



**HAL**  
open science

## Impédances mécanique et acoustique (Suite)

F. Bedeau

► **To cite this version:**

F. Bedeau. Impédances mécanique et acoustique (Suite). J. Phys. Radium, 1935, 6 (10), pp.407-416.  
10.1051/jphysrad:01935006010040700 . jpa-00233354

**HAL Id: jpa-00233354**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233354>**

Submitted on 1 Jan 1935

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## IMPÉDANCES MÉCANIQUE ET ACOUSTIQUE (Suite).

Par F. BEDEAU.

### Etude des circuits du second groupe. Impédance acoustique dans le cas des ondes planes.

**Ligne infiniment longue; tuyau indéfini.** — Considérons une ligne infiniment longue dépourvue de résistance; désignons par  $l_1$  et  $c_1$ , la self et la capacité de l'unité de longueur, par  $e$  et  $i$ , la tension et le courant en un point  $M$ ; on a, en désignant par  $t$  le temps, par  $x$  la distance de  $M$  à une origine  $o$ .

$$l_1 \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial e}{\partial x} \quad (1) \quad \frac{\partial i}{\partial x} = - c_1 \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2)$$

De ces deux équations, on déduit

$$l_1 c_1 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \quad l_1 c_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \quad (3)$$

et on conclut que  $e$  et  $i$  se propagent sur la ligne avec une vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{l_1 c_1}}.$$

Si on se borne au cas du régime permanent, on pourra poser pour le courant se propageant dans le sens positif.

$$i = I_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Des équations (1) ou (2), on déduira

$$e = I_0 \sqrt{\frac{l_1}{c_1}} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Ainsi  $e$  et  $i$  sont en phase; le quotient  $Z_0$  de  $e$  par  $i$ , est l'impédance caractéristique de la ligne, qui est donnée par

$$Z_0 = \frac{e}{i} = \sqrt{\frac{l_1}{c_1}}.$$

Si on considère maintenant un tuyau indéfini, si on désigne par  $p$  et  $v$  la pression et la vitesse vibratoire par  $\rho$  la masse spécifique du fluide, par  $E$  le coefficient d'élasticité, un calcul classique donne

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1') \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{E} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2')$$

L'identité des équations 1 et 1', 2 et 2' nous permet

de conclure que la pression et la vitesse vibratoire se propagent avec une vitesse

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

et que, dans le cas du régime permanent, la pression et la vitesse sont en phase, que leur rapport est constant et a pour valeur

$$Z_0 = \frac{p}{v} = \sqrt{\rho E} = c \rho.$$

Dans l'air à 20°,  $Z_0$  a pour valeur 42 C. G. S.

Il est à remarquer que  $Z_0$  n'a pas les dimensions d'une impédance mécanique; mais si  $S$  désigne la section du tube, le produit  $SZ_0$  sera l'impédance mécanique.

Ainsi qu'il a déjà été dit, cette notion d'impédance acoustique a été donnée par Brillié en 1919.

**Remarque.** — De l'équation (2') on déduit

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - c^2 \rho \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cette équation n'est valable que pour des amplitudes très faibles; s'il n'en est pas ainsi, il faut poser en désignant par  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - c^2 \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2 \rho (\gamma - 1)}{4.2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots$$

Les analogies ne sont donc valables que pour de faibles amplitudes.

**Formules de Brillié.** — Brillié a établi directement un certain nombre de formules sans tenir compte des analogies; en fait, les formules de Brillié sont identiques à des formules établies pour les lignes électriques; il suffit de remplacer dans les équations le courant par la vitesse vibratoire, la tension par la pression, l'impédance caractéristique de la ligne par l'impédance acoustique du tuyau.

**Equations de passage.** — Soit (fig. 42) une ligne A d'impédance caractéristique  $Z_1$ , suivie d'une ligne B d'impédance caractéristique  $Z_2$ .

Désignant par  $i_1, i_1', i_2$ , les courants incident, réfléchi et transmis, on a, en écrivant que le courant a la même valeur à droite et à gauche de M,

$$i_1 + i_1' = i_2. \quad (1)$$

Le courant  $i_1$  produirait en M sur la ligne indéfinie une tension  $e_1 = Z_1 i_1$ , et le courant réfléchi une tension  $e'_1 = -Z_1 i'_1$ , le signe moins indiquant que la propagation de  $i'_1$  a lieu en sens contraire de celle de  $i_1$ .

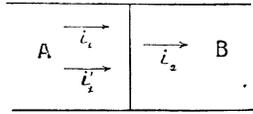


Fig. 12.

La tension  $e_2$  produite en M par  $i_2$  sur la ligne indéfinie B est  $Z_2 i_2$ ; on a par suite, la tension ayant la même valeur au voisinage immédiat de M, à droite et à gauche.

$$e_1 + e'_1 = e_2 \quad Z_1 (i_1 - i'_1) = Z_2 i_2. \quad (2)$$

Ces équations de passage (1) et (2) utilisées par les télégraphistes, ne sont autres d'ailleurs que les équations de Fresnel dans le cas de l'incidence normale.

