# Une théorie de Bass-Serre pour les relations d'équivalence et les groupoïdes boréliens

**Aurélien Alvarez**

Ce travail de thèse a été réalisé en grande partie dans l'excellente ambiance de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'École Normale Supérieure de Lyon bien qu'ayant bénéficié d'inspirations californiennes (janvier-juillet 2006) et viennoises (mars et juillet 2007). En effet, j'ai eu le grand plaisir d'être accueilli pendant plusieurs mois par Sorin Popa à l'Université de Los Angeles (UCLA) où j'ai notamment fait connaissance avec les algèbres d'opérateurs et commencé à comprendre le lien étroit qui unit certains facteurs de type $\mathrm{II}_1$ et les relations d'équivalence mesurées. Je remercie vivement Sorin pour son accueil chaleureux.

De nombreuses personnes ont contribué de près ou de loin à ce travail et c'est avec une reconnaissance sincère que je voudrais remercier ici mon directeur de thèse Damien Gaboriau. Tout d'abord pour sa confiance dès le début de cette thèse et tout au long de celle-ci puisqu'il m'a toujours laissé une grande liberté dans mes recherches et lectures. Il n'a jamais ménagé son temps et sa patience pour m'expliquer et réexpliquer de nombreuses idées et démonstrations. Sa précision, sa rigueur et ses grandes qualités humaines ont été déterminantes.

Je voudrais également remercier mes deux rapporteurs Jean Renault et Frédéric Paulin. J'ai eu l'occasion de rencontrer Jean à diverses reprises, notamment à Vienne où il n'a pas hésité à répondre à toutes les questions que je me posais concernant les groupoïdes et m'a ainsi beaucoup éclairé sur le sujet. Quant à Frédéric, je voudrais particulièrement le remercier pour l'immense travail qu'il a fait sur une première version de mon texte : ses remarques et commentaires ont considérablement amélioré la qualité de ce manuscrit et je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Je suis très heureux de pouvoir compter dans mon jury Alain Louveau que j'ai rencontré à UCLA alors qu'il était de passage : j'ai beaucoup appris sur les relations d'équivalence boréliennes grâce à ses nombreux travaux sur le sujet. Enfin, c'est pour moi un immense honneur qu'Étienne Ghys ait accepté de faire partie de mon jury : son enthousiasme pour les mathématiques est sans limite et il n'a eu de cesse de me le faire partager durant ces années. C'est également lui qui m'a entraîné dans une aventure exceptionnelle que fut celle de réaliser *Dimensions*, un film autour de la projection stéréographique, des polyèdres réguliers de l'espace de dimension 4 et de la fibration de Hopf. Je le remercie infiniment.

Enfin, je voudrais remercier ma famille et plus particulièrement mes parents et mon frère pour leur soutien sans faille depuis le début. Sans eux, rien n'aurait été possible.

L'arboretum de Saint-Geoire en Valdaine

# Chapitre 1

# Introduction

Soit $\Gamma$ un groupe dénombrable opérant en préservant la mesure sur un espace borélien standard de probabilité X. Cette action engendre une *relation d'équivalence mesurée* $\mathcal{R}$ sur X : deux éléments de X sont équivalents s'ils appartiennent à la même orbite sous l'action de $\Gamma$. Voici une question naturelle : $\mathcal{R}$ se souvient-elle de $\Gamma$ et de l'action qui lui ont donné naissance ?

L'une des premières remarques que l'on peut faire est que l'espace quotient d'une telle relation d'équivalence borélienne est la plupart du temps « pathologique » comme c'est déjà le cas lorsque l'on considère une rotation sur le cercle d'angle irrationnel. Ces espaces quotients sont le prototype d'*espaces singuliers* (cf. [Con79]) et ont fait l'objet d'une attention soutenue ces trente dernières années. Dans le cas qui nous intéresse des relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ (c'est-à-dire à classes dénombrables, préservant une mesure de probabilité non atomique et ergodiques), ce sont certaines algèbres de von Neumann (facteurs de type $\mathrm{II}_1$, cf. [MvN36]) qui sont les briques élémentaires de la théorie de la mesure/intégration non-commutative de l'espace quotient (cf. [Con79]). Bien entendu, les aspects topologiques (respectivement différentiels ou géométriques) de ces espaces quotients ont donné naissance à la topologie (resp. topologie différentielle ou géométrie) non-commutative via les $C^\star$-algèbres (voir [Con90] et [Con94] pour bien d'autres exemples et de nombreuses discussions autour de ces idées).

La question de savoir ce dont se souvient $\mathcal{R}$ a suscité de très nombreux travaux ces dix dernières années et est devenue un sujet de recherche très actif. Mais on peut aussi définir $\mathcal{R}$ de façon abstraite (voir [FM75], [FM77a], [FM77b]) et Feldman-Moore démontre en 1977 que toute relation d'équivalence borélienne (que nous supposerons toujours à classes dénombrables) peut être engendrée par une action de groupe. La difficile question de savoir si l'action peut être choisie libre ou non ne sera résolue qu'en 1999 par Furman qui démontre dans [Fur99b] l'existence de relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ qui ne peuvent pas être engendrées par des actions libres de groupes (mentionnons également Adams qui répond à la question dans le cadre borélien ou dans le cadre mesuré en présence d'une mesure non ergodique, cf. [Ada88]).

**Théorème 1** (Feldman-Moore, [FM77a])**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur un espace borélien standard* X*. Alors il existe un groupe dénombrable* $\Gamma$ *et* *une action borélienne de* $\Gamma$ *sur* X *tels que* $\mathcal{R}$ *soit la relation d'équivalence borélienne engendrée par* $\Gamma$*.*

De nombreuses avancées dans ce domaine ont été obtenues et c'est autour de ce thème qu'est née la *Théorie Mesurée des Groupes*, souvent considérée comme la petite sœur de la *Théorie Géométrique des Groupes* qui étudie les propriétés des groupes se reflétant dans sa géométrie à grande échelle. Il existe de nombreux liens entre théories géométrique et mesurée des groupes et cette dernière suscite énormément d'attention, à la croisée des chemins entre théorie ergodique ([Fri70] pour une introduction), algèbres de von Neumann (voir [Dix96], [Fil96], [Tak02], [Tak03a], [Tak03b]) et théorie descriptive des ensembles (voir [Kec95], [Kec99], [Mos80]). Pourtant les balbutiements de la théorie qui remontent sans doute aux travaux de Dye en 1959-1963 (cf. [Dye59] et [Dye63]) aboutissent en 1980 à un résultat voilant toute la richesse de la théorie.

**Théorème 2** (Dye, Ornstein-Weiss, [OW80])**.** *Toutes les actions ergodiques de groupes moyennables sur l'espace borélien standard de probabilité non atomique sont orbitalement équivalentes entre elles.*

La relation d'équivalence mesurée ci-dessus est la relation hyperfinie ergodique de type $\mathrm{II}_1$ et elle semble avoir tout oublié du groupe (par exemple elle ne se souvient pas si le groupe était ou non de type fini). En fait, seuls les groupes moyennables peuvent engendrer cette relation et finalement on peut dire que la relation hyperfinie ergodique de type $\mathrm{II}_1$ ne se souvient que de la moyennabilité du groupe. Que peut-on faire alors ? Voici trois directions de recherche qui paraissent naturelles pour contraster avec la situation des groupes moyennables :

- trouver des relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ qui se souviennent de tout : du groupe et de l'action ;
- chercher des groupes aussi simples et familiers que possible qui admettent des actions ergodiques non orbitalement équivalentes ;
- chercher des groupes qui ne peuvent pas avoir d'actions orbitalement équivalentes entre elles.

On parle souvent de « phénomènes de rigidité » pour discuter des problèmes précédents et ce sont généralement des questions très difficiles. Donnons rapidement quelques résultats illustrant chacune des directions précédentes. Tout d'abord, la situation radicalement opposée à celle des groupes moyennables comme l'action linéaire de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ sur le tore $\mathbf{T}^3$.

**Théorème 3** (Furman, [Fur99b])**.** *Si un groupe* $\Gamma$ *a une action libre orbitalement équivalente à l'action linéaire de* $SL(3,\mathbf{Z})$ *sur* $\mathbf{T}^3$*, alors* $\Gamma$ *est virtuellement isomorphe à* $SL(3,\mathbf{Z})$ *et les actions sont virtuellement conjuguées.*

Ce résultat a ses origines dans les travaux de Zimmer (cf. [Zim80]) autour de la super-rigidité des cocycles. Zimmer s'intéresse à des cocycles à valeurs dans des groupes linéaires et donne des résultats de rigidité parmi ces actions de groupes linéaires. Furman quant à lui développe dans [Fur99a] de nouvelles techniques pour étudier des actions ergodiques de réseaux de rang supérieur orbitalement équivalentes à des actions libres de groupes dénombrables quelconques. Mentionnons également les résultats de super-rigidité obtenus par Monod et Shalom (cf. [MS06]), en particulier pour les produits directs de groupes hyperboliques non élémentaires sans torsion.

Ces idées de rigidité de certains cocycles ont été reprises dans le contexte des algèbres de von Neumann dans les travaux récents de Popa (cf. [Pop06b], [Pop06c]). Ce dernier met en œuvre une stratégie de déformation/rigidité opposant la malléabilité de l'action face à la rigidité du groupe et démontre un théorème de super-rigidité des cocycles pour des groupes $w$-rigides (par exemple $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\ltimes\mathbf{Z}^2$) opérant par décalage de Bernoulli et en déduit des résultats de super-rigidité au niveau de l'équivalence orbitale.

**Théorème 4** (Popa, [Pop07]). *Soit $\Gamma$ un groupe $w$-rigide n'ayant pas de sous-groupe distingué fini non trivial. Si un groupe dénombrable $\Gamma'$ a une action libre sur un espace borélien standard de probabilité orbitalement équivalente au décalage de Bernoulli de $\Gamma$, alors les groupes $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont isomorphes et les actions conjuguées.*

Les méthodes utilisées par Popa sont par essence « algèbres d'opérateurs » et témoignent du lien étroit entre facteurs de type $\mathrm{II}_1$ et relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ déjà mis en évidence par la fameuse construction « groupe-mesure-espace » de Murray et von Neumann (cf. [MvN36], [MvN37]) et les travaux déjà cités de Feldman et Moore. Illustrons maintenant le deuxième point.

**Théorème 5** (Connes-Weiss, Hjorth). *Tout groupe non moyennable engendre au moins deux relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ non orbitalement équivalentes.*

Ce résultat a d'abord été démontré par Connes et Weiss en 1980 dans le cas de groupes n'ayant pas la propriété (T) de Kazhdan (cf. [CW80]) et c'est finalement en 2005 que Hjorth démontre dans [Hjo05] que les groupes ayant la propriété (T) admettent en fait un continuum de relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$. Comme corollaire de la super-rigidité de Zimmer, on a le résultat suivant :

**Théorème 6** (Zimmer, [Zim80]). *Tout réseau de $SL(n,\mathbf{R})$ ($n \geqslant 3$) engendre un continuum de relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ non orbitalement équivalentes.*

Comme application de la cohomologie bornée de Monod-Shalom (cf. [MS06]), notons que le résultat précédent est encore vrai pour un continuum de groupes, par exemple les produits cartésiens de deux groupes non élémentaires sans torsion hyperboliques au sens de Gromov. Dans ce contexte de théorie mesurée des groupes, les groupes libres ont bien entendu un rôle central et c'est un résultat récent (2005) de Gaboriau et Popa qui éclaircit la situation dans ce cas.

**Théorème 7** (Gaboriau-Popa, [GP05]). *Tout groupe libre non abélien engendre un continuum de relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ non orbitalement équivalentes.*

Ioana étend ensuite le résultat précédent à tout groupe contenant une copie du groupe libre à deux générateurs (cf. [Ioa]). Enfin, utilisant les travaux de Gaboriau-Lyons (cf. [GL]), Epstein démontre finalement le résultat suivant :

**Théorème 8** (Epstein, [Eps])**.** *Tout groupe non moyennable engendre un continuum de relations d'équivalence mesurées de type* $\mathrm{II}_1$ *non orbitalement équivalentes.*

La question de savoir si les relations d'équivalence mesurées engendrées par des actions libres de deux groupes libres de rangs distincts sur l'espace borélien standard de probabilité sont orbitalement équivalentes ou non fut résolue plus tôt par Gaboriau grâce son étude du coût (cf. [Gab98], [Gab00]) : le coût est un invariant dynamique des relations d'équivalence mesurées qui fut introduit par Levitt dans [Lev95]. Au cours de cette étude, Gaboriau a naturellement été conduit à s'intéresser à des produits amalgamés de sous-relations et ces notions de produits amalgamés sont au cœur de notre travail.

**Théorème 9** (Gaboriau, [Gab00])**.** *Les relations d'équivalence mesurées engendrées par des actions libres de deux groupes libres de rangs distincts sur l'espace borélien standard de probabilité sont non orbitalement équivalentes.*

Une autre démonstration de ce résultat est apparue dans [Gab02] avec un nouvel invariant introduit et étudié par Gaboriau : les nombres de Betti $\mathrm{L}^2$. Ces nombres, d'abord introduits par Atiyah (cf. [Ati76]) dans un contexte analytique puis par Cheeger-Gromov (cf. [CG86]) dans le cas des groupes dénombrables (mentionnons également les travaux de Connes sur les feuilletages mesurés, [Con79]), sont de puissants outils et ont trouvé de nombreuses applications dans les algèbres de von Neumann puisque Popa répond récemment à une question posée par Kadison en 1967 et démontre l'existence de facteurs de type $\mathrm{II}_1$ ayant un groupe fondamental trivial (comme par exemple le facteur de type $\mathrm{II}_1$ associé à l'action linéaire de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ sur le tore $\mathbf{T}^2$, voir [Pop06a]) et plus généralement de facteurs de type $\mathrm{II}_1$ ayant un groupe fondamental prescrit (cf. [Pop06b]). Mentionnons que des approches plus algébriques des nombres de Betti $\mathrm{L}^2$ ont été introduites par Sauer dans [Sau05]) pour les groupoïdes mesurés et que Connes et Shlyakhtenko les ont définis pour les algèbres de von Neumann (cf. [CS05]), ce qui pourrait permettre de déterminer si les algèbres de von Neumann des groupes libres non abéliens de rangs distincts sont isomorphes ou non. Signalons enfin que pour définir les nombres de Betti $\mathrm{L}^2$ pour les relations d'équivalence mesurées, Gaboriau considère des champs de complexes simpliciaux sur une relation d'équivalence mesurée et ces notions de champs de complexes simpliciaux sont elles aussi au cœur de notre étude.

Comme nous l'avons mentionné, cette théorie mesurée des groupes n'est pas sans connexion avec la théorie descriptive des ensembles. Commençons par oublier la mesure : les groupes dénombrables opèrent alors par automorphismes boréliens sur des espaces boréliens standards et donnent naissance à des relations d'équivalence boréliennes. Le théorème suivant de Kechris justifie l'intérêt porté aux seules relations d'équivalences boréliennes (c'est-à-dire à classes dénombrables pour nous) puisqu'elles contiennent en un certain sens l'essence du sujet (cf. [Kec92] et [Kec94]).

**Théorème 10** (Kechris)**.** *Soit* $\Gamma$ *un groupe polonais localement compact et* $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence (à classes non dénombrables a priori) engendrée par une action borélienne de* $\Gamma$ *sur un espace borélien standard* $\mathrm{X}$*. Alors il existe une partie borélienne* $\mathrm{A}$ *de* $\mathrm{X}$ *qui rencontre toutes les classes de* $\mathcal{R}$ *et telle que* $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ *soit à classes dénombrables.*

La théorie descriptive classique des ensembles s'est récemment tournée vers la théorie descriptive de ces espaces singuliers. Rappelons que la théorie descriptive des ensembles a pour but de comprendre la hiérarchie des ensembles selon la complexité de leurs définitions et la structure de ces ensembles à chaque niveau de la hiérarchie. Les questions qui intéressent particulièrement les logiciens sont donc des questions de classification. Il s'agit là de problèmes tout à fait généraux et centraux en mathématiques : comprendre les listes d'invariants complets qui permettent de classer des objets à isomorphisme près. Bien sûr, il n'est pas toujours facile de préciser ce qu'on entend par « liste » d'invariants : un nombre fini d'entiers pour la classification des groupes abéliens de type fini (à isomorphisme près), un nombre réel pour la classification d'Ornstein des automorphismes de Bernoulli (à conjugaison près) ou encore des suites transfinies pour la classification des $p$-groupes abéliens (à isomorphisme près). Dans [HK00], Hjorth et Kechris s'intéressent à des exemples plus géométriques et montrent que les parties dénombrables de la droite complexe peuvent être utilisées comme une liste d'invariants complets pour les surfaces de Riemann (à équivalence conforme près). Les relations d'équivalence boréliennes sont précisément au centre de ces questions et permettent de définir des échelles de complexité pour ces problèmes de classification via la notion de « réductibilité » (cf. [Kec99]). La théorie descriptive des ensembles et des relations d'équivalence boréliennes interagit donc très fortement avec la théorie ergodique et réciproquement certains problèmes résolus en théorie ergodique sont toujours ouverts dans le cadre borélien comme par exemple le lien entre hyperfinitude et moyennabilité. Rappelons ici l'importante généralisation du théorème de Dye-Ornstein-Weiss.

**Théorème 11** (Connes-Feldman-Weiss, [CFW81])**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur un espace borélien standard* X. *Si $\mu$ une mesure de probabilité sur* X *et si $\mathcal{R}$ est $\mu$-moyennable, alors $\mathcal{R}$ est hyperfinie $\mu$-presque partout.*

Qu'en est-il dans le cadre borélien ? Une action borélienne d'un groupe dénombrable moyennable est-elle toujours hyperfinie (question posée par Weiss) ? Le résultat est simplement connu pour les groupes à croissance polynomiale (cf. [JKL02]). De même, une réunion croissante de relations d'équivalence boréliennes hyperfinies est-elle hyperfinie ? Là encore, le résultat est connu dans le cadre mesuré. Pourtant mentionnons que les relations d'équivalence boréliennes hyperfinies sont parfaitement comprises conformément au résultat suivant (cf. [DJK94], [KL97]).

**Théorème 12** (Dougherty-Jackson-Kechris)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne non lisse, hyperfinie et apériodique. Alors $\mathcal{R}$ est orbitalement équivalente à exactement l'une des relations suivantes : $\mathcal{R}_t$ (équivalence sur $2^{\mathbf{N}}$ si deux éléments ont les mêmes queues à décalages près), $\mathcal{R}_0 \times \Delta(n)$ (où $\mathcal{R}_0$ est l'égalité sur $2^{\mathbf{N}}$ sauf pour un nombre fini de composantes et $\Delta(n)$ la relation d'égalité sur un ensemble de cardinal $1 \leqslant n \leqslant \aleph_0$) ou la restriction à sa partie libre du décalage de Bernoulli de $\mathbf{Z}$ sur $2^{\mathbf{Z}}$. De plus, le cardinal de l'espace des mesures de probabilité $\mathcal{R}$-invariantes et ergodiques pour une telle $\mathcal{R}$ est un invariant complet.*

Nous l'avons vu, la relation d'équivalence mesurée de type $\mathrm{II}_1$ engendrée par l'action d'un groupe dénombrable $\Gamma$ se souvient de peu de choses en général. Si l'on souhaite comprendre d'autres phénomènes de rigidité, on peut essayer de partir de données supplémentaires. Par exemple, supposons que $\Gamma$ contienne un sous-groupe distingué $\Lambda$ tel que l'action induite par $\Lambda$ soit encore ergodique. Que peut-on dire de la paire $(\mathcal{R}_\Gamma, \mathcal{R}_\Lambda)$ de relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ qu'on obtient ? Se souvient-elle de quelque chose ?

**Théorème 13** (Feldman, Sutherland, Zimmer, [FSZ89])**.** *Si $\Gamma'$ et $\Lambda'$ sont des groupes comme ci-dessus et engendrent une paire orbitalement équivalente à la paire $(\mathcal{R}_\Gamma, \mathcal{R}_\Lambda)$, alors les groupes quotients $\Gamma/\Lambda$ et $\Gamma'/\Lambda'$ sont isomorphes.*

Autrement dit, la paire $(\mathcal{R}_\Gamma, \mathcal{R}_\Lambda)$ se souvient du groupe quotient $\Gamma/\Lambda$. Ceci est bien entendu très intéressant et encourage vivement à étudier davantage les sous-relations d'une relation d'équivalence mesurée de type $\mathrm{II}_1$. Bien sûr le problème ainsi formulé est trop vaste pour entreprendre une telle étude mais nous avons déjà mentionné que les groupes libres et les produits libres/amalgamés de groupes sont des exemples très importants dans cette théorie puisque de nombreux calculs d'invariants sont alors rendus possibles. Il paraît donc envisageable de trouver des phénomènes de rigidité dans les relations de type $\mathrm{II}_1$ engendrées par des produits libres de groupes et c'est ce que Ioana, Peterson et Popa démontrent, toujours sous des hypothèses de rigidité données par la propriété (T) d'une part et en supposant que les sous-relations engendrées sont ergodiques. Nous renvoyons à [IPP05] pour un énoncé précis.

Mais bien sûr le cas vraiment intéressant serait de s'affranchir de l'hypothèse d'ergodicité pour les sous-relations.

**Théorème imaginaire.** *Soit $\mathcal{R} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}' = \star_{j\in \mathrm{J}}\mathcal{R}'_j$ deux relations d'équivalence mesurées de type $\mathrm{II}_1$ orbitalement équivalentes. Alors il existe une bijection $b$ entre $\mathrm{I}$ et $\mathrm{J}$ telle que*

$$\forall i \in \mathrm{I} \qquad \mathcal{R}_i \overset{\mathrm{OE}}{\sim} \mathcal{R}'_{b(i)}.$$

Dans [AG], nous introduisons avec Gaboriau la notion de relations d'équivalence mesurées *librement indécomposables* et donnons une large classe d'exemples : toutes les actions libres des groupes non moyennables de premier nombre de Betti nul donnent naissance à des relations d'équivalence mesurées librement indécomposables. De tels groupes sont dits *mesurablement librement indécomposables* (MFI). Donnons déjà un énoncé précis du « théorème imaginaire » précédent dans le cadre de sous-relations ergodiques :

**Théorème 14** (Alvarez-Gaboriau, [AG])**.** *Considérons $(\Gamma_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\Lambda_j)_{j\in\mathrm{J}}$ deux familles de groupes MFI, où $\mathrm{I}$ et $\mathrm{J}$ sont des ensembles dénombrables. Soit $\alpha$ et $\beta$ des actions libres des produits libres $\star_{i\in\mathrm{I}}\Gamma_i$ et $\star_{j\in\mathrm{J}}\Lambda_j$ sur des espaces boréliens standards de probabilité $(\mathrm{X},\mu)$ et $(\mathrm{Y},\nu)$ telles que les restrictions $\alpha_{|\Gamma_i}$ et $\beta_{|\Lambda_j}$ soient ergodiques. Si les actions sont stablement orbitalement équivalentes*

$$\star_{i\in\mathrm{I}}\Gamma_i \curvearrowright^{\alpha} (\mathrm{X},\mu) \overset{\mathrm{SOE}}{\sim} \star_{j\in\mathrm{J}}\Lambda_j \curvearrowright^{\beta} (\mathrm{Y},\nu),$$

*alors il existe une bijection $b$ entre $\mathrm{I}$ et $\mathrm{J}$ telle que les restrictions des actions aux facteurs soient stablement orbitalement équivalentes.*

L'*équivalence mesurée* (ME) entre groupes dénombrables est une notion clé de la théorie mesurée des groupes et de nombreux invariants ont été introduits ces dernières années pour distinguer des classes de ME (voir [Gab05] pour une introduction à ce très beau thème). En particulier, nous montrons dans [AG] qu'être mesurablement librement indécomposable est un invariant de ME et nous prouvons le résultat de rigidité suivant :

**Théorème 15** (Alvarez-Gaboriau, [AG]). *Considérons $(\Gamma_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(\Lambda_j)_{j\in \mathrm{J}}$ deux familles de groupes MFI telles que les $\Gamma_i$ (resp. $\Lambda_j$) soient deux à deux non mesurablement équivalents, où* I *et* J *sont des ensembles dénombrables. Si les produits libres $\star_{i\in \mathrm{I}}\Gamma_i$ et $\star_{j\in \mathrm{J}}\Lambda_j$ sont mesurablement équivalents*

$$\star_{i\in \mathrm{I}}\Gamma_i \overset{\mathrm{ME}}{\sim} \star_{j\in \mathrm{J}}\Lambda_j,$$

*alors il existe une bijection $b$ entre* I *et* J *telle que $\Gamma_i$ soit mesurablement équivalent à $\Lambda_{b(i)}$ pour tout $i$ de* I.

Les démonstrations de ces théorèmes reposent en grande partie sur certains résultats de cette thèse, plus précisément les théorèmes 2.61 et 2.63 qui donnnent des résultats de structure pour les sous-relations d'un produit libre. Étudier les sous-relations d'un produit libre de sous-relations est un problème tout à fait intéressant en soi qui pourrait avoir de nombreuses autres applications. Cette question est précisément l'un des fils conducteurs de cette thèse et son étude m'a amené à développer une théorie de Bass-Serre pour les relations d'équivalence boréliennes que nous précisons maintenant.

Considérons le produit libre $\Gamma$ de deux groupes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Le théorème de Kurosh (cf. [Kur34]) donne la structure des sous-groupes de $\Gamma$ : tout sous-groupe de $\Gamma$ est le produit libre d'un groupe libre et de sous-groupes de conjugués de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. La démonstration originelle de Kurosh est technique et difficile alors que la théorie de Bass-Serre en donne une démonstration géométrique limpide en quelques lignes. Rappelons que la théorie de Bass-Serre (cf. [Ser77], voir aussi [SW79] pour une approche plus topologique) a pour principal objet les groupes opérant sans inversion sur des arbres et donne un théorème de structure pour ces groupes. Plus précisément, généralisant les notions de produit libre, de produit amalgamé, d'extension HNN, Bass et Serre introduisent le groupe fondamental d'un graphe de groupes (bien défini à isomorphisme près) et démontrent que tout groupe opérant (sans inversion) sur un arbre est isomorphe au groupe fondamental d'un certain graphe de groupes dont le graphe sous-jacent est en fait l'espace quotient de l'action du groupe sur l'arbre.

Mais nous avons déjà mentionné que Gaboriau introduit dans [Gab02] des actions de relations d'équivalence mesurées sur des champs de complexes simpliciaux. Il semble donc naturel de s'intéresser plus spécifiquement à des actions sur des champs d'arbres et d'essayer de comprendre les relations d'équivalence mesurées qui opèrent. Une telle étude est-elle possible ? C'est ce que nous développons dans ce travail. Mais ne nous y trompons pas : la difficulté intrinsèque aux relations d'équivalence mesurées est présente dès le début. L'espace quotient de l'action d'une relation d'équivalence mesurée sur un champ d'arbres est a priori un espace... singulier ! Malgré ceci, nous allons développer des techniques pour étudier ces actions et en déduire des théorèmes de structure. Autant que possible, nous nous concentrerons sur les relations d'équivalence (cas qui nous intéresse plus particulièrement) mais nous verrons que le cadre naturel pour la théorie que nous développons est celui des groupoïdes. Enfin et de manière inattendue, la mesure ne joue ici aucun rôle et notre étude est d'autant plus intéressante qu'elle se place dans le seul contexte borélien.

Le plan de cette thèse est le suivant :

1. relations d'équivalence boréliennes et arboretums ;
2. des relations d'équivalence aux groupoïdes boréliens ;
3. groupoïdes boréliens libres et revêtements boréliens.

Étant donné une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X, nous avons d'abord été conduits à nous intéresser aux *$\mathcal{R}$-espaces fibrés standards* qui sont des espaces fibrés standards sur X munis d'une action de $\mathcal{R}$. L'outil fondamental que nous utilisons constamment tout au long de ce travail est le théorème de sélection suivant. On renvoie à [Kur66] et [Kec95] pour des éléments de démonstration.

**Théorème 16** (Théorème de sélection, th. 2.10)**.** *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ une application borélienne surjective à pré-images dénombrables où* X *et* X′ *sont deux espaces boréliens standards. Alors il existe une famille dénombrable de sections partielles de $f$ dont les images forment une partition borélienne de* X*. De plus, on peut toujours supposer qu'au moins l'une de ces sections partielles est une section borélienne, c'est-à-dire définie sur* X *tout entier.*

C'est grâce au théorème de sélection précédent et après une étude des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards *homogènes* (qu'il faut penser comme $\mathcal{R}$-espaces fibrés standard « connexes ») que nous sommes alors en mesure de démontrer un résultat général de décomposition des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards. La démonstration que nous proposons contient des idées clés qui nous seront utiles par la suite.

**Théorème 17** (th. 2.30)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X*. L'application $\Psi$ qui, à une famille dénombrable de sous-relations $(\mathcal{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de $\mathcal{R}$ dont la réunion des domaines de définition est un domaine complet de $\mathcal{R}$, associe le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}_i}}/\mathcal{S}_i$ est une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison stable de familles de sous-relations de $\mathcal{R}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards.*

C'est à partir des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards que l'on peut alors définir les objets principaux de notre étude, les $\mathcal{R}$-champs d'arbres boréliens que nous appelons aussi *$\mathcal{R}$-arboretums*. Un $\mathcal{R}$-arboretum est essentiellement la donnée d'un $\mathcal{R}$-espace fibré standard de sommets, d'un $\mathcal{R}$-espace fibré standard d'arêtes et d'applications d'attachement $o$ et $t$ ainsi que d'une involution compatibles à l'action. Comme nous l'avons déjà dit, les groupes libres et les produits libres/amalgamés de groupes jouent des rôles particuliers en théorie des groupes et il était donc naturel de commencer par s'intéresser plus en détail à leurs actions. Les premiers donnent naissance à des relations d'équivalence arborables (cf. [Lev95]) et les autres à des produits libres/amalgamés de sous-relations. On démontre alors le théorème suivant :

**Théorème 18** (th. 2.33)**.** *Une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ est arborable si et seulement s'il existe une action quasi-libre de $\mathcal{R}$ sur un arboretum. En particulier, les sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne arborable sont arborables.*

Ce résultat est bien connu dans le contexte des groupes et nous permet de retrouver de façon immédiate un analogue déjà connu (cf. [Gab00] dans le cadre mesuré et [JKL02] dans le cadre borélien) du théorème de Nielsen-Schreier pour les sous-groupes d'un groupe libre.

Gaboriau introduit dans [Gab00] une notion de produits amalgamés de sous-relations. Une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ est le *produit amalgamé* des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$ si $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et si les seules « redondances » sont dans $\mathcal{R}_3$. Les produits amalgamés jouent un rôle crucial dans le travail de Gaboriau, notamment grâce au théorème suivant qui donne une formule explicite pour calculer le coût.

