, $T_1 = T(x=0)$, x et δ.

2.1.f En déduire que la puissance thermique totale fournie par l'uranium à l'eau se met sous la forme $\mathcal{P}_C = G_C \left(T_C - T_1\right)$ et expliciter la constante G_C en fonction de h, R_1, δ et L. Comment faut-il choisir la longueur L de la canalisation par rapport à δ ?

2.2 Dans la suite de cette partie, on modélise la centrale nucléaire comme un moteur ditherme réversible fonctionnant entre une source chaude à la température T_1 et une source froide à la température T_2 dans laquelle de l'eau décrit un cycle de CARNOT de manière *réversible* entre les températures T_1 et T_2. On raisonne sur une durée égale à une seconde, durée supposée correspondre à un grand nombre de cycles de l'eau. On note $\mathcal{P}$ la puissance mécanique reçue par l'eau, $\mathcal{P}_C$ la puissance calorifique qu'elle reçoit de la source chaude, et $\mathcal{P}_F$ la puissance calorifique qu'elle reçoit de la source froide. On pose $\eta = -\mathcal{P}/\mathcal{P}_C = |\mathcal{P}|/\mathcal{P}_C$ et on cherche à étudier les variations de la puissance $|\mathcal{P}|$ avec η.

2.2.a En appliquant les principes de la thermodynamique à l'eau au cours d'un cycle, exprimer $\mathcal{P}_F/\mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}/\mathcal{P}_C$ en fonction de T_1 et T_2.

2.2.b En déduire les expressions de $\mathcal{P}_F/\mathcal{P}_C$ et T_2/T_1 en fonction de η qu'on adopte comme paramètre ajustable dans la suite.

2.3 Conformément à l'étude de la question **2.1**, on modélise les échanges thermiques entre le coeur du réacteur assimilé à une source chaude de température T_C et l'eau du circuit secondaire qui décrit des cycles par une conductance thermique G_C définie par la relation $\mathcal{P}_C = G_C \left(T_C - T_1\right)$. De même, on modélise les échanges thermiques entre l'eau du circuit secondaire et la source froide (eau de la rivière et/ou atmosphère) de température T_F par une conductance thermique G_F définie par la relation $\mathcal{P}_F = G_F \left(T_F - T_2\right)$.

2.3.a Exprimer T_1 et T_2 en fonction de G_C, G_F, T_C, T_F et η. Vérifier la pertinence de ces expressions sur les cas particuliers $G_C = \infty$ ou $G_F = \infty$.

2.3.b Tracer l'allure des graphes de $T_1(\eta)$ et $T_2(\eta)$ pour $0 \leq \eta \leq \eta_C = 1 - T_F/T_C$ dans le cas $G_1 = G_2$, $T_F = 300$ K et $T_C = 600$ K. Que représente concrètement η_C ?

2.3.c En déduire que :

$$|\mathcal{P}| = \frac{G_C \, G_F}{\left(G_C + G_F\right)} \left(\eta \, T_C - \frac{\eta \, T_F}{1 - \eta}\right)$$

Parmi les quatre valeurs particulières de G_C, G_F ou de η annulant $\mathcal{P}$, vérifier que trois relèvent de l'énoncé de KELVIN du deuxième principe de la thermodynamique et interpréter par ailleurs la quatrième.

2.3.d Montrer que $|\mathcal{P}|(\eta)$ passe par un maximum pour une valeur particulière η_M à exprimer en fonction de T_C et T_F. Tracer l'allure du graphe de $|\mathcal{P}|(\eta)$ pour $0 \leq \eta \leq \eta_C = 1 - T_F/T_C$ avec les valeurs précédentes.

2.3.e Une centrale nucléaire fonctionne entre $T_C = 380$ °C (température du coeur du réacteur) et $T_F = 20$ °C. La température maximale de l'eau dans le circuit secondaire joue le rôle de la température T_1 et vaut $T_1 = 264$ °C. La température minimale de l'eau dans le circuit secondaire joue le rôle de la température T_2 et vaut $T_2 = 100$ °C. Calculer η, η_M et η_C. Commenter le choix fait pour η.