On déduit immédiatement

$$i'_1 = i_1 \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad i_2 = i_1 \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

On désigne sous le nom de coefficient de réflexion  $r$  l'expression

$$r = \frac{i'_1}{i_1} = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}.$$

Désignant par  $S$  la section du tuyau, l'énergie incidente sera  $SZ_1 i_1^2$  et l'énergie réfléchie  $SZ_2 i_2^2$ ; le rendement  $\rho$  sera donné par

$$\rho = \frac{Z_2 i_2^2}{Z_1 i_1^2} = 1 - r^2.$$

Les impédances caractéristiques de l'air et de l'eau de mer étant respectivement 43 et  $15.10^4$ , la réflexion du son au passage de l'air dans l'eau sera à peu près totale et avec changement de signe; la réflexion du son au passage de l'eau dans l'air sera à peu près totale et sans changement de signe. D'une façon plus précise

$$\rho = 1 - r^2 = 0,0012.$$

**Expression du courant le long d'une ligne.** — Considérons deux points M et M' d'une même ligne; supposons M' à droite de M, le courant se propageant de la gauche vers la droite. En M le courant est donné par

$$I_M = I_0 \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Supposons qu'il y ait de l'amortissement, l'amplitude du courant en M' à distance  $x$  de M sera

$$I_{M'} = I_0 e^{-\beta x} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Posons  $\frac{2\pi}{\lambda} = \alpha$ ; nous pourrions dire que le courant en M est représenté par un vecteur de module  $I_0$  et de phase nulle, le courant en M' étant représenté par un vecteur de module  $I_0 e^{-\beta x}$  et de phase  $-\alpha x$ ; par suite

$$I_{M'} = I_0 e^{-\beta x} e^{-j\alpha x} = I_0 e^{-(\beta + j\alpha)x} = I_0 e^{-\delta x}$$

en posant

$$\delta = \beta + j\alpha.$$

Si le courant se propageait de M' vers M et avait la valeur  $I_0$  en M, il aurait pour valeur en M'.

$$I_{M'} = I_0 e^{+\delta x}.$$

Ces formules classiques de télégraphie sont en définitive celles qu'a utilisées Brillié en supposant l'amortissement nul ( $\beta = 0, \delta = j\alpha$ ).

**Cas de trois milieux consécutifs.** — Considérons trois milieux d'impédances  $Z_1, Z_2, Z_3$ , (fig. 13) soit  $i_1$  la vitesse incidente,  $i'_1$  la vitesse réfléchie à la surface

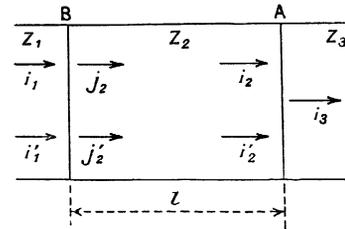


Fig. 13.

de séparation B,  $j_2$  la vitesse transmise dans le second milieu, etc...  $i_3$  la vitesse transmise dans le troisième milieu; les équations de continuité donnent pour les vitesses et tensions à la surface de séparation A

$$i_2 + i'_2 = i_3 \quad Z_2 (i_2 - i'_2) = Z_3 i_3$$

et à la surface de séparation B

$$j_2 + j'_2 = i_1 + i'_1 \quad Z_2 (j_2 - j'_2) = Z_1 (j_1 - j'_1).$$

Enfin

$$i_2 = j_2 e^{-j\alpha l} \quad i'_1 = j'_2 e^{+j\alpha l}.$$

On a tous les éléments pour calculer  $i_3$  en fonction de  $i_1$  et  $i'_1$ ; on trouve

$$i_1 = \frac{i_3}{2} \left[ \left( 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \right) \cos \alpha l + j \left( \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \sin \alpha l \right]$$

$$i'_1 = \frac{i_3}{2} \left[ \left( 1 - \frac{Z_3}{Z_1} \right) \cos \alpha l + j \left( \frac{Z_3}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \sin \alpha l \right].$$

Le rendement  $\rho$ , quotient de  $Z_3 i_3^2$  par  $Z_1 i_1^2$ , a pour valeur

$$\rho = \frac{4 \frac{Z_3}{Z_1}}{\left(1 + \frac{Z_3}{Z_1}\right)^2 \left[1 - \sin^2 \alpha l \frac{\left(\frac{Z_3^2}{Z_2^2} - 1\right) \left(\frac{Z_2^2}{Z_1^2} - 1\right)}{\left(1 + \frac{Z_3}{Z_1}\right)^2}\right]}$$

**Lois de Brillié.** — 1° Si  $l$  est très petit devant la longueur d'onde, le milieu intermédiaire n'interviendra pas.

Imaginons que le milieu 1 soit de l'eau de mer, que le milieu 2 soit constitué par une plaque de tôle de la carène d'un navire. Constituons le milieu 3 par de l'eau de mer renfermée dans une caisse; plaçons un microphone dans cette caisse: le son se transmettra de l'extérieur au microphone sans être gêné sur la plaque de tôle (procédé utilisé par les sous-marins allemands pendant la guerre).

2° Pour une longueur d'onde donnée, le rendement est maximum pour  $l = \frac{\lambda}{4}$ ; on a alors

$$\rho = 1 - \frac{\left(\frac{Z_3}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_1}\right)^2}{\left(\frac{Z_3}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1}\right)^2}$$

Ce rendement est égal à l'unité pour  $Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$ . Si le milieu 3 est constitué par de l'air et le milieu 1 par de l'eau de mer, on a

$$\sqrt{Z_1 Z_3} = \sqrt{42.15 \cdot 10^4} \approx 2.500.$$

A notre connaissance, aucune matière n'a une impédance caractéristique égale à 2500; toutefois le caoutchouc vulcanisé a une impédance de 5800; c'est la substance qui conviendra le mieux pour faire passer le son de l'eau dans l'air.

En disposant dans des tubes épais de caoutchouc un noyau axial rempli d'air, Brillié a constitué de véritables stéthoscopes et a pu, par ce procédé, déceler un bateau de petit tonnage à plus de 7000 m, distance à laquelle il n'était pas encore visible.

**Equation de passage dans le cas d'une modification de section.** — Soit deux tubes de section  $S_1$  et  $S_2$  (fig. 14); les vitesses incidente, réfléchie et transmise  $i_1, i'_1$  et  $i_2$  seront considérées comme des densités de courant; par suite, l'équation de continuité du courant sera

$$S_1 (i_1 + i'_1) = S_2 i_2.$$

(on retrouve ainsi très simplement l'équation de continuité déjà utilisée par Bernoulli ainsi qu'il est indiqué dans Bouasse, Tuyaux et résonateurs, p. 321).