**Théorème 19** (Gaboriau, [Gab00])**.** *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$ une relation d'équivalence mesurée de type $\mathrm{II}_1$ qui est un produit amalgamé de deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de coûts finis suivant une relation hyperfinie $\mathcal{R}_3$, alors*

$$co\hat{u}t(\mathcal{R}) = co\hat{u}t(\mathcal{R}_1) + co\hat{u}t(\mathcal{R}_2) - co\hat{u}t(\mathcal{R}_3).$$

Étant donné un produit libre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ (et plus généralement un produit amalgamé), les $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards homogènes $\mathcal{R}/\mathcal{R}_i$ (cf. p. 29) sont les composants de base dans la construction d'un $\mathcal{R}$-arboretum canoniquement associé à la décomposition de $\mathcal{R}$. On démontre alors une caractérisation « dynamique » des produits libres (et une caractérisation analogue pour les produits amalgamés).

**Théorème 20** (th. 2.41)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X*. Supposons que $\mathcal{R}$ agisse sur un arboretum $\mathcal{A}$ dont l'espace des arêtes orientées $\mathcal{A}^{1+}$ est le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique et tel que les saturés des images des sections boréliennes de sommets $o(d)$ et $t(d)$ forment une partition borélienne de l'espace des sommets en deux. Alors $\mathcal{R}$ est le produit libre des stabilisateurs de $o(d)$ et de $t(d)$ :*

$$\mathcal{R} = Stab_{\mathcal{R}}(o(d)) \star Stab_{\mathcal{R}}(t(d)).$$

Nous déduisons quelques applications de ces résultats mais surtout, ce sont les constructions et les techniques utilisées dans ces décompositions « élémentaires » qui nous seront les plus utiles pour aborder le cas général (cf. 2.IV) d'une relation d'équivalence borélienne opérant sur un arboretum. L'un des ingrédients de la théorie de Bass-Serre est la construction d'un graphe de groupes à partir de la donnée d'une action (sans inversion) d'un groupe sur un graphe. Comme nous l'avons déjà dit, le graphe sous-jacent au graphe de groupes est l'espace quotient de cette action. La donnée d'un arbre maximal dans le quotient permet de relever l'ensemble des sommets du graphe quotient en un sous-arbre du graphe initial et ce relèvement permet de définir des groupes de sommets. Il reste alors à relever les arêtes du graphe quotient qui n'appartiennent pas à l'arbre maximal choisi et à préciser les monomorphismes correspondants dans le graphe de groupes, l'idée étant qu'à chacune de ces « extra-arêtes » est associé un « extra-élément » du groupe (c'est-à-dire n'appartenant pas aux groupes de sommets précédemment définis) qui induit un « amalgame » entre les groupes de sommets correspondants. Par construction, on en déduit un morphisme du groupe fondamental du graphe de groupes dans le groupe qui opère et la théorie de Bass-Serre dit que c'est en fait un isomorphisme si on est parti d'une action sur un arbre.

Nous souhaitons ici préciser que nos constructions et nos techniques ont véritablement été inspirées par la théorie de Bass-Serre telle qu'elle est exposée dans l'excellent livre [Ser77] de Serre. Et le premier point fut de construire un analogue du graphe de groupes capturant toute l'information de l'action : c'est la notion de *désingularisation* (déf. 2.52).

Étant donné une désingularisation d'une action de $\mathcal{R}$, la deuxième étape est bien entendu celle de reconstruction : les sous-relations données par une désingularisation doivent permettre de reconstruire $\mathcal{R}$. Mais c'est là une nouvelle difficulté dans la théorie : le produit libre abstrait de relations d'équivalence boréliennes (disons sur un même espace borélien standard) n'est pas, dans un sens raisonnable, une relation d'équivalence borélienne : il suffit de penser à deux copies d'une même relation pour s'en convaincre. En effet, en désignant par $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux copies d'une même action libre de $\mathbf{Z}$ sur X, on en déduit une action $\alpha$ du groupe libre $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs qui, par construction, est telle que $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha_1} = \mathcal{R}_{\alpha_2}$.

Nous avons alors été conduits à sortir de la catégorie des relations d'équivalence boréliennes pour celle des *groupoïdes boréliens*. Rappelons qu'un exemple fondamental de groupoïde borélien est donné par une action borélienne (non libre *a priori*) d'un groupe dénombrable sur un espace borélien standard. Dans le cas d'une action libre, ce groupoïde borélien est *principal*, c'est-à-dire essentiellement une relation d'équivalence borélienne.

Et c'est dans ce contexte de groupoïdes boréliens que la notion de produit libre prend tout son sens. En particulier, Kosaki traite le cas de deux relations d'équivalence mesurées sur un même espace ([Kos04]). Plus généralement nous donnons un sens dans le chapitre 3 à la notion de *groupoïde borélien libre* (déf. 3.3), de *présentation* (déf. 3.20) et, par suite, de produit amalgamé de deux relations d'équivalence boréliennes (sur des espaces boréliens standards *a priori* différents) suivant des sous-relations orbitalement équivalentes. C'est ainsi que nous généralisons notre étude des actions de relations d'équivalence boréliennes sur des arboretums au cadre plus naturel des groupoïdes boréliens (cf. 3.II) et obtenons le théorème général de structure suivant.

**Théorème 21** (th. 3.44)**.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien opérant sans inversion sur un arboretum sur* X. *Alors $\mathcal{G}$ est stablement isomorphe au groupoïde fondamental borélien d'un certain graphe de groupoïdes.*

Remarquons que si l'espace borélien X est réduit à un point, on retrouve alors le théorème 5.13 de [Ser77].

Ayant ce résultat de décomposition en mains, comprendre la structure des sous-relations $\mathcal{S}$ d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ qui est un produit libre d'un ensemble dénombrable de sous-relations est alors tout à fait indiqué. Il suffit de considérer l'action de $\mathcal{S}$ induite par celle de $\mathcal{R}$ sur le $\mathcal{R}$-arboretum associé à la décomposition de $\mathcal{R}$ et de préciser la situation grâce au théorème précédent ; les groupoïdes boréliens qui interviennent sont en fait principaux et on obtient un théorème de structure pour $\mathcal{S}$ que nous précisons ci-dessous. Notons cependant que cette démonstration sort malheureusement quelques instants du monde des relations d'équivalence. Et c'est pourquoi nous donnons également une démonstration de ce résultat dans le contexte des relations d'équivalence à la fin de la première partie. Là encore, les idées développées contiennent l'essence de la généralisation aux groupoïdes boréliens. On peut voir ce théorème comme un analogue du théorème de Kurosh en théorie des groupes.

**Théorème 22** (th. 2.61)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur $\mathrm{X}$, produit libre dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$). Alors*

$$\mathcal{S} = \star_{i\in \mathrm{I}} \left(\star_{k_i \in \mathrm{K}(i)} \mathcal{S}_{k_i}\right) \star \mathcal{T},$$

*où, pour tout $k_i$ d'un ensemble dénombrable $\mathrm{K}(i)$, il existe un élément $\phi_{k_i}$ de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne $\mathrm{A}_{k_i}$ de $\mathrm{X}$ tel que*

$$\mathcal{S}_{k_i} = \left(\phi_{k_i}^{-1} \mathcal{R}_{i|_{\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})}} \phi_{k_i}\right) \cap \mathcal{S},$$

*et où $\mathcal{T}$ est une sous-relation arborable de $\mathcal{S}$. De plus, pour tout $i$ de $\mathrm{I}$, il existe $k_i$ dans $\mathrm{K}(i)$ tels que*

$$\mathrm{A}_{k_i} = \mathrm{X} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{S}.$$

Avec les mêmes techniques, nous démontrons également un théorème qui donne la structure des restrictions d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ qui est un produit libre dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$). Il est clair qu'une restriction de $\mathcal{R}$ ne peut pas être engendrée seulement par les seules restrictions de $\mathcal{R}_i$. Dans le cadre mesuré, Ioana-Peterson-Popa traite le cas où les sous-relations sont ergodiques ([IPP05]) et le théorème suivant généralise leur résultat dans le cadre borélien (donc sans hypothèse d'ergodicité) en précisant que la partie « manquante » est en fait une sous-relation arborable.

**Théorème 23** (th. 2.63)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur $\mathrm{X}$, produit libre dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$) définies sur des parties boréliennes $\mathrm{A}_i$ de $\mathrm{X}$ telles que la réunion des $\mathrm{A}_i$ soit égale à $\mathrm{X}$. Pour toute partie borélienne $\mathrm{A}$ de $\mathrm{X}$, la restriction $\mathcal{R}_{|_\mathrm{A}}$ de $\mathcal{R}$ à $\mathrm{A}$ admet une décomposition en produit libre dénombrable de sous-relations de la forme*

$$\mathcal{R}_{|_\mathrm{A}} = \star_{i\in \mathrm{I}} \left(\star_{k_i \in \mathrm{K}(i)} \mathcal{S}_{k_i}\right) \star \mathcal{T},$$

*où, pour tout $k_i$ de l'ensemble dénombrable $\mathrm{K}(i)$, il existe un élément $\phi_{k_i}$ de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne $\mathrm{A}_{k_i}$ de $\mathrm{X}$ tel que*

$$\mathcal{S}_{k_i} = \phi_{k_i}^{-1} \mathcal{R}_{i|_{\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})}} \phi_{k_i},$$

*et où $\mathcal{T}$ désigne une sous-relation arborable de $\mathcal{R}$. De plus, pour tout $i$ de $\mathrm{I}$, la réunion des $\mathcal{R}_i$-saturés des buts $\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})$ des $\phi_{k_i}$ forme une partition (dénombrable et borélienne) du domaine de définition $\mathrm{A}_i$ de $\mathcal{R}_i$. Enfin, pour tout $i$ de $\mathrm{I}$ tel que $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}$ soit non vide, il existe $k_i$ dans $\mathrm{K}(i)$ tels que*

$$\mathrm{A}_{k_i} = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_{i|_{\mathrm{A}_i\cap \mathrm{A}}}.$$

Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous développons une théorie des revêtements pour les *bouquets de cercles boréliens* (déf. 4.3) qui sont des cas très particuliers de graphes boréliens. Les groupoïdes boréliens libres jouent un rôle central, puisque nous explicitons une correspondance bijective (th. 4.17) entre les revêtements boréliens d'un bouquet de cercles borélien et les sous-groupoïdes de son groupoïde fondamental borélien libre. Ces développements nous ont paru très intéressants car ils prolongent la théorie des revêtements d'un bouquet de cercles et cette dernière permet de démontrer des résultats non triviaux pour les groupes libres. Citons par exemple le théorème de Howson :

**Théorème 24** (Howson, [How54])**.** *Soient $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux sous-groupes de rang fini d'un groupe libre $\Gamma$. Alors $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est de rang fini.*

Les mêmes idées nous permettent de démontrer des résultats sur les intersections de sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne arborable engendrées par un nombre fini de générateurs (cf. prop. 4.21). Enfin nous terminons avec une autre application concernant les groupoïdes boréliens :

**Théorème 25** (th. 4.23)**.** *Soit $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ un morphisme de groupoïdes boréliens surjectif où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien libre sur $\mathrm{X}$ et $\mathcal{H} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{H}_i$ est un produit libre de groupoïdes boréliens sur un espace borélien standard $\mathrm{Y}$. Alors il existe des sous-groupoïdes $\mathcal{G}_i$ de $\mathcal{G}$ définis sur $\mathrm{X}$ tels que $\mathcal{G} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{G}_i$ et vérifiant*

$$\forall i \in \mathrm{I} \qquad f(\mathcal{G}_i) = \mathcal{H}_i.$$

En théorie des groupes, ce théorème est principalement dû à Grushko (cf. [Gru]) et est un résultat subtil concernant les parties génératrices d'un produit libre (voir [Imr84] et [Sta65] pour des preuves topologiques).

La théorie de Bass-Serre pour les groupoïdes boréliens que nous développons est une généralisation de la théorie classique pour les groupes où l'espace X est réduit à un singleton. Comme nous avons essayé de le mettre en évidence dans cette introduction, plusieurs phénomènes nouveaux apparaissent dans ce contexte. Parmi ceux-ci, mentionnons :

- la difficile notion de « quotient » qui est ici un espace singulier. Ceci a notamment pour conséquence qu'il n'existe pas de désingularisation « canonique ». En un certain sens, ceci est dû au fait qu'un isomorphisme partiel de l'espace peut toujours être découpé en un ensemble dénombrable d'isomorphismes partiels ;
- l'équivalence orbitale est dans ce contexte une notion d'isomorphisme trop forte et doit être remplacée par la notion d'isomorphisme stable. Voici deux raisons à l'origine de ceci. Tout d'abord, la notion de relation d'équivalence borélienne « triviale » : dans le contexte borélien/mesuré, les relations lisses ont un rôle analogue à la relation dont les classes sont réduites à des singletons. D'autre part, étant donné une action d'une relation d'équivalence borélienne sur un champ de graphes borélien, toute l'information sur l'action est en fait contenue dans toute restriction à un domaine complet de la relation ;

- c'est dans la catégorie des groupoïdes boréliens qu'il existe une notion satisfaisante de produit amalgamé de relations et ces constructions généralisent celles déjà connues et introduites par Gaboriau dans [Gab00]. Ainsi le bon cadre est en fait celui des groupoïdes boréliens et nous obtenons ainsi une généralisation naturelle de la théorie de Bass-Serre.

Mentionnons pour terminer qu'un lien probablement très intéressant mériterait d'être étudié entre la théorie de Bass-Serre ici développée et le rôle qu'elle pourrait éventuellement jouer dans les algèbres d'opérateurs, en particulier les facteurs de type $\mathrm{II}_1$. Notons également que l'étude des groupoïdes boréliens pourrait quant à elle avoir des applications au niveau de l'équivalence orbitale, en particulier pour les relations d'équivalence boréliennes/mesurées qui ne peuvent provenir d'une action libre d'un groupe.

# Table des matières


**1 Introduction** **4**

**2 Relations d'équivalence boréliennes et arboretums** **18**
- I Prolégomènes . . . 18
  - 1 Quelques définitions et notations . . . 18
  - 2 Décomposition des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards . . . 23
- II Actions quasi-libres et arboralité . . . 34
- III $\mathcal{R}$-arboretums et amalgames de sous-relations . . . 38
  - 1 Produit libre de deux sous-relations . . . 38
  - 2 Produit amalgamé de deux sous-relations . . . 41
  - 3 Application . . . 44
- IV $\mathcal{R}$-arboretums et décompositions de $\mathcal{R}$ . . . 44
  - 1 Graphes de relations et désingularisations . . . 44
  - 2 Sous-relations d'un produit libre . . . 51

**3 Des relations d'équivalence aux groupoïdes boréliens** **57**
- I Groupoïdes boréliens et arboretums . . . 57
- II $\mathcal{G}$-arboretums . . . 68
  - 1 Graphes de groupoïdes et désingularisation . . . 68
  - 2 Structure de $\mathcal{G}$ . . . 75

**4 Groupoïdes boréliens libres et revêtements boréliens** **82**
- I Revêtements boréliens d'un graphe borélien . . . 82
  - 1 Graphes boréliens . . . 82
  - 2 Revêtements boréliens . . . 87
- II Applications . . . 90
  - 1 Sous-relations uniformément d'indice fini . . . 90
  - 2 Intersection de sous-relations arborables de rang fini . . . 91
  - 3 Théorème de Grushko . . . 93
- III Épilogue . . . 96

# Chapitre 2

# Relations d'équivalence boréliennes et arboretums

## I Prolégomènes

Dans cette première partie, nous rappelons quelques définitions concernant les relations d'équivalence boréliennes à classes dénombrables sur les espaces boréliens standards et introduisons les principaux objets de notre étude : les *espaces fibrés standards* (déf. 2.9) et les *actions* de relations d'équivalence boréliennes sur ces espaces (déf. 2.14). Ces notions ont d'abord été introduites par Gaboriau dans [Gab02] et ont été déterminantes pour définir les nombres de Betti $\mathrm{L}^2$ qui sont des invariants des relations d'équivalence mesurées. Rappelons qu'un exemple fondamental de relation d'équivalence mesurée est celui donné par les orbites d'une action par automorphismes boréliens préservant la mesure d'un groupe dénombrable sur un espace borélien standard de probabilité.

Nous donnons ensuite un certain nombre de propriétés concernant les actions de relations d'équivalence boréliennes sur les espaces fibrés standards, nous définissons la notion d'action *quasi-libre* (déf. 2.24) et montrons comment cette dernière interagit avec les relations d'équivalence boréliennes *lisses* qui sont les relations d'équivalence boréliennes les plus simples. Enfin, nous démontrons un théorème de décomposition des espaces fibrés standards munis de telles actions (th. 2.30). Les résultats de cette partie nous seront utiles tout au long de ce travail.

### 1 Quelques définitions et notations

Le couple $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ désignera toujours un espace borélien standard. Rappelons dès maintenant trois propriétés des espaces boréliens standards que nous utiliserons constamment :

- toute partie borélienne d'un espace borélien standard est encore un espace borélien standard ([Kec95] cor.13.4) ;
- une bijection borélienne entre espaces boréliens standards est un isomorphisme borélien ([Kec95] th.14.12) ;
- si $f$ est une application borélienne entre espaces boréliens standards et si la restriction de $f$ à une partie borélienne A est injective, alors $f(\mathrm{A})$ est une

partie borélienne. Si $f$ est de plus à fibres dénombrables, alors $f(\mathrm{A})$ est une partie borélienne pour toute partie borélienne A de l'espace borélien standard de départ ([Kec95] cor.15.2).

**Définition 2.1.** *Une relation d'équivalence borélienne sur* X *est une relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *sur* X *dont les classes sont dénombrables et telle que, comme sous-ensemble de* $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$*, la partie* $\mathcal{R}$ *soit borélienne (pour la* $\sigma$*-algèbre produit) dans* $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$.

> Les relations d'équivalence boréliennes que nous considérons sont par définition à classes dénombrables. Dans la littérature anglaise, elles sont connues sous le nom de « *countable* Borel equivalence relations ».

Dans la suite, nous noterons $\mathrm{X}/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient de X par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

*Exemple :* La relation d'égalité, notée $\Delta$, est une relation d'équivalence borélienne sur tout espace borélien standard, qu'on appelle la relation d'équivalence triviale. Dans ce cas, le quotient (muni de la structure borélienne quotient) est un espace borélien standard naturellement isomorphe à X.

*Remarque :* Si A désigne une partie borélienne de X, il existe une notion naturelle de relation d'équivalence borélienne induite sur A : il s'agit de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}} = \mathcal{R} \cap (\mathrm{A} \times \mathrm{A})$.

Deux relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}$ sur X et $\mathcal{R}'$ sur $\mathrm{X}'$ sont dites *orbitalement équivalentes* (ou *isomorphes*) s'il existe un isomorphisme entre les espaces boréliens standards X et $\mathrm{X}'$, c'est-à-dire une application bijective et bi-borélienne, tel que deux éléments de X sont $\mathcal{R}$-équivalents si et seulement si leurs images sont $\mathcal{R}'$-équivalentes.

Dans la suite, étant donné une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X, nous parlerons de *sous-relation* pour désigner une sous-relation d'équivalence borélienne de $\mathcal{R}$ définie sur une partie borélienne A de X. Notons que toute sous-relation de $\mathcal{R}$ sur A définit canoniquement une sous-relation de $\mathcal{R}$ sur X, les classes étant triviales sur le complémentaire de A.

*Exemple fondamental :* Si $\Gamma$ est un groupe dénombrable qui agit sur un espace borélien standard par automorphismes boréliens, alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\Gamma$ dont les classes sont les orbites de l'action de $\Gamma$ est une relation d'équivalence borélienne.

Un deuxième exemple fondamental de relation d'équivalence borélienne est obtenu lorsque l'on considère un *L-graphage* sur X (au sens de Levitt).

**Définition 2.2** (Levitt, [Lev95])**.** *Un L-graphage sur* X *est une famille dénombrable d'isomorphismes partiels* $\Phi = (\ \phi_i : \mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *où* $\mathrm{A}_i$ *et* $\mathrm{B}_i$ *sont des parties boréliennes de* X.

*Remarque :* Dans la suite, nous conviendrons d'appeler *source* et *but* les domaines de définition et d'arrivée des isomorphismes partiels.

Soit $\Phi$ un L-graphage sur X. Considèrons la plus petite relation d'équivalence pour laquelle la propriété suivante est satisfaite : s'il existe $i$ appartenant à I et si $x$

et $y$ sont deux éléments de X tels que $x$ appartienne à $\mathrm{A}_i$ et $y$ soit égal à $\phi_i(x)$, alors $x$ et $y$ sont équivalents. Cette relation d'équivalence borélienne est la relation d'équivalence borélienne *engendrée* par le L-graphage $\Phi$ et notée $\mathcal{R}_\Phi$. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne sur X, on dit que $\Phi$ est un L-graphage de $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_\Phi$ coïncident. Ainsi, un L-graphage de $\mathcal{R}$ donne naturellement à chaque classe de $\mathcal{R}$ une structure de graphe connexe, son graphe de Cayley, dont les sommets sont les éléments de cette classe.

*Remarque :* Toute relation d'équivalence borélienne sur X admet un L-graphage : ceci est une conséquence immédiate du théorème 1 de Feldman-Moore ([FM77a]).

**Définition 2.3** (Kechris-Miller, [KM04])**.** *Un graphage* $\mathrm{G}r$ *sur* X *est une partie borélienne de* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *qui est symétrique, d'intersection vide avec la diagonale et localement dénombrable, c'est-à-dire que les projections sur les facteurs sont à pré-images dénombrables. Nous dirons que deux éléments* $x$ *et* $y$ *de* X *sont voisins si* $(x, y)$ *appartient à* $\mathrm{G}r$*.*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne et $\mathrm{G}r$ un graphage sur X. On dit que $\mathrm{G}r$ est un graphage de $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par la relation « être voisin ». Étant donné un L-graphage $\Phi = (\phi_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sur X, on peut lui associer un graphage $\mathrm{G}r_\Phi$ qui engendre la même relation d'équivalence : deux éléments $x$ et $y$ distincts de X appartiennent à $\mathrm{G}r_\Phi$ s'il existe $i$ dans I tel que

$$\phi_i(x) = y \qquad \text{ou} \qquad \phi_i(y) = x.$$

Réciproquement, à tout graphage $\mathrm{G}r$ sur X, est associé un L-graphage $\Phi_{\mathrm{G}r}$ qui engendre la même relation d'équivalence borélienne que $\mathrm{G}r$. Ceci est une conséquence du théorème de sélection que nous rappellerons dans le paragraphe suivant (cf. th. 2.10).

Une partie borélienne A de X est un *domaine fondamental* d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ si elle rencontre chaque classe de $\mathcal{R}$ en un unique élément. Le *saturé* $\mathcal{R} \cdot \mathrm{A}$ d'une partie borélienne A de X est la partie borélienne de X constituée des éléments $\mathcal{R}$-équivalents à un élément de A. Lorsque le saturé de A coïncide avec X, on dit que A est un *domaine complet* de $\mathcal{R}$. Deux relations déquivalence boréliennes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sur X et X$'$ respectivement sont *stablement orbitalement équivalentes* (ou *stablement isomorphes*) s'il existe des domaines complets A de $\mathcal{R}$ et A$'$ de $\mathcal{R}'$ telles que les restrictions de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}'$ à ces domaines complets soient orbitalement équivalentes.

**Définition 2.4** ([JKL02])**.** *Une relation d'équivalence borélienne sur* X *est lisse si elle admet un domaine fondamental.*

*Exemple :* Toute relation d'équivalence borélienne sur X à classes finies est lisse.

Les relations d'équivalence boréliennes lisses sont exactement les relations d'équivalence boréliennes telles que l'espace quotient (avec la structure borélienne quotient) soit un espace borélien standard. Autrement dit ce sont celles qui sont stablement orbitalement équivalentes à la relation triviale sur un espace borélien standard. Notons le fait important suivant.

**Lemme 2.5.** *Toute sous-relation d'une relation d'équivalence borélienne lisse est lisse.*

*Démonstration :* Par hypothèse, il existe un domaine fondamental A de la relation d'équivalence borélienne lisse $\mathcal{R}$ sur X. Soit $\Phi = (\phi_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un L-graphage de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ une sous-relation de $\mathcal{R}$. Étant donné un élément $x$ de X, l'ordre lexicographique sur les uplets d'éléments de I induit un ordre lexicographique sur la classe de $x$. Pour toute $\mathcal{S}$-classe, considérons alors l'élément de cette $\mathcal{S}$-classe qui est le plus proche de l'unique représentant dans A de la $\mathcal{R}$-classe qui la contient. On construit ainsi une partie borélienne de X qui est un domaine fondamental de $\mathcal{S}$. □

Nous allons maintenant définir la notion de *morphisme* de relations d'équivalence boréliennes puis celles de réduction et de morphisme complet.

**Définition 2.6.** *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence borélienne sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ *et* $\mathcal{R}'$ *une relation d'équivalence borélienne sur l'espace borélien standard* $(\mathrm{X}', \mathcal{B}_{\mathrm{X}'})$. *Un morphisme de relations d'équivalence boréliennes est une application borélienne de* X *dans* X′ *telle que deux éléments* $\mathcal{R}$*-équivalents de* X *ont des images* $\mathcal{R}'$*-équivalents dans* X′.

Remarquons qu'un morphisme de relations d'équivalence boréliennes induit une application au niveau des ensembles quotients. Notons également qu'un morphisme de relations d'équivalence boréliennes $f$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ injectif, surjectif et dont l'inverse est encore un morphisme est en fait une équivalence orbitale entre $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$. Nous venons ainsi de définir la catégorie des relations d'équivalence boréliennes : la notion d'*isomorphisme* entre deux relations d'équivalence boréliennes étant l'équivalence orbitale.

Si $f$ est une application borélienne de X dans X′ à pré-images dénombrables, on définit le *noyau* de $f$, noté $\mathrm{Ker}(f)$, qui est une relation d'équivalence borélienne sur X : par définition, deux éléments de X sont $\mathrm{Ker}(f)$-équivalents si leurs images par $f$ sont égales. Le noyau de $f$ est la relation triviale sur X si et seulement si $f$ est une application borélienne injective. Notons que le noyau d'un morphisme de relations d'équivalence boréliennes de $\mathcal{R}$ dans la relation triviale coïncide avec $\mathcal{R}$.

*Remarque :* Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne sur X, nous dirons qu'une application borélienne $f$ de X dans X est un *morphisme intérieur* si tout élément de X est $\mathcal{R}$-équivalent à son image par $f$. Dans le cas d'un morphisme intérieur défini seulement sur une partie borélienne de X, nous parlerons de *morphisme intérieur partiel*. Nous désignerons par $\mathrm{Int}(\mathcal{R})$ l'ensemble des morphismes intérieurs partiels de $\mathcal{R}$.

**Définition 2.7** (Réduction et morphisme complet). *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence borélienne sur* X *et* $\mathcal{R}'$ *une relation d'équivalence borélienne sur un espace borélien standard* X′. *On dit que* $\mathcal{R}$ *est réductible à* $\mathcal{R}'$ *s'il existe une application borélienne de* X *dans* X′ *telle que deux éléments de* X *sont* $\mathcal{R}$*-équivalents si et seulement si leurs images sont* $\mathcal{R}'$*-équivalents dans* X′. *Une telle application est appelée une réduction (borélienne).*

*Un morphisme de relations d'équivalence boréliennes $f$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ est dit complet si $f(\mathrm{X})$ est un domaine complet de $\mathcal{R}'$, autrement dit si tout élément de $\mathrm{X}'$ est $\mathcal{R}'$-équivalent à un élément dans l'image de $f$.*

*Remarque :* Une réduction d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X à une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}'$ sur $\mathrm{X}'$ induit une application injective entre les ensembles quotients $\mathrm{X}/\mathcal{R}$ et $\mathrm{X}'/\mathcal{R}'$. En outre, le noyau d'une réduction est une sous-relation de $\mathcal{R}$. De même, un morphisme complet de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ induit une application surjective entre les ensembles quotients $\mathrm{X}/\mathcal{R}$ et $\mathrm{X}'/\mathcal{R}'$.

Les définitions précédentes invitent à considérer les deux notions suivantes : celle de *bi-réductibilité* et celle d'*isomorphisme faible*. Deux relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sur X et $\mathrm{X}'$ respectivement sont *bi-réductibles* si $\mathcal{R}$ est réductible à $\mathcal{R}'$ et si $\mathcal{R}'$ est réductible à $\mathcal{R}$. Au niveau des ensembles quotients, ceci implique qu'il existe une injection de $\mathrm{X}/\mathcal{R}$ dans $\mathrm{X}'/\mathcal{R}'$ et une injection de $\mathrm{X}'/\mathcal{R}'$ dans $\mathrm{X}/\mathcal{R}$ : il existe donc une bijection entre les ensembles quotients d'après le théorème de Schröder-Bernstein. Si $f$ est une réduction complète de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$, nous dirons que $f$ est un *isomorphisme faible* de relations d'équivalence boréliennes : au niveau des ensembles quotients, $f$ induit une bijection.
*Remarque importante :* En fait, les trois notions suivantes sont équivalentes : bi-réductibilité, isomorphisme faible et équivalence orbitale stable. Nous renvoyons à [JKL02] pour une démonstration de l'équivalence entre bi-réductibilité et équivalence orbitale stable et nous montrerons (cf. rem. suivant lem. 2.13) que les notions d'isomorphisme faible et d'équivalence orbitale stable sont elles aussi équivalentes.

Comme nous allons être amenés à discuter des liens entre sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne sur X, introduisons dès à présent la notion de *conjugaison*. Le *pseudo-groupe plein* de $\mathcal{R}$, noté $[[\mathcal{R}]]$, est l'ensemble de tous les isomorphismes partiels de X dont le graphe est contenu dans $\mathcal{R}$. Si $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $\phi' : \mathrm{A}' \to \mathrm{B}'$ désignent deux éléments de $[[\mathcal{R}]]$, on définit alors les isomorphismes partiels suivants

$$\phi\phi' : \begin{cases} \phi'^{-1}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}') \longrightarrow \phi(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}') \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto \phi(\phi'(x)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \phi^{-1} : \begin{cases} \ \mathrm{B} \quad \longrightarrow \mathrm{A} \\ \phi(x) \longmapsto x. \end{cases}$$

*Remarque :* On rappelle qu'étant donné un L-graphage $\Phi$, un mot en les générateurs est dit *réduit* si sa source et son but sont définis de manière extrémale pour l'inclusion et que deux lettres successives dans le mot ne sont pas inverses l'une de l'autre.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X, $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un élément du pseudo-groupe plein de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ une sous-relation de $\mathcal{R}$ définie sur B. On définit alors sur A une sous-relation de $\mathcal{R}$ notée $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$ : deux éléments $x$ et $y$ sont $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$-équivalents si par définition $\phi(x)$ et $\phi(y)$ sont $\mathcal{S}$-équivalents. Ainsi, $\mathcal{S}$ et $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$ sont des sous-relations isomorphes via $\phi$. On dit que $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$ est la sous-relation déduite de $\mathcal{S}$ par *conjugaison* par $\phi$.