3. Fonctionnement détaillé de la centrale nucléaire

Dans cette partie, on étudie en détail le fonctionnement du circuit secondaire où de l'eau décrit un cycle thermodynamique en régime stationnaire dans des installations possédant une entrée et une sortie. Lorsque l'eau est diphasée, on note x le titre en vapeur. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle. On suppose que les échanges thermiques éventuels sont monothermes avec une source de température T_S. On rappelle les expressions du premier et du deuxième principe de la thermodynamique dans ce contexte :

$$\Delta h = w + q \qquad \text{et} \qquad \Delta h = s_e + s_c \qquad \text{avec} \qquad s_e = \frac{q}{T_S} \qquad \text{et} \qquad s_c \geq > 0$$

3.1 Dans cette question on suppose que l'eau décrit le cycle suivant :

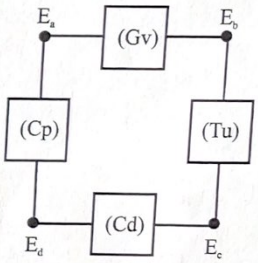
- l'eau entre dans l'état liquide juste saturé dans un générateur de vapeur (Gv), simple échangeur thermique sans pièces mécaniques mobiles, où elle évolue de l'état $E_a(p_a = 50 \text{ bars}, T_a = 264\ °C, x_a = 0)$ de manière isobare jusqu'à l'état $E_b(p_b = 50 \text{ bar}, T_b = 264\ °C, x_a = 1)$;

- puis l'eau se détend dans une turbine calorifugée (Tu) de manière réversible de l'état E_b jusqu'à l'état $E_c(p_c = 1 \text{ bar}, T_c)$;

- puis l'eau évolue de manière isobare dans un condenseur (Cd), simple échangeur thermique sans pièces mécaniques mobiles, de l'état E_c jusqu'à l'état $E_d(p_d = 1 \text{ bar})$;

- enfin, l'eau est recomprimée de manière réversible dans un compresseur (Cp) calorifugé de l'état E_d jusqu'à l'état $E_a(p_a = 50 \text{ bars}, T_a = 264\ °C, x_a = 0)$; un nouveau cycle peut alors commencer.

3.1.a Placer les points correspondants aux états E_a, E_b, E_c et E_d sur le diagramme (T, s) joint qui sera rendu avec la copie en justifiant soigneusement la démarche. Montrer que les états E_c et E_d sont diphasés et lire les valeurs correspondantes x_c et x_d du titre en vapeur.



3.1.b Le compresseur (Cp) est partiellement entraîné par la turbine (Tu). Calculer le travail total utile reçu par l'eau lors du transfert d'un kilogramme d'eau.

3.1.c Définir et calculer le rendement thermodynamique du cycle.

3.1.d Justifier que l'eau décrit un cycle de CARNOT et lire les températures extrêmes T_1 et $T_2 < T_1$ associées. Vérifier la compatibilité des résultats avec le théorème de CARNOT. On admettra que les erreurs d'arrondis cumulées peuvent faire varier η de 10 %.

3.2 La présence d'eau liquide dans la turbine (Tu) fait baisser significativement le rendement de la turbine. On choisit donc de "surchauffer" l'eau au contact de la source chaude à pression constante dans le générateur de vapeur, de l'état E_a jusqu'à l'état $E'_b(p_b = 50 \text{ bars}, T'_b > T_b = 264\ °C)$. Puis, on opère la détente de la vapeur d'eau en trois étapes :

- l'eau se détend dans une turbine "haute-pression" (HP) de manière abiabatique et réversible de l'état E'_b jusqu'à l'état $E''_b(p''_b = 10 \text{ bar}, T''_b, x''_b = 1)$;

- l'eau est ensuite réchauffée au contact de la source chaude de manière isobare dans une canalisation sans pièces mécaniques mobiles, où elle évolue de l'état E''_b jusqu'à l'état $E'_c(p'_c = 10 \text{ bar}, T'_c)$;

- enfin, l'eau se détend dans une turbine "basse-pression" (BP) de manière adiabatique et réversible de l'état E'_c jusqu'à l'état $E''_c(p''_c = 1 \text{ bar}, T''_c = 100\ °C, x''_c = 1)$.

3.2.a Placer les points correspondants aux états E'_b, E''_b, E'_c et E''_c sur le diagramme (T, s) joint qui sera rendu avec la copie en justifiant soigneusement la démarche. Lire les valeurs des enthalpies massiques correspondantes.

3.2.b Définir et calculer le rendement thermodynamique η' du nouveau cycle $E_a \to E'_b \to E''_b \to E'_c \to E''_c \to E_d \to E_a$. Vérifier que η' est proche de la valeur η obtenue en **3.1**. Donner un argument qui pourrait expliquer que $\eta > \eta'$ et un argument qui pourrait expliquer que $\eta' < \eta$.