Il est bien certain qu'on ne peut écrire une telle équation que s'il n'y a pas de remous, aussi les résultats obtenus ne pourront que donner des indications. On a

toujours comme équation de continuité des tensions (pressions vibratoires).

$$Z_1 (i_1 - i'_1) = Z_2 i_2.$$

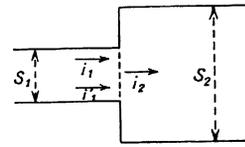


Fig. 14.

Si les deux milieux sont identiques  $Z_1 = Z_2$  et par suite

$$i_1 - i'_1 = i_2.$$

On trouve

$$i'_1 = -i_1 \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \quad i_2 = i_1 \frac{2S_1}{S_1 + S_2}.$$

L'énergie incidente est  $S_1 Z_1 i_1^2$ . L'énergie transmise  $S_2 Z_2 i_2^2$  et le rendement  $\rho$  est donné par

$$\rho = \frac{S_2 i_2^2}{S_1 i_1^2}$$

puisque  $Z_1 = Z_2$

Si  $S_2 = 0$  (tuyau fermé) il vient

$$i_2 = -i_1.$$

Il y a donc réflexion avec changement de signe.

Si  $S_2$  est très grand (tuyau ouvert)

$$i_1 = i_2.$$

Il y a réflexion sans changement de signe.

**Ensemble de trois tuyaux de même axe.** — Désignons par  $S_1, S_2, S_3$  les sections, par  $l$  la longueur du tuyau intermédiaire, les deux autres étant indéfinis; utilisant le procédé indiqué dans le cas de trois milieux de natures différentes et les mêmes notations, on trouve

$$i_1 = \frac{i_3}{2} \left[ \left( \frac{S_3}{S_1} + 1 \right) \cos \alpha l + j \left( \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_2} \right) \sin \alpha l \right]$$

$$i'_1 = \frac{i_3}{2} \left[ \left( \frac{S_3}{S_1} - 1 \right) \cos \alpha l + j \left( \frac{S_2}{S_1} - \frac{S_3}{S_2} \right) \sin \alpha l \right]$$

$$\rho = \frac{4 \frac{S_3}{S_1}}{\left(1 + \frac{S_3}{S_1}\right)^2 \left[1 - \sin^2 \alpha l \frac{\left(\frac{S_3^2}{S_2^2} - 1\right) \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right)}{\left(1 + \frac{S_3}{S_1}\right)^2}\right]}$$

Le rendement est maximum pour  $l = \frac{\lambda}{4}$ ; il est égal à l'unité pour  $S_2 = \sqrt{S_1 S_3}$ .

**Tuyau bifurqué.** — Imaginons un tuyau de section  $S_1$  et une bifurcation comportant deux tuyaux de sections  $S_2$  et  $S_3$ ; soit  $i_2$  la vitesse incidente à la bifurcation,  $i'_1$  la vitesse réfléchie,  $i_2$  et  $i_3$  les vitesses transmises. L'égalité des tensions à droite et à gauche de la section où a lieu la bifurcation donne

$$i_1 - i'_1 = i_2 = i_3.$$

L'égalité des courants donne

$$S_1 (i_1 + i'_1) = S_2 i_2 + S_3 i_3.$$

De ces équations on tire

$$i'_1 = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{S_1 + S_2 + S_3} i_1$$

$$i_2 = \frac{2 S_1}{S_1 + S_2 + S_3} i_1$$

Si  $S_1 = S_2 + S_3$ , il n'y a pas d'onde réfléchie; Si  $S_2 + S_3$  est très grand devant  $S_1$ , l'onde incidente est réfléchie totalement :  $i_2 = i_3 = 0$ .

**Théorie élémentaire des tuyaux sonores, cas de l'amortissement nul.** — On applique purement et simplement la théorie classique des lignes. Désignons par  $i_1$  et  $i'_1$  les vitesses incidente et réfléchie à l'extrémité du tuyau; la vitesse vibratoire en un point  $M$  à distance  $l$  de l'extrémité aura pour valeur  $i$  avec

$$i = j_1 + j'_1 = i_1 e^{j\alpha l} + i'_1 e^{-j\alpha l}$$

$j_1$  désignant le courant se propageant de  $M$  vers le fond du tuyau et  $j'_1$  le courant en  $M$  provenant de la réflexion sur le fond.

La tension  $e$  au même point est donnée par

$$e = Z_0 (j_1 - j'_1)$$

par suite l'impédance  $Z$  a pour valeur

$$Z = \frac{e}{i} = Z_0 \frac{i_1 e^{j\alpha l} - i'_1 e^{-j\alpha l}}{i_1 e^{j\alpha l} + i'_1 e^{-j\alpha l}}$$

Comme précédemment  $Z_0$  désigne l'impédance caractéristique du tuyau indéfini ( $Z_0 = 42$  C.G.S. à  $20^\circ$ ).

**Tuyaux fermés.** —  $i'_1 = -i_1$

$$\text{d'où } Z = Z_0 \frac{e^{j\alpha l} + e^{-j\alpha l}}{e^{j\alpha l} - e^{-j\alpha l}} = -jZ_0 \frac{\sin \alpha l}{\cos \alpha l}$$

Pour  $l = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$ , on a  $Z = 0$ ; les pulsations correspondantes sont les pulsations de résonance.

Pour  $l = k \frac{\lambda}{2}$  on a  $Z = \infty$ ; les pulsations correspondantes sont les pulsations d'antirésonance.

Pour  $l = \frac{\lambda}{8}$  on a  $Z = -jZ_0$ ; le module de l'impé-

dance a alors pour valeur 42 à la température de  $20^\circ$ .