**Définition 2.8** (Sous-relations conjuguées)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X*, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sous-relations de $\mathcal{R}$ définies sur les parties boréliennes* A *et* $\mathrm{A}'$ *de* X*. On dit que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont conjuguées dans $\mathcal{R}$ si elles sont orbitalement* *équivalentes via un élément* $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}'$ *du pseudo-groupe plein de* $\mathcal{R}$*, autrement dit si* $\mathcal{S}' = \phi^{-1}\mathcal{S}\phi$*.*

Nous dirons également que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont *stablement conjuguées* dans $\mathcal{R}$ s'il existe des domaines complets A et A′ de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ respectivement sur lesquels les restrictions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont conjuguées dans $\mathcal{R}$.

## 2 Décomposition des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards

Nous allons dans un premier temps définir une notion centrale dans ce travail, la notion d'*action* d'une relation d'équivalence borélienne sur un espace fibré standard (déf. 2.14) et nous démontrons ensuite un résultat de décomposition pour de tels espaces fibrés standards (th. 2.30).

### Espaces fibrés standards et actions

**Définition 2.9** (Espace fibré standard)**.** *Un espace fibré standard* $(\mathrm{F}, \mathcal{B}_{\mathrm{F}})$ *est la donnée d'un espace borélien standard* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ *et d'une application borélienne (appelée projection)* $\pi : \mathrm{F} \to \mathrm{X}$ *surjective à pré-images dénombrables. La fibre* $\mathrm{F}_x$ *d'un élément* $x$ *de* X *est la pré-image de* $x$ *par* $\pi$*.*

*Exemple :* Comme sous-ensemble borélien de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, une relation d'équivalence borélienne définit naturellement deux espaces fibrés standards sur X via les projections $\pi_l$ et $\pi_r$ respectivement sur les première et deuxième composantes.

Une *section borélienne* $s$ de F est une application borélienne de X dans F telle que $\pi \circ s$ soit égale à l'identité. Si A est une partie borélienne de X et si $s$ n'est définie que sur A, alors nous parlerons de *section partielle*. Un espace fibré standard sur X admet toujours une section borélienne. Ceci est une conséquence du théorème suivant (voir [Kur66], [Kec95] pour des idées de démonstration) :

**Théorème 2.10** (Théorème de sélection)**.** *Soit* F *un espace fibré standard sur* X*. Alors il existe une famille dénombrable de sections partielles de* X *dont les images forment une partition borélienne et dénombrable de* X*. De plus, on peut toujours supposer qu'au moins l'une de ces sections partielles est une section borélienne, c'est-à-dire définie sur* X *tout entier.*

Ce résultat sera largement utilisé dans la suite. En voici quelques applications directes qui nous seront très utiles :

**Lemme 2.11.** *Soit* F *un espace fibré standard sur* X*. Alors il existe une numérotation borélienne des fibres de* F*, c'est-à-dire une application borélienne* $\mathrm{N} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathbf{N}^*$ *telle que la restriction de* N *à toute fibre de* F *soit injective.*

*Démonstration :* C'est une conséquence immédiate du théorème de sélection qui assure l'existence d'une famille dénombrable (que l'on peut supposer indexée par $\mathbf{N}^*$) de sections partielles de F dont les images forment une partition de F . □

*Remarque :* Bien entendu, pour les fibres finies de F, la numérotation se fait par un nombre fini d'entiers naturels et, quitte à renuméroter les fibres de F, on peut supposer que dans chaque fibre la numérotation commence à 1 et ne saute pas d'entiers naturels.

**Lemme 2.12.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X *et* A *un domaine complet de $\mathcal{R}$. Alors il existe un morphisme intérieur de $\mathcal{R}$ définie sur* X *et dont l'image est contenue dans* A.

*Démonstration :* Considérons l'intersection de $\mathcal{R}$ et de l'image réciproque de A par la projection de $X \times X$ sur le deuxième facteur : c'est un espace fibré standard sur X via la restriction de la projection de $X \times X$ sur le premier facteur dont la fibre d'un élément de X est constituée des éléments de A appartenant à sa $\mathcal{R}$-classe. Le théorème de sélection assure l'existence d'une section borélienne de cet espace fibré standard ; identifiée à une application borélienne de X dans A par projection sur le deuxième facteur, on obtient un morphisme intérieur de $\mathcal{R}$ comme souhaité. □

*Remarque :* Nous rencontrerons à diverses reprises des espaces fibrés standards sur X dont les fibres sont des parties de X. Une section partielle d'un tel espace fibré standard s'identifie de manière canonique à une application borélienne de X dans X. Nous utiliserons souvent cette identification que nous repréciserons chaque fois pour éviter toute ambiguïté.

**Lemme 2.13.** *Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations d'équivalence boréliennes sur* X *et* X′. *Supposons qu'il existe une réduction $f$ de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$. Alors il existe un domaine complet* A *de $\mathcal{R}$ tel que la restriction de $f$ à* A *soit une application borélienne injective. En particulier, la restriction de $f$ à* A *est une équivalence orbitale entre $\mathcal{R}_{|A}$ et ${\mathcal{R}'}_{|f(A)}$ .*

*Remarque :* La restriction de $f$ à A étant encore une réduction, on en déduit que $f(A)$ rencontre toutes les classes de la restriction de $\mathcal{R}'$ à $f(X)$. Si de plus $f$ est un morphisme complet, alors $f(A)$ est encore un domaine complet de $\mathcal{R}'$. Ainsi si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont faiblement isomorphes, alors elles sont stablement orbitalement équivalentes. Réciproquement, si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont stablement orbitalement équivalentes via $f : A \longrightarrow A'$, le lemme 2.12 permet d'étendre $f$ à X en une réduction complète de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$.

*Démonstration :* Considérons la partie borélienne de $f(X) \times X$ dont la fibre d'un élément $y$ de $f(X)$ est la pré-image de $y$ par $f$. Le théorème de sélection assure l'existence d'une section borélienne de cet espace fibré standard. En considérant la projection sur le deuxième facteur, on identifie cette dernière section borélienne avec une application borélienne de $f(X)$ dans X. Son image est une partie borélienne A de X comme souhaitée. □

Nous allons maintenant introduire la notion d'*action* pour une relation d'équivalence borélienne sur un espace fibré standard F sur X. Rappelons d'abord que le *produit fibré* de deux espaces fibrés standards $(F', \pi')$ et $(F'', \pi'')$ sur X est l'espace fibré standard $(F, \pi)$ où

$$F = F' \star F'' = \{(t', t'') \in F' \times F'' \ ; \ \pi'(t') = \pi''(t'')\}$$

et $\pi$ l'application borélienne de F dans X définie par $\pi(t', t'') = \pi'(t')$.

**Définition 2.14** (Gaboriau, [Gab02])**.** *Une $\mathcal{R}$-action (à gauche) sur l'espace fibré standard* $(F, \pi)$ *sur* X *est une application borélienne*

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{R}, \pi_r) \star (\mathrm{F}, \pi) & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ ((x,y),t) & \longmapsto & (x,y)\cdot t\end{array}$$

*telle que, pour tout triplet $(x, y, z)$ d'éléments $\mathcal{R}$-équivalents de* X *et pour tout $t$ appartenant à* F *dans la fibre de $z$, on ait*

$$(z,z)\cdot t = t \qquad et \qquad (x,y)\cdot((y,z)\cdot t) = (x,z)\cdot t.$$

*On dit alors que* $(\mathrm{F}, \pi)$ *est un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur* X *et que $\mathcal{R}$ agit sur* F.

*Remarque :* Pour qu'elle ait un sens la formule du produit ci-dessus impose que $(x, y) \cdot t$ soit un élément dans la fibre de $x$. De même on définit la notion d'action à droite que nous rencontrerons également par la suite.

Soit F un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur X. L'*orbite* d'un élément $f_x$ de F dans la fibre de $x$ de X est l'ensemble des $(y, x) \cdot f_x$ où $y$ décrit la $\mathcal{R}$-classe de $x$. En particulier, l'action de $\mathcal{R}$ sur F engendre une relation d'équivalence borélienne notée $\mathcal{R}_\mathrm{F}$ sur F : $f_x$ et $f_y$ sont $\mathcal{R}_\mathrm{F}$-équivalents si, par définition, $(x, y) \cdot f_y = f_x$. Puisque deux éléments $\mathcal{R}_\mathrm{F}$-équivalents de F se projettent dans X sur des éléments $\mathcal{R}$-équivalents, la projection est donc un morphisme de relations d'équivalence boréliennes.

*Exemple fondamental :* $(\mathrm{F}, \pi) = (\mathcal{R}, \pi_l)$ définit un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur X avec l'action « horizontale »

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{R}, \pi_r) \star (\mathcal{R}, \pi_l) & \longrightarrow & (\mathcal{R}, \pi_l) \\ ((x,y),(y,z)) & \longmapsto & (x,z).\end{array}$$

Les classes de $\mathcal{R}_\mathrm{F}$ sont ici les fibres de $\pi_r : \mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{X}$. Nous dirons que $(\mathcal{R}, \pi_l)$ est le *$\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique* gauche associé à $\mathcal{R}$.

De la même façon, nous avons le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique droit $(\mathcal{R}, \pi_r)$ avec son action (à droite) « verticale »

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{R}, \pi_r) \star (\mathcal{R}, \pi_l) & \longrightarrow & (\mathcal{R}, \pi_r) \\ ((x,y),(y,z)) & \longmapsto & (x,z).\end{array}$$

*Remarque :* Si $(\mathrm{F}, \pi)$ est un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur X et A une partie borélienne de X, on obtient alors une notion de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$-espace fibré standard *induit* sur A : il s'agit de la restriction de $(\mathrm{F}, \pi)$ à $(\pi^{-1}(\mathrm{A}), \pi_{|\pi^{-1}(\mathrm{A})})$.

Une section partielle d'un $\mathcal{R}$-espace fibré standard F étant donnée, on définit une sous-relation de $\mathcal{R}$ qui permet de retrouver les éléments de l'image de la section borélienne qui sont dans la même orbite sous l'action de $\mathcal{R}$.

**Définition 2.15** (Stabilisateur). *Si $s : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F}$ désigne une section partielle de* F, *le stabilisateur $Stab_\mathcal{R}(s)$ de $s$ est la sous-relation de $\mathcal{R}$ définie sur* A *suivante : deux éléments $x$ et $y$ de* A *sont $Stab_\mathcal{R}(s)$-équivalents si leurs images par $s$ sont $\mathcal{R}_\mathrm{F}$-équivalents, autrement dit*

$$x \sim_{Stab_\mathcal{R}(s)} y \qquad ssi \qquad (y,x)\cdot s(x) = s(y).$$

Puisque $s$ est une application borélienne injective entre espaces boréliens standards, son image est une partie borélienne de F. L'action de $\mathcal{R}$ induit une relation d'équivalence borélienne sur $s(\mathrm{A})$ : cette dernière n'est autre que la restriction de $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ à $s(\mathrm{A})$. Il est alors immédiat de constater que la projection sur X induit une équivalence orbitale entre la restriction de $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ à $s(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$. Nous appellerons *saturé* de l'image de $s$ le $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$-saturé de $s(\mathrm{A})$. Si $s$ est une section borélienne de F (c'est-à-dire si $\mathrm{A} = \mathrm{X}$), $s(\mathrm{X})$ est $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$-saturé si et seulement si $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ coïncide avec $\mathcal{R}$.

Nous définissons maintenant la notion de morphisme entre $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards sur X.

**Définition 2.16.** *Un morphisme $f : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F}'$ de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards est une application borélienne de* F *dans* F′ *telle que, si $x$ et $y$ sont $\mathcal{R}$-équivalents et si $f_x$ appartient à la fibre de $x$, alors*

$$f(\mathrm{F}_x) \subset \mathrm{F}'_x \quad \textit{et} \quad f\left((y,x) \cdot f_x\right) = (y,x) \cdot f(f_x).$$

*Remarque :* En particulier, un morphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards de F dans F′ induit une application de la fibre $\mathrm{F}_x$ dans la fibre $\mathrm{F}'_x$ pour tout $x$ de X. Un tel morphisme est dit injectif (respectivement surjectif) si c'est une application borélienne injective (resp. surjective) : au niveau des fibres, on obtient des applications de même nature. Remarquons également qu'un morphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards de F dans F′ induit un morphisme de relations d'équivalence boréliennes de $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathrm{F}'}$. En particulier, un isomorphisme entre F et F′ induit une équivalence orbitale entre $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{F}'}$.

Nous en venons à la notion de $\mathcal{R}$-espace fibré standard *homogène*. Ces $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards nous seront très utiles par la suite car bien souvent, nous commencerons par démontrer des résultats dans ce cas particulier.

**Définition 2.17** (Action transitive)**.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne et* F *un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur* X*. L'action de $\mathcal{R}$ sur* F *est dite transitive s'il existe un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ sur lequel la restriction de la projection de* F *sur* X *est injective. Dans ce cas, nous dirons que* F *est un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène.*

*Remarque :* Il découle de la définition qu'une action de $\mathcal{R}$ sur F est transitive si et seulement s'il existe une section partielle $s$ définie sur une partie borélienne A de X dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ : autrement dit, le saturé de $s(\mathrm{A})$ coïncide avec F (A est nécessairement un domaine complet de $\mathcal{R}$). Nous dirons qu'une telle section partielle $s$ de F est *saturante.*

Étant donné deux sections partielles saturantes d'un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène, il existe un lien étroit entre leurs stabilisateurs que nous explicitons maintenant.

**Proposition 2.18.** *Soit $s : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $s' : \mathrm{A}' \longrightarrow \mathrm{F}$ deux sections partielles saturantes d'un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène* F*. Alors leurs stabilisateurs $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ et $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$ sont deux sous-relations de $\mathcal{R}$ stablement conjuguées.*

*Démonstration :* Considérons le sous-ensemble borélien $\Xi$ de $\mathcal{R}$ constitué des couples d'éléments $(a, a')$ de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}'$ tels que $s(a)$ et $s'(a')$ appartiennent à la même orbite.

Puisque le saturé de $s'(\mathrm{A})$ contient $s(\mathrm{A})$, la restriction de $\pi_l$ à $\Xi$ induit sur $\Xi$ une structure d'espace fibré standard. Soit $f'$ une section borélienne de $(\Xi, \pi_l)$ : $\pi_r \circ f'$ est alors une réduction $r$ de $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ dans A dans $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$ sur A$'$ qui de plus est un morphisme intérieur de $\mathcal{R}$ vérifiant

$$s'(r(x)) = (r(x), x) \cdot s(x).$$

Puisque le saturé de $s(\mathrm{A})$ contient le saturé de $s'(\mathrm{A}')$, on en déduit que $r(\mathrm{A})$ est un domaine complet de $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$ et, comme nous l'avons déjà mentionné, ceci entraîne que $r$ soit une équivalence orbitale stable entre $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ et $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$. □

*Remarque 1 :* La proposition précédente assure, qu'étant donné un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène sur X, le stabilisateur d'une section partielle saturante est unique à équivalence orbitale stable près.

*Remarque 2 :* On déduit de la proposition précédente le fait suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises : si $s''$ est une section partielle (*a priori* non saturante) de F, alors le stabilisateur de $s'' : \mathrm{A}'' \longrightarrow \mathrm{F}$ est stablement conjugué à une restriction de $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ où $s$ est une section partielle saturante. En effet, le saturé de $s''(\mathrm{A}'')$ est un sous-espace fibré standard F$''$ de la restriction de F à $\mathcal{R} \cdot \mathrm{A}''$ qui est homogène de section partielle saturante $s''$. Considérons la projection sur X de l'intersection de F$''$ et de $s(\mathrm{A})$ : c'est une partie borélienne B de A telle que $\mathcal{R} \cdot \mathrm{B}$ et $\mathcal{R} \cdot (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})$ forment une partition de X et telle que la restriction de $s$ à B soit alors une section partielle saturante de F$''$. La proposition précédente assure alors que $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s'')$ et $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_{|\mathrm{B}}) = \mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)_{|\mathrm{B}}$ soient stablement conjugués.

Soit $\mathrm{F}_1$ et $\mathrm{F}_2$ deux $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards sur X. Désignons par $s_1$ et $s_2$ des sections partielles de $\mathrm{F}_1$ et $\mathrm{F}_2$ définies sur la partie borélienne A de X. Supposons de plus que $f$ soit un morphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards de $\mathrm{F}_1$ dans $\mathrm{F}_2$ qui envoie $s_1(\mathrm{A})$ sur $s_2(\mathrm{A})$ : le stabilisateur de $s_1$ est alors une sous-relation du stabilisateur de $s_2$. Plus précisément, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 2.19.** *Soit* $(\mathrm{F}_1, \pi_1)$ *et* $(\mathrm{F}_2, \pi_2)$ *deux* $\mathcal{R}$*-espaces fibrés standards sur* X *et deux sections partielles* $s_i : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F}_i$ *définies sur un domaine complet* A *de* $\mathcal{R}$*. Si* $s_1$ *est saturante, alors il existe un morphisme* $f : \mathrm{F}_1 \longrightarrow \mathrm{F}_2$ *de* $\mathcal{R}$*-espaces fibrés standards qui envoie* $s_1(\mathrm{A})$ *sur* $s_2(\mathrm{A})$ *si et seulement si le stabilisateur* $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$ *est une sous-relation de* $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_2)$*. Si de plus* $s_2$ *est saturante, alors* $f$ *est surjectif.*

*Démonstration :* Supposons que le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$ soit une sous-relation de $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_2)$. Si $f_x$ appartient à la $\mathrm{F}_1$-fibre d'un élément $x$ de X, alors par hypothèse il existe un élément $y$ dans la classe de $x$ tel que $f_x$ appartienne à l'orbite de $s_1(y)$. On définit alors $f(f_x)$ comme l'image par le couple d'éléments $(x, y)$ de $s_2(y)$. Cette définition ne dépend pas du choix du représentant $y$ puisque deux éléments $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$-équivalents sont $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_2)$-équivalents par hypothèse. Enfin, supposons que $s_2$ soit de plus saturante. On a alors

$$\mathrm{F}_2 = \mathcal{R} \cdot s_2(\mathrm{A}) = \mathcal{R} \cdot f(s_1(\mathrm{A})) = f(\mathcal{R} \cdot s_1(\mathrm{A})) = f(\mathrm{F}_1).$$

□

On en déduit le fait important suivant :

**Proposition 2.20.** *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence borélienne et* F *un* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard sur* X*. S'il existe une section borélienne* $s$ *de* F *telle que* $s(\mathrm{X})$ *soit un domaine fondamental de* $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$*, alors* F *est isomorphe au* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard canonique.*

*Démonstration :* Le stabilisateur de $s$ étant la relation triviale par hypothèse, le lemme précédent assure l'existence d'un morphisme surjectif $f$ de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards entre F et le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique (gauche) envoyant l'image de la section borélienne $s$ sur la diagonale. Il ne reste plus qu'à voir que ce morphisme est injectif. Par l'absurde, supposons que $f_x$ et $f'_x$ soient deux éléments distincts dans la F-fibre d'un élément $x$ de X tels que leurs images par $f$ soient égales dans le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique. Il existerait alors deux éléments $y$ et $z$ distincts de X tels que $f_x$ et $f'_x$ appartiennent respectivement aux orbites de $s(y)$ et $s(z)$. Mais par suite les images respectives par les couples d'éléments $(y, x)$ et $(z, x)$ des éléments $f(s(y))$ et $f(s(z))$ de la diagonale de $\mathcal{R}$ seraient égales dans le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique. □

Nous allons maintenant voir que certains $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards peuvent se plonger dans le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique et nous utiliserons ce fait à plusieurs reprises.

**Lemme 2.21.** *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence borélienne et* F *un* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard sur* X *admettant une section partielle* $s$ *définie sur* A *telle que* $s(\mathrm{A})$ *soit un domaine fondamental de* $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$*. Alors il existe un* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard* F′ *sur* X *contenant* F *et ayant une section borélienne* $s'$ *qui prolonge* $s$ *à* X *et telle que* $s'(\mathrm{X})$ *soit un domaine fondamental pour l'action de* $\mathcal{R}$ *sur* F′*.*

*Remarque :* De l'existence d'une section borélienne de F′ dont l'image est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{R}$, on en déduit que le $\mathcal{R}$-espace fibré standard F′ est isomorphe au $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique d'après la proposition précédente.

*Démonstration :* Puisque l'image de $s$ est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{R}$ sur F, on en déduit que A est un domaine complet de $\mathcal{R}$. Considérons l'espace fibré standard réunion disjointe de $\mathrm{F}_{|\mathrm{A}}$ et de $\pi_l^{-1}(\mathrm{A}) \cap \pi_r^{-1}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{A})$ qui est un espace fibré standard F′ sur A via la restriction de $\pi_l$. Par construction, F′ contient $\mathrm{F}_{|\mathrm{A}}$ et les actions de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ sur $\mathrm{F}_{|\mathrm{A}}$ et de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ sur la restriction à A de l'espace fibré standard canonique gauche se prolongent en une action de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ sur F′. Enfin, puisque A est un domaine complet de $\mathcal{R}$, F′ s'étend par équivariance en un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur X comme souhaité en définissant la section borélienne $s'$ de F′ de telle sorte qu'elle coïncide avec $s$ sur A et avec « l'identité » sur le complémentaire de A dans X. □

Nous avons déjà mentionné que la donnée d'un $\mathcal{R}$-espace fibré standard F définit naturellement une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ sur l'espace borélien standard F. Le cas où $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ est lisse va particulièrement nous intéresser dans notre étude des relations d'équivalence boréliennes arborables (cf. § II).

**Définition 2.22** (Action lisse)**.** *Soit* F *un* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard sur* X*. L'action de* $\mathcal{R}$ *sur* F *est lisse (on dit aussi que* $\mathcal{R}$ *agit de manière lisse sur* F*) si la relation d'équivalence borélienne* $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ *sur* F *est lisse.*

*Exemple :* L'action de $\mathcal{R}$ sur l'espace fibré standard canonique est lisse ; il en est de même de toute sous-relation de $\mathcal{R}$ puisqu'une sous-relation d'une relation lisse est elle-même lisse (cf. lem. 2.5). Plus généralement, si $\mathcal{R}$ agit de manière lisse sur un espace fibré standard F, il en est de même de chacune de ses sous-relations.

Nous allons donner une caractérisation des actions lisses que nous utiliserons constamment et qui est une conséquence du lemme suivant.

**Lemme 2.23.** *Pour tout $\mathcal{R}$-espace fibré standard* F *sur* X*, il existe une famille dénombrable* $(s_i : \mathrm{A}_i \longrightarrow \mathrm{F})_{i\in\mathrm{I}}$ *de sections partielles de* F *dont les saturés* $\mathrm{F}_i$ *des images* $s_i(\mathrm{A}_i)$ *forment une partition* $\mathcal{R}_\mathrm{F}$*-invariante de* F*.*

*Remarque :* Puisque par définition $\mathcal{R}_{\mathrm{F}|_{\mathrm{F}_i}}$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{F}|_{s_i(\mathrm{A}_i)}}$ sont stablement orbitalement équivalentes, on en déduit qu'il en est de même de $\mathcal{R}_{\mathrm{F}|_{\mathrm{F}_i}}$ et $\mathrm{Stab}_\mathcal{R}(s_i)$.

*Démonstration :* Donnons-nous une numérotation borélienne des fibres de F et considérons la section borélienne qui, à chaque élément de X, associe le plus petit élément dans sa fibre. Si le complémentaire du saturé de l'image de cette section borélienne est vide, c'est terminé. Sinon on considère la section partielle définie par les plus petits éléments restants dans chaque fibre puis le saturé de l'image de cette dernière. En continuant ainsi, on construit à chaque étape une nouvelle section partielle en prenant dans chaque fibre les éléments les plus petits restants dans le complémentaire des saturés des images des sections partielles précédemment construites. Cette construction fournit une exhaustion de F puisqu'un élément de numéro $n$ dans une fibre de F a forcément été considéré avant la $n^\mathrm{e}$ étape. □

**Définition 2.24** (Action quasi-libre)**.** *Soit* F *un* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard sur* X*. L'action de* $\mathcal{R}$ *sur* F *est quasi-libre (on dit encore que* $\mathcal{R}$ *agit quasi-librement sur* F*) si le stabilisateur de toute section partielle de* F *est une sous-relation lisse de* $\mathcal{R}$*.*

On obtient alors la caractérisation suivante :

**Proposition 2.25.** *Étant donné un* $\mathcal{R}$*-espace fibré standard* F *sur* X*, l'action est quasi-libre si et seulement si* $\mathcal{R}$ *agit de manière lisse sur* F*, c'est-à-dire si* $\mathcal{R}_\mathrm{F}$ *est lisse.*

*Démonstration :* L'implication réciproque est claire car nous avons déjà mentionné que le stabilisateur de toute section partielle $s : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F}$ est orbitalement équivalent à $\mathcal{R}_{\mathrm{F}|_{s(\mathrm{A})}}$ qui est une sous-relation de $\mathcal{R}_\mathrm{F}$. Supposons maintenant l'action quasi-libre et construisons un domaine fondamental de $\mathcal{R}_\mathrm{F}$. Le lemme précédent assure l'existence d'une famille dénombrable $(s_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sections partielles de F dont les saturés des images forment une partition $\mathcal{R}_\mathrm{F}$-invariante de F. Le stabilisateur de chacune de ces sections partielles $s_i$ étant lisse, considérons la restriction de $s_i$ à un domaine fondamental $\mathrm{D}_i$ de son stabilisateur : la réunion sur I des $s(\mathrm{D}_i)$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_\mathrm{F}$. □

### Décomposition des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards

Nous allons à présent introduire une classe de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards fondamentaux pour une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X.

*Exemple fondamental :* Si $\mathcal{S}$ est une sous-relation de $\mathcal{R}$ définie sur X, alors $\mathcal{S}$ agit sur $\mathcal{R}$ via l'action induite par celle de « $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}$ ». En effet, considérons $\mathcal{R}$ munie de ses deux structures de $\mathcal{R}$-espace fibré standard canoniques et remarquons que la projection $\pi_l : \mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ est invariante sous l'action verticale de $\mathcal{R}$ (et donc de $\mathcal{S}$) sur $(\mathcal{R}, \pi_r)$. De plus, puisque $\mathcal{S}$ est une sous-relation de $\mathcal{R}$, elle agit également de manière lisse sur $(\mathcal{R}, \pi_r)$. Soit $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ l'espace quotient de $\mathcal{R}$ par la relation d'équivalence borélienne engendrée par cette action. Comme les actions horizontale et verticale de « $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}$ » commutent, on en déduit que c'est un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur X dont la projection sur X et l'action de $\mathcal{R}$ sont induites par celles du $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique gauche $(\mathcal{R}, \pi_l)$ : c'est le *$\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique gauche associé au couple* $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$. De plus, la diagonale $d$ de ce dernier passe au quotient sous l'action de $\mathcal{S}$ et le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $(\mathcal{R}/\mathcal{S}, \pi_l)$ est naturellement muni d'une section borélienne $d_{\mathcal{S}}$ dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}$ et dont le stabilisateur est $\mathcal{S}$. Notons également que dans le cas où la sous-relation $\mathcal{S}$ est triviale, $(\mathcal{R}/\mathcal{S}, \pi_l)$ n'est autre que le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique gauche.

*Remarque :* La construction précédente s'étend au cas de sous-relations définies sur un domaine complet A de $\mathcal{R}$ en considérant l'action de $\mathcal{S}$ sur $(\mathcal{R} \cap \pi_r^{-1}(\mathrm{A}), \pi_r)$. Dans ce cas, le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ est naturellement muni d'une section partielle $d_{\mathcal{S}}$ définie sur A dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}$ et dont le stabilisateur est $\mathcal{S}$. En particulier, $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ est un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène et $d_{\mathcal{S}}$ une section partielle saturante.

Remarquons que l'on peut donner une description explicite de $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ en tant qu'espace fibré standard sur X. En effet, il suffit pour ceci de se donner une numérotation borélienne des fibres de l'espace fibré standard canonique gauche (cf. lem. 2.11). Considérons la partie borélienne de $(\mathcal{R}, \pi_l)$ constituée des paires $(x, y)$ où $y$ désigne l'élément de plus petit numéro dans sa $\mathcal{S}$-classe. L'espace fibré standard obtenu est alors isomorphe à l'espace fibré standard $\mathcal{R}/\mathcal{S}$.

De la même manière, on peut également considérer le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique droit et faire agir $\mathcal{S}$ à gauche. On obtient alors le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\mathcal{S}\backslash\mathcal{R}$. Soit S la symétrie par rapport à la diagonale :

$$\mathrm{S} : \begin{cases} \mathcal{R} & \longrightarrow \mathcal{R} \\ (x, y) & \longmapsto (y, x). \end{cases}$$

Soit $x$, $x'$ et $y$ trois éléments $\mathcal{R}$-équivalents tels que $x$ et $x'$ appartiennent à la même $\mathcal{S}$-classe. Puisque les images de $\mathrm{S}(x, y)$ et $\mathrm{S}(x', y)$ sont égales dans l'espace quotient $\mathcal{S}\backslash\mathcal{R}$, cette application passe au quotient et on obtient l'application borélienne

$$\widetilde{\mathrm{S}} : (\mathcal{R}/\mathcal{S}, \pi_l) \longrightarrow (\mathcal{S}\backslash\mathcal{R}, \pi_r)$$

qui est un isomorphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards.

Étant donné une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X, nous venons de voir qu'il existe des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards remarquables, ceux de la forme $\mathcal{R}/\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est une sous-relation de $\mathcal{R}$ définie sur un domaine complet A de $\mathcal{R}$. Nous allons maintenant démontrer que tous les $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards homogènes sont en fait de cette forme, puis nous en déduirons un résultat général de décomposition des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards à partir de ces derniers. Désignons par $\psi$ l'application qui, à une sous-relation $\mathcal{S}$ définie sur un domaine complet A de $\mathcal{R}$, associe le $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène $\mathcal{R}/\mathcal{S}$.

**Proposition 2.26.** *L'application $\psi$ est une bijection de l'ensemble des sous-relations définies sur des domaines complets de $\mathcal{R}$ à conjugaison stable près dans l'ensemble des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards homogènes définis à isomorphisme près. Si de plus $\mathcal{S}_1$ est une sous-relation de $\mathcal{S}_2$, alors $\psi$ induit un morphisme surjectif de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$ envoyant $d_{\mathcal{S}_1}$ sur $d_{\mathcal{S}_2}$.*

*Démonstration :* Montrons que l'application $\psi$ est surjective ; considérons un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène F et désignons par $s$ une section partielle saturante de F définie sur la partie borélienne A. Nous avons vu (cf. lem. 2.19 avec $s_1 = s$ et $s_2 = d_{\mathcal{S}}$) que dans ce cas il existe un morphisme surjectif de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards de F dans $\mathcal{R}/\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$. Si ce morphisme n'était pas injectif, alors il existerait deux éléments $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$-équivalents de A dont les images par $s$ ne seraient pas dans la même orbite sous l'action de $\mathcal{R}$, ce qui est absurde.

Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux sous-relations de $\mathcal{R}$ (définies sur les domaines complets $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_2$ de $\mathcal{R}$) stablement conjuguées, alors les $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards $\mathcal{R}/\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$ sont isomorphes. En effet, par hypothèse, il existe des domaines complets $\mathrm{B}_1$ et $\mathrm{B}_2$ de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ respectivement sur lesquels les relations induites sont orbitalement équivalentes via un isomorphisme partiel de $\mathcal{R}$. Ce dernier induit donc un isomorphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards entre les restrictions de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_1$ à $\mathrm{B}_1$ et de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$ à $\mathrm{B}_2$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}/\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$ soient isomorphes via l'isomorphisme $f$. L'image par $f$ de la section partielle saturante $d_{\mathcal{S}_1}$ définie sur $\mathrm{A}_1$ est une section partielle saturante de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$. Mais ceci implique (cf. prop. 2.18) que les sous-relations $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ soient stablement conjuguées. Enfin, si $\mathcal{S}_1$ est une sous-relation de $\mathcal{S}_2$ définie sur un domaine complet A de $\mathcal{R}$, alors à chaque $\mathcal{S}_1$-classe on peut lui associer la $\mathcal{S}_2$-classe qui la contient : cette application induit un morphisme surjectif de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$ qui envoie la section partielle saturante $d_{\mathcal{S}_1}$ de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_1$ sur la section partielle saturante $d_{\mathcal{S}_2}$ de $\mathcal{R}/\mathcal{S}_2$. $\square$

Comme cas particulier de la proposition précédente, précisons le cas où $\mathcal{S}_1$ est la sous-relation triviale :

**Corollaire 2.27.** *Toute sous-relation $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ définie sur un domaine complet* A *de $\mathcal{R}$ induit un morphisme surjectif du $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique gauche sur le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ qui envoie la restriction de la section diagonale $d$ à* A *sur la section partielle saturante $d_{\mathcal{S}}$.*

Nous allons décrire plus en détail les sections partielles de $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est une sous-relation définie sur un domaine complet A de $\mathcal{R}$. Une telle section $s$ est une application borélienne qui, à un élément de X, associe une $\mathcal{S}$-classe contenue dans sa $\mathcal{R}$-classe. Le théorème 2.10 assure qu'une telle section partielle se relève en un morphisme partiel intérieur de $\mathcal{R}$ à valeurs dans A. Désignons par $\mathrm{SP}(\mathcal{R}/\mathcal{S})$ l'ensemble des sections partielles de $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ et considérons l'application suivante

$$\Xi\colon \begin{cases} \qquad \mathrm{Int}(\mathcal{R}) & \longrightarrow \mathrm{SP}(\mathcal{R}/\mathcal{S}) \\ (\phi : \mathrm{A}_\phi \longrightarrow \mathrm{A}) \longmapsto & (s : x \longmapsto [\phi(x)]_{\mathcal{S}})\,. \end{cases}$$

L'application $\Xi$ est naturellement surjective comme nous l'avons vu et il est facile de calculer son « défaut d'injectivité ». En effet, si deux morphismes intérieurs partiels $\phi$ et $\phi'$ de $\mathcal{R}$ ont la même image par $\Xi$, c'est que, pour tout élément $x$ de leur source commune, $\phi(x)$ et $\phi'(x)$ appartiennent à la même $\mathcal{S}$-classe.

De plus, puisque $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ est un $\mathcal{R}$-espace fibré standard homogène, $s$ est une section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ saturante si et seulement si $\phi(\mathrm{A}_\phi)$ est un domaine complet de $\mathcal{S}$ pour tout $\phi$ dans $\Xi^{-1}(s)$. Autrement dit, l'application $\Xi$ fait se correspondre les morphismes intérieurs partiels $\mathcal{S}$-complets de $\mathcal{R}$ et les sections partielles saturantes de $\mathcal{R}/\mathcal{S}$. De même, il n'est pas difficile de voir que $\Xi$ fait se correspondre les sections partielles dont les stabilisateurs sont les restrictions de $\mathcal{S}$ à leurs sources et les morphismes intérieurs partiels de $\mathcal{R}$ qui sont des $\mathcal{S}$-réductions.

Nous souhaitons maintenant étendre la proposition 2.26 au cas général des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards. Pour cela, nous allons nous intéresser aux familles dénombrables de sous-relations de $\mathcal{R}$.

À toute famille dénombrable $(\mathrm{X}_i, \mathcal{R}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de relations d'équivalence boréliennes, on associe la relation d'équivalence borélienne $(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathcal{R}})$ où $\widetilde{\mathrm{X}}$ désigne la réunion disjointe des espaces boréliens standards $\mathrm{X}_i$ et $\widetilde{\mathcal{R}}$ la plus petite relation d'équivalence borélienne sur $\widetilde{\mathrm{X}}$ qui coïncide sur chaque $\mathrm{X}_i$ avec $\mathcal{R}_i$. Nous dirons que $f$ est un morphisme de la famille $(\mathrm{X}_i, \mathcal{R}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ dans la famille $(\mathrm{X}'_j, \mathcal{R}'_j)_{j\in \mathrm{J}}$ si $f$ est un morphisme de relations d'équivalence boréliennes de $(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathcal{R}})$ dans $(\widetilde{\mathrm{X}'}, \widetilde{\mathcal{R}'})$. On étend de même les définitions de réduction, de morphisme complet et d'équivalence orbitale au cas des familles dénombrables de relations d'équivalence boréliennes.

Dans le cas de sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur $\mathrm{X}$ donnée, nous avons la définition suivante :

**Définition 2.28.** *Soit $(\mathrm{A}_i, \mathcal{S}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(\mathrm{A}'_j, \mathcal{S}'_j)_{j\in \mathrm{J}}$ deux familles dénombrables de sous-relations de $\mathcal{R}$ où les $\mathrm{A}_i$ et $\mathrm{A}'_j$ sont des parties boréliennes de $\mathrm{X}$ (non disjointes a priori). On dit que les deux familles de sous-relations sont stablement conjuguées si les relations d'équivalence boréliennes $(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathcal{S}})$ et $(\widetilde{\mathrm{A}'}, \widetilde{\mathcal{S}'})$ sont stablement isomorphes via un isomorphisme partiel $\phi : \mathrm{A} \subset \widetilde{\mathrm{A}} \longrightarrow \mathrm{A}' \subset \widetilde{\mathrm{A}'}$ tel que, pour tout $x$ de $\mathrm{A}$, $x$ et $\phi(x)$ vus comme des éléments de $\mathrm{X}$ soient $\mathcal{R}$-équivalents.*

*Remarque :* On vérifie facilement qu'« être stablement conjuguée » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des familles dénombrables de sous-relations de $\mathcal{R}$.

Étant donné une famille dénombrable $(\mathrm{A}_i, \mathcal{S}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de sous-relations de $\mathcal{R}$, si l'on partitionne chaque $\mathrm{A}_i$ en une famille dénombrable et borélienne de parties $\mathcal{S}_i$-saturées, on définit ainsi une nouvelle famille dénombrable de sous-relations de $\mathcal{R}$ : nous dirons qu'une telle famille est un *raffinement* de la première.

**Lemme 2.29.** *Soit $(\mathrm{A}_i, \mathcal{S}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(\mathrm{A}'_j, \mathcal{S}'_j)_{j\in \mathrm{J}}$ deux familles dénombrables de sous-relations de $\mathcal{R}$. Les deux familles sont stablement conjuguées si et seulement si, quitte à les raffiner, il existe une bijection $b$ de $\mathrm{I}$ dans $\mathrm{J}$ telle que $(\mathrm{A}_i, \mathcal{S}_i)$ soit stablement conjuguée à $(\mathrm{A}'_{b(i)}, \mathcal{S}'_{b(i)})$ pour tout $i$.*

*Démonstration :* Désignons par A et A′ les parties boréliennes de $\widetilde{\mathrm{A}}$ et $\widetilde{\mathrm{A}}'$ respectivement sur lesquelles $\widetilde{\mathcal{S}}$ et $\widetilde{\mathcal{S}}'$ sont orbitalement équivalentes via un isomorphisme partiel $\phi$ tel que $x$ et $\phi(x)$ vus comme des éléments de X soient $\mathcal{R}$-équivalents pour tout $x$ de A. Pour tout $i$ de I, $\mathrm{A}\cap\mathrm{A}_i$ est un domaine complet de $(\mathrm{A}_i,\mathcal{S}_i)$ et son image par $\phi$ est une partie borélienne de A′ qui se partitionne en une famille dénombrable de parties boréliennes grâce aux $\mathrm{A}'_j$. En utilisant $\phi^{-1}$ et le découpage obtenu selon les $\mathrm{A}'_j$, la partie borélienne $\mathrm{A}\cap\mathrm{A}_i$ se partitionne naturellement à son tour, et par suite, il en est de même de $\mathrm{A}_i$ de manière $\mathcal{S}_i$-équivariante. □

*Remarque :* L'argument précédent donne de la même façon des caractérisations des notions de morphismes, de réduction, de morphisme complet et d'équivalence orbitale. En particulier, $f$ est un morphisme de la famille $(\mathrm{X}_i,\mathcal{R}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ dans la famille $(\mathrm{X}'_j,\mathcal{R}'_j)_{j\in\mathrm{J}}$ si et seulement si, quitte à raffiner ces deux familles, il existe une bijection $b$ de I dans J telle que la restriction de $f$ à $\mathrm{A}_i$ soit un morphisme de relations d'équivalence boréliennes de $(\mathrm{A}_i,\mathcal{S}_i)$ dans $(\mathrm{A}'_{b(i)},\mathcal{S}'_{b(i)})$ pour tout $i$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X et $(\mathrm{A}_i,\mathcal{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille dénombrable de sous-relations de $\mathcal{R}$ ; on suppose en outre que la réunion (non disjointe *a priori*) des $\mathrm{A}_i$ est un domaine complet de $\mathcal{R}$ en tant que partie borélienne de X. Pour chaque $i$ de I, on peut construire le $\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}_i}}$-espace fibré standard $\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}_i}}/\mathcal{S}_i$ défini sur le $\mathcal{R}$-saturé $\widetilde{\mathrm{A}_i}$ de $\mathrm{A}_i$ dans X. En considérant la réunion disjointe de ces espaces fibrés standards, on obtient donc un $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}}\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}_i}}/\mathcal{S}_i$ sur X. Ce dernier est naturellement muni de sections partielles $d_{\mathcal{S}_i}$ ($i\in\mathrm{I}$) définies sur les parties boréliennes $\mathrm{A}_i$ et dont les stabilisateurs sont les $\mathcal{S}_i$.

**Théorème 2.30.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X. *L'application $\Psi$ qui, à une famille dénombrable de sous-relations $(\mathcal{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de $\mathcal{R}$ dont la réunion des domaines de définition est un domaine complet de $\mathcal{R}$, associe le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}}\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}_i}}/\mathcal{S}_i$ est une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison stable de familles de sous-relations de $\mathcal{R}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards.*

*Démonstration :* Le fait que l'application $\Psi$ soit surjective est une conséquence de la surjectivité de $\psi$ (cf. prop. 2.26) et de l'existence, pour tout $\mathcal{R}$-espace fibré standard F, d'une famille dénombrable de sections partielles de F dont les saturés des images forment une partition de F (cf. lem. 2.23). Comme dans le cas des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards homogènes, il n'est pas difficile de voir que si deux familles dénombrables de sous-relations de $\mathcal{R}$ sont stablement conjuguées, alors les $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards correspondants sont isomorphes : c'est une conséquence directe du fait que, quitte à les raffiner, chaque élément de la première famille est stablement conjugué à un élément de la deuxième famille (cf. lem. 2.29).

Réciproquement supposons que $\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}}\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}_i}}/\mathcal{S}_i$ et $\bigsqcup_{j\in\mathrm{J}}\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}'_j}}/\mathcal{S}'_j$ soient isomorphes via un isomorphisme $f$. Considérons les images des sections partielles $d_{\mathcal{S}_i}$ par $f$ dans $\bigsqcup_{j\in\mathrm{J}}\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}'_j}}/\mathcal{S}'_j$. Quitte à partitionner les domaines de définition des sections partielles $d_{\mathcal{S}_i}$ et $d_{\mathcal{S}'_j}$ en parties respectivement $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{S}_i})$ et $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{S}'_j})$-invariantes, on peut se ramener au cas où une certaine $f \circ d_{\mathcal{S}_i}$ et une certaine $d_{\mathcal{S}'_j}$ sont des sections partielles saturantes du $\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}'_j}}$-espace fibré standard $\mathcal{R}_{|\widetilde{\mathrm{A}'_j}}/\mathcal{S}'_j$. La proposition 2.18 assure que dans ce cas les sous-relations $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{S}_i}) = \mathcal{S}_i$ et $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{S}'_j}) = \mathcal{S}'_j$ sont stablement conjuguées. □

# II Actions quasi-libres et arboralité

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X et $\Phi$ un (L-)graphage de $\mathcal{R}$. Nous avons déjà mentionné qu'un (L-)graphage de $\mathcal{R}$ munit canoniquement chaque classe de $\mathcal{R}$ d'une structure de graphe connexe, son graphe de Cayley, dont les sommets sont les éléments de cette classe.

**Définition 2.31** ([Lev95],[KM04])**.** *Un (L-)graphage de $\mathcal{R}$ est un (L-)arborage de $\mathcal{R}$ si les graphes de Cayley de chaque classe de $\mathcal{R}$ sont des arbres. Une relation d'équivalence borélienne est dite arborable si elle admet un (L-)arborage.*

Rappelons que les relations d'équivalence boréliennes arborables jouent un rôle central dans la classe des relations d'équivalence boréliennes, au même titre que les groupes libres dans la classe des groupes. Bien souvent, les invariants qui ont été introduits pour étudier les relations d'équivalence mesurées (voir par exemple [Gab98], [Gab02]) ont d'abord été calculés pour les relations arborables. Dans ce paragraphe, nous allons donner une caractérisation des relations d'équivalence boréliennes arborables (th. 2.33) analogue à celle concernant les groupes libres : *un groupe est libre si et seulement s'il agit librement sur un arbre* (voir par exemple [Ser77]).

Comme nous l'avons déjà vu, une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X définit canoniquement un $\mathcal{R}$-espace fibré standard sur X via la projection $\pi_l$. Supposons que $\mathcal{R}$ soit arborable et désignons par $\Phi$ un (L-)arborage de $\mathcal{R}$. Dans ce cas, les fibres de l'espace fibré standard canonique gauche sont naturellement munies d'une structure d'arbre (cf. *infra*). Nous souhaitons généraliser cette idée et étendre l'étude des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards que nous avons faite dans le paragraphe 2 du chapitre précédent au cas de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards dont les fibres sont des arbres.

Nous définissons à présent les $\mathcal{R}$-champs de graphes boréliens et nous nous intéressons plus particulièrement au cas des $\mathcal{R}$-champs d'arbres boréliens qui sont les acteurs principaux de ce travail.

**Définition 2.32** ($\mathcal{R}$-arboretum)**.** *Un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien $(\mathcal{A}, \pi)$ sur X est un graphe dont les espaces de sommets et d'arêtes sont des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards $(\mathcal{A}^0, \pi^0)$ et $(\mathcal{A}^1, \pi^1)$ sur X et tel que les applications sommet origine $o : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$, sommet terminal $t : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^0$ et arête opposée$^- : \mathcal{A}^1 \longrightarrow \mathcal{A}^1$ soient des morphismes de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards.*

*La fibre dans $\mathcal{A}$ d'un élément de $x$, notée $\mathcal{A}_x$, est le sous-graphe d'ensemble de sommets $(\pi^0)^{-1}(x)$ et d'ensemble d'arêtes $(\pi^1)^{-1}(x)$. Si $\mathcal{A}_x$ est un arbre pour tout $x$ de X, nous dirons que $(\mathcal{A}, \pi)$ est un $\mathcal{R}$-arboretum.*

*Remarque :* Les définitions précédentes dans le cas de la relation d'équivalence borélienne à classes triviales sur X permettent de définir les notions de *champ de graphes borélien* et d'*arboretum* sur X.

*Exemple fondamental :* Tout graphage $\Phi$ ([KM04]) sur X définit un $\mathcal{R}_\Phi$-champ de graphes borélien sur X où $\mathcal{R}_\Phi$ est la relation d'équivalence borélienne engendrée par $\Phi$. L'espace des sommets est le $\mathcal{R}_\Phi$-espace fibré standard canonique gauche et $\mathcal{R}_\Phi$ agit naturellement sur l'espace des arêtes défini par le graphage $\Phi$ : l'image par le couple d'éléments $\mathcal{R}_\Phi$-équivalents $(x', x)$ de l'arête $(y, z)_x$ dans la fibre de $x$ est l'arête $(y, z)_{x'}$ dans la fibre de $x'$. Notons que l'action est, par définition, lisse sur l'espace des sommets et que la projection $\pi_r$ de l'espace des sommets dans X est invariante sous l'action de $\mathcal{R}_\Phi$. Si $\Phi$ est un arborage, nous désignerons par $(\mathcal{A}_\Phi, \pi)$ le $\mathcal{R}_\Phi$-arboretum canonique associé à $\Phi$ sur X ci-dessus.

Nous venons de voir dans l'exemple précédent que si $\mathcal{R}$ est arborable, alors elle agit quasi-librement sur l'espace des sommets d'un arboretum. Puisque le stabilisateur d'une section partielle d'arêtes est toujours une sous-relation du stabilisateur de la section de sommets origines associée, on en déduit que si $\mathcal{R}$ agit quasi-librement sur l'espace des sommets d'un arboretum (et plus généralement d'un champ de graphes borélien), alors $\mathcal{R}$ agit également quasi-librement sur l'espace des arêtes. Ainsi, nous dirons que $\mathcal{R}$ agit *quasi-librement* sur un champ de graphes borélien si $\mathcal{R}$ agit quasi-librement sur l'espace des sommets.

Nous allons à présent voir qu'il s'agit en fait d'une caractérisation des relations d'équivalence boréliennes arborables et en donner un corollaire immédiat (le reste de cette section est consacré à la démonstration du théorème).

**Théorème 2.33.** *Une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ est arborable si et seulement s'il existe une action quasi-libre de $\mathcal{R}$ sur un arboretum.*

Puisqu'une sous-relation d'une relation d'équivalence borélienne lisse est lisse, la proposition 2.25 et le théorème précédent nous permettent de démontrer un analogue du théorème de Nielsen-Schreier en théorie des groupes : *un sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

**Corollaire 2.34** (voir aussi [JKL02] et [Gab00])**.** *Une sous-relation d'une relation d'équivalence borélienne arborable est arborable.*

*Remarque :* Si A est une partie borélienne de X et si $\mathcal{R}$ est arborable, on déduit du corollaire précédent que la restriction de $\mathcal{R}$ à A est encore arborable (il suffit de prolonger $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ par la relation triviale en dehors de A).

Étant donné une action quasi-libre d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$, nous allons d'abord montrer l'existence d'un sous-arboretum $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ défini sur une partie borélienne de X dont l'espace des sommets $\mathcal{A}'^0$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$. Nous nous ramenons ensuite au cas d'une action de $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}''$ ayant une section partielle de sommets $s : \mathrm{A} \subset \mathrm{X} \longrightarrow \mathcal{A}''^0$ dont l'image $s(\mathrm{A})$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$, ce qui nous permettra de conclure grâce au lemme suivant :

**Lemme 2.35.** *Si $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{R}$-arboretum sur* X *et $s$ une section partielle de sommets dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$, alors $\mathcal{R}$ est arborable.*

*Démonstration :* Commençons par supposer que $s$ soit une section borélienne, c'est-à-dire définie sur X tout entier. Comme nous l'avons déjà vu (cf. prop. 2.20), l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$ s'identifie naturellement avec le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique gauche. L'ensemble des arêtes de $\mathcal{A}$ dont l'un des sommets appartient à l'image de la section borélienne de sommets $s$ s'identifie alors à une partie borélienne G$r$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ qui, par construction, est un arborage de $\mathcal{R}$ : un couple d'éléments distincts $\mathcal{R}$-équivalents $(x, y)$ appartient à G$r$ si, par définition, les sommets $(x, x)$ et $(x, y)$ sont adjacents dans l'arboretum $\mathcal{A}$.

Le cas général s'en déduit facilement grâce au fait général suivant. Étant donné une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}'$ sur X, un domaine complet A$'$ de $\mathcal{R}'$ et un morphisme intérieur $r : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{A}'$ qui coïncide avec l'identité sur A$'$ (cf. lem. 2.12), définissons la sous-relation $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{R}'$ dont les classes sont les $r^{-1}(r(x))$ pour tout $x$ de X : en particulier, $\mathcal{T}'$ est lisse de domaine fondamental A$'$, donc arborable. Or, par construction, $\mathcal{R}'$ est le produit libre (cf. déf. 2.38) des sous-relations $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{R}''$ où $\mathcal{R}''$ coïncide avec $\mathcal{R}'_{|\mathrm{A}'}$ sur A$'$ et avec la relation triviale sur le complémentaire de A$'$. Enfin, le produit libre de deux relations d'équivalence boréliennes arborables étant arborable (cf. prop. 2.39, voir aussi [JKL02] ou [Gab00]), on en déduit que si $\mathcal{R}'_{|\mathrm{A}'}$ est arborable, alors il en est de même de $\mathcal{R}'$. □

Nous en venons au point central dans la démonstration du théorème 2.33.

**Proposition 2.36.** *Si $\mathcal{R}$ agit quasi-librement sur un arboretum $\mathcal{A}$, alors il existe un sous-arboretum $\mathcal{A}'$ de la restriction de $\mathcal{A}$ à une partie borélienne* A *de* X *tel que l'espace des sommets $\mathcal{A}'^0$ soit un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$.*

*Remarque :* Notons que la proposition précédente s'étend sans difficulté supplémentaire au cas d'un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}$.

*Démonstration :* Donnons-nous une numérotation borélienne indexée par les entiers dans chaque fibre de l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$. Nous allons construire la partie borélienne $\mathcal{A}'^0$ par étape à partir de sections partielles de sommets de $\mathcal{A}^0$. Soit $s_1$ la section borélienne de sommets de $\mathcal{A}^0$ correspondant au numéro le plus petit dans chaque fibre. Puisque l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ est quasi-libre, le stabilisateur de cette section est lisse. Désignons par $\mathrm{X}_1$ un domaine fondamental de $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$ : cette partie borélienne de X est un domaine complet de $\mathcal{R}$ et par suite, le $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$-saturé de $\mathrm{U}_1 = s_1(\mathrm{X}_1)$ rencontre toutes les fibres de $\mathcal{A}^0$. Notons $\mathrm{C}_1$ le complémentaire dans $\mathcal{A}^0$ du saturé de $\mathrm{U}_1$. Si $\mathrm{C}_1$ est vide, alors $\mathrm{U}_1$ est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}^0$ et le résultat est démontré avec $\mathcal{A}'^0 = \mathrm{U}_1$ et $\mathcal{A}'^1 = \varnothing$.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ . Supposons avoir construit les familles finies de sections partielles $\mathrm{S}_j = \{s_i \; ; \; i \in \mathrm{I}_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ de $\mathcal{A}^0$ dont les domaines de définition sont des parties boréliennes de $\mathrm{X}_1$ et vérifiant les deux conditions suivantes : la réunion $\mathrm{U}_{n-1}$ des images de ces sections partielles est une partie borélienne de $\mathcal{A}^0$ sur laquelle la restriction de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ est triviale et l'intersection de $\mathrm{U}_{n-1}$ avec chaque fibre de $\mathcal{A}$ au-dessus de $\mathrm{X}_1$ définit une partie connexe. Notons $\mathrm{C}_{n-1}$ le complémentaire dans $\mathcal{A}^0$ du saturé de $\mathrm{U}_{n-1}$. Si ce dernier est vide, la proposition est démontrée avec $\mathcal{A}'^0 = \mathrm{U}_{n-1}$ et $\mathcal{A}'^1$ la partie borélienne de $\mathcal{A}^1$ constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à $\mathrm{U}_{n-1}$.

Sinon, il existe des éléments de $\mathrm{C}_{n-1}$ à distance unité de $\mathrm{U}_{n-1}$. En effet, les fibres de $\mathcal{A}$ étant connexes, il existe des éléments de $\mathrm{C}_{n-1}$ à distance unité du saturé de $\mathrm{U}_{n-1}$ et $\mathcal{R}$ agit en préservant les distances sur $\mathcal{A}^0$. Désignons par $s_n$ la section partielle (définie sur une partie borélienne de $\mathrm{X}_1$ a priori) de sommets de $\mathcal{A}^0$ qui a pour image le plus petit élément à distance unité de $\mathrm{U}_{n-1}$ dans chaque fibre. L'action étant quasi-libre, notons $\mathrm{X}_n$ un domaine fondamental du stabilisateur de $s_n$ : c'est une partie borélienne de $\mathrm{X}_1$. Quitte à découper $\mathrm{X}_n$ en un nombre fini de parties boréliennes, on peut raffiner $s_n$ en un nombre fini $\mathrm{S}_n = \{s_i\ ;\ i \in \mathrm{I}_n\}$ de sections partielles dont chacune est telle que les éléments de son image soient à distance unité de l'image de l'une des sections partielles déjà construites.

Montrons désormais que le saturé de la réunion des $\mathrm{U}_k$ est égal à l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$. Sinon il existerait un élément $a$ appartenant au complémentaire du saturé de la réunion des $\mathrm{U}_k$ dans $\mathcal{A}^0$ dont la projection $\pi(a)$ serait un élément de $\mathrm{X}_1$. On peut supposer que dans la fibre de $\pi(a)$, le sommet $a$ soit à distance unité de la partie connexe formée par la réunion des sommets $s_k(\pi(a))$ et de numéro minimal. Désignons par $n_0$ l'entier naturel tel que les sommets $a$ et $s_{n_0}(\pi(a))$ soient adjacents. Mais alors, par construction de la section partielle $s_{n_0+1}$, le sommet $a$ devrait être l'image de $\pi(a)$ par $s_{n_0+1}$, ce qui est absurde.

Il ne reste plus qu'à poser $\mathcal{A}'^0 = \bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{U}_k$ et $\mathcal{A}'^1$ la partie borélienne de $\mathcal{A}^1$ constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à $\mathcal{A}'^0$. Par construction, deux sommets de $\mathcal{A}$ dans la même orbite n'appartiennent pas tous les deux à $\mathcal{A}'^0$ ; puisque le saturé de la réunion des $\mathrm{U}_k$ est égal à l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$, on en déduit que $\mathcal{A}'^0$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$. Enfin, notre construction assure à chaque étape que les fibres de $\mathcal{A}'$ soient connexes. □

À partir du sous-arboretum $\mathcal{A}'$ construit dans la proposition précédente, nous allons effectuer une opération de contraction dans les fibres et obtenir un nouvel $\mathcal{R}$-arboretum $\mathcal{A}''$ ayant une section partielle de sommets dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$.

**Lemme 2.37.** *Il existe un $\mathcal{R}$-arboretum $\mathcal{A}''$ sur* X *ayant une section partielle de sommets $s$ définie sur* A *dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$.*

*Démonstration :* Soit $s$ une section borélienne de sommets de $\mathcal{A}'$ : son image est un domaine fondamental de la relation d'équivalence borélienne lisse $\mathcal{S}$ définie sur $\mathcal{A}'^0$ dont les classes sont les fibres de $\mathcal{A}'^0$. Pour tout élément $x$ de A, contractons le sous-arbre $\mathcal{A}'_x$ sur le sommet $s(x)$ dans l'arbre $\mathcal{A}_x$ (l'espace quotient est un espace borélien standard isomorphe à $s(\mathrm{A})$ par construction). On prolonge cette opération par $\mathcal{R}$-équivariance et on obtient ainsi un $\mathcal{R}$-arboretum $\mathcal{A}''$ sur X ayant une section partielle de sommets privilégiée (encore notée $s$) définie sur A. Si $x$ et $y$ sont deux éléments $\mathcal{R}$-équivalents de A, l'image par le couple d'éléments $(x, y)$ du sous-arbre $\mathcal{A}'_y$ de la fibre de $y$ dans la fibre de $x$ est un sous-arbre disjoint de $\mathcal{A}'_x$ puisque par hypothèse $\mathcal{A}'^0$ est un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{R}$ sur l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$ de $\mathcal{A}$. Par suite, $s$ est une section partielle dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$. □

Ceci termine la démonstration du théorème 2.33 dont nous rappelons brièvement les trois étapes de la réciproque. Étant donné une action quasi-libre de $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur X :

1. construction d'un sous-arboretum $\mathcal{A}'$ défini sur une partie borélienne $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ de $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$ dont l'espace des sommets $\mathcal{A}'^0$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ (prop. 2.36) ;
2. opération de contraction pour se ramener au cas d'une action de $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}''$ ayant une section partielle de sommets $s$ dont l'image $s(\mathrm{A})$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$ (lem. 2.37) ;
3. une telle relation est alors arborable (lem. 2.35).

# III $\mathcal{R}$-arboretums et amalgames de sous-relations

Nous allons nous intéresser dans cette partie aux relations d'équivalence boréliennes qui sont des produits libres de deux sous-relations et, plus généralement, des produits amalgamés suivant une sous-relation commune. Il s'agit en fait de discuter des liens étroits entre décomposition d'une telle relation d'équivalence borélienne et ses actions sur des arboretums. Nous avons vu (cf. § II) que si une relation d'équivalence borélienne agit quasi-librement sur un arboretum, alors elle est arborable. Nous souhaitons nous affranchir progressivement de l'hypothèse faite sur l'action et nous traiterons le cas général dans le prochain paragraphe (cf. § IV). Cette partie a pour but de décrire la situation dans le cas d'un « espace quotient » simple.

## 1 Produit libre de deux sous-relations

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne engendrée par deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur X. Autrement dit, $\mathcal{R}$ est la plus petite relation d'équivalence dont les classes contiennent celles de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de X est dit *réduit* si :

- pour tout $i$ dans $[\![ 1 ; n-1 ]\!]$, le couple $(x_i, x_{i+1})$ est un couple d'éléments $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$-équivalents et deux couples successifs ne sont pas $\mathcal{R}_j$-équivalents pour le même $j$ ;
- $x_1 \neq x_2 \quad \text{si} \quad n = 2$.

