Polynômes symétriques
28/01/2021

Notation A anneau commutatif
$A[X_1,\dots,X_n]$ = A-algèbre des polynômes en n indéterminées

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit sur $A[X_1,\dots,X_n]$ par
$$\sigma \cdot P(X_1,\dots,X_n) = P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) \qquad (\sigma\in\mathfrak{S}_n)$$

But. Déterminer $A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ polynômes symétriques.
($\longrightarrow$ générateurs, et relations)

Rq. $A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ est une sous-A-algèbre de $A[X_1,\dots,X_n]$.

Déf (Polynômes symétriques élémentaires)

Pour $1\le k\le n$, on pose $\Sigma_k = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} X_{i_1}\cdots X_{i_k}$

Σ_k est un polynôme symétrique.

Ex. $\Sigma_1 = X_1+\dots+X_n$, $\Sigma_2 = X_1X_2+X_1X_3+\dots+X_{n-1}X_n$

$\Sigma_n = X_1\cdots X_n$.

Rq. Ces polynômes apparaissent dans les relations coefficients-racines :

Dans $A[X_1,\dots,X_n,T]$, on a $\prod_{i=1}^n (T-X_i) = T^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \Sigma_k T^{n-k}$

(On peut spécialiser, i.e. appliquer le morphisme de A-algèbres
$(X_1,\dots,X_n)\longmapsto(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ avec $\alpha_i\in A$)

Thm. Tout polynôme symétrique de $A[X_1,\dots,X_n]$ s'écrit de manière unique comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires.
i.e.
(1) $A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n} = A[\Sigma_1,\dots,\Sigma_n]$ (générateurs)
(2) Si $R\in A[T_1,\dots,T_n]$ vérifie $R(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)=0$,
alors $R=0$. (pas de relation entre les générateurs)

Reformulation :
Le morphisme de A-algèbres
$$\begin{array}{ccc} A[T_1,\dots,T_n] & \longrightarrow & A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n} \\ T_i & \longmapsto & \Sigma_i \end{array}$$
est un isomorphisme
((1) = surjectivité, (2) = injectivité)

Dans la suite, on prendra $A=K$ corps (mais la démo. marche en toute généralité).

Déf. On munit $\mathbb{N}^n$ de l'ordre lexicographique
$k=(k_1,\dots,k_n)$, $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n$

$k\le \ell \overset{\text{déf}}{\iff} k_1<\ell_1$ ou $\big(k_1=\ell_1$ et $(k_2,\dots,k_n)\le(\ell_2,\dots,\ell_n)\big)$

(déf. inductive)

C'est l'ordre du dictionnaire. C'est un ordre total.

On en déduit un ordre sur les monômes $X_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n} =: X^k$

$X^k\le X^\ell \overset{\text{déf}}{\iff} k\le \ell$.

Déf. • $\deg(X_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n}) = (k_1,\dots,k_n)$ ($\neq$ deg usuel !)

• Pour $P\in K[X_1,\dots,X_n]$, $P\neq 0$, $P=\sum_{k\in\mathbb{N}^n} a_k X^k$ (somme finie)

on pose $\deg(P) = \max\{k,\ a_k\neq 0\}$.

Exercice. (1) Calculer $\deg(\Sigma_k)$
(2) Soit $P\in K[X_1,\dots,X_n]$ de degré $d=(d_1,\dots,d_n)$
Mq. si P est symétrique, alors $d_1\ge d_2\ge\dots\ge d_n$
(3) Mq. $\forall P,Q\in K[X_1,\dots,X_n]$, $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

Solution (1) $X_1>X_2>\dots>X_n$

$\Sigma_1 = X_1+\dots+X_n$ $\quad \deg(\Sigma_1)=\deg(X_1)=(1,0,\dots,0)$

$\Sigma_2 = X_1X_2+\dots$ $\quad \deg(\Sigma_2)=\deg(X_1X_2)=(1,1,0,\dots,0)$

$\deg(\Sigma_k) = (\underbrace{1,\dots,1}_{k \text{ fois}},0,\dots,0)$
(le monôme de plus haut degré dans Σ_k est $X_1\cdots X_k$)