Par suite, on constitue à chaque fréquence un étalon d'impédance au moyen d'un tuyau fermé de longueur  $l = \frac{\lambda}{8}$ ; nous verrons plus loin l'application faite par Flanders.

**19. Tuyaux ouverts.** — On a  $i'_1 = i_1$  d'où

$$Z = Z_0 \frac{e^{j\alpha l} - e^{-j\alpha l}}{e^{j\alpha l} + e^{-j\alpha l}} = jZ_0 \frac{\sin \alpha l}{\cos \alpha l}$$

Les pulsations de résonance ( $Z = 0$ ) correspondent à  $l = k \frac{\lambda}{2}$ ; les pulsations d'antirésonance ( $Z = \infty$ ) correspondent à  $l = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$

**Remarque.** — Que le tuyau soit ouvert ou fermé, l'impédance est une imaginaire pure; le tuyau ne fournit donc aucune énergie ce qui est quasi évident; le rôle du tuyau est d'imposer au débit d'énergie une fréquence déterminée.

**Application des tuyaux sonores fermés à la mesure des coefficients d'absorption acoustique.** — Eckardt et Chrysler d'abord (*Sc. Pap. of The Bureau of Standards*, n° 526), puis Wente et Bedell (*Bell System Technical Journ.*, janvier 1928) ont mesuré les coefficients d'absorption en plaçant un échantillon de la substance à étudier sur la face interne d'un piston mobile  $A$  obturant un tuyau; on réalise ainsi un tuyau sonore fermé de longueur variable. L'extrémité opposée au piston est pourvue d'un diaphragme  $B$  excité à une fréquence connue; un dispositif convenable permet de mesurer la pression au voisinage du diaphragme. L'impédance en  $A$  est de la forme  $R + jX$ ; autrement dit, du fait de l'absorption la pression n'est plus exactement décalée de  $\frac{\lambda}{2}$  sur la vitesse.

La théorie des lignes montre que si on fait varier la longueur  $l$ , la pression au voisinage de  $B$  passe par un maximum, puis un minimum, que le rapport  $p$  de ces pressions a pour sa valeur

$$p = \frac{R^2 + X^2 + Z_0^2 + \sqrt{(R^2 + X^2 - Z_0^2)^2 + 4X^2 Z_0^2}}{R^2 + X^2 + Z_0^2 - \sqrt{(R^2 + X^2 - Z_0^2)^2 + 4X^2 Z_0^2}}$$

On montre encore que le coefficient de réflexion  $r$  a pour valeur

$$r = \frac{\sqrt{p} - 1}{\sqrt{p} + 1}$$

et que le coefficient d'absorption  $a$  est donné par

$$a = 1 - r^2.$$

Wente et Bedell ont déterminé les coefficients d'absorption d'un grand nombre de substances. Les courbes de la figure 15 ont été construites en portant

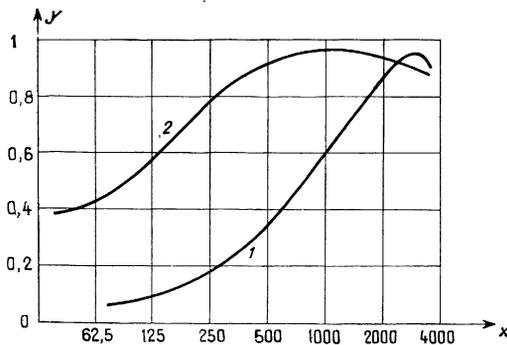


Fig. 15.

les fréquences en abscisses, les valeurs du coefficient d'absorption en ordonnées ; la courbe 1 correspond à un feutre de 25,4 mm d'épaisseur, la courbe 2 a un feutre de 152 mm d'épaisseur. On contrôle le dispositif en supprimant la substance absorbante ; on devrait alors trouver un coefficient de réflexion égal à l'unité, l'expérience a donné  $r = 0,98$ .

**Etude des circuits du second groupe. — Impédance acoustique dans le cas des ondes convergentes ou divergentes.**

**Rôle du pavillon.** — Ainsi qu'il a été dit, le pavillon a pour but de rayonner l'énergie sonore. Que se passe-t-il dans la section du pavillon débouchant dans l'atmosphère ? Lorsqu'il s'agit du tuyau ouvert, on prétend en faisant, il est vrai, quelques restrictions, qu'il y a un nœud de pression dans la section en contact avec l'atmosphère parce que la pression est constante et égale à la pression atmosphérique. Si cette explication était valable pour le tuyau elle le serait pour un pavillon de forme quelconque et on devrait perdre tout espoir de laisser échapper de l'énergie à l'embouchure du pavillon. Mais nous avons vu qu'en fait pour le tuyau sonore, ce qui devait surtout intéresser, c'était la variation brutale de surface ; cette idée a été développée par les ingénieurs électroacousticiens. Raisonnant exactement comme on le fait pour les lignes, on peut dire qu'à la surface de sortie du pavillon, l'onde incidente rencontre une certaine impédance mécanique de forme

$$Sc\rho(A + jB)$$

alors que l'onde rétrograde rencontre une impédance

$$Sc\rho(A' + jB').$$

Cette onde rétrograde n'existera pas et par suite toute l'énergie sera rayonnée si  $B = -B'$  et  $A = A'$ . Ces con-

ditions ne sont pas du tout satisfaites dans le cas du tuyau sonore et par suite aucune énergie n'est rayonnée, l'onde incidente est totalement réfléchie.

Il est possible de calculer  $A, B, A'$  et  $B'$  et on trouve qu'effectivement, pour les pavillons adoptés depuis longtemps, les conditions indiquées précédemment sont sensiblement satisfaites à la condition que le pavillon soit assez long.