**Définition 2.38** (Gaboriau, [Gab00]). *La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X est le produit libre des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ si $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et si, pour tout $n$-uplet réduit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de X, $x_n$ est différent de $x_1$. Dans ce cas, on note $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$.*

*Exemple :* Soit $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux groupes dénombrables et une action libre $\alpha$ du produit libre $\Gamma = \Gamma_1 \star \Gamma_2$ sur X. La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_\alpha$ dont les classes sont les orbites de l'action de $\Gamma$ est le produit libre des sous-relations $\mathcal{R}_{\alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{\alpha_2}$ dont les classes sont les orbites des restrictions de $\alpha$ à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$.

Avec les techniques que nous avons développées jusqu'à présent, il est très facile de voir que l'arborabilité est stable par produit libre.

**Proposition 2.39.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X*. Si $\mathcal{R}$ est le produit libre de deux sous-relations arborables, alors $\mathcal{R}$ est arborable.*

*Démonstration :* Il suffit de construire un $\mathcal{R}$-arboretum tel que l'espace des sommets soit le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique (cas particulier d'une section borélienne définie sur X dans le lemme 2.35). Étant donné des arborages de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ respectivement, on s'intéresse aux arboretums canoniques associés à ces arborages (cf. ex. fond. suivant déf. 2.32). Rappelons que les espaces des sommets de ces arboretums sont respectivement les $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$-espaces fibrés standards canoniques gauches. Considérons la réunion disjointe de ces deux arboretums sur X, quotientée par la relation d'équivalence qui identifie $d_1(x)$ et $d_2(x)$ pour tout élément $x$ de X. On obtient ainsi un nouvel arboretum $\mathcal{A}'$ sur X dont on note $d$ la section borélienne commune $d_1 = d_2$. Puisque $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ engendrent $\mathcal{R}$ et agissent respectivement sur chacune des moitiés de $\mathcal{A}'$, on peut prolonger $\mathcal{A}'$ de manière $\mathcal{R}$-équivariante. On obtient alors un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien connexes $\mathcal{A}$ ; les sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ étant en produit libre, ceci assure que les fibres de $\mathcal{A}$ soient des arbres. Autrement dit, $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{R}$-arboretum tel que l'image de la section borélienne $d$ soit un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}^0$, ce qui assure que $\mathcal{A}^0$ s'identifie au $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique. □

*Remarque :* Voici une deuxième démonstration de la proposition précédente, très similaire à la précédente. Considérons $\mathrm{G}r_1$ et $\mathrm{G}r_2$ des arborages de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ respectivement et notons $\mathrm{G}r$ la réunion de $\mathrm{G}r_1$ et $\mathrm{G}r_2$ : c'est une partie borélienne de $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$, symétrique, qui ne rencontre pas la diagonale, autrement dit un graphage. Puisque $\mathrm{G}r_1$ et $\mathrm{G}r_2$ engendrent respectivement $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et que ces dernières engendrent $\mathcal{R}$, on en déduit que $\mathrm{G}r$ engendre $\mathcal{R}$, autrement dit que $\mathrm{G}r$ est un graphage de $\mathcal{R}$. Enfin, s'il existait un cycle de longueur $n \geqslant 2$ dans le graphage $\mathrm{G}r$, on en déduirait alors un $n$-uplet réduit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de X tel que $x_n = x_1$, ce qui est exclu. Et ainsi, $\mathrm{G}r$ est un arborage de $\mathcal{R}$.

Considérons une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X qui est le produit libre des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ définies sur X. Nous allons construire un $\mathcal{R}$-arboretum sur X canoniquement associé à cette décomposition. Désignons par $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ les $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards canoniques associés aux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. De plus, nous avons vu qu'il existait, à valeurs dans chacun de ces $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards, un morphisme surjectif défini sur le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique (cf. lem. 2.19 avec $\mathrm{A} = \mathrm{X}$, $s_1 = d$ et $s_2 = d_{\mathcal{R}_i}$), qui envoie la section diagonale $d$ sur la section borélienne saturante $d_{\mathcal{R}_i}$. Notons $o$ le morphisme surjectif du $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $t$ celui à valeurs dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$.

Convenons d'appeler *espace des arêtes orientées* le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique et *espace des sommets* la réunion disjointe des $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ (espace des sommets de couleur 1) et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ (espace des sommets de couleur 2). Nous désignerons également par *sommet origine* le morphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards $o$ et par *sommet terminal* le morphisme $t$. Enfin, il n'est pas difficile de vérifier la compatibilité des actions de $\mathcal{R}$ entre les espaces de sommets et d'arêtes. Ainsi nous avons défini un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien. La proposition qui suit assure qu'il s'agisse en fait d'un arboretum : cette construction est analogue à la construction de l'arbre de Bass-Serre associé à un produit libre de deux groupes (cf. [Ser77]).

**Proposition 2.40.** *Les fibres du $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien construit ci-dessus à partir d'une décomposition de $\mathcal{R}$ en produit libre de deux sous-relations définies sur* X *sont des arbres.*

Dans la suite, nous dirons que le $\mathcal{R}$-arboretum construit précédemment est le $\mathcal{R}$-arboretum canonique *associé* à $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$.

*Démonstration :* Il s'agit de vérifier que, pour tout élément $x$ de X, la fibre de $x$ est un arbre, c'est-à-dire connexe et sans circuit (puisqu'on sait déjà qu'elle est non vide). Soit P et Q deux sommets distincts dans le graphe au-dessus de $x$. Par définition de l'espace des sommets, P et Q correspondent à des $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$-classes contenues dans la $\mathcal{R}$-classe de $x$. Désignons par $p$ et $q$ des représentants des classes correspondantes : ce sont donc des éléments $\mathcal{R}$-équivalents de X. Puisque $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ engendrent $\mathcal{R}$, il existe un $n$-uplet d'éléments que l'on peut supposer réduit dans la $\mathcal{R}$-classe de $x$ dont le premier élément est $p$ et le dernier $q$. Dans le graphe au-dessus de $x$, ce $n$-uplet correspond à un chemin joignant les sommets P et Q.

Supposons par l'absurde qu'il existe un circuit dans le graphe au-dessus de $x$ dont on note $\mathrm{P}_0$,... $\mathrm{P}_{n-1}$ les sommets ($\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0$). Pour $i$ dans $[\![\, 0\,; n-1 \,]\!]$, les sommets $\mathrm{P}_i$ et $\mathrm{P}_{i+1}$ sont par hypothèse reliés : il existe donc un élément $x_{i+1}$ appartenant à X dont la $\mathcal{R}_1$-classe correspond à $\mathrm{P}_i$ et la $\mathcal{R}_2$-classe à $\mathrm{P}_{i+1}$ (ou l'inverse). De plus, par construction, deux sommets consécutifs sont de couleurs distinctes. Par suite, on construit un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ réduit. Mais $x_1$ et $x_n$ étant $\mathcal{R}_j$-équivalents puisque les sommets $\mathrm{P}_0$ et $\mathrm{P}_n$ sont égaux, ceci est absurde. □

Par construction, le $\mathcal{R}$-arboretum canonique associé à $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ possède une section borélienne d'arêtes dont l'image est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{R}$ sur l'espace des arêtes orientées et dont les sections boréliennes de sommets associées ont leurs images qui forment une partition de l'espace des sommets en deux. De plus, les stabilisateurs de ces sections boréliennes de sommets sont $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Par suite, notons que pour toute arête de l'espace des arêtes, l'un de ses sommets est de couleur 1 et l'autre de couleur 2.

Nous allons désormais démontrer la réciproque de ce résultat et voir que les produits libres de sous-relations sont caractérisés par de telles actions : en un certain sens, la relation d'équivalence borélienne engendrée sur l'espace des arêtes est la plus simple possible.

**Théorème 2.41.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X. *Supposons que $\mathcal{R}$ agisse sur un arboretum $\mathcal{A}$ dont l'espace des arêtes orientées $\mathcal{A}^{1+}$ est le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique et tel que les saturés des images des sections boréliennes de sommets $o(d)$ et $t(d)$ forment une partition borélienne de l'espace des sommets en deux. Alors $\mathcal{R}$ est le produit libre des stabilisateurs de $o(d)$ et de $t(d)$ :*

$$\mathcal{R} = Stab_{\mathcal{R}}(o(d)) \star Stab_{\mathcal{R}}(t(d)).$$

*Démonstration :* Notons $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les stabilisateurs de $o(d)$ et $t(d)$ respectivement et commençons par montrer que $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Soit $x$ et $y$ deux éléments $\mathcal{R}$-équivalents de X et considérons l'image $(x,y) \cdot d(y)$ par le couple d'éléments $(x,y)$ de l'arête $d(y)$. Les arêtes $d(x)$ et $(x,y) \cdot d(y)$ appartiennent à la fibre $\mathcal{A}_x$ de $x$

et il existe donc une (unique) géodésique $c$ entre les sommets $o(d(x))$ et $t((x,y)\cdot d(y))$ qui sont distincts par hypothèse. Si $n$ est la longueur de ce chemin, désignons par $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ les arêtes de $c$. Chacune d'entre elles appartient à l'orbite d'une unique arête appartenant à l'image de $d$ ou à l'image de $\overline{d}$ et, étant donné deux arêtes consécutives, l'une appartient à l'orbite de l'image de $d$ et l'autre à l'orbite de l'image de $\overline{d}$. Puisque l'espace des arêtes orientées est par hypothèse le $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique gauche, chacune des arêtes $w_i$ est un couple d'éléments $(x, x_i)$. On en déduit ainsi un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de X dont le premier coïncide avec $x$, le dernier avec $y$ et tel que deux éléments successifs soient $\mathcal{R}_j$-équivalents pour un certain $j$.

Soit $x$ et $y$ deux éléments $\mathcal{R}_j$-équivalents de X. L'image du sommet $t(d(y))$ par le couple d'éléments $(x,y)$ est un sommet à distance unité du sommet origine de $d(x)$. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne un $n$-uplet réduit, on en déduit par récurrence que le sommet terminal de $(x_1, x_n)\cdot d(x_n)$ est au moins à distance unité du sommet origine de $d(x_1)$ : ceci exclut la possibilité que $x_1$ soit égal à $x_n$. □

On déduit du théorème précédent le cas où l'espace des arêtes orientées est engendré par l'image d'une section partielle dont le stabilisateur est trivial.

**Corollaire 2.42.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne et $\mathcal{A}$ un $\mathcal{R}$-arboretum sur* X. *On suppose qu'il existe une section partielle $d$ (définie sur* A*) de l'espace des arêtes orientées telle que $s(\mathrm{A})$ soit un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^{1+}}$. En outre, on suppose que les saturés des images des sections partielles de sommets $o(d)$ et $t(d)$ forment une partition borélienne de l'espace des sommets en deux. Alors la restriction de $\mathcal{R}$ à* A *est le produit libre de ses sous-relations $Stab_{\mathcal{R}}(o(d))$ et $Stab_{\mathcal{R}}(t(d))$.* □

En particulier, on en déduit qu'une telle relation d'équivalence borélienne est stablement orbitalement équivalente à un produit libre de deux sous-relations.

## 2 Produit amalgamé de deux sous-relations

Nous allons généraliser au cas des produits amalgamés suivant une sous-relation commune (cf. déf. 2.43) les résultats obtenus dans le paragraphe précédent. Puis nous terminons cette partie en donnant une application qui illustre que les méthodes géométriques que nous développons permettent de démontrer simplement des résultats de nature algébrique.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X engendrée par deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Soit $\mathcal{R}_3$ une sous-relation commune à $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de X est dit *réduit* si, pour tout $i$ de $[\![ 1\,; n-1 ]\!]$ :

- chaque $(x_i, x_{i+1})$ est un couple d'éléments $\mathcal{R}_1$-équivalents ou $\mathcal{R}_2$-équivalents et deux couples successifs ne sont pas $\mathcal{R}_j$-équivalents pour le même $j$ ;
- aucun couple d'éléments $(x_i, x_{i+1})$ n'est $\mathcal{R}_3$-équivalent dès que $n > 2$ ;
- $x_1 \neq x_2 \quad$ si $\quad n = 2$.

**Définition 2.43** (Gaboriau, [Gab00]). *La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$ si, pour* *tout n-uplet réduit* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *d'éléments de* X*,* $x_n$ *est différent de* $x_1$*. Dans ce cas, on note*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2.$$

*Remarque :* Dans le cas où la sous-relation $\mathcal{R}_3$ est triviale, la notion de produit amalgamé des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$ coïncide avec celle de produit libre des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ (cf. déf. 2.38).

*Exemple :* Si un groupe dénombrable $\Gamma$ est le produit amalgamé de deux groupes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ suivant un sous-groupe commun $\Gamma_3$ et agit librement sur X, la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_\alpha$ engendrée par les orbites de l'action $\alpha$ de $\Gamma$ est le produit amalgamé des sous-relations $\mathcal{R}_{\alpha_1}$ et $\mathcal{R}_{\alpha_2}$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_{\alpha_3}$.

À toute relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X qui est le produit amalgamé des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$, nous allons associer canoniquement un $\mathcal{R}$-arboretum $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2)$ sur X. Désignons par $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ les $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards canoniques associés aux paires $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_1)$, $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_2)$ et $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_3)$. Or $\mathcal{R}_3$ étant une sous-relation commune de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, on déduit du lemme 2.19 un morphisme surjectif $o$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ envoyant la section borélienne saturante $d_{\mathcal{R}_3}$ sur la section borélienne saturante $d_{\mathcal{R}_1}$, et de même un morphisme surjectif $t$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ envoyant $d_{\mathcal{R}_3}$ sur $d_{\mathcal{R}_2}$.

On définit l'espace des arêtes orientées comme étant $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ et l'espace des sommets comme la réunion disjointe de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ (espace des sommets de couleur 1) et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ (espace des sommets de couleur 2). L'application sommet origine est définie comme étant le morphisme de $\mathcal{R}$-espaces fibrés standards $o$ et l'application sommet terminal est définie comme étant le morphisme $t$. La compatibilité des actions de $\mathcal{R}$ entre les espaces de sommets et d'arêtes assure que nous avons ainsi défini un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}$. Nous allons maintenant démontrer que les fibres de $\mathcal{A}$ sont des arbres, ce qui montrera que $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{R}$-arboretum. Pour ceci, nous allons donner une caractérisation dynamique des produits amalgamés de sous-relations.

**Théorème 2.44.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne et $\mathcal{A}$ un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien sur* X*. On suppose que l'espace des arêtes orientées $\mathcal{A}^{1+}$ est un espace fibré standard homogène dont on note $s : \mathrm{A} \longrightarrow \mathcal{A}^{1+}$ une section partielle saturante. De plus, on suppose que les saturés des images des sections partielles de sommets $o(s)$ et $t(s)$ forment une partition $\mathcal{R}$-invariante de l'espace des sommets en deux. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *$\mathcal{A}$ est un $\mathcal{R}$-arboretum ;*
2. *$\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ est le produit amalgamé des sous-relations $Stab_{\mathcal{R}}(o(s))$ et $Stab_{\mathcal{R}}(t(s))$ suivant la sous-relation $Stab_{\mathcal{R}}(s)$.*

*Démonstration :* Puisque A est un domaine complet de $\mathcal{R}$, quitte à considérer le $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$-arboretum sur A, on peut supposer que $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ et se ramener au cas d'une section borélienne saturante de l'espace des arêtes orientées. Notons $\mathcal{R}_3 = \mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ le stabilisateur de $s$, et $\mathcal{R}_1 = \mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(o(s))$ et $\mathcal{R}_2 = \mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(t(s))$ les stabilisateurs des sections boréliennes de sommets origines $o(s)$ et de sommets terminaux $t(s)$ correspondantes. Le théorème est alors une conséquence des deux lemmes suivants.

**Lemme 2.45.** *Les fibres de $\mathcal{A}$ sont connexes si et seulement si $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.*

*Démonstration :* Soit $\mathcal{A}'$ le champ de sous-graphes borélien de $\mathcal{A}$ sur X dont les fibres sont les composantes connexes de l'image de la section borélienne d'arêtes $s$. Soit $\mathcal{R}'$ la sous-relation de $\mathcal{R}$ qui laisse invariant le champ de sous-graphes borélien $\mathcal{A}'$ : deux éléments $x$ et $y$ de X sont $\mathcal{R}'$-équivalents si l'image par le couple d'éléments $(y, x)$ de $\mathcal{A}'_x$ est égale à $\mathcal{A}'_y$. Enfin on note $\mathcal{R}''$ la sous-relation de $\mathcal{R}$ engendrée par $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Si deux éléments $x$ et $y$ de X sont $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$-équivalents, les arêtes $s(y)$ et $(y, x) \cdot s(x)$ ont un sommet en commun. L'arête $(y, x) \cdot s(x)$ appartient donc à $\mathcal{A}'_y$ et par suite

$$(y, x) \cdot \mathcal{A}'_x = \mathcal{A}'_y,$$

ce qui prouve que $\mathcal{R}''$ est une sous-relation de $\mathcal{R}'$.

Notons $\mathcal{B}_1$ le champ de sous-graphes borélien de $\mathcal{A}$ dont les arêtes sont les éléments du $\mathcal{R}''$-saturé de l'image de la section borélienne d'arêtes $s$. Considérons $\mathcal{B}_2$ le champ de sous-graphes borélien de $\mathcal{A}$ dont les arêtes dans la fibre d'un élément $x$ de X sont les $(x, y) \cdot s(y)$, où $y$ est un élément $\mathcal{R}$-équivalent à $x$ et n'appartenant pas à la $\mathcal{R}''$-classe de $x$. Comme l'image de $s$ est un domaine complet de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^{1+}}$ engendrée sur l'espace des arêtes orientées, la réunion des champs de sous-graphes boréliens disjoints $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est égale à $\mathcal{A}$. Ceci implique que $\mathcal{B}_1$ contient $\mathcal{A}'$, et donc que $\mathcal{R}'$ est une sous-relation de $\mathcal{R}''$.

Les fibres de $\mathcal{A}$ sont connexes si et seulement si les champs de graphes borélien $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égales, et d'après ce qui précède $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ coïncident. $\square$

**Lemme 2.46.** *Pour qu'aucune fibre de $\mathcal{A}$ ne contienne de circuit, il faut et il suffit que pour tout $(n+1)$-uplet réduit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments de* X*, l'élément $x_n$ soit différent de $x_1$.*

*Démonstration :* Pour tout élément $x$ de X, la donnée d'un chemin $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(n \geqslant 1)$ sans aller-retour dans la fibre $\mathcal{A}_x$ de $x$ est équivalente à la donnée d'un $n$-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ réduit d'éléments de X dans la $\mathcal{R}$-classe de $x$. En effet, chacune des arêtes de $c$ appartient à l'orbite d'une arête appartenant à l'image de $s$ ou à l'image de $\overline{s}$, donc pour tout $i$, il existe $x_i$ dans la $\mathcal{R}$-classe de $x$ tel que $c_i = (x, x_i) \cdot s(x_i)$ ou $c_i = (x, x_i) \cdot \overline{s}(x_i)$. De plus, étant donné deux arêtes consécutives, l'une appartient à l'orbite de l'image de $s$ et l'autre à l'orbite de l'image de $\overline{s}$ d'après l'hypothèse faite sur l'espace des sommets de $\mathcal{A}$. Réciproquement, un tel $n$-uplet définit bien un chemin sans aller-retour dans la fibre de $x$ dont les arêtes sont les $(x, x_i) \cdot s(x_i)$.

Enfin, le chemin $c$ est un circuit (c'est-à-dire tel que les sommets origine $o(c)$ et terminal $t(c)$ soient les mêmes) si et seulement si les éléments $x_1$ et $x_n$ sont $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$-équivalents. $\square$

Comme conséquence du théorème précédent et du fait déjà vu que

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(\widetilde{d_3}) = \mathcal{R}_3 \qquad \mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(o(\widetilde{d_3})) = \mathcal{R}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Stab}_{\mathcal{R}}(t(\widetilde{d_3})) = \mathcal{R}_2,$$

nous en déduisons le résultat annoncé :

**Corollaire 2.47.** *Si une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé de ses sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$, alors $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2)$ est un $\mathcal{R}$-arboretum.*

Nous dirons que $\mathcal{A}$ est le *$\mathcal{R}$-arboretum canonique associé* à $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$.

## 3 Application

Voici une application de ce qui précède.

**Proposition 2.48.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne qui est le produit amalgamé des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$. Supposons que $\mathcal{S}$ soit une sous-relation de $\mathcal{R}$ telle que, pour tout élément $\phi$ de $[[\mathcal{R}]]$, les intersections des sous-relations $\phi^{-1}\mathcal{R}_1\phi$ et $\phi^{-1}\mathcal{R}_2\phi$ avec $\mathcal{S}$ soient lisses. Alors $\mathcal{S}$ est une sous-relation arborable de $\mathcal{R}$.*

*Démonstration :* Considérons le $\mathcal{R}$-arboretum canonique $\mathcal{A}$ associé à la décomposition de $\mathcal{R}$ et montrons que l'action de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{A}^0$ est quasi-libre. Soit $s$ une section partielle de $\mathcal{A}^0$. Quitte à découper en deux le domaine de définition de $s$, on peut supposer que $s$ est une section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ (ou $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$). Autrement dit, de manière générale, si $s$ est une section partielle de $\mathcal{A}^0$ définie sur $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$, alors A est la réunion disjointe des parties boréliennes $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_2$ telles que $s(\mathrm{A}_1) \subset \mathcal{A}^{0,1}$ et $s(\mathrm{A}_2) \subset \mathcal{A}^{0,2}$, où $\mathcal{A}^{0,1}$ et $\mathcal{A}^{0,2}$ sont les espaces de sommets de $\mathcal{A}$ de couleurs 1 et 2 respectivement. La sous-relation $\mathcal{S}$ agit sur $\mathcal{A}^{0,1} = \mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et, par suite, le $\mathcal{S}$-stabilisateur de $s$ est l'intersection de $\mathcal{S}$ avec une sous-relation de $\mathcal{R}$ (définie sur le domaine de définition de $s$) stablement conjuguée à une restriction de $\mathcal{R}_1$ (cf. rem. 2 de la prop. 2.18). Une telle intersection étant lisse par hypothèse, on en déduit que $\mathcal{S}$ agit quasi-librement sur $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{S}$ est arborable (cf. th. 2.33). □

# IV $\mathcal{R}$-arboretums et décompositions de $\mathcal{R}$

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas général d'une action d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur X. Nous sommes amenés à introduire la notion de *graphe de relations* (déf. 2.49) et les techniques que nous allons utiliser prolongent celles que nous avons développées dans le cas des actions quasi-libres (cf. § II). En particulier, nous étudions comment reconstruire $\mathcal{R}$ en termes de produits amalgamés à partir des stabilisateurs de certaines sections partielles de $\mathcal{A}$. Nous en déduisons un théorème de décomposition (th. 2.61) pour les sous-relations d'un produit libre dénombrable $\mathcal{R} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{R}_i$ de sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$), ainsi que la structure de toute restriction de $\mathcal{R}$ à une partie borélienne Y de X (th. 2.63).

## 1 Graphes de relations et désingularisations

Dans la démonstration de la proposition 2.36 lors de notre étude des actions quasi-libres sur un arboretum, nous avons implicitement construit un *arbre d'isomorphismes partiels*, c'est-à-dire un arbre dénombrable à chaque sommet duquel est attaché un espace borélien standard et à chaque arête un isomorphisme partiel entre des parties boréliennes des espaces boréliens standards portés par les extrémités de cette arête. La définition suivante généralise cette idée.

**Définition 2.49** (Graphe de relations)**.** *Un graphe de relations* $\mathrm{G}^r$ *est la donnée d'un graphe dénombrable* G*, d'une relation d'équivalence borélienne sur un espace borélien standard pour chaque sommet et chaque arête de* G *de sorte que les relations d'équivalence boréliennes portées par une arête et son arête opposée soient égales, ainsi que, pour chaque arête* $a$ *de* G*, d'un morphisme injectif de la relation d'équivalence borélienne portée par* $a$ *dans la relation d'équivalence borélienne portée par le sommet terminal de* $a$*. Si* G *est un arbre, nous dirons que* $\mathrm{G}^r$ *est un arbre de relations.*

*Remarque :* Dans le cas particulier où toutes les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets de G sont triviales, nous dirons que $\mathrm{G}^r$ est un *graphe d'isomorphismes partiels* (souvent noté $\mathrm{G}^{ip}$) puisque la donnée de $\mathrm{G}^r$ permet d'attacher canoniquement à chaque arête $a$ de G un isomorphisme partiel $\phi_a$ dont la source et le but sont des parties boréliennes des espaces boréliens standards portés par les sommets origine et terminal de $a$, de sorte que $\phi_a$ et $\phi_{\bar{a}}$ soient inverses l'un de l'autre. Si de plus, tous les espaces boréliens standards portés par les sommets de G sont des singletons, alors la donnée de $\mathrm{G}^{ip}$ est équivalente à celle du graphe G.

Étant donné un arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$, considérons la réunion disjointe des espaces boréliens standards portés par les sommets de G. Les isomorphismes partiels canoniquement portés par les arêtes de G engendrent une relation d'équivalence borélienne lisse $\mathcal{S}$ sur cette réunion disjointe. Un graphage $\mathrm{G}r$ de $\mathcal{S}$ est défini de la manière suivante : un couple d'éléments $(x, y)$ appartient à $\mathrm{G}r$ si $x$ et $y$ appartiennent aux espaces boréliens standards portés par des sommets adjacents de G et si $y$ est l'image de $x$ par l'isomorphisme partiel porté par l'une des deux arêtes (inverses l'une de l'autre) joignant ces deux sommets. De plus, étant donné une énumération des sommets de G, il n'est pas difficile d'exhiber par récurrence un domaine fondamental de $\mathcal{S}$. Notons $\mathrm{D}_1$ l'espace borélien standard porté par le premier sommet : puisque le graphe G sous-jacent à $\mathrm{G}^{ip}$ est un arbre, $\mathrm{D}_1$ ne rencontre au plus qu'une seule fois chaque classe de $\mathcal{S}$. Pour tout $k \geqslant 1$, ayant construit une partie borélienne $\mathrm{D}_k$ de la réunion des espaces boréliens standards portés par les $k$ premiers sommets de G qui ne rencontre au plus qu'une seule fois chaque classe de $\mathcal{S}$, $\mathrm{D}_{k+1}$ est par définition la réunion de $\mathrm{D}_k$ et du complémentaire du saturé de $\mathrm{D}_k$ dans l'espace borélien standard porté par le sommet $k+1$ de G. La réunion croissante des $\mathrm{D}_k$ est un domaine fondamental de cette relation.

Un arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$ est dit *enraciné* s'il est muni d'un sommet, appelé *racine*, dont l'espace borélien standard attaché soit un domaine fondamental de cette relation d'équivalence borélienne. Notons que dans ce cas, l'isomorphisme partiel porté par une arête dont le sommet origine est celui de ses deux sommets le plus proche de la racine est surjectif. Un tel arbre d'isomorphismes partiels enraciné définit naturellement un arboretum sur l'espace borélien standard Y porté par sa racine. Si $\mathcal{A}$ est un champ de graphes borélien sur X et $\mathrm{G}^{ip}$ un arbre d'isomorphismes partiels enraciné, une *représentation* de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ est la donnée d'un isomorphisme d'espaces boréliens standards entre Y et une partie borélienne $\mathrm{X}_\mathrm{Y}$ de X et d'un isomorphisme $\chi$ entre l'arboretum défini par $\mathrm{G}^{ip}$ sur sa racine Y et un sous-arboretum de la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathrm{X_Y}$. On dit alors que $\chi$ est une représentation de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ et que les images (par l'isomorphisme de représentation $\chi$) des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^{ip}$ sont des *représentations* dans $\mathcal{A}$ de ces espaces boréliens standards.

Étant donné une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X, considérons désormais le cas d'un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}$ sur X. Si $\chi$ est une représentation d'un arbre d'isomorphismes partiels enraciné $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$, l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ donne naissance à des relations d'équivalence boréliennes sur les représentations dans $\mathcal{A}$ des espaces boréliens standards de sommets et d'arêtes de $\mathrm{G}^{ip}$ : ce sont respectivement les restrictions de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$. Une représentation de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ induit ainsi une structure d'arbre de relations $\mathrm{G}^r$ sur $\mathrm{G}^{ip}$.

Via le foncteur d'*oubli*, à tout arbre de relations $\mathrm{G}^r$ est canoniquement associé un arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$. Nous dirons qu'un arbre de relations $\mathrm{G}^r$ est *enraciné* si l'arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$ sous-jacent à $\mathrm{G}^r$ l'est. Une *représentation d'un arbre de relations enraciné* $\mathrm{G}^r$ *dans* $\mathcal{A}$ est une représentation $\chi$ de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ telle que $\chi$ induise des isomorphismes de relations d'équivalence boréliennes entre les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^r$ et les restrictions de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ aux représentations dans $\mathcal{A}$ des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^{ip}$.

**Définition 2.50** (Arboretum de représentants)**.** *Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{R}$-champ de graphes borélien sur* X. *Un arboretum de représentants de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ est la donnée d'un arbre de relations enraciné* $\mathrm{G}^r$ *et d'une représentation $\chi$ de* $\mathrm{G}^r$ *dans $\mathcal{A}$ telle que les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$-saturés des représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de* $\mathrm{G}^r$ *forment une partition de l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$.*

*Remarque :* Étant donné un relevé d'un arbre maximal de l'espace quotient d'une action d'un groupe sur un graphe connexe, on définit naturellement un arbre de groupes en considérant les stabilisateurs des sommets et des arêtes de ce relevé (cf. [Ser77]). Un arboretum de représentants correspond à une donnée analogue dans le cas des relations d'équivalence boréliennes.

Comme dans le cas d'une action quasi-libre sur un arboretum (cf. prop. 2.36), on démontre l'existence d'un arboretum de représentants pour toute action de $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur X.

**Proposition 2.51.** *Pour tout $\mathcal{R}$-arboretum $\mathcal{A}$ sur* X*, il existe un arboretum de représentants de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$.*

*Démonstration :* L'idée de la preuve de l'existence d'un arboretum de représentants est essentiellement la même que dans le cas des actions quasi-libres (cf. prop. 2.36). Dans la démonstration de la proposition 2.36, nous prenions soin à chaque étape de considérer des sections partielles de sommets (et donc d'arêtes) dont les stabilisateurs étaient triviaux, ce qui était possible car $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ étaient des relations d'équivalence boréliennes lisses par hypothèse, pour ainsi construire un arbre d'isomorphismes partiels. Dans le cas général où $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ ne sont plus supposées lisses, il n'est plus possible *a priori* d'assurer que les stabilisateurs des sections partielles choisies soient triviaux à chaque étape de la construction. C'est ainsi que nous sommes contraints de passer des arbres d'isomorphismes partiels aux arbres de relations : le stabilisateur d'une section partielle de sommets ajoutée à l'étape $n+1$ et le stabilisateur de la section partielle d'arêtes correspondante définissent des relations d'équivalence boréliennes portées par un sommet terminal attaché par une arête (et son arête opposée) à l'arbre de relations construit à l'étape $n$. □

*Remarque :* La première section de sommets construite étant définie sur un domaine complet A quelconque de $\mathcal{R}$, on peut choisir $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ (c'est-à-dire une section borélienne $s$ définie sur tout X) et ainsi supposer que l'espace borélien standard portée par la racine s'identifie (via $s$) à X, ce que nous ferons par la suite.