(2) Le monôme $X_1^{d_1}\cdots X_n^{d_n}$ apparaît dans P. Comme P est symétrique,
$X_1^{d_{\sigma(1)}}\cdots X_n^{d_{\sigma(n)}}$ apparaît aussi dans P, $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$

Donc $(d_{\sigma(1)},\dots,d_{\sigma(n)})\le(d_1,\dots,d_n)$ $\quad\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$
Cela entraîne $d_1\ge d_2\ge\dots\ge d_n$. (sinon on pourrait permuter les d_i pour obtenir un degré plus grand)

(3) L'ordre lex est compatible à l'addition :
(*) • $k\le \ell$, $k'\le \ell'$ $\Rightarrow$ $k+k'\le \ell+\ell'$
• $k\le \ell$, $k'<\ell'$ $\Rightarrow$ $k+k'<\ell+\ell'$

On écrit $P = aX^d + \sum_{k<d} a_k X^k$ et $Q = bX^e + \sum_{\ell<e} b_\ell X^\ell$

On développe $PQ = ab X^{d+e}$ + termes de plus bas degré
(grâce à (*)) $\square$

Dém. du Thm.

(1) Existence
Récurrence sur $\deg(P)$ (a un sens car l'ordre est total).
Soit $P\in K[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$, $P\neq 0$, $\deg P = d = (d_1,\dots,d_n)$

$P = aX^d + R$, $\deg(R)<d$

On a vu que $d_1\ge d_2\ge\dots\ge d_n$.

$P = a X_1^{d_1}\cdots X_n^{d_n} + R$

$= a X_1^{d_1-d_2}(X_1X_2)^{d_2-d_3}(X_1X_2X_3)^{d_3-d_4}\cdots(X_1\cdots X_n)^{d_n} + R$

On remarque que $X_1\cdots X_k$ est le terme de plus haut degré de Σ_k.

Cela nous amène à poser $Q = a\Sigma_1^{d_1-d_2}\Sigma_2^{d_2-d_3}\cdots\Sigma_n^{d_n}$.

• $Q\in K[\Sigma_1,\dots,\Sigma_n]$
• $\deg(Q) = (d_1-d_2)\deg(\Sigma_1)+(d_2-d_3)\deg(\Sigma_2)+\dots+d_n\deg(\Sigma_n)$

$= \big((d_1-d_2)+(d_2-d_3)+\dots+(d_{n-1}-d_n)+d_n,\ \dots\big)$

$= (d_1,d_2,\dots,d_n) = \deg(P)$.

Donc P et Q ont les mêmes termes de plus haut degré.

$P = Q + (P-Q)$, on a $\deg(P-Q)<\deg(P)$ et $P-Q$ symétrique

Par hypothèse de récurrence, $P-Q\in K[\Sigma_1,\dots,\Sigma_n]$

Rq. importante. Cette preuve fournit un algorithme pour décomposer P.
(méthode de Waring)

Exercice. Décomposer les pol. sym. suivants.
(1) $P = X^2+Y^2+Z^2$ puis $P=\sum_{i=1}^n X_i^2$
(2) $P = X^2(Y+Z)+Y^2(Z+X)+Z^2(X+Y)$

Solution (1) Terme dominant $X^2 \rightsquigarrow \Sigma_1^2$

$\Sigma_1^2 = (X+Y+Z)^2 = P + 2(XY+XZ+YZ) = P+2\Sigma_2$
D'où $P = \Sigma_1^2 - 2\Sigma_2$

$P=\sum_{i=1}^n X_i^2$ marche pareil, $P = \Sigma_1^2-2\Sigma_2$

(2) Terme dominant $X^2Y \rightsquigarrow \Sigma_1\Sigma_2$

$\Sigma_1\Sigma_2 = (X+Y+Z)(XY+YZ+ZX)$
$= \underline{X^2Y} + XYZ + \underline{X^2Z} + \underline{XY^2} + \underline{Y^2Z} + XYZ + XYZ + \underline{YZ^2} + \underline{XZ^2}$
$= P + 3XYZ$
D'où $P = \Sigma_1\Sigma_2 - 3\Sigma_3$.