Puisque le pavillon ne peut être constitué par un tuyau cylindrique, quelle forme pouvons-nous lui donner ? Nous le supposons de révolution autour d'un axe  $Ox$ , la section variant d'une façon continue. Puisqu'il y a des variations de section, il y aura nécessairement dans chaque section une portion de la vitesse incidente qui sera réfléchie. Désignant comme précédemment par  $i_1$  la vitesse incidente, par  $i'_1$  la vitesse réfléchie, nous avons vu qu'à la surface de séparation de deux tuyaux de sections  $S_1$  et  $S_2$  on avait

$$\frac{i'_1}{i_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}.$$

Nous sommes amenés à penser que l'on pourrait poser, lorsque les variations de section sont continues,

$$\frac{i'_1}{i_1} = \frac{1}{2S} \frac{dS}{dx} dx.$$

Nous retrouvons le fait que seul le tuyau cylindrique convient pour qu'il n'y ait pas de vitesse réfléchie ( $\frac{dS}{dx} = 0$ ). Il est assez naturel de penser que le pavillon le meilleur sera un pavillon tel que la discontinuité de la surface soit constante d'où

$$\frac{1}{2S} \frac{dS}{dx} = C^{\text{te}} \quad S = a e^{\frac{x}{m}}$$

$a$  désignant une constante et  $m$  étant un coefficient ayant la dimension d'une longueur.

Pour étudier d'une façon précise les pavillons, il faut refaire la théorie des ondes sphériques, dont nous allons dire un mot.

**Ondes sphériques.** — Reportons-nous aux traités classiques ; désignons par  $r$  le rayon de la sphère, par  $t$  le temps, admettons l'existence d'un potentiel des vitesses  $\Phi(r, t)$  ; on a, en désignant par  $v$  et  $p$  la vitesse et la pression vibratoires,

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad p = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Si nous ne nous occupons que du régime permanent, on pourra poser

$$\Phi(r, t) = \varphi(r) e^{j\omega t} \quad v = \frac{d\varphi}{dr} e^{j\omega t} \quad p = -j\omega\rho\varphi(r) e^{j\omega t}.$$

La fonction  $\varphi(r)$  sera donnée par

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0.$$

Mais la surface  $S$  de l'onde a pour valeur

$$S = \Omega r^2$$

$\Omega$  étant un angle solide ; par suite

$$\frac{dS}{dr} = S' = 2\Omega r$$

et

$$\frac{S'}{S} = \frac{2}{r}.$$

L'équation différentielle donnant  $\varphi$  devient

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{S'}{S} \frac{d\varphi}{dr} + \alpha^2 \varphi = 0.$$

En posant  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ . L'équation précédente peut être établie directement sans difficultés ; elle n'est valable que pour les ondes sphériques

**Equation de Webster** (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, 5, 275, 1910). — Considérons un pavillon de révolution autour d'un axe  $Ox$  ; désignons par  $\Sigma$  la section du pavillon à la distance  $x$  ; faisons l'hypothèse (qui ne pourra être vérifiée que par l'expérience) que l'on peut poser

$$\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{S'}{S}.$$

L'équation donnant  $\varphi$  et qui n'était en toute rigueur valable que pour les ondes sphériques deviendra applicable aux ondes se propageant dans un pavillon. C'est à cette équation qu'on donne le nom d'équation de Webster. Cette équation avait d'ailleurs déjà été utilisée par lord Rayleigh.

**Application au pavillon conique indéfini.** — Désignant par  $a$  une constante on a

$$\Sigma = S = ax^2 \quad \frac{S'}{S} = \frac{2}{x} \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\varphi}{dx} + \alpha^2 \varphi = 0.$$

L'approximation de Webster ne modifie pas l'équation classique de la propagation des ondes sphériques souvent dénommées ondes coniques.

La solution de l'équation précédente est donnée par

$$\varphi = \frac{A_1}{x} e^{-j\alpha x} + \frac{A'_1}{x} e^{+j\alpha x}.$$

$A_1$  et  $A'_1$  désignant des constantes.

Le premier terme correspond à l'onde directe, incidente ou divergente ; le second à l'onde rétrograde, réfléchie ou convergente.

Ne considérons que l'onde incidente, on a

$$\varphi = \frac{A_1}{x} e^{-j\alpha x} \quad v = \frac{d\varphi}{dx} e^{j\omega t} = -\varphi \left( \frac{1}{x} + j\alpha \right) e^{j\omega t} \\ p = -j\omega \rho \varphi e^{j\omega t}.$$

Mais

$$\omega \rho = \alpha c \rho = \alpha Z_0 \quad \text{d'où} \quad p = -j\alpha Z_0 \varphi e^{j\omega t}.$$

L'impédance à une distance  $x$  du sommet est

$$Z = \frac{p}{v} = \frac{j\alpha Z_0}{\frac{1}{x} + j\alpha} = Z_0 \frac{\alpha^2}{\frac{1}{x^2} + \alpha^2} + jZ_0 \frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x^2} + \alpha^2} \\ \equiv Z_0 (A + jB)$$

avec

$$A = \frac{\alpha^2 x^2}{1 + \alpha^2 x^2} \quad B = \frac{\alpha x}{1 + \alpha^2 x^2}.$$

On vérifiera aisément qu'au point d'abscisse  $x$ , l'impédance acoustique de l'onde rétrograde aurait pour valeur  $Z_0 (A - jB)$ .

L'impédance mécanique  $Z_m$  à distance  $x$  du sommet est

$$Z_m = SZ_0 (A + jB).$$

Pour les grandes valeurs de  $\alpha x = \frac{2\pi x}{\lambda}$ , il reste  $A = 1$ ,  $B = 0$ . Les courbes de la figure 16 donnent en fonction de  $\frac{2\pi x}{\lambda}$  les valeurs de  $A$  et  $B$ .