Nous allons introduire une dernière notion, celle de *désingularisation d'une action*. Étant donné une action d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur X, nous avons vu (prop. 2.51) l'existence d'un arboretum de représentants $\mathrm{G}^r$ de cette action mais cette notion n' « encode » pas toute l'information de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ dans le cas général puisque les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$-saturés des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de $\mathrm{G}^r$ ne recouvrent pas *a priori* l'espace des arêtes $\mathcal{A}^1$.

**Définition 2.52** (Désingularisation d'une action). *Une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ est la donnée d'un graphe orienté de relations $\mathrm{G}^r$ (c'est-à-dire de graphe sous-jacent G orienté), d'un sous-arbre maximal enraciné $\mathrm{A}_m$ de G et d'un isomorphisme partiel $\phi_a$ de $[[\mathcal{R}]]$ pour chaque arête $a$ de l'orientation de G n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$ tel que :*

- *l'arbre de relations enraciné $\mathrm{A}_m^r$ induit par $\mathrm{G}^r$ sur $\mathrm{A}_m$ soit un arboretum de représentants de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ tel que l'espace borélien standard porté par la racine de $\mathrm{A}_m$ s'identifie à X (notons $\chi$ l'isomorphisme de représentation) ;*
- *pour toute arête $a$ de l'orientation de G n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$, il existe une section partielle d'arêtes $s_a$ définie sur la source de $\phi_a$, dont les sommets origines appartiennent à la représentation dans $\mathcal{A}$ de l'espace borélien standard porté par le sommet origine de $a$ et telle que les images par $\phi_a$ des sommets terminaux appartiennent à la représentation dans $\mathcal{A}$ de l'espace borélien standard porté le sommet terminal de $a$. Comme pour les sommets, nous dirons que l'image de cette section partielle est une représentation de l'espace borélien standard porté par l'arête ;*
- *pour toute arête $a$ de l'orientation de G n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$, $\chi$ induit un isomorphisme entre $Stab_{\mathcal{R}}(s_a)$ identifié à une sous-relation de $\mathcal{R}_{\chi(o(a))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à $\bar{a}$ de la relation d'équivalence borélienne portée par $\bar{a}$ dans la relation d'équivalence borélienne portée par $t(\bar{a})$, ainsi qu'un isomorphisme entre $\phi_a Stab_{\mathcal{R}}(s_a)\phi_a^{-1}$ identifié à une sous-relation de $\mathcal{R}_{\chi(t(a))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à $a$ de la relation d'équivalence borélienne portée par $a$ dans la relation d'équivalence borélienne portée par $t(a)$ ;*
- *les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$-saturés des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de $\mathrm{G}^r$ forment une partition de l'espace des arêtes $\mathcal{A}^1$.*

Démontrons à présent l'existence d'une désingularisation pour toute action d'une relation d'équivalence borélienne sur un arboretum. Ce résultat d'existence est analogue à la construction d'un graphe de groupes associé à une action d'un groupe sur un arbre.

**Théorème 2.53.** *Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{R}$-arboretum sur* $\mathrm{X}$. *Alors il existe une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$.*

*Remarque 1 :* Comme nous allons le voir dans la construction ci-dessous, pour toute arête $a$ de l'orientation de $\mathrm{G}$ n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$, le graphe de l'isomorphisme partiel $\phi_a$ ne rencontre pas la diagonale de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

*Remarque 2 :* Tout comme dans le cas d'une action d'un groupe sur un arbre, il n'y a pas de désingularisation canonique et nous sommes amenés à faire de nombreux choix lors de notre construction. D'ailleurs il n'y a déjà pas de choix canonique d'un graphe sous-jacent à une désingularisation, contrairement au cas classique où le graphe sous-jacent est l'espace quotient de l'action sans inversion du groupe sur l'arbre.

*Démonstration :* La proposition 2.51 assure l'existence d'un arboretum de représentants, c'est-à-dire un arbre de relations enraciné $\mathrm{A}_m^r$ et d'un isomorphisme de représentation $\chi$ de $\mathrm{A}_m^r$ dans $\mathcal{A}$, tel que l'espace borélien standard porté par la racine de $\mathrm{A}_m$ s'identifie à $\mathrm{X}$. Ainsi les orbites sous l'action de $\mathcal{R}$ des représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de $\mathrm{A}_m^r$ forment une partition $\mathcal{R}$-invariante de l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$. Désignons par $\mathrm{C}$ le complémentaire dans $\mathcal{A}^1$ des $\mathcal{R}$-orbites des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de $\mathrm{A}_m^r$. Si $\mathrm{C}$ est vide, alors $\mathrm{A}_m^r$ est déjà une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$. Sinon, la partie borélienne $\mathrm{C}'$ de $\mathrm{C}$ constituée des arêtes dont le sommet origine appartient à l'arboretum de représentants est non vide car les fibres de $\mathcal{A}$ sont des graphes connexes et que $\mathcal{R}$ agit en préservant les distances sur $\mathcal{A}^0$. Nous allons construire une famille de sections partielles de $\mathrm{C}$ dont les saturés des images forment une partition borélienne de $\mathrm{C}$.

Soit $\mathrm{P}$ un sommet de $\mathrm{A}_m^r$ et $s$ la section partielle de sommets de $\mathcal{A}$ représentant l'espace borélien standard porté par $\mathrm{P}$. Pour tout sommet $\mathrm{Q}$ de $\mathrm{A}_m^r$, considérons la partie borélienne $\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$ de $\mathrm{C}$ constituée des arêtes dont le sommet origine appartient à l'image de $s$ et dont le sommet terminal appartient au saturé de la représentation de l'espace borélien standard porté par $\mathrm{Q}$. Si $\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$ est non vide, c'est un espace fibré standard sur $\pi(\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})})$ que nous pouvons exhauster d'après la remarque suivant le lemme 2.23 à l'aide de sections partielles dont les saturés des images forment une partition borélienne de $\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$. Chacune de ces sections partielles d'arêtes donne lieu à une arête dans $\mathrm{A}_m^r$ entre les sommets $\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}$. La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_a$ induite par $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ sur l'image de l'une de ces sections partielles $a$ de $\mathcal{A}^1$ s'identifie naturellement à une sous-relation de la représentation de la relation d'équivalence borélienne portée par $\mathrm{P}$ et, quitte à considérer une restriction de $a$ à un domaine complet de son stabilisateur, $\mathcal{R}_a$ s'injecte comme sous-relation de la relation d'équivalence borélienne portée par $\mathrm{Q}$ via un isomorphisme partiel de $[[\mathcal{R}]]$ qui envoie la section de sommets terminaux $t(a)$ dans la représentation de l'arboretum de représentants. $\square$

Étant donné une désingularisation $(\mathrm{G}^r, \mathrm{A}_m, \chi)$ de l'action d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur $\mathrm{X}$, nous allons désormais démontrer quelques propriétés de cette désingularisation. Rappelons que la représentation de l'arboretum de représentants de l'action de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ est un sous-arboretum de $\mathcal{A}$ sur X et que l'isomorphisme partiel porté par une arête de $\mathrm{A}_m^{ip}$ dont le sommet origine est celui de ses deux sommets le plus proche de la racine est surjectif. Enfin, rappelons que les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets de $\mathrm{G}^r$ s'identifient via $\chi$ à des sous-relations de $\mathcal{R}$ et qu'à chaque arête $a$ de l'orientation de G n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$ correspond un isomorphisme partiel $\phi_a$ de $[[\mathcal{R}]]$. On définit $\phi_{\overline{a}} = \phi_a^{-1}$ pour toute arête $a$ de l'orientation de $\mathrm{G} \setminus \mathrm{A}_m$ et, pour toute arête $a$ de $\mathrm{A}_m$, $\phi_a$ comme la restriction de l'identité de X sur la projection dans X de la représentation de l'espace borélien standard porté par le sommet origine de $a$.

Soit P et Q deux sommets adjacents dans l'arbre maximal $\mathrm{A}_m$ et supposons que P soit le plus proche des deux du sommet racine. Identifiées via $\chi$ à des sous-relations de $\mathcal{R}$ sur les parties boréliennes $\mathrm{X}_\mathrm{P} \supset \mathrm{X}_\mathrm{Q}$ de X, notons $\mathcal{R}_\mathrm{P}$ et $\mathcal{R}_\mathrm{Q}$ les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets P et Q. De même, identifiée à une sous-relation de $\mathcal{R}$ définie sur $\mathrm{X}_\mathrm{Q}$, désignons par $\mathcal{R}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ la relation d'équivalence borélienne portée par l'arête de $\mathrm{A}_m$ joignant P à Q .

**Lemme 2.54.** *La relation d'équivalence borélienne engendrée par $\mathcal{R}_{\mathrm{P}|\mathrm{X}_\mathrm{Q}}$ et $\mathcal{R}_\mathrm{Q}$ sur $\mathrm{X}_\mathrm{Q}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_{\mathrm{P}|\mathrm{X}_\mathrm{Q}}$ et $\mathcal{R}_\mathrm{Q}$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$.*

*Démonstration :* Considérons dans $\mathcal{A}$ les représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets P et Q, ainsi que la représentation de l'espace borélien standard porté par l'arête de $\mathrm{A}_m^r$ joignant P à Q ; cette dernière définit sur $\mathrm{X}_\mathrm{Q} \subset \mathrm{X}$ une section partielle d'arêtes $s$. Notons $\mathcal{S}$ la relation d'équivalence borélienne engendrée par $\mathcal{R}_{\mathrm{P}|\mathrm{X}_\mathrm{Q}}$ et $\mathcal{R}_\mathrm{Q}$ sur $\mathrm{X}_\mathrm{Q}$ et considérons l'orbite de l'image de $s$ sous l'action de $\mathcal{S}$. Par définition de $\mathcal{S}$, on obtient pour tout élément $x$ de $\mathrm{X}_\mathrm{Q}$ un sous-arbre $\mathcal{A}'_x$ de $\mathcal{A}_x$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence borélienne qui agit sur l'arboretum $\mathcal{A}'$ sur $\mathrm{X}_\mathrm{Q}$, lequel possède une section borélienne d'arêtes dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}'^1}$ et tel que les saturés des sections boréliennes de sommets origines $o(s)$ et terminaux $t(s)$ forment une partition bi-colorée de l'espace des sommets $\mathcal{A}'^0$. Le résultat découle alors du théorème 2.44. □

Le lemme précédent s'étend sans difficulté au cas de deux sommets quelconques distincts. Pour ceci, considérons la géodésique dans $\mathrm{A}_m^r$ joignant les deux sommets P et Q et supposons que l'intersection $\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}} \subset \mathrm{X}$ des espaces boréliens standards portés par ces sommets ne soit pas vide. Désignons par $\mathcal{R}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ l'intersection de toutes les relations d'équivalence boréliennes portées par les arêtes de la géodésique joignant P et Q.

**Proposition 2.55.** *La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{S}$ engendrée par $\mathcal{R}_{\mathrm{P}|\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}}$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{Q}|\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}}$ sur $\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_{\mathrm{P}|\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}}$ et $\mathcal{R}_{\mathrm{Q}|\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}}$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$.*

*Démonstration :* Nous allons procéder comme dans la démonstration du lemme précédent : considérons les représentations dans $\mathcal{A}$ des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de la géodésique joignant P à Q dans $\mathrm{A}_m$. Partant du sous-arboretum $\mathcal{A}''$ de la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathrm{X}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$, considèrons l'image de $\mathcal{A}''$ sous l'action de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{S}$. On obtient ainsi un $\mathcal{S}$-arboretum $\mathcal{A}'$

sur $\mathrm{X}_{\mathrm{P,Q}}$. La contraction de $\mathcal{A}'$ suivant $\mathcal{A}''$ dans chaque fibre de $\mathrm{X}_{\mathrm{P,Q}}$ est une opération borélienne qui se prolonge par $\mathcal{S}$-équivariance : on obtient alors un nouvel $\mathcal{S}$-arboretum sur $\mathrm{X}_{\mathrm{P,Q}}$ satisfaisant les conditions du théorème 2.44 et dont le stabilisateur de la section d'arêtes ainsi construite n'est autre que l'intersection de toutes les relations d'équivalence boréliennes portées par les arêtes de la géodésique joignant P à Q. □

Identifiées via $\chi$ à des sous-relations de $\mathcal{R}$, les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets de G engendrent une sous-relation $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ définie sur X. Notons $\mathcal{R}''$ la sous-relation de $\mathcal{R}$ (*a priori* définie sur une partie borélienne de X) engendrée par les isomorphismes partiels $\phi_a$ portés par chacune des arêtes $a$ de G. Nous allons désormais voir que $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$.

**Lemme 2.56.** *Soit $x$ et $y$ deux éléments $\mathcal{R}$-équivalents de* X.

1. $(y,x)\cdot\mathcal{A}'_x\cap\mathcal{A}'_y\neq\varnothing$ *si et seulement si $x$ et $y$ sont $\mathcal{R}_{\mathrm{P}}$-équivalents pour la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathrm{P}}$ portée par un sommet* P *de* G *;*
2. *le $\mathcal{R}'$-saturé de $\mathcal{A}'$ est un $\mathcal{R}'$-arboretum ;*
3. $(y,x)\cdot[\mathcal{R}'\cdot\mathcal{A}'_x]\cap\left[\mathcal{R}'\cdot\mathcal{A}'_y\right]\neq\varnothing$ *si et seulement si $x$ et $y$ sont $\mathcal{R}'$-équivalents. Dans ce cas on a en fait* $(y,x)\cdot[\mathcal{R}'\cdot\mathcal{A}'_x]=\left[\mathcal{R}'\cdot\mathcal{A}'_y\right]$.

*Démonstration :* Le point 1 est clair par définition et le point 2 est une conséquence directe de la connexité dans chaque fibre déduite du point 1. On en déduit alors directement le point 3. □

**Proposition 2.57.** 1. *Toute relation d'équivalence borélienne $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}$ portée par un sommet* P *de* G *est d'intersection triviale avec $\mathcal{R}''$ ;*

2. *$\mathcal{R}''$ est arborable.*

*Démonstration :* Le point 1 est une conséquence du fait que les fibres de $\mathcal{A}$ sont des arbres et donc ne contiennent pas de circuit de longueur 1. On déduit du point 1 et du point 1 du lemme 2.56 que les images par des couples d'éléments $\mathcal{R}''$-équivalents de $\mathcal{A}'$ dans une fibre donnée sont disjoints. Considérons dans chaque fibre l'enveloppe convexe de tous ces translatés, autrement dit, l'enveloppe convexe du $\mathcal{R}''$-saturé de $\mathcal{A}'$. La contraction par $\mathcal{R}''$-équivariance suivant $\mathcal{A}'$ donne un nouvel arboretum sur lequel $\mathcal{R}''$ agit : le stabilisateur de la section diagonale après contraction est trivial. En effet, si $x$ et $y$ appartiennent au stabilisateur de la section diagonale, alors $(y,x)\cdot\mathcal{A}'_x$ est égal à $\mathcal{A}'_y$ et on a déjà vu que ceci implique $x=y$. On obtient finalement un $\mathcal{R}''$-arboretum dont une section borélienne de sommets définie sur X est un domaine fondamental pour l'action sur l'espace des sommets : il s'agit donc d'une action lisse, ce qui prouve l'arborabilité de $\mathcal{R}''$. □

**Lemme 2.58.** *Soit $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence borélienne agissant sur un arboretum $\mathcal{B}$ sur un espace borélien standard* Y*. Supposons qu'il existe une section borélienne $d$ de sommets saturante de stabilisateur $\mathcal{S}'$. Si $(s_a)_{a\in\underline{\mathrm{A}}}$ est une famille dénombrable de sections partielles d'arêtes, dites extra-arêtes, telle que :*

1. *les sommets origines de ces extra-arêtes appartiennent à $d(\mathrm{Y})$ ;*

2. *pour chacune de ces sections d'arêtes $s_a$ définie sur $\mathrm{A}_a$, il existe un isomorphisme partiel $\phi : \mathrm{A}_a \longrightarrow \mathrm{B}_a$ de $\mathcal{S}$ tel que l'image des sommets terminaux de $s_a(\mathrm{A}_a)$ par $\phi$ soit exactement $d(\mathrm{B}_a)$ ;*
3. *la réunion de ces extra-arêtes soit un domaine complet de la relation d'équivalence borélienne sur l'espace des arêtes,*

*alors $\mathcal{S}$ est engendrée par $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$, où $\mathcal{S}''$ désigne la relation d'équivalence borélienne engendrée par le L-graphage $(\phi_a)_{a\in\underline{\mathrm{A}}}$.*

*Démonstration :* Soit $x$ et $y$ deux éléments $\mathcal{S}$-équivalents de Y. Intéressons-nous à la géodésique (de longueur $k$) joignant $d(x)$ à l'image par $(x,y)$ de $d(y)$, et notons $a_1$ la première arête de cette géodésique de sommet origine $d(x)$. Si $a_1$ est une extra-arête, alors il existe un élément $x_1$ de Y qui soit $\mathcal{S}''$-équivalent à $x$ et tel que l'orbite du sommet terminal de $a_1$ contienne $d(x_1)$. Puisque $\mathcal{S}$ agit sur $\mathcal{B}$ en préservant les distances, la longueur de la géodésique joignant $d(x_1)$ à l'image par $(x_1,y)$ de $d(y)$ est de longueur $k-1$. Sinon, quitte à considérer un élément $\mathcal{S}'$-équivalent à $x$, on peut supposer que $a_1$ est l'image d'une extra-arête par un des isomorphismes partiels $\phi_a$. Dans ce cas, il existe $x_1$ tel que l'image de $d(x_1)$ par $\phi_a$ soit exactement $d(x)$ : là encore, la longueur de la géodésique joignant $d(x_1)$ à l'image par $(x_1,y)$ de $d(y)$ est alors de longueur $k-1$. Soit $n$ un entier $\geqslant 1$. Étant donné $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et une suite d'éléments $\mathcal{S}$-équivalents $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ à $x$, l'argument précédent permet de conclure que si la longueur de la géodésique joignant $d(x_{n-k})$ à l'image par $(x_{n-k}, y)$ de $d(y)$ est de longueur $n-k$, alors, quitte à considérer d'abord un élément $\mathcal{S}'$-équivalent, il existe un élément $\mathcal{S}''$-équivalent $x_{n-k-1}$ à $x_{n-k}$ tel que la longueur de la géodésique $d(x_{n-k-1})$ à l'image par $(x_{n-k-1}, y)$ de $d(y)$ soit de longueur $n-k-1$. D'où le résultat. $\square$

**Proposition 2.59.** *La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ est engendrée par $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$.*

*Démonstration :* Considèreons la contraction de $\mathcal{A}$ suivant le $\mathcal{R}'$-saturé de $\mathcal{A}'$. D'après le point 2 du lemme 2.56, on obtient un $\mathcal{R}$-arboretum satisfaisant aux hypothèses du lemme précédent, le stabilisateur de la section borélienne de sommets $d$ étant précisément $\mathcal{R}'$ d'après le point 3 du même lemme. $\square$

## 2 Sous-relations d'un produit libre

Nous allons utiliser les résultats précédents pour étudier les sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne qui admet une décomposition en produit libre d'un ensemble dénombrable de sous-relations. En théorie des groupes, le théorème de Kurosh ([Kur34]) assure qu'un sous-groupe H du produit libre G d'une famille de groupes $(\mathrm{G}_z)_{z\in\mathrm{Z}}$ est isomorphe au produit libre de son intersection avec des conjugués des $\mathrm{G}_z$ convenablement indexés et d'un sous-groupe libre de G. Nous obtenons un théorème de décomposition (th. 2.61) dans le contexte des relations d'équivalence boréliennes pour les sous-relations d'un produit libre $\mathcal{R} = \star_{i\in\mathrm{I}}\mathcal{R}_i$ d'un ensemble dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$, ainsi que la structure d'une restriction de $\mathcal{R}$ à toute partie borélienne Y de X (th. 2.63).

**Définition 2.60** (Produit amalgamé dénombrable)**.** *La relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur* X *admet une décomposition en produit amalgamé dénombrable des sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$) suivant la sous-relation commune $\mathcal{R}'$ si $\mathcal{R}$ est engendrée par la famille dénombrable des $\mathcal{R}_i$ et si, pour tout $n$-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de* X *tels que $x_n = x_1$ et $(x_k, x_{k+1}) \in \mathcal{R}_{i_k}$, il existe $1 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $(x_k, x_{k+1}) \in \mathcal{R}'$. Dans ce cas, on note*

$$\mathcal{R} = \star_{\mathcal{R}'} \mathcal{R}_i.$$

En particulier, si $\mathcal{R}'$ est triviale dans la définition précédente, on obtient la notion de produit libre dénombrable de sous-relations.

**Théorème 2.61.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur* X*, produit libre dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$). Alors*

$$\mathcal{S} = \star_{i\in \mathrm{I}} \left(\star_{k_i \in \mathrm{K}(i)} \mathcal{S}_{k_i}\right) \star \mathcal{T},$$

*où, pour tout $k_i$ d'un ensemble dénombrable $\mathrm{K}(i)$, il existe un élément $\phi_{k_i}$ de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne $\mathrm{A}_{k_i}$ de* X *tel que*

$$\mathcal{S}_{k_i} = \left(\phi_{k_i}^{-1} \mathcal{R}_{i|_{\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})}} \ \phi_{k_i}\right) \cap \mathcal{S},$$

*et où $\mathcal{T}$ est une sous-relation arborable de $\mathcal{S}$. De plus, pour tout $i$ de* I*, il existe $k_i$ dans $\mathrm{K}(i)$ tels que*

$$\mathrm{A}_{k_i} = \mathrm{X} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{S}.$$

*Remarque :* Le résultat précédent s'étend sans difficulté supplémentaire au cas d'un produit amalgamé dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ suivant une sous-relation commune $\mathcal{R}'$ sous l'hypothèse que l'intersection de $\mathcal{S}$ avec toute conjuguée de $\mathcal{R}'$ soit lisse.

*Démonstration :* Commençons par déduire le cas général du cas particulier d'un produit libre de deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Donnons-nous un ordre sur I (indexé par les entiers naturels non nuls, éventuellement un nombre fini si I est fini) et commençons par isoler le premier facteur dans la décomposition de $\mathcal{R}$ : on écrit ainsi $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}'} \mathcal{R}_2'$, où $\mathcal{R}_2'$ est le produit amalgamé des $\mathcal{R}_i$ restantes suivant $\mathcal{R}'$. On en déduit que $\mathcal{S}$ est le produit libre de son intersection avec des $\mathcal{R}$-conjuguées de restrictions de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2'$ et d'une sous-relation arborable. On est ainsi amené à s'intéresser à certaines sous-relations de $\mathcal{R}_2' = \mathcal{R}_2 \star_{\mathcal{R}'} \mathcal{R}_3'$ (dont $\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_2'$), où $\mathcal{R}_2$ est le deuxième facteur dans la décomposition initiale de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_3'$ le produit amalgamé des $\mathcal{R}_i$ restantes suivant $\mathcal{R}'$. On applique à nouveau le théorème dans le cas de deux facteurs à cette sous-relation, ce qui donne une décomposition faisant intervenir une sous-relation arborable et des sous-relations de $\mathcal{R}$-conjuguées de restrictions de $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3'$. On continue ainsi la décomposition des sous-relations de $\mathcal{R}$-conjuguées de restrictions des $\mathcal{R}_i'$ apparaissant et, en utilisant un argument diagonal et le fait que le produit libre de sous-relations arborables est encore arborable (cf. prop. 2.39, le cas d'une infinité dénombrable de facteurs étant analogue), on en déduit l'existence de $\mathcal{S}_{k_i}$ et de $\mathcal{T}$ comme souhaitées telles que $\star_{i\in\mathrm{I}} \left(\star_{k_i\in\mathrm{K}(i)} \mathcal{S}_{k_i}\right) \star \mathcal{T}$ soit une sous-relation de $\mathcal{S}$. Enfin si deux éléments $x$ et $y$ de X sont $\mathcal{S}$-équivalents, il existe un nombre fini de $\mathcal{R}_i$ tel que $(x, y)$ appartienne au produit libre dénombrable de ces $\mathcal{R}_i$, et donc $(x, y)$ appartient à $\star_{i\in\mathrm{I}} \left(\star_{k_i\in\mathrm{K}(i)} \mathcal{S}_{k_i}\right) \star \mathcal{T}$.

Nous allons maintenant démontrer le cas particulier d'un produit libre de deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Pour cela, considérons le $\mathcal{R}$-arboretum canonique $\mathcal{A}$ associé à la décomposition en produit libre de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ (cf. p. 40). Précisons une désingularisation de l'action de $\mathcal{S}$ (déduite de celle de $\mathcal{R}$) sur $\mathcal{A}$ en suivant la construction développée dans la démonstration de la proposition 2.51 et en utilisant la partition naturelle de l'espace des sommets de $\mathcal{A}$ en deux parties. Autrement dit, à chaque étape de la construction d'un arboretum de représentants (dont on note $\mathcal{A}'$ sa représentation dans $\mathcal{A}$), les sections partielles de sommets que l'on considère sont des sections partielles de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ ou de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ et la première section borélienne d'arêtes que l'on choisit est la diagonale de l'espace fibré standard canonique des arêtes orientées. Or nous avons déjà vu (cf. rem. 2 de la prop. 2.18) que le stabilisateur d'une section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_i$ est stablement conjugué à la restriction de $\mathcal{R}_i$ à une partie borélienne de X. Quitte à restreindre son domaine de définition, on peut donc supposer à chaque étape que le stabilisateur de la section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_i$ construite soit conjugué à une restriction de $\mathcal{R}_i$ et que le stabilisateur de la section partielle d'arêtes ainsi défini soit trivial : ceci est possible car l'action de $\mathcal{R}$ est lisse sur l'espace des arêtes. Enfin, puisque la première section borélienne d'arêtes considérée est la diagonale de $\mathcal{R}$, on en déduit que les deux premières sections de sommets sont les diagonales $d_{\mathcal{R}_1}$ et $d_{\mathcal{R}_2}$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$. Notons que ce qui précède s'étend sans difficulté supplémentaire au cas où $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation commune $\mathcal{R}_3$ sous l'hypothèse que l'intersection de $\mathcal{S}$ avec toute conjuguée de $\mathcal{R}_3$ soit lisse. En effet cette dernière hypothèse assure que $\mathcal{S}$ agisse quasi-librement sur le $\mathcal{R}$-espace fibré standard $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$.

Contractons $\mathcal{A}'$ par $\mathcal{R}$-équivariance : on se ramène ainsi au cadre du lemme 2.58 sous l'hypothèse 3') plus forte qui assure que la réunion des extra-arêtes soit un domaine fondamental de la relation d'équivalence borélienne sur l'espace des arêtes, ce qui est une conséquence du fait que l'action de $\mathcal{R}$ soit libre. Utilisant les notations du lemme 2.58 et compte tenu des propositions 2.55, 2.57 et 2.59, il ne reste plus qu'à voir que $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ sont des sous-relations en produit libre de $\mathcal{S}$.

Commençons par remarquer que $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ sont d'intersection triviale. En effet, si deux éléments $x$ et $y$ sont $\mathcal{S}'$-équivalents, alors le sommet $d(x)$ a pour image le sommet $d(y)$ sous l'action de $(y, x)$ ; or si $x$ et $y$ sont $\mathcal{S}''$-équivalents, par définition, un des sommets à distance 1 de $d(x)$ est envoyé sur $d(y)$. Si $x \neq y$ était $(\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'')$-équivalents, on en déduirait alors un cycle de longueur 1 attaché en $d(y)$.

*Remarque :* Rappelons à présent que si on opère par un couple d'éléments $(t, \phi_a(t))$ où $t$ appartient à la source $\mathrm{A}_a$ de $\phi_a$, cela signifie qu'au-dessus de $t$, il existe une arête du domaine fondamental dont le sommet origine est $d(t)$ et que le sommet terminal de cette arête est envoyé par $(\phi_a(t), t)$ sur $d(\phi(t))$.

Soit $v$ un sommet dans la fibre de $x$. Notons $a_1$ la première arête (de sommet origine $d(x)$) de la géodésique reliant $d(x)$ à $v$. Analysons les différentes situations possibles :

1. si on opère par un couple d'éléments $(x, y)$ de $\mathcal{S}'$, alors la distance de $v$ à $d(x)$ dans la fibre de $x$ est préservée par l'action de $(y, x)$ ;

2. si on opère par un couple d'éléments $(x, \phi_a(x))$ pour un certain $\phi_a$ :

- si $a_1$ est l'extra-arête qui définit $\phi_a$ (et donc appartient au domaine fondamental), alors la distance augmente de $-1$ ;
- si $a_1$ n'est pas l'extra-arête qui définit $\phi_a$, alors la distance augmente de $+1$ ;

3. si on opère par un couple d'éléments $(x = \phi_a(u), u)$ pour un certain $\phi_a$ :
   - si l'arête opposée de $a_1$ est l'image de l'extra-arête qui définit $\phi_a$, alors la distance augmente de $-1$ ;
   - si l'arête opposée de $a_1$ n'est pas l'image de l'extra-arête qui définit $\phi_a$, alors la distance augmente de $+1$.

Supposons un mouvement de la forme : $+1$ suivi de $-1$. L'élément $(\phi_a(x), x) \cdot d(x)$ est un élément à distance $+1$ de $d(\phi_a(x))$. Considérons un mouvement de la forme $-1$ avec un certain $\psi_b$ ; d'après ce qui précède, il s'agit des situations 2-point 1 et 3-point 1. La situation 2-point 1 est impossible car $a_1$, qui est l'arête joignant $d(\phi(x))$ à $(\phi(x), x) \cdot d(x)$ est par définition telle que son opposée est l'image d'une arête du domaine fondamental : en particulier, ce n'est pas une extra-arête pouvant définir $\psi_b$. Donc 3-point 1 est la seule possibilité et l'unicité due au domaine fondamental assure alors $\psi_b$ soit l'inverse de $\phi_a$. Ainsi tout mouvement de la forme $+1$ suivi de $-1$ est trivial, c'est-à-dire de la forme : $x \longrightarrow \phi_a(x) \longrightarrow x$ (conclusion 1).

Supposons un mouvement de la forme : $+1$ suivi de $0$ suivi de $-1$. Les mêmes arguments que ci-dessus prouvent que cela est impossible, si le $0$ correspond à deux points distincts dans $\mathcal{S}'$ (conclusion 2).

