

Architecture des ordinateurs

TD 3 : Algèbre de Boole

Arnaud Giersch, Benoît Meister et Frédéric Vivien

1. Montrer comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. De même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.
2. On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+$, \cdot , \oplus et $\bar{}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$ et que $A \oplus B = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$
3. Montrer que $A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$ et que $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$
4. Déterminer le complément de l'expression $A + \bar{B} \cdot C$
5. Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, i.e. montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur **ou**, on peut déduire, en utilisant les lois de de Morgan, l'associativité de l'opérateur **et** (et inversement).
6. Écrire l'expression $\overline{A \oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **ou**, **et** et **non**
7. Montrer que la fonction **nor** forme un groupe logique complet.
8. Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes.
 - (a) $\bar{A} \cdot B + A \cdot B$
 - (b) $(A + B) \cdot (A + \bar{B})$
 - (c) $A + A \cdot B$
 - (d) $A \cdot (A + B)$
 - (e) $\bar{A} \cdot \bar{B} + \overline{A + B + C + D}$
 - (f) $A + B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot (\overline{B \cdot \bar{C}}) \cdot (A \cdot D + B)$
 - (g) $(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B$
 - (h) $A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$
9. Démontrer que toute fonction à trois variables $F(A, B, C)$ est égale à

$$F(A, B, C) = A \cdot F(1, B, C) + \bar{A} \cdot F(0, B, C)$$

10. Montrer que les lois de de Morgan s'étendent à un nombre quelconque de variables.

11. Génération et simplification d'expressions logiques

Considérer la fonction définie par la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- (a) Générer une expression logique correspondante :
- sous forme de sommes de produits ;
 - sous forme de produits de sommes.
- (b) Simplifier les deux expressions en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.
- (c) Construire le diagramme de Karnaugh et déterminer une expression logique associée.
12. Considérer les fonctions logiques suivantes. Pour chacune d'elles,
- construire le diagramme de Karnaugh ;
 - utiliser le diagramme pour simplifier les expressions.
- (a) $F_1(A, B, C) = A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$
- (b) $F_2(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \cdot C$
- (c) $F_3(A, B, C) = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C$
- (d) $F_4(A, B, C, D) = B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
- (e) $F_5(A, B, C, D) = \overline{A} + A \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$
- (f) $F_6(A, B, C, D) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$