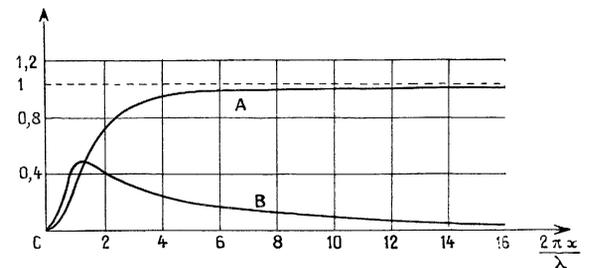


Fig. 16.

**Pavillon parabolique indéfini de première espèce** (fig. 17). —  $Ox$  est l'axe du pavillon alors que  $Oy$  est l'axe de la parabole

On a

$$S = ax^4 \quad S' = 4ax^3 \quad \frac{S'}{S} = \frac{4}{x}.$$

Tous calculs faits, on trouve que la valeur  $Z$  de l'impédance acoustique est donnée par

$$Z = Z_0 (A + jB)$$

avec

$$A = \frac{\alpha^4 x^4}{\alpha^4 x^4 + 3\alpha^2 x^2 + 9} \quad B = \frac{2\alpha^3 x^3 + 3\alpha x}{\alpha^4 x^4 + 3\alpha^2 x^2 + 9}.$$

Le calcul a été fait en utilisant une loi de récurrence; la même loi permet de calculer l'impédance d'un pavillon dont la section est donnée en fonction de  $x$  par

$$S = a x^{2m}.$$

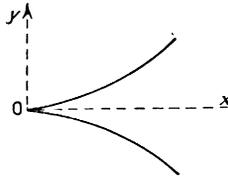


Fig. 17.

Pour  $m = 1$  on a le pavillon conique; pour  $m = 2$  le pavillon parabolique de première espèce.

Si on désigne par  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  les fonctions  $\varphi$  pour  $m = 1, m = 2, \dots$ , etc., on démontre que

$$\varphi_2 = \frac{1}{x} \varphi'_1 \quad \varphi_3 = \frac{1}{x} \varphi'_2 \dots \text{etc.}$$

*Pavillon parabolique de seconde espèce.* — L'axe du pavillon est alors confondu avec l'axe de la parabole.

On a, en désignant toujours par  $x$  l'axe du pavillon

$$x = ay^2, \quad S = \frac{\pi x}{a}$$

et par suite : 
$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{x} + x^2 \varphi = 0.$$

On trouve :

$$\varphi = A [J_0(x) - j Y_0(x)].$$

$J_0$  et  $Y_0$  désignent des fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et de seconde espèce.

**Pavillon exponentiel indéfini.** — Son rôle de passe haut. — On a dans ce cas

$$S = a e^{\frac{x}{m}} \quad S' = \frac{S}{m} \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{m} \frac{d\varphi}{dx} + \alpha^2 \varphi = 0.$$

**1<sup>er</sup> cas.** —  $\frac{1}{m^2} - 4\alpha^2 > 0$ ; l'équation de Webster a ses racines réelles,  $\varphi$  est réel; la vitesse vibratoire ( $\varphi' e^{j\omega t}$ ) est réelle; la pression vibratoire ( $-j\omega \varphi e^{j\omega t}$ ) est imaginaire. Par suite l'impédance  $Z$ , quotient de  $p$  par  $v$  est imaginaire; le pavillon ne peut transmettre aucune puissance acoustique.

Mais  $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ; par suite, les pulsations inférieures à une valeur  $\omega_0$ , donnée par

$$\omega_0 = \frac{c}{2m}$$

ne peuvent être transmises; le pavillon exponentiel est un filtre passe haut.

**2<sup>e</sup> cas :** 
$$\frac{1}{m^2} - 4\alpha^2 < 0,$$

on a alors

$$\varphi = A_1 e^{-\frac{x}{2m}} e^{-j\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4m^2}} x} + A'_1 e^{-\frac{x}{2m}} e^{j\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4m^2}} x}$$

$A_1$  et  $A'_1$  désignant des constantes.

Posons  $b = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4m^2}}$ ; on aura pour l'onde directe

$$\varphi = A_1 e^{-\left(\frac{1}{2m} + jb\right)x},$$

$$v = \frac{d\varphi}{dx} e^{j\omega t} = -\left(\frac{1}{2m} + jb\right) \varphi e^{j\omega t}, \quad p = -j\omega \varphi e^{j\omega t}.$$

Par suite l'impédance à distance  $x$  du sommet aura pour valeur en remplaçant  $\omega \varphi$  par sa valeur  $\alpha Z_0$

$$Z = \frac{p}{v} = Z_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4m^2 \alpha^2}} + jZ_0 \frac{1}{2m\alpha} \equiv Z_0(A + jB).$$

Pour l'onde rétrograde l'impédance aurait pour valeur  $Z_0(A - jB)$  ces expressions sont indépendantes de  $x$ ; de même que dans le tuyau cylindrique indéfini, le déphasage entre  $p$  et  $v$  est constant, seulement ce déphasage  $\psi$  était nul dans le cas du tuyau indéfini alors qu'il est donné maintenant par

$$\text{tg } \psi = \frac{1}{\sqrt{4m^2 \alpha^2 - 1}}.$$

A la pulsation de coupure  $\omega_0$ , on a  $4m^2 \alpha^2 = 1$  et  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ; aucune puissance n'est transmise ainsi qu'il a été dit plus haut. Enfin les vibrations de fréquences différentes ne se propagent pas dans le pavillon avec la même vitesse: il y a dispersion. La vitesse de propagation  $c' = \frac{\omega}{b} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4m^2 \omega^2}}}$ . Pour  $\omega$  très grand  $c' = c$ , pour  $\omega = \omega_0$  on a  $c' = \infty$ ; tout le fluide se meut en bloc.