Donnons-nous une suite de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_n = x_1$, successivement $\mathcal{S}'$ ou $\mathcal{S}''$-équivalents et étudions la distance à la section $d$ des images successives du sommet $d(x_0)$ sous l'action de ces couples d'éléments. Appliquons les transformations successives de $x_1$ à $x_n = x_1$, que l'on suppose être une suite réduite. La fonction distance est une fonction à valeurs dans $\mathbf{Z}$ qui à chaque étape avance de 0, d'un entier positif ou d'un entier négatif, qui part de 0 et qui revient en 0 (les fibres de $\mathcal{B}$ sont des arbres). Ce qui précède (cf. conclusion 1) assure qu'on se ramène alors à un mouvement de la forme

$$0 \longrightarrow (+1+1+1+1) \longrightarrow 0 \longrightarrow (+1+1+1) \longrightarrow 0 \longrightarrow (-1-1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{ etc.}$$

l'uplet étant toujours réduit si on regroupe chaque parenthèse. Mais nous avons vu (cf. conclusion 2) que la distance ne fait que croître ou décroître strictement selon le signe de la première valeur, ce qui est absurde car $x_n = x_1$. $\square$

Donnons à présent une deuxième application des résultats précédents concernant la restriction de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ à une partie borélienne A de X qui est un domaine complet de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. On retrouve alors les résultats de Ioana-Peterson-Popa ([IPP05], prop. 7.4.2) obtenus dans le cadre mesuré.

**Proposition 2.62.** *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ une relation d'équivalence borélienne sur* X*, produit libre des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Si* A *désigne un domaine complet commun de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, alors*

$$\mathcal{R}_{|\mathrm{A}} = \mathcal{R}_{1|\mathrm{A}} \star \mathcal{R}_{2|\mathrm{A}} \star \mathcal{T}$$

*où $\mathcal{T}$ est une sous-relation arborable de $\mathcal{R}$.*

*Démonstration :* Continuons de désigner par $\mathcal{A}$ le $\mathcal{R}$-arboretum canonique associé à la décomposition de $\mathcal{R}$. Considérons l'action de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ sur la restriction de $\mathcal{A}$ à A. Par hypothèse, l'image de A par $d_{\mathcal{R}_i}$ est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_i}$ et, par conséquent, la réunion de $d_{\mathcal{R}_1}(\mathrm{A})$ et de $d_{\mathcal{R}_2}(\mathrm{A})$ est un domaine complet de la restriction de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ à l'espace des sommets de $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$. La construction développée dans la démonstration de la proposition 2.51 donne une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ sur $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$ telle que le graphe de relations associé ait exactement deux sommets portant les relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}_{1|\mathrm{A}}$ et $\mathcal{R}_{2|\mathrm{A}}$ et tel que les relations d'équivalence boréliennes associées aux arêtes soient triviales. Les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 2.61 permettent de conclure. □

Formulons le cas général (sans hypothèse sur A) pour un produit libre dénombrable de sous-relations. Puisque $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ est une sous-relation de $\mathcal{R}$, on peut en particulier appliquer le théorème précédent. Mais nous pouvons être plus précis encore.

**Théorème 2.63.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X, produit libre dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ ($i \in \mathrm{I}$) définies sur des parties boréliennes $\mathrm{A}_i$ de X telles que la réunion des $\mathrm{A}_i$ soit égale à X. Pour toute partie borélienne A de X, la restriction $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ de $\mathcal{R}$ à A admet une décomposition en produit libre dénombrable de sous-relations de la forme*

$$\mathcal{R}_{|\mathrm{A}} = \star_{i\in\mathrm{I}}\left(\star_{k_i\in\mathrm{K}(i)}\mathcal{S}_{k_i}\right)\star\mathcal{T},$$

*où, pour tout $k_i$ de l'ensemble dénombrable $\mathrm{K}(i)$, il existe un élément $\phi_{k_i}$ de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne $\mathrm{A}_{k_i}$ de X tel que*

$$\mathcal{S}_{k_i} = \phi_{k_i}^{-1}\mathcal{R}_{i|\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})}\ \phi_{k_i},$$

*et où $\mathcal{T}$ désigne une sous-relation arborable de $\mathcal{R}$. De plus, pour tout $i$ de I, la réunion des $\mathcal{R}_i$-saturés des buts $\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})$ des $\phi_{k_i}$ forme une partition (dénombrable et borélienne) du domaine de définition $\mathrm{A}_i$ de $\mathcal{R}_i$. Enfin, pour tout $i$ de I tel que $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}$ soit non vide, il existe $k_i$ dans $\mathrm{K}(i)$ tels que*

$$\mathrm{A}_{k_i} = \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_{i|\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}}\quad .$$

*Démonstration :* Le cas général se déduit du cas de deux facteurs comme dans la démonstration du théorème 2.61. Désignant toujours par $\mathcal{A}$ le $\mathcal{R}$-arboretum canonique associé à la décomposition de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1\star\mathcal{R}_2$, considérons le $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$-arboretum $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$ et désingularisons l'action de $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$ exactement comme dans la démonstration du théorème 2.61 en utilisant la partition naturelle de l'espace des sommets de $\mathcal{A}$ en deux parties ; la première section borélienne d'arêtes que l'on choisit est bien entendu la restriction à A de la diagonale de l'espace fibré standard canonique des arêtes orientées, de sorte que les deux premières sections de sommets soient les restrictions $d_{\mathcal{R}_1|\mathrm{A}}$ et $d_{\mathcal{R}_2|\mathrm{A}}$ à A des diagonales $d_{\mathcal{R}_1}$ et $d_{\mathcal{R}_2}$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$.

Le seul point qu'il reste à voir est que, pour tout $i$ de I, la réunion des $\mathcal{R}_i$-saturés des $\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})$ forme une partition de $\mathrm{A}_i$. Pour cela, rappelons que la réunion des images $d_{\mathcal{R}_1}(\mathrm{X})$ et $d_{\mathcal{R}_2}(\mathrm{X})$ des diagonales $d_{\mathcal{R}_1}$ et $d_{\mathcal{R}_2}$ est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$. Par suite, quitte à considérer sa restriction à un domaine complet de son $\mathcal{R}$-stabilisateur, pour toute section partielle $s$ de sommets monochromes (de couleur $l = 1, 2$) de $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$ définie sur une partie borélienne $\mathrm{A}_s$ de A, il existe un isomorphisme partiel $\phi_s : \mathrm{A}_s \longrightarrow \mathrm{B}_s$ de $[[\mathcal{R}]]$ tel que l'image sous l'action de $\phi_s$ de $s(\mathrm{A}_s)$ soit exactement $d_{\mathcal{R}_l}(\mathrm{B}_s)$. Si $s$ et $s'$ désignent deux telles sections de sommets de même couleur $l$ dans la construction d'une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}_{|\,\mathrm{A}}$ (cf. dém. prop. 2.51) , on en déduit que les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$-saturés de $d_{\mathcal{R}_l}(\mathrm{B}_s)$ et $d_{\mathcal{R}_l}(\mathrm{B}_{s'})$ sont disjoints, et par suite, que les $\mathcal{R}_l$-saturés de $\mathrm{B}_s$ et $\mathrm{B}_{s'}$ sont disjoints car $\mathcal{R}_l$ est précisément le $\mathcal{R}$-stabilisateur de $d_{\mathcal{R}_l}$. $\square$

# Chapitre 3

# Des relations d'équivalence aux groupoïdes boréliens

Dans ce chapitre, nous allons généraliser notre étude des actions de relations d'équivalence boréliennes au cadre des groupoïdes boréliens. Nous introduisons une notion de produit libre « abstrait » dans la catégorie des groupoïdes boréliens (cf. déf. 3.38), ce qui nous permet de donner un cadre unifié incluant les actions des relations d'équivalence boréliennes sur les arboretums (cf. chap. 2) et la théorie de Bass-Serre classique telle qu'elle est développée dans [Ser77] pour les actions de groupes sur les arbres.

## I Groupoïdes boréliens et arboretums

Dans ce paragraphe, nous étendons au cadre des groupoïdes boréliens un certain nombre de notions rencontrées au cours de notre étude des actions de relations d'équivalence boréliennes. En particulier, nous allons définir les notions de *groupoïde borélien libre* (déf. 3.3) et de *groupoïde quotient* (déf. 3.19).

**Définition 3.1** (Groupoïde borélien)**.** *Un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ est une petite catégorie telle que :*

- *tous les morphismes soient inversibles et l'ensemble de tous les morphismes un espace borélien standard ;*
- *les applications source $s$ et but $r$ soient à fibres dénombrables ;*
- *la composition $\cdot$ des morphismes de $\mathcal{G}^c = \{(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}\ ;\ s(\gamma') = r(\gamma)\}$ dans $\mathcal{G}$ et l'application inverse $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ soient des applications boréliennes.*

*Remarque :* L'ensemble des objets de $\mathcal{G}$ s'identifie à une partie de $\mathcal{G}$ via l'application injective $d : x \longmapsto \mathrm{id}_x$. Les applications $s$ et $r$ sont boréliennes car $s(\gamma) = \gamma \cdot i(\gamma)$ et $t(\gamma) = i(\gamma) \cdot \gamma$ pour tout $\gamma$ de $\mathcal{G}$. Ces dernières étant à fibres dénombrables, on en déduit que l'ensemble des objets est en fait identifié à une partie borélienne de $\mathcal{G}$. Nous dirons alors que $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien standard sur X lorsque l'espace des objets, avec sa structure borélienne induite par $\mathcal{G}$, est X.

*Exemple fondamental :* L'action $\alpha$ par automorphismes boréliens d'un groupe dénombrable $\Gamma$ sur un espace borélien standard X définit naturellement un groupoïde borélien sur X. En effet, les morphismes sont les triplets $(x, \gamma, y)$ où $x$ et $y$ sont deux éléments de X tels que $\alpha(\gamma)(x) = y$ pour $\gamma$ dans $\Gamma$, de source $x$ et de but $y$. La composition des morphismes $(x, \gamma, y)$ et $(y, \gamma', z)$ est bien sûr le morphisme $(x, \gamma \cdot \gamma', z)$ pour tous $x$, $y$, $z$ dans X et $\gamma$, $\gamma'$ dans $\Gamma$.

*Remarque :* Étant donné un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X, un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ sur une partie borélienne A de X est une partie borélienne de $\mathcal{G}$ contenant A et telle que, pour tous éléments $\gamma$ et $\gamma'$ de même but $x$ appartenant à A, on ait $\gamma \cdot \gamma'^{-1}$ appartenant à $\mathcal{H}$. Par exemple, étant donné une partie borélienne A de X, le groupoïde borélien $\mathcal{H}_{|\mathrm{A}}$ sur A dont les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{G}$ de sources et de buts dans A est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$.

**Définition 3.2** (Morphisme)**.** *Un morphisme de groupoïdes boréliens $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un foncteur (de petite catégorie) borélien, où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des groupoïdes boréliens sur* X *et* Y*. Autrement dit, $f$ est une application borélienne telle que, pour tous éléments $\gamma$ et $\gamma'$ composables de $\mathcal{G}$, on ait $f(\gamma.\gamma') = f(\gamma) \cdot f(\gamma')$ ainsi que*

$$f(s(\gamma)) = s(f(\gamma)), \; f(r(\gamma)) = r(f(\gamma)) \quad \textit{et} \quad f(i(\gamma)) = i(f(\gamma)).$$

Une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X définit un groupoïde borélien $(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}, o = \pi_l, r = \pi_r)$ sur X : on dit dans ce cas qu'il s'agit d'un groupoïde borélien *principal*, les groupes d'isotropie étant triviaux. Ainsi, pour tout couple $(x, y)$ d'éléments $\mathcal{R}$-équivalents de X, la source de $(x, y)$ est $x$, le but $y$, l'inverse $(y, x)$, la composition de deux tels couples $(x, y)$ et $(y, z)$ pour $z$ dans la $\mathcal{R}$-classe de $x$ étant donnée par le couple $(x, z)$, le morphisme identité en $x$ étant quant à lui le couple $(x, x)$ (cf. notion de $\mathcal{R}$-espace fibré standard canonique p. 25). Rappelons qu'un exemple fondamental de groupoïde borélien principal est donné par une action *libre* $\alpha$ par automorphismes boréliens d'un groupe dénombrable $\Gamma$ sur un espace borélien standard X.

Notons également que tout groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X définit naturellement une relation d'équivalence borélienne sur X que nous noterons $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ : deux éléments $x$ et $y$ sont $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$-équivalents s'il existe un morphisme de $\mathcal{G}$ de source $x$ et de but $y$. Nous dirons qu'un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ est défini sur un domaine complet de $\mathcal{G}$ s'il est défini sur un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$. Enfin, remarquons également qu'un morphisme de groupoïdes boréliens induit en particulier un morphisme de relations d'équivalence boréliennes entre les groupoïdes boréliens principaux correspondants.

*Remarque :* On déduit de la définition précédente la notion d'*isomorphisme* entre groupoïdes boréliens. Nous dirons que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux groupoïdes boréliens *stablement isomorphes* s'il existe des domaines complets A et A$'$ de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{G}'}$ tels que les restrictions $\mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$ et $\mathcal{G}'_{|\mathrm{A}'}$ soient isomorphes.

Les relations d'équivalence boréliennes arborables constituent une classe de relations d'équivalence boréliennes très intéressante puisque par définition elles sont engendrées par les graphages les plus simples en un certain sens (les arborages, cf. déf. 2.31) et parce que, comme nous l'avons déjà mentionné, les différents invariants qui ont été introduits pour étudier les relations d'équivalence mesurées sont généralement plus faciles à calculer pour les relations arborables. La notion de *groupoïde borélien libre* que nous introduisons ici en est une généralisation au cadre des groupoïdes boréliens.

**Définition 3.3** (Groupoïde borélien libre). *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur* X *et $\mathcal{S}$ une partie borélienne de $\mathcal{G}$. On dit que $\mathcal{G}$ est libre sur $\mathcal{S}$ si, pour tout groupoïde borélien $\mathcal{H}$ sur* Y *et pour toute paire d'applications boréliennes $(f^0, f^1)$ où $f^0 : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ et $f^1 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{H}$ vérifiant*

$$\forall \sigma \in \mathcal{S} \qquad f^0(s(\sigma)) = s(f^1(\sigma)) \quad (\textit{resp. } f^0(r(\sigma)) = r(f^1(\sigma))),$$

*il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens $\overline{f} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel qu'en restriction à l'espace des objets* X *de $\mathcal{G}$, $\overline{f}$ coïncide avec $f^0$, et en restriction à $\mathcal{S}$, $\overline{f}$ coïncide avec $f^1$.*

*Remarque :* Il n'est pas difficile de voir que les groupes d'isotropie d'un groupoïde borélien libre sont des groupes libres. Plus précisément, pour tout élément $x$ de X, le groupe d'isotropie $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{G}$ en $x$, par définition constitué des éléments de $\mathcal{G}$ dont la source et le but sont égaux à $x$, est libre sur l'ensemble des mots $m = \sigma_1 \dots \sigma_n$, c'est-à-dire des suites finies composables au sens des groupoïdes d'éléments $\sigma_i$ de $\mathcal{S}$, tels que la source et le but de $m$ soient $x$ et tels que les buts des mots $\sigma_1 \dots \sigma_i$ pour $i < n$ soient différents de $x$.

**Théorème 3.4.** *Soit $\mathcal{S}$ et* X *des espaces boréliens standards. Soit $r$ et $s$ des applications boréliennes de $\mathcal{S}$ dans* X *à pré-images dénombrables. Alors il existe (à unique isomorphisme près) un unique groupoïde borélien $(\mathcal{G}(\mathcal{S}), s, r)$ sur* X *contenant $\mathcal{S}$ tel que $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ soit libre sur $\mathcal{S}$.*

*Démonstration :* L'unicité découle de la propriété universelle. Voici une construction algébrique analogue à celles des groupes libres. Désignons par $\mathcal{S}^{-1}$ une copie de $\mathcal{S}$ et prolongeons les applications boréliennes source $s$ et but $r$ à $\mathcal{S} \sqcup \mathcal{S}^{-1} \sqcup \mathrm{X}$ par l'identité sur X et en posant $s(\sigma) := r(\sigma^{-1})$ et $r(\sigma) := s(\sigma^{-1})$ pour tout élément $\sigma$ de $\mathcal{S}$. On considère alors l'ensemble $\mathcal{M}$ des mots non vides (c'est-à-dire des suites finies non vides) en les éléments de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^{-1}$ et X tels que le but d'un élément constitutif d'un mot soit la source de l'éventuel élément suivant dans le mot ; les applications $s$ et $r$ étant boréliennes, $\mathcal{M}$ hérite de X et $\mathcal{S}$ une structure naturelle borélienne standard. La loi de concaténation/réduction des mots composables, c'est-à-dire tels que le but du premier mot soit la source du second, passe au quotient par la plus petite relation d'équivalence $\mathcal{R}$ identifiant $\sigma^{\varepsilon} \cdot \sigma^{-\varepsilon}$ et $x$ pour tout $\sigma$ de $\mathcal{S}$ de source $s(\sigma) = x$ $(\varepsilon = \pm 1)$ et tout élément de X avec la suite vide dans tout mot de longueur au moins deux. Par définition, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne standard lisse sur $\mathcal{M}$ car tout élément de $\mathcal{M}$ a un représentant favori, et $\mathcal{G}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}/\mathcal{R}$ est ainsi un groupoïde borélien sur X dont l'identité $\mathrm{id}_y$ en $y$ pour tout élément $y$ de X est l'image de $y$ dans ce quotient. Notons que seule la preuve de l'associativité de la loi de concaténation n'est pas immédiate mais se démontre comme dans le cas de l'une des constructions du groupe libre (voir par exemple [KMS76]).

Si $\mathcal{H}$ est un groupoïde borélien sur Y et $(f^0, f^1)$ une paire d'applications boréliennes $f^0 : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ et $f^1 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{H}$ vérifiant

$$\forall \sigma \in \mathcal{S} \qquad f^0(s(\sigma)) = s(f^1(\sigma)) \quad (\text{resp. } f^0(r(\sigma)) = r(f^1(\sigma))),$$

on pose
$$\overline{f}(\sigma_1^{\varepsilon_1} \dots \sigma_n^{\varepsilon_n}) = f(\sigma_1)^{\varepsilon_1} \dots f(\sigma_n)^{\varepsilon_n} \qquad \varepsilon_i = \pm 1.$$

□

Comme dans le cas des groupes libres, on montre que tout élément de $(\mathcal{G}(\mathcal{S}), s, r)$ s'écrit de manière unique comme un produit $\sigma_1^{\varepsilon_1} \dots \sigma_n^{\varepsilon_n}$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$, les $\sigma_i$ appartenant à $\mathcal{S}$ et $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ si $\sigma_i = \sigma_{i+1}$.

*Remarque :* Rappelons qu'un graphage (cf. déf. 2.3) est par définition la donnée d'une partie borélienne $\mathcal{S}$ symétrique, localement dénombrable et ne rencontrant pas la diagonale de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. C'est une manière de se donner, pour tout élément $x$ de X, des voisins de $x$ : $y$ est un voisin de $x$ si par définition $(x, y) \in \mathcal{S}$. On définit alors

$$s((x,y)) = x \qquad r((x,y)) = y \qquad \text{et} \qquad i((x,y)) = (y,x).$$

Considérons sur $\mathcal{S}$ la relation d'équivalence borélienne engendrée par la symétrie par rapport à la diagonale : celle-ci est lisse puisque chaque classe a exactement deux éléments. Notons $\mathcal{S}^{1/2}$ un domaine fondamental de cette dernière. Si le groupoïde borélien libre $\mathcal{G}\left(\mathcal{S}^{1/2}\right)$ sur $\mathcal{S}^{1/2}$ est principal, alors le graphage $\mathcal{S}$ est un arborage sur X (de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}\left(\mathcal{S}^{1/2}\right)}$). Réciproquement, si $\mathcal{S}$ est un arborage sur X, alors le groupoïde borélien libre sur $\mathcal{S}^{1/2}$ est bien sûr principal. Retenons le fait suivant : étant donné un graphage $\mathcal{S}$ sur X, le groupoïde borélien libre $\mathcal{G}\left(\mathcal{S}^{1/2}\right)$ sur un domaine fondamental $\mathcal{S}^{1/2}$ est principal si et seulement si $\mathcal{S}$ est un arborage sur X.

Nous venons ainsi de généraliser la notion de graphage : c'est la donnée d'applications boréliennes $r, s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{X}$ à pré-images dénombrables. Dans le cas des relations d'équivalence boréliennes, l'arborabilité peut se définir en terme d'arborage ou de L-arborage (cf. déf. 2.31) et nous allons montrer qu'il en est de même pour les groupoïdes boréliens libres. En effet, étant donné un L-graphage $\Phi = (\phi_i : \mathrm{A}_i \longrightarrow \mathrm{B}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sur X, on définit un groupoïde borélien libre $\mathcal{G}_{\mathcal{S}_\Phi}$ sur X en posant

$$\mathcal{S}_\Phi = \bigsqcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i \qquad r(x) = x, \qquad s(x) = \phi_i(x) \qquad \text{si} \quad x \in \mathrm{A}_i.$$

Réciproquement, considérons un espace borélien standard $\mathcal{S}$ muni d'applications boréliennes $r, s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{X}$ à pré-images dénombrables et montrons qu'une telle donnée permet de construire un L-graphage $\Phi$ sur X tel que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Phi$. Pour cela, considérons

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow (r,s)(\mathcal{S}) \subset \mathrm{X} \times \mathrm{X} \\ \sigma \longmapsto (r(\sigma), s(\sigma)) \end{cases}.$$

On définit ainsi un espace fibré standard pour lequel le théorème de sélection assure que

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{S}_i$$

et $\pi_{|\mathcal{S}_i}$ est injective, où $\mathcal{S}_i$ est une partie borélienne de $\mathcal{S}$. Pour chaque $i$ de I, considérons

$$s : \begin{cases} \mathcal{S}_i \subset \mathcal{S} \longrightarrow s(\mathcal{S}_i) \subset \mathrm{X} \\ \qquad \sigma \qquad \longmapsto s(\sigma) \end{cases}.$$

C'est encore un espace fibré standard dont une nouvelle application du théorème de sélection (cf. th. 2.10) donne

$$\mathcal{S}_i = \bigsqcup_{j \in \mathrm{J}_i} \mathcal{S}_{i,j}$$

et $s_{|\mathcal{S}_{i,j}}$ est injective, avec $\mathcal{S}_{i,j}$ une partie borélienne de $\mathcal{S}_i$. Pour chaque $j$ de $\mathrm{J}_i$, considérons enfin

$$r: \begin{cases} \mathcal{S}_{i,j} \subset \mathcal{S} \longrightarrow r(\mathcal{S}_{i,j}) \subset \mathrm{X} \\ \quad \sigma \qquad \longmapsto r(\sigma) \end{cases}$$

et une dernière application du théorème de sélection donne

$$\mathcal{S}_{i,j} = \bigsqcup_{k \in \mathrm{K}_{i,j}} \mathcal{S}_{i,j,k},$$

tel que $r_{|\mathcal{S}_{i,j,k}}$ soit injective sur une certaine partie borélienne $\mathcal{S}_{i,j}$ de $\mathcal{S}_{i,j}$. Il ne reste plus alors qu'à définir

$$\phi_{i,j,k}: \begin{cases} s(\mathcal{S}_{i,j,k}) \longrightarrow r(\mathcal{S}_{i,j,k}) \\ \quad x \qquad \longmapsto r \circ s^{-1}(x) \end{cases},$$

et, par construction, les $\phi_{i,j,k}$ sont des isomorphismes partiels de X définissant un L-graphage $\Phi$ comme souhaité.

Ainsi nous venons de démontrer que la donnée d'un L-graphage sur X est une donnée équivalente à celle d'applications boréliennes $r, s : \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{X}$ à pré-images dénombrables, cette dernière généralisant la notion d'arborage et plus généralement de graphage. D'où la définition suivante :

**Définition 3.5** (Parties génératrices)**.** *Une partie génératrice sur* X *est la donnée d'un espace borélien standard* $\mathcal{S}$ *et d'applications boréliennes* $r$ *et* $s$ *de* $\mathcal{S}$ *dans* X *à pré-images dénombrables.*

*Étant donné un groupoïde borélien* $\mathcal{G}$ *sur* X*, une partie borélienne* $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{G}$ *est une partie génératrice de* $\mathcal{G}$ *si le groupoïde borélien engendré par* $\mathcal{S}$ *dans* $\mathcal{G}$ *coïncide avec* $\mathcal{G}$*.*

Notons que si $\mathcal{S}$ est une partie génératrice d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X, la propriété universelle des groupoïdes boréliens libres assure qu'il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens $f : \mathcal{G}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{G}$, surjectif puisque $\mathcal{S}$ engendre $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur X et $\mathcal{S}$ une partie borélienne de $\mathcal{G}$. Nous allons désormais définir un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sur X, dit de Cayley, canoniquement associé à $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ et généralisant ainsi la construction du $\mathcal{R}_\Phi$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}_\Phi$ canoniquement associé à la donnée d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_\Phi$ sur X et d'un graphage $\Phi$ de celle-ci (voir ex. fond. suivant déf. 2.32).

La plupart des définitions que nous avons introduites dans le contexte des relations d'équivalence boréliennes se transpose sans aucune difficulté dans le cadre des groupoïdes boréliens. Précisons cependant ici les définitions de $\mathcal{G}$-espace fibré standard F, de stabilisateur d'une section partielle de F et de $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien sur X, où $\mathcal{G}$ désigne un groupoïde borélien sur X.

**Définition 3.6.** *Une $\mathcal{G}$-action (à gauche) sur l'espace fibré standard* $(\mathrm{F},\pi)$ *sur* X *est une application borélienne*

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{G},r)\star(\mathrm{F},\pi) & \longrightarrow & \mathrm{F}\\ (\gamma,t) & \longmapsto & \gamma\cdot t\end{array}$$

*telle que, pour tout couple* $(\gamma,\gamma')$ *d'éléments* $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ *vérifiant* $s(\gamma')=r(\gamma)$ *et pour tout* $t$ *appartenant à* F *dans la fibre de* $r(\gamma')$*, on ait*

$$id_{r(\gamma')}\cdot t=t \qquad et \qquad \gamma\cdot(\gamma'\cdot t)=(\gamma\cdot\gamma')\cdot t.$$

*On dit alors que* $(\mathrm{F},\pi)$ *est un $\mathcal{G}$-espace fibré standard sur* X *et que $\mathcal{G}$ agit sur* F.

Notons qu'un $\mathcal{G}$-espace fibré standard F engendre un groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{F}}$ sur F dont les morphismes sont les triplets $(f_y,\gamma,f_x)$ de source $f_x$, de but $f_y$, où $f_x$ et $f_y$ désignent des éléments dans les fibres respectives d'éléments $x$ et $y$ de X et tels que $f_y=\gamma\cdot f_x$ avec $\gamma$ appartenant à $\mathcal{G}$ de source $x$ et de but $y$.
*Exemple fondamental :* $(\mathrm{F},\pi)=(\mathcal{G},s)$ définit un $\mathcal{G}$-espace fibré standard sur X avec l'action suivante :

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{G},r)\star(\mathcal{G},s) & \longrightarrow & (\mathcal{R},s)\\ (\gamma,\gamma') & \longmapsto & \gamma\cdot\gamma'\end{array}.$$

Nous dirons que $(\mathcal{G},s)$ est le $\mathcal{G}$-*espace fibré standard canonique* source associé à $\mathcal{R}$. De même, nous avons le $\mathcal{G}$-*espace fibré standard canonique but* $(\mathcal{G},r)$.

**Définition 3.7** (Stabilisateur)**.** *Si $s$ désigne une section partielle de* F *définie sur une partie borélienne* A *sur* X*, on appelle stabilisateur $Stab_{\mathcal{G}}(s)$ de $s$ le sous-groupoïde de $\mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$ suivant : l'élément $\gamma$ de source $x$ et de but $y$, où $x$ et $y$ désignent des éléments de* A*, appartient à $Stab_{\mathcal{G}}(s)$ si et seulement si $\gamma\cdot s(y)=s(x)$.*

**Définition 3.8** ($\mathcal{G}$-arboretum)**.** *Un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $(\mathcal{A},\pi)$ sur* X *est un graphe dont les espaces de sommets et d'arêtes sont des $\mathcal{G}$-espaces fibrés standards $(\mathcal{A}^0,\pi^0)$ et $(\mathcal{A}^1,\pi^1)$ sur* X *et tel que les applications sommet origine $o:\mathcal{A}^1\longrightarrow\mathcal{A}^0$, sommet terminal $t:\mathcal{A}^1\longrightarrow\mathcal{A}^0$ et arête opposée$^-$: $\mathcal{A}^1\longrightarrow\mathcal{A}^1$ soient des morphismes de $\mathcal{G}$-espaces fibrés standards. On note $\mathcal{A}_x$ le sous-graphe d'ensemble de sommets $(\pi^0)^{-1}(x)$ et d'ensemble d'arêtes $(\pi^1)^{-1}(x)$. Si $\mathcal{A}_x$ est un arbre pour tout $x$ de* X*, nous dirons que $(\mathcal{A},\pi)$ est un $\mathcal{G}$-arboretum.*

Venons-en à la construction du $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}(\mathcal{G},\mathcal{S})$ sur X de Cayley d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X et d'une partie borélienne $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$. L'espace des sommets est l'espace fibré standard $s:\mathcal{G}\longrightarrow\mathrm{X}$ dont la fibre d'un élément $x$ de X est constituée des éléments de $\mathcal{G}$ dont la source est $x$. Bien entendu, dans le cas d'une relation d'équivalence borélienne avec $s=\pi_l$, on retrouve l'espace fibré standard canonique gauche.

Définissons à présent l'espace des arêtes orientées. Pour cela, considérons le produit fibré $\mathcal{G}\star\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $(g,s)$ de $\mathcal{G}\times\mathcal{S}$ tels que le but de $\gamma$ coïncide avec la source de $s$. L'espace des arêtes orientées est alors l'espace fibré standard $\mathcal{G}\star\mathcal{S}$ munie de la projection dans X qui, à un couple d'éléments $(\gamma,\sigma)$ associe la source de $\gamma$. Les applications d'attachement (sommet origine et sommet terminal) sont naturellement définies ainsi : pour tout élément $x$ de X, si $(\gamma, \sigma)$ est une arête au-dessus de $x$ (c'est-à-dire $s(\gamma) = x$), on a

$$s((\gamma, \sigma)) = \gamma \qquad \text{et} \qquad r((\gamma, \sigma)) = \gamma \cdot \sigma.$$

*Remarque :* Dans le cas d'une relation d'équivalence borélienne et d'un graphage, on retrouve le champ de graphes borélien associé.

**Proposition 3.9.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur* X *et $\mathcal{S}$ une partie borélienne de $\mathcal{G}$. Le champ de graphes borélien de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ de $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ est un arboretum si et seulement si $\mathcal{G}$ est libre sur $\mathcal{S}$.*

*Démonstration :* C'est une conséquence des deux faits suivants :
- les fibres de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sont connexes si et seulement si $\mathcal{S}$ engendre $\mathcal{G}$ ;
- les fibres de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sont sans circuit si et seulement si $\mathcal{S}$ est une famille libre.