(2) Unicité
On note
$$\begin{array}{cccc} \phi_n : & K[T_1,\dots,T_n] & \longrightarrow & K[X_1,\dots,X_n] \\ & T_i & \longmapsto & \Sigma_i \end{array}$$
On montre ϕ_n injectif par récurrence sur n.
$n=1$. ok
$n\ge 2$ Par l'absurde, supposons $\phi_n(Q)=0$ avec $Q\neq 0$
On choisit Q de degré minimal.
On a donc $Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)=0$
On applique le morphisme de K-alg
$$\begin{array}{cccc} \alpha : & K[X_1,\dots,X_n] & \longrightarrow & K[X_1,\dots,X_{n-1}] \\ & P & \longmapsto & P(X_1,\dots,X_{n-1},0) \end{array}$$

On a : $0 = \alpha\big(Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)\big) = Q\big(\alpha(\Sigma_1),\dots,\underbrace{\alpha(\Sigma_n)}_{=0}\big)$

Et les $\alpha(\Sigma_1),\dots,\alpha(\Sigma_{n-1})$ sont les pol. sym. élém. en $X_1,\dots,X_{n-1}$
Donc $\phi_{n-1}(Q_0)=0$ avec $Q_0 = Q(T_1,\dots,T_{n-1},0)$
Par hyp. de récurrence, $Q_0=0$ i.e. Q est divisible par T_n.
Posons $Q = T_nQ_1$, $\deg(Q_1)<\deg(Q)$

Et $0 = \phi_n(Q) = \phi_n(T_n)\phi_n(Q_1) = \Sigma_n\times\phi_n(Q_1)$

Comme l'anneau est intègre, $\phi_n(Q_1)=0$, absurde. $\square$.

Sommes de Newton.

Pour $k\ge1$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$

On cherche à exprimer S_k en termes des $\Sigma_1,\dots,\Sigma_n$.

Posons $A = \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$.

Soit $P(T) = \prod_{i=1}^n(1-X_iT) = 1-\Sigma_1T+\Sigma_2T^2+\dots+(-1)^n\Sigma_nT^n \in A[T]$

On calcule la dérivée logarithmique de P.

$$\frac{-TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^n \frac{X_iT}{1-X_iT} = \sum_{k\ge1} S_kT^k \in A[[T]]$$
(séries formelles à coefficients dans A)

" $\frac{d}{dT}\log P(T)$ "

On multiplie les deux membres par $P(T)$ et on identifie les coefficients. Après calculs, on obtient

(*) $\forall k\ge1$, $S_k - \Sigma_1S_{k-1} + \Sigma_2S_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1}\Sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\Sigma_k = 0$

avec la convention $\Sigma_k=0$ pour $k>n$.

(*) permet de déterminer, par récurrence, S_k en fonction des Σ_i

Exercice (1) Avec cette formule calculer S_2 et S_3 en fonction des Σ_i
(2) Montrer qu'inversement, Σ_k est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ en $S_1,\dots,S_k$.

Compléments

• Si P symétrique, $P = Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$, alors il n'y a pas de relation simple entre les degrés usuels de P et Q.
(Sauf si on attribue des poids aux Σ_i, en posant poids$(\Sigma_i)=i$)

• Si P est homogène et symétrique, $P=Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$ alors Q n'est pas homogène en général.

• Si G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, on peut s'intéresser aussi à $K[X_1,\dots,X_n]^G$ (alg. des invariants)
La théorie des invariants a pour but de trouver des générateurs et relations pour cette algèbre.

Ex. $G = A_n$, $S = K[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$

On peut mtq. $K[X_1,\dots,X_n]^{A_n} = S\oplus S\cdot\Delta$

avec $\Delta = \prod_{1\le i<j\le n}(X_i-X_j)$ (pol. anti-symétrique)

Générateurs : $\Sigma_1,\dots,\Sigma_n,\Delta$

Relation : $\Delta^2 = \underbrace{\Delta^2}_{\in S}$.