**Comparaison des qualités des pavillons.** — Nous avons montré que l'impédance acoustique de tous les pavillons pouvait se mettre sous la forme

$$Z = Z_0(A + jB).$$

Quel que soit le pavillon on a  $A = 1$  et  $B = 0$  lorsque  $\alpha x = \frac{2\pi x}{\lambda}$  devient grand.

Si  $V_0$  est la vitesse efficace à l'entrée du pavillon (à distance  $x_0$  du sommet) la puissance vibratoire est donnée par

$$P = SZ_0 AV_0^2.$$

Il y a intérêt à ce que  $A$  qui caractérise en définitive la résistance de rayonnement soit grand.

Dans le cas des pavillons de section

$$S = ax^{2m}.$$

$A$  a une valeur finie à distance  $x_0$  du sommet pour une valeur quelconque de  $\omega$ ; cette valeur croît relativement lentement.

Dans le cas du pavillon exponentiel  $A = 0$  pour les pulsations inférieures à  $\omega_0$ ; mais dès que  $\omega > \omega_0$ ,  $A$  croît très rapidement, d'où le gros intérêt du pavillon exponentiel. Ce dernier rayonnera d'autant mieux les différentes fréquences que  $m$  sera plus grand, par suite la fréquence de coupure  $f_0$  sera faible.

Il faut en définitive un pavillon dont la section croisse lentement ce qui était physiquement évident si on tient compte de ce que les brusques changements de section sont nuisibles.

D'autre part, un calcul que nous ne pouvons reproduire parce qu'un peu long, montre que pour  $\omega = 2\omega_0$  la pression réfléchie n'est que 0,075 de la pression incidente lorsqu'on prend comme rayon de l'embouchure de sortie une valeur

$$R = 2m.$$

On arrive malheureusement à des pavillons de grande longueur ayant une section de sortie très grande. Outre la difficulté de construction, ces pavillons présentent, ainsi que le montre un calcul que nous ne ferons également pas, un effet directif exagéré.

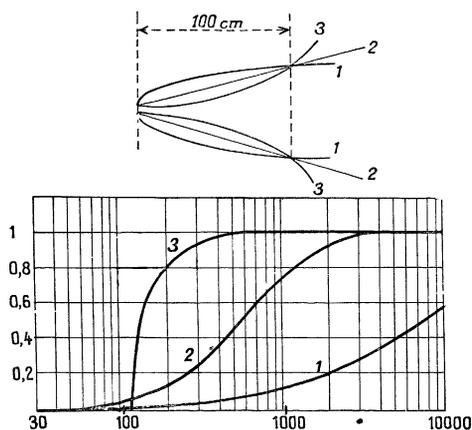


Fig. 18.

Nous reproduisons (fig. 18) à titre de comparaison des pavillons trois courbes empruntées à Olson et Massa (Applied acoustics, p. 48). On a porté les fréquences en

abscisses (échelle logarithmique) et  $A$  en ordonnées pour trois pavillons; le n° 1 est un pavillon parabolique de seconde espèce, le n° 2, un pavillon conique et le n° 3 un pavillon exponentiel. Les trois pavillons ont une ouverture d'entrée de  $1 \text{ cm}^2$ , l'ouverture de sortie étant égale à  $100 \text{ cm}^2$ , les deux ouvertures sont distantes de  $100 \text{ cm}$ . Les avantages du pavillon exponentiel ressortent nettement. Il est d'ailleurs manifeste qu'on lui a donné une croissance trop rapide pour qu'il puisse rendre les fréquences basses.

Nous terminerons en exposant d'une façon sommaire deux procédés de mesure d'impédances, l'une, mécanique, l'autre, acoustique.

**Principe de la mesure d'une impédance mécanique (Kennelly).** — Tout appareil électromécanique, comme le haut-parleur par exemple, peut être représenté par le schéma bien connu de la figure 19.

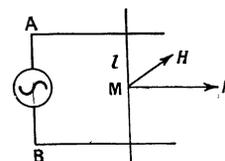


Fig. 19.

Une tige de longueur  $l$  peut glisser sur deux conducteurs; la tige est parcourue par un courant  $i$  et située dans un champ  $H$ . Si on désigne par  $v$  la vitesse de la tige, par  $z$  l'impédance mécanique, par  $F$  la force appliquée à la tige, on a en régime permanent

$$zv = F = Hl.$$

Désignons par  $Z$  l'impédance électrique du circuit par  $e$  la force électromotrice appliquée, on a

$$Zi = e - Hlv.$$

Eliminant  $v$  entre les deux équations il vient

$$\left( Z + \frac{H^2 l^2}{z} \right) i = Z_i i = e.$$

Un pont de Wheatstone à courant alternatif permet de mesurer  $Z$  à toute fréquence (la tige conductrice est immobilisée) et  $Z_i$  (la tige est libre). La différence des vecteurs  $Z_i$  et  $Z$  donne le vecteur  $\frac{H^2 l^2}{z}$  et par suite le vecteur  $z$  c'est-à-dire l'impédance mécanique. Le vecteur  $\frac{H^2 l^2}{z}$  porte le nom d'impédance motionnelle.

**Expériences de Cook.** — S'il s'agit d'un diffuseur (haut-parleur sans pavillon) les mesures d'impédances peuvent être faites: 1° en empêchant la

membrane de vibrer ; 2° en laissant la membrane vibrer dans l'air ; 3° en laissant la membrane vibrer dans le vide.

Des trois mesures effectuées à une même fréquence on peut déduire l'impédance acoustique opposée par l'air à la membrane du diffuseur et l'impédance mécanique de l'appareil.