3.2.c Calculer le débit massique D_m d'eau dans le circuit secondaire, sachant que la puissance mécanique fournie par la centrale vaut $\mathcal{P} = 0,9$ GW.

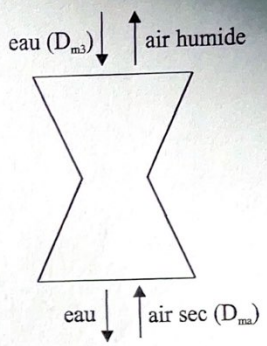
4. Étude du condenseur et de la tour de refroidissement

4.1 Le condenseur est constitué de deux canalisations en contact thermique où l'eau évolue de manière isobare à la pression $p = 1$ bar :

- l'eau entre dans la canalisation dite "secondaire" dans l'état $E_{2e}(T_{2e} = 100\ °C, p = 1\ \text{bar}, x_{2e} = 1)$ et sort dans l'état $E_{2s}(T_{2s} = 100\ °C, p = 1\ \text{bar}, x_{2s} = 0)$;

- l'eau circule dans la canalisation dite "tertiaire" dans l'état liquide ; elle entre dans l'état $E_{2e}(T_{3e} = 20\ °C, p = 1\ \text{bar})$ et sort dans l'état $E_{3s}(T_{3s} = 60\ °C, p = 1\ \text{bar})$; on donne sa capacité thermique à pression constante $c_p = 4,2\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Exprimer le rappport D_{m3}/D_{m2} du débit massique dans les deux canalisations en fonction des enthalpies h_{2e}, h_{2s}, c_p, T_{3e} et T_{3s}. Calculer D_{m3}/D_{m2} sachant que $h_{2e} - h_{2s} = 2,2.10^3\ \text{kJ.kg}^{-1}$.



4.2 De l'air sec est injecté en bas de la tour de refroidissement à la température $T_a = 20\ °C$ avec un débit massique D_{ma}. Simultanément on fait couler en fines gouttelettes l'eau "tertiaire" qui entre en haut de la tour avec le débit massique D_{m3} à la température $T_{3s} = 60\ °C$. Une fraction $y\,D_{m3}$ de l'eau se vaporise en descendant, chargeant ainsi l'air montant d'humidité jusqu'à atteindre sa saturation : l'air sort en haut de la tour de réfrigération à la température $T_a = 20\ °C$, saturé en vapeur d'eau. Simultanément, l'eau restée liquide sort en bas de la tour à la température $T_a = 20\ °C$; on remplace ensuite par un apport d'eau de rivière l'eau qui a été emportée par l'air avant de renvoyer l'eau à l'entrée du circuit secondaire dans le condenseur.

4.2.a On rappelle que la valeur maximale du titre *molaire* en vapeur d'eau dans l'air humide est le rapport $x_e = p_{vs}(T)/p$ de la pression de vapeur saturante sur la pression totale. Calculer le titre *molaire* x_e et le titre *massique* y_e en vapeur d'eau dans l'air humide à la sortie de la tour. On donne les masses molaires $M_e = 18\ \text{g.mol}^{-1}$ de l'eau et $M_a = 29\ \text{g.mol}^{-1}$ de l'air. On limitera les calculs à l'ordre un en x ou y.

4.2.b On admet que l'enthalpie de l'air humide est la somme des enthalpies de l'air sec et de la vapeur d'eau qui les composent. Exprimer le rapport D_{ma}/D_{m3} en fonction des enthalpies massiques $h_{L,20}$ de l'eau liquide juste saturée et $h_{V,20}$ de la vapeur saturante-sèche à $T_a = 20\ °C$ et de la capacité thermique massique à pression constante c_p de l'eau liquide. Calculer D_{ma}/D_{m3} sachant que $h_{V,20} - h_{L,20} = 2,4.10^3\ \text{kJ.kg}^{-1}$ et $c_p = 4,2\ \text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

4.2.c Calculer D_{ma} sachant que $D_{m2} = 1,2.10^3\ \text{kg.s}^{-1}$. En adoptant pour l'air le modèle du gaz parfait, en déduire la vitesse v de l'air en bas de la tour sachant que sa section vaut $S = 10^4\ \text{m}^2$. *En pratique, on réduit v significativement en acceptant que l'air sorte de la tour de refroidissement à la température $T'_a = 30\ °C$.*

4.2.d Interpréter le panache blanc qui apparaît au-dessus de la tour réfrigérante.

4.2.e Justifier qualitativement l'intérêt de disperser l'eau en fines gouttes dans la tour de refroidissement.