**Mesure d'une impédance acoustique Méthode de Flanders** (*Bell System Techn. Journ.*, juillet 1932, p. 402). — Un haut-parleur *A* (fig. 20) produit

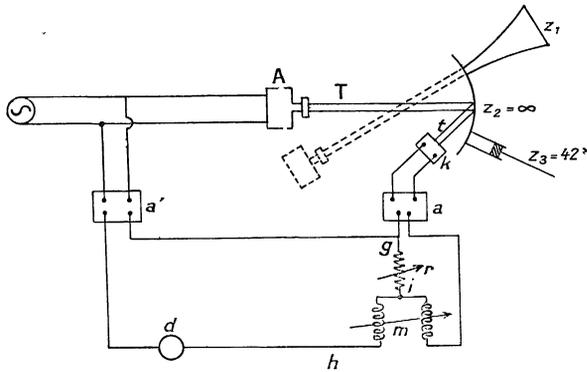


Fig. 20.

un son de fréquence connue à l'entrée d'un tube très court *T* ; à l'extrémité opposée de *T* on place soit un pavillon d'impédance  $Z_1$ , soit une paroi rigide d'impédance  $Z_2 = \infty$ , soit un tuyau fermé par un piston mobile, la longueur du tuyau étant égale au huitième de la longueur d'onde ; par suite le tuyau à une impédance  $|Z_3| = 42$  CGS. Un tube *t*, également très court, est relié à un microphone condensateur *K*. le courant de ce microphone est amplifié (amplificateur *a*) ; le dispositif permet de mesurer les pressions  $e_1, e_2, e_3$  à la sortie de *T*.

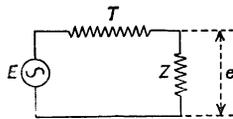


Fig. 21.

Le circuit acoustique est équivalent au circuit électrique de la figure 21. Désignant par *I* la vitesse vibratoire dans ce circuit, par *E* la pression sonore à l'orifice d'entrée de *t*, par *T* l'impédance du tube *T*, on a

$$I = \frac{E}{Z + T} \quad e = \frac{ZE}{Z + T}$$

Pour  $Z = Z_2 = \infty$ , on a  $e_2 = E$  et par suite

$$e_1 = \frac{Z_1 e_2}{Z_1 + T} \quad e_3 = \frac{Z_3 e_2}{Z_3 + T} \quad \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\frac{e_2}{e_3} - 1}{\frac{e_2}{e_1} - 1}$$

S'il est possible de mesurer les rapports  $\frac{e_2}{e_3}$  et  $\frac{e_2}{e_1}$ , on déduira  $Z_1$  puisque  $Z_3$  est une impédance connue.

En *a'* se trouve un amplificateur excité par le même oscillateur que le haut-parleur *A* ; on fait varier la résistance *r* et la mutuelle induction *m* de façon qu'aucun courant ne traverse le téléphone *d*. La différence de potentiel  $\epsilon$  entre les points *g* et *h* aura la même valeur chaque fois qu'il en sera ainsi. Or on a :

$$\epsilon = (r + jm\omega) i = zi.$$

Mais le courant *i* débité par l'amplificateur *a* est proportionnel à la pression sonore *e* qui s'exerce sur le microphone condensateur *K*. On a donc :

$$\begin{aligned} z_1 e_1 &= z_2 e_2 = z_3 e_3 \\ \frac{e_2}{e_3} &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_3 + jm_3\omega}{r_2 + jm_2\omega} \\ \frac{e_2}{e_1} &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 + jm_1\omega}{r_2 + jm_2\omega} \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{r_3 - r_2 + j(m_3 - m_2)\omega}{r_1 - r_2 + j(m_1 - m_2)\omega}$$

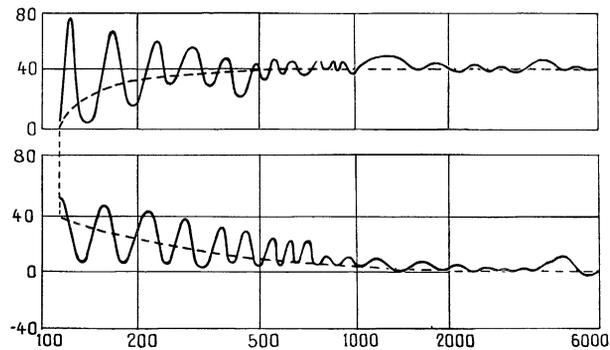


Fig. 22.

Les courbes en trait plein de la figure 22 donnent les résultats des mesures effectuées par Flanders sur un pavillon exponentiel ayant une longueur de 6 pieds (180 cm env.) les diamètres d'entrée et de sortie avaient respectivement pour valeur 0,7 inch (17,8 mm) et 30 inches (76 mm). En abscisses on a porté les fréquences ; les ordonnées de la courbe supérieure donnent  $c\varphi A$  et celles de la courbe inférieure  $c\varphi B$  ; les lignes en traits interrompus représentent les cour-

bes théoriques pour un pavillon indéfini; on constate l'existence de nombreuses fréquences de résonance et d'antirésonance provenant des réflexions à la sortie du pavillon.

Nous espérons avoir montré, dans cet article, les avantages de l'introduction de la notion d'impédance dans l'exposé des phénomènes acoustiques et dans l'étude du fonctionnement de certains dispositifs mécaniques. Toutefois, ainsi qu'il a été dit, les calculs ne sont valables que si les amplitudes sont faibles et ils ne peuvent que donner des indications lorsque la pro-

pagation se fait avec amortissement. Quoi qu'il en soit, les progrès réalisés dans la construction des appareils sonores (microphones, haut parleurs, phonographes) et qui sont en grande partie dus à l'introduction de cette notion d'impédance imaginée par Brillié, en légitiment l'emploi. Enfin, il est bien certain que ces progrès n'auraient pu être réalisés si les ingénieurs n'avaient eu à leur disposition les amplificateurs modernes sans distorsion et les oscillateurs qui permettent d'obtenir d'une façon régulière n'importe quelle fréquence, laquelle peut d'ailleurs être mesurée avec toute la précision désirable.

Exposé général devant la Société française de Physique  
(15 mars 1935).