□

Nous allons désormais voir que le champ de graphes borélien $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ (orienté par construction) de Cayley de $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ est en fait un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien sur X. En effet, l'espace des sommets est le $\mathcal{G}$-espace fibré standard canonique source sur X. De même l'espace des arêtes est un $\mathcal{G}$-espace fibré standard sur X et $\mathcal{G}$ agit en préservant la coloration naturelle des arêtes donnée par la partie génératrice $\mathcal{S}$.

**Définition 3.10** (Inversion)**.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien et $\mathcal{A}$ un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien sur* X*. Une inversion est la donnée d'un élément $x$ de* X*, d'une arête $a_x$ dans la fibre $\mathcal{A}_x$ de $x$ et d'un élément $\gamma_x$ du groupe d'isotropie $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{G}$ en $x$ tels que $\gamma_x \cdot a_x$ soit égal à $\overline{a_x}$.*

> Toutes les actions que nous considérerons dans la suite sont supposées sans inversion. Cette hypothèse est automatiquement vérifiée pour les groupoïdes boréliens principaux.

Un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X est dit *lisse* s'il est principal et si la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ qu'il engendre sur X est lisse (cf. déf. 2.4).

**Définition 3.11** (Action lisse)**.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien et* F *un $\mathcal{G}$-espace fibré standard sur* X*. Un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur* F *est une partie borélienne de* F *qui rencontre toutes les classes de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathrm{F}}}$ et qui est disjointe de n'importe lequel de ses translatés par un élément non trivial de $\mathcal{G}$.*

*L'action de $\mathcal{G}$ sur* F *est dite lisse s'il existe un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur* F*, autrement dit si le groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{F}}$ engendrée par l'action de $\mathcal{G}$ sur* F *est un groupoïde borélien lisse.*

Remarquons que si l'action de $\mathcal{G}$ sur F est lisse, alors la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathrm{F}}}$ sur F engendrée par l'action de $\mathcal{G}$ sur F est lisse (cf. déf. 2.4) puisqu'un domaine fondamental de l'action est en particulier un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathrm{F}}}$. Mais la réciproque est fausse car un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathrm{F}}}$ n'est pas *a priori* un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur F à cause des groupes d'isotropie de $\mathcal{G}$.

*Exemple fondamental :* Comme nous l'avons vu, un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X agit sur son espace fibré standard canonique source $(\mathcal{G}, s)$ et l'image de $d : \mathrm{X} \longrightarrow \mathcal{G}$

est un domaine fondamental de cette action. De même, $\mathcal{G}$ agit sur son espace fibré standard canonique but $(\mathcal{G}, r)$ et ces deux actions de « $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}$ » commutent (cf. ex. fond. p. 29). Étant donné $\mathcal{H}$ un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$ défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$, son action lisse sur $(\mathcal{G}, r)$ passe au quotient et permet de définir le $\mathcal{G}$-espace fibré standard (source du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$) $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, s)$ sur X dont la diagonale $d_{\mathcal{H}}$ est une section partielle définie sur A dont l'image rencontre toutes les orbites de l'action de $\mathcal{G}$ sur $(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ et dont le $\mathcal{G}$-stabilisateur est le sous-groupoïde $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

De même, on définit le $\mathcal{G}$-espace fibré standard canonique but du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ et, comme dans le cas des relations d'équivalence boréliennes (cf. p. 2), l'isomorphisme d'inversion $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ de $\mathcal{G}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{G}$-espaces fibrés standards de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}\backslash\mathcal{G}$.

**Définition 3.12** (Action quasi-libre). *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien et* F *un $\mathcal{G}$-espace fibré standard sur* X. *L'action de $\mathcal{G}$ sur* F *est quasi-libre si, pour toute section partielle de* F, *le stabilisateur $Stab_{\mathcal{G}}(s)$ de $s$ sous l'action de $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien lisse.*

De même que pour les actions lisses, remarquons que si l'action de $\mathcal{G}$ sur F est quasi-libre, alors la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ induite par $\mathcal{G}$ sur X agit quasi-librement sur F (cf. déf. 2.24). Mais la réciproque est fausse à cause des groupes d'isotropie de $\mathcal{G}$ qui entraîne que $\mathrm{Stab}_{\mathcal{R}_{\mathcal{G}}}(s)$ peut être une sous-relation lisse de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$, sans pour autant que $\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ soit un sous-groupoïde principal de $\mathcal{G}$, où $s$ désigne une section partielle de F.

La proposition 2.25 se généralise alors aux groupoïdes boréliens avec les mêmes arguments.

**Proposition 3.13.** *Soit* F *un $\mathcal{G}$-espace fibré standard où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien sur* X. *Alors l'action de $\mathcal{G}$ est quasi-libre si et seulement si elle est lisse.* □

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur X et $\mathcal{S}$ une partie borélienne de $\mathcal{G}$. Désignons par $s$ une section partielle de sommets du $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien orienté de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ associé à $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$. L'espace X, identifié à aux identités de $\mathcal{G}$, étant un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur l'espace des sommets, on en déduit que, pour toute section partielle $s$ de sommets, le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(s)$ de $s$ sous l'action de $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde lisse de $\mathcal{G}$ défini sur le domaine de définition de $s$. Notons également que la partie borélienne de l'espace des arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ constituée des arêtes $(\gamma, \sigma)$ de $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ telles que $\gamma = \mathrm{id}_x$ pour $x$ dans X et de leurs arêtes inverses est à son tour un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur l'espace des arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$.

Nous allons maintenant introduire la notion de *graphe borélien* et voir qu'on peut associer naturellement un groupoïde borélien libre à un tel graphe borélien.

**Définition 3.14** (Graphe borélien). *Un graphe borélien* G *est un graphe localement dénombrable (c'est-à-dire que chaque sommet n'a qu'un nombre dénombrable de sommets voisins) dont les ensembles de sommets* $\mathrm{G}^0$ *et d'arêtes* $\mathrm{G}^1$ *sont des espaces boréliens standards et tel que les applications sommet origine $o$, sommet terminal $t$ et arête opposée$^-$ soient des applications boréliennes.*

Soit $\mathrm{G}ra$ un graphe et $x$ un sommet de $\mathrm{G}ra$. Si $a$ est une arête de $\mathrm{G}ra$ de sommets origine et terminal $x$, l'éclatement de $a$ est une arête de sommet origine $x$ et de sommet terminal une copie $x_a$ du sommet $x$. L'*étoile* de $x$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est constitué de $x$, des sommets adjacents à $x$ dans G et des sommets $x_a$ pour toute arête $a$ de sommets origine et terminal $x$, et dont l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de G dont une et une seule des extrémités est $x$ ainsi que des éclatements des arêtes $a$ de sommets origine et terminal $x$.

**Définition 3.15.** *Un morphisme de graphes boréliens est un morphisme de graphes dont les applications sous-jacentes entre sommets et arêtes sont boréliennes.*

*Exemple :* Un arboretum sur X possède une structure canonique de graphe borélien. Plus généralement, un champ de graphes borélien sur X est en particulier un graphe borélien. Un morphisme de champs de graphes borélien induit un morphisme de graphes boréliens entre les graphes boréliens canoniques associés.

*Remarque :* Un graphe borélien G induit naturellement une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ sur l'espace des sommets $\mathrm{G}^0$, chaque classe de $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ étant canoniquement munie d'une structure de graphe connexe, son *graphe de Cayley*. Si chaque classe de $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ possède une structure d'arbre, nous dirons que G est une *forêt borélienne*. En particulier, un arboretum sur X possède une structure canonique de forêt borélienne. Si la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ engendrée par un graphe borélien G est lisse, alors G définit naturellement un champ de graphes borélien $(\mathcal{A}, \pi)$ sur un domaine fondamental X de $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ où, pour tout élément $x$ de X, la $\pi$-fibre de $x$ est le graphe de Cayley de la classe de $x$ ; c'est un arboretum sur X si G est une forêt borélienne. Notons enfin qu'un graphe borélien G engendre un groupoïde borélien libre $\mathcal{G}_{\mathrm{G}} = \mathcal{G}(\mathcal{S})$ où $\mathcal{S} = \mathrm{G}^1$, $s = o$ et $r = t$. Bien entendu, $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ n'est autre que la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}}}$ sur X engendrée par $\mathcal{G}_{\mathrm{G}}$ (cf. p. 58). On en déduit que $\mathcal{G}_{\mathrm{G}}$ est un groupoïde borélien principal si et seulement si G est une forêt borélienne.

Donnons à présent l'exemple qui a motivé notre définition des graphes boréliens. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un champ de graphes boréliens $\mathcal{A}$ sur X. On suppose que l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ est *lisse*, c'est-à-dire que les actions de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}^0$ et $\mathcal{A}^1$ sont lisses : notons $\mathrm{A}^0$ et $\mathrm{A}^1$ les espaces quotients de $\mathcal{A}^0$ et $\mathcal{A}^1$ par $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}}$ respectivement. Les morphismes d'attachement des arêtes passent au quotient et l'espace quotient $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ de cette action est naturellement un graphe borélien dont les espaces de sommets et d'arêtes sont $\mathrm{A}^0$ et $\mathrm{A}^1$. Notons que si $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien principal et si $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{G}$-arboretum, alors $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ est une forêt borélienne.

Nous terminons ce premier paragraphe en donnant un sens à la notion de groupoïde borélien quotient. Pour ceci, nous allons définir les notions de sous-groupoïdes *distingués* et *totalement isotropes* qui nous seront fort utiles dans la suite. Les notions de groupoïdes boréliens principal et totalement isotrope sont en un certain sens « orthogonales » puisque c'est une conséquence immédiate des définitions qu'un groupoïde borélien principal et totalement isotrope sur X est le groupoïde borélien trivial sur X, c'est-à-dire dont les seuls morphismes sont les identités $id_x$ en tout point de X.

**Définition 3.16** (Totalement isotrope). *Un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur* X *est totalement isotrope si la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ associée à $\mathcal{G}$ sur* X *est triviale.*

À tout groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X, on associe naturellement un groupoïde borélien $\mathcal{G}^{ti}$ totalement isotrope sur X dont les éléments sont les éléments des groupes d'isotropie de $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G}^{ti} = \{\gamma \in \mathcal{G} \ ; \ s(\gamma) = r(\gamma)\},$$

qui est bien un groupoïde borélien sur X, ce qui découle de la régularité borélienne de $s$ et $r$.

Introduisons maintenant le *noyau d'isotropie* d'un morphisme : c'est un deuxième exemple de groupoïde borélien totalement isotrope.

**Définition 3.17** (Noyau d'isotropie). *Soit $f : (\mathcal{G}_1, \mathrm{X}_1) \longrightarrow (\mathcal{G}_2, \mathrm{X}_2)$ un morphisme de groupoïdes boréliens. Le noyau d'isotropie de $f$ est le sous-groupoïde de $\mathcal{G}_1$ défini ainsi :*

$$KerIs(f) = \left\{\gamma_1 \in \mathcal{G}_1 \ ; \ s(\gamma_1) = r(\gamma_1) \quad f(\gamma_1) = id_{f(s_{\gamma_1})}\right\}.$$

*Remarque :* Le noyau d'isotropie d'un morphisme de groupoïdes boréliens $f$ est bien un groupoïde borélien car $\mathrm{KerIs}(f) = \{\gamma_1 \in \mathcal{G}_1^{ti} \ ; \ f(\gamma_1) = f(s(\gamma_1))\}$ (la stabilité par composition étant évidente). De plus, remarquons que $f$ induit pour tout élément $x_1$ de $\mathrm{X}_1$ un morphisme de groupes $f_{x_1} : \mathcal{G}_{1,x_1} \longrightarrow \mathcal{G}_{2,f(x_1)}$. Le groupe d'isotropie de $\mathrm{KerIs}(f)$ en $x_1$ n'est autre que $\mathrm{KerIs}(f_{x_1})$.

Pour tout élément $\gamma_1$ de $\mathcal{G}_1$ et tout élément $\theta$ de $\mathrm{KerIs}(f)$ tels que $r(\gamma_1) = s(\theta)$, on a

$$f(\gamma_1 \cdot \theta \cdot \gamma_1^{-1}) = f(\gamma_1) \cdot f(\gamma_1)^{-1} = \mathrm{id}_{o(\gamma_1)}.$$

Autrement dit, $\mathrm{KerIs}(f)$ est un sous-groupoïde distingué de $\mathcal{G}_1$ dans le sens suivant :

**Définition 3.18** (Sous-groupoïde distingué). *Un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur* X *est distingué ($\mathcal{H} \lhd \mathcal{G}$) si pour tout élément $\gamma$ de $\mathcal{G}$ et tout élément $\theta$ de $\mathcal{H}_{r(\gamma)}$, on a*

$$\gamma \cdot \theta \cdot \gamma^{-1} \in \mathcal{H}_{s(\gamma)}.$$

*Remarque :* Pour tout élément $x$ de X, notons que $\mathcal{H}_x$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_x$. Remarquons également qu'étant donné une partie borélienne $\mathcal{K}$ de $\mathcal{G}$ telle que, pour tout élément $\gamma$ de $\mathcal{K}$, la source et le but de $\gamma$ soient les mêmes, il existe un plus petit sous-groupoïde distingué de $\mathcal{G}$ engendré par $\mathcal{K}$.

Nous introduisons une dernière notion : celle de groupoïde borélien quotient d'un groupoïde borélien par un sous-groupoïde distingué totalement isotrope. Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur X et $\mathcal{H}$ un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$ distingué totalement isotrope. Pour tout élément $\gamma$ de $\mathcal{G}$, on définit la classe à gauche de $\gamma$ :

$$\gamma \cdot \mathcal{H} = \{\gamma \cdot h \ ; \ h \in \mathcal{H} \quad s(h) = r(\gamma).\}$$

On définit sur $\mathcal{G}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont les ensembles (dénombrables) $\gamma \cdot \mathcal{H}$ pour $\gamma$ appartenant à $\mathcal{G}$. C'est une relation d'équivalence borélienne car $\gamma \cdot \mathcal{H}$ est égal à $\gamma' \cdot \mathcal{H}$ si et seulement si $\gamma$ et $\gamma'$ sont des éléments de $\mathcal{G}$ de même source et tels que $\gamma^{-1} \cdot \gamma'$ appartient à $\mathcal{H}$. De plus, notons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne lisse. En effet, ceci est une conséquence du fait que les classes de $\mathcal{R}$ soient contenues dans les fibres du l'espace fibré standard canonique but $(\mathcal{G}, r)$. Ainsi, étant donné une numérotation borélienne des fibres de $(\mathcal{G}, r)$ (cf. lem. 2.11), on construit un domaine fondamental de $\mathcal{R}$ en considérant le plus petit élément, dans chaque fibre de $(\mathcal{G}, r)$, de chaque classe de $\mathcal{R}$.

**Définition 3.19** (Groupoïde quotient)**.** *L'espace quotient $\mathcal{G}/\mathcal{R}$ est un groupoïde borélien sur* X*, noté $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, avec la loi de composition suivante*

$$(\gamma_1 \cdot \mathcal{H}) \cdot (\gamma_2 \cdot \mathcal{H}) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \mathcal{H},$$

*où le but de $\gamma_1$ est égal à la source de $\gamma_2$ et*

$$s(\gamma \cdot \mathcal{H}) = s(\gamma) \qquad r(\gamma \cdot \mathcal{H}) = r(\gamma).$$

Il n'est pas difficile de vérifier le bien-fondé des différents points de cette définition ; par exemple, c'est la condition d'isotropie totale qui assure que $r$ soit bien définie. De la même façon, on peut définir la classe à droite d'un élément $\gamma$ de $\mathcal{G}$ et la condition d'isotropie assure une nouvelle fois que

$$\mathcal{H} \lhd \mathcal{G} \iff \forall \gamma \in \mathcal{G} \quad \gamma \cdot \mathcal{H} = \mathcal{H} \cdot \gamma.$$

*Remarque :* Attention à ne pas confondre, dans le cas sous-groupoïde distingué totalement isotrope, le groupoïde quotient que nous venons de définir et le $\mathcal{G}$-espace fibré standard canonique source du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ qui tous les deux sont notés pour abréger $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Dans la suite, nous préciserons bien à chaque fois les objets en question.

Étant donné un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X et $\mathcal{H}$ un sous-groupoïde distingué totalement isotrope, notons $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ l'application $\gamma \longmapsto \gamma \cdot \mathcal{H}$. Par définition, $p$ est naturellement surjective de noyau isotrope égal à $\mathcal{H}$.

Mentionnons également que $p$ satisfait la propriété universelle suivante : pour tout morphisme de groupoïdes boréliens $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ tel que le noyau isotrope de $f$ contienne $\mathcal{H}$, il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens $\overline{f} : \mathcal{G}/\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}'$ tel que le diagramme suivant commute. Bien entendu, $\overline{f}$ est l'unique morphisme de groupoïdes boréliens défini par $\overline{f}(\gamma.\mathcal{H}) = f(\gamma)$ pour tout $\gamma$ de $\mathcal{G}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{G}' \\ \mathcal{G}/\mathcal{H} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Terminons cette partie par les remarques suivantes. À tout groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur X, nous avons associé une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ sur X. D'autre part, on peut également considérer le groupoïde quotient de $\mathcal{G}$ par son sous-groupoïde borélien distingué totalement isotrope $\mathcal{G}^{ti}$ sur X : c'est un groupoïde borélien principal sur X qui n'est autre que le groupoïde borélien principal $(\mathcal{R}, o = \pi_l, r = \pi_r)$.

Si $\Phi$ est un L-graphage sur X, nous venons de voir que la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_\Phi$ s'identifie au groupoïde quotient du groupoïde borélien libre $\mathcal{G}_\Phi$ sur $\Phi$ par son sous-groupoïde borélien distingué totalement isotrope $\mathcal{G}_\Phi^{ti}$ sur X. Autrement dit, la donnée d'un L-graphage d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ permet de définir une *présentation* de $\mathcal{R}$. Notons enfin que le cas d'un L-arborage correspond exactement au cas où le sous-groupoïde borélien distingué totalement isotrope $\mathcal{G}_{\Phi}^{ti}$ sur X est le groupoïde borélien trivial, c'est-à-dire dont les seuls morphismes sont les identités en tout point de X.

**Définition 3.20** (Présentation)**.** *Une présentation d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur* X *est la donnée*

- *d'une partie génératrice $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ (cf. déf. 3.5) ;*
- *et d'une partie borélienne $\mathcal{K}$ du groupoïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ telle que, pour tout élément $\gamma$ de $\mathcal{K}$, la source et le but de $\gamma$ soient les mêmes,*

*telle que le sous-groupoïde distingué totalement isotrope engendré par $\mathcal{K}$ soit le noyau du morphisme canonique $\mathcal{G}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{G}$.*

On déduit de cette définition un isomorphisme canonique entre le groupoïde quotient du groupoïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ par le sous-groupoïde distingué totalement isotrope engendré par $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$.

# II $\mathcal{G}$-arboretums

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux actions de groupoïdes boréliens sur des arboretums. Nous commencerons par rappeler la notion d'*espace singulier* (introduite par Connes dans [Con79]) et nous verrons que l'« espace quotient » d'une action d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur X est naturellement un *graphe singulier* (déf. 3.23). Nous définirons pour une telle action la notion de *désingularisation* (déf. 3.29) au travers de la notion de *graphe de groupoïdes* (déf. 3.27). Nous expliciterons le cas important des actions quasi-libres (th. 3.31) dont nous déduirons que les sous-groupoïdes d'un groupoïde borélien libre sont libres (cor. 3.36). Le résultat central du deuxième paragraphe de cette partie est un théorème de structure pour tout groupoïde borélien $\mathcal{G}$ agissant sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur X (th. 3.41). Dans le cas particulier où X est un singleton, on retrouve la théorie de Bass-Serre classique des actions de groupes sur les arbres. Nos résultats et leurs démonstrations sont largement inspirées de la théorie de Bass-Serre classique telle qu'elle est exposée dans [Ser77].

## 1 Graphes de groupoïdes et désingularisation

Commençons par préciser la notion d'*espace singulier* (voir également [Con79]). On dit qu'une application surjective $\pi$ à pré-images dénombrables d'un espace borélien standard X dans un ensemble Y est une *désingularisation principale* de Y si, en tant que partie de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que les images par $\pi$ de $x$ et de $y$ soient égales dans Y est une partie borélienne de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Autrement dit, $\pi$ est une désingularisation principale de Y si la relation d'équivalence dont les classes sont les pré-images de $\pi$ est une relation d'équivalence borélienne sur X. Deux désingularisations principales de Y sont dites *équivalentes* si les relations d'équivalence boréliennes sous-jacentes sont stablement orbitalement équivalentes.

*Exemple fondamental :* Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne sur X, la projection canonique de X dans $X/\mathcal{R}$ est une désingularisation principale de l'ensemble quotient.

**Définition 3.21** (Connes, [Con79])**.** *Une structure singulière sur un ensemble* Y *est la donnée d'une classe d'équivalence de désingularisations principales. On appelle espace singulier un ensemble muni d'une structure singulière.*

*Exemple :* Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence borélienne sur X, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ a une structure canonique d'espace singulier. Dans la suite, nous désignerons par $Y = X/\mathcal{R}$ un espace singulier dont une désingularisation principale définit la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur l'espace borélien standard X. Nous dirons encore qu'une telle $\mathcal{R}$ sur X est une désingularisation principale de Y.

**Définition 3.22** (Morphisme singulier)**.** *Soit* Y *et* Y′ *des espaces singuliers. Un morphisme d'espaces singuliers $f$ de* Y *dans* Y′ *est une application de* Y *dans* Y′ *telle qu'il existe des désingularisations principales $\pi$ et $\pi'$ de* Y *et* Y′ *définies respectivement sur les espaces boréliens standards* X *et* X′ *et une application borélienne* F *de* X *dans* X′ *telle que $\pi' \circ F$ soit égale à $f \circ \pi$. Nous dirons qu'une telle application* F *est une désingularisation de $f$.*

*Remarque :* Une désingularisation F d'un morphisme singulier $f : X/\mathcal{R} \longrightarrow X'/\mathcal{R}'$ induit un morphisme de relations d'équivalences boréliennes de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$. Remarquons également (cf. déf. 2.7) qu'un morphisme injectif d'espaces singuliers se relève en une réduction borélienne et un morphisme surjectif se relève en un morphisme complet de relations d'équivalence boréliennes.

Soit $\pi_i : X_i \longrightarrow Y$ $(i = 1, 2)$ des désingularisations principales de Y et de même des désingularisations $\pi'_j : X'_j \longrightarrow Y'$ $(j = 1, 2)$ de Y′. Désignons par $f_{12} : A_1 \subset X_1 \longrightarrow A_2 \subset X_2$ et $f'_{12} : A'_1 \subset X'_1 \longrightarrow A'_2 \subset X'_2$ des équivalences orbitales entre domaines complets des différentes relations d'équivalence boréliennes sous-jacentes sur $X_i$ et $X'_j$. Considérons des morphismes intérieurs $r_2 : X_2 \longrightarrow A_2$ et $r'_1 : X'_1 \longrightarrow A'_1$ des relations d'équivalence boréliennes sur $X_2$ et $X'_1$ (cf. lem. 2.12). Si $f : Y \longrightarrow Y'$ est un morphisme d'espaces singuliers et $F : X_1 \longrightarrow X'_1$ une désingularisation de $f$, alors $f'_{12} \circ r'1 \circ F \circ f_{12}^{-1} \circ r_2 : X_2 \longrightarrow A'_2 \subset X_2$ est encore une désingularisation de $f$.

Les deux notions suivantes sont des généralisations de celles de graphe borélien (cf. déf. 3.14) et de morphismes de graphes boréliens pour lesquelles les espaces de sommets et d'arêtes sont en fait des espaces boréliens standards.

**Définition 3.23** (Graphe singulier)**.** *Un graphe singulier est la donnée d'un graphe $G_s$ et d'une structure d'espace singulier sur les ensembles de sommets $G_s^0$ et d'arêtes $G_s^1$ telle que les applications sommet origine, sommet terminal et arête opposée soient des morphismes d'espaces singuliers, et que chaque sommet n'ait qu'un ensemble dénombrable de sommets voisins.*

*Remarque :* Dans le cas où les composantes connexes d'un graphe singulier sont des arbres, nous parlerons de *forêt singulière*.

**Définition 3.24** (Morphisme de graphes singuliers)**.** *Un morphisme de graphes singuliers* $f : \mathrm{G}_s^1 \longrightarrow \mathrm{G}_s^2$ *est un morphisme de graphes tel que les applications entre espaces de sommets et espaces d'arêtes soient singulières.*

*Exemple fondamental :* Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un champ de graphes borélien $\mathcal{A}$ sur X. On désigne par $\mathcal{A}^0/\mathcal{R}_{\mathcal{G}^0_{\mathcal{A}}}$ et par $\mathcal{A}^1/\mathcal{R}_{\mathcal{G}^1_{\mathcal{A}}}$ les espaces singuliers définis par les relations d'équivalence boréliennes engendrées par l'action de $\mathcal{G}$ sur les espaces de sommets et d'arêtes. Les morphismes de relations d'équivalence boréliennes $o, t, ^-$ passent au quotient en des morphismes singuliers. On obtient ainsi un graphe singulier noté $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$, appelé *graphe singulier quotient* de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien principal, alors $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ est une forêt singulière.

*Remarque :* Dans le cas particulier d'une action lisse de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$, on retrouve le fait que l'espace quotient $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ est un graphe borélien (cf. p. 65).

**Définition 3.25** (Désingularisation)**.** *Soit* $\mathrm{X}_s$ *un espace singulier. Une désingularisation de* $\mathrm{X}_s$ *est la donnée d'un groupoïde borélien sur un espace borélien standard* X *telle que la relation d'équivalence borélienne associée soit une désingularisation principale de* $\mathrm{X}_s$*.*

Nous déduidons de cette définition des notions de désingularisation pour un graphe singulier.

**Définition 3.26.** *Une désingularisation (resp. principale) d'un graphe singulier* $\mathrm{G}_s$ *est la donnée d'un graphe borélien* G*, de groupoïdes boréliens (resp. de relations d'équivalence borélienne) sur les espaces de sommets et d'arêtes de* G *compatibles (c'est-à-dire que le groupoïde borélien sur les arêtes est un sous-groupoïde du groupoïde borélien sur les sommets via l'application sommet origine) qui induisent les structures singulières sur* $\mathrm{G}_s^0$ *et* $\mathrm{G}_s^1$*.*

*Exemple fondamental :* Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un champ de graphes borélien $\mathcal{A}$ sur X. Cette action définit sur les espaces de sommets et d'arêtes de $\mathcal{A}$ les groupoïdes boréliens $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}$ (resp. les relations d'équivalences boréliennes $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}}$ qui, par définition d'une action, sont compatibles. On obtient ainsi une désingularisation (resp. principale) du graphe singulier quotient $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$.

Nous allons maintenant généraliser les notions déjà rencontrées de graphes d'isomorphismes partiels et de graphes de relations (déf. 2.49). Rappelons qu'un graphe d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$ est un graphe dénombrable tel que chaque sommet porte un espace borélien standard et chaque arête porte un isomorphisme partiel dont la source et le but sont des parties boréliennes des espaces boréliens standards portés par les extrémités de l'arête.

**Définition 3.27** (Graphe de groupoïdes)**.** *Un graphe de groupoïdes* $\mathrm{G}^g$ *est la donnée d'un graphe dénombrable* G*, d'un groupoïde borélien sur un espace borélien standard pour chaque sommet et chaque arête de* G *de sorte que les groupoïdes boréliens portés par une arête et son arête opposée soient égaux, ainsi que, pour chaque arête* $a$ *de* G*,* *d'un morphisme injectif de groupoïde borélien porté par a dans le groupoïde borélien porté par le sommet terminal de a. Si* G *est un arbre, nous dirons que* $\mathrm{G}^g$ *est un arbre de groupoïdes.*

*Remarque :* Il existe bien entendu une notion naturelle de morphismes de graphes de groupoïdes dont nous n'aurons pas besoin.

Via le foncteur d'*oubli*, à tout arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ est canoniquement associé un arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$. Nous dirons qu'un arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ est *enraciné* si l'arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$ sous-jacent à $\mathrm{G}^g$ l'est (cf. p. 45). Ainsi, notons qu'un arbre de groupoïdes enraciné définit naturellement un arboretum sur l'espace borélien standard porté par sa racine. Rappelons que si $\mathcal{A}$ est un champ de graphes borélien sur X et $\mathrm{G}^{ip}$ un arbre d'isomorphismes partiels enraciné, une *représentation* de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ est un isomorphisme $\chi$ entre l'arboretum défini par $\mathrm{G}^{ip}$ sur sa racine identifiée à une partie borélienne Y de X et un sous-arboretum de $\mathcal{A}_{|\mathrm{Y}}$. On dit que $\chi$ est une représentation de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ et que les images (par l'isomorphisme de représentation $\chi$) des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^{ip}$ sont des *représentations* dans $\mathcal{A}$ de ces espaces boréliens standards.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien et $\mathcal{A}$ un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien sur X. Si $\chi$ est une représentation dans $\mathcal{A}$ d'un arbre d'isomorphismes partiels enraciné $\mathrm{G}^{ip}$, l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ donne naissance à des groupoïdes boréliens sur les représentations dans $\mathcal{A}$ des espaces boréliens standards de sommets et d'arêtes de $\mathrm{G}^{ip}$ : ce sont respectivement les restrictions de $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}$. Une représentation de $\mathrm{G}^{ip}$ dans $\mathcal{A}$ induit ainsi une structure d'arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ sur $\mathrm{G}^{ip}$.

Via le foncteur d'*oubli*, à tout arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ est canoniquement associé un arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$. Nous dirons qu'un arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ est enraciné si l'arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$ sous-jacent à $\mathrm{G}^g$ l'est. Une *représentation d'un arbre de groupoïdes enraciné* $\mathrm{G}^g$ *dans* $\mathcal{A}$ est une représentation $\chi$ de l'arbre d'isomorphismes partiels enraciné $\mathrm{G}^{ip}$ sous-jacent à $\mathrm{G}^g$ dans $\mathcal{A}$ telle que $\chi$ induise des isomorphismes de groupoïdes boréliens entre les groupoïdes boréliens portés par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^g$ et les groupoïdes boréliens définis par l'action de $\mathcal{G}$ sur les représentations dans $\mathcal{A}$ des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^{ip}$.

**Définition 3.28** (Arboretum de représentants)**.** *Soit* $\mathcal{A}$ *un* $\mathcal{G}$*-champ de graphes borélien sur* X*. Un arboretum de représentants du graphe singulier quotient* $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ *est la donnée d'un arbre de groupoïdes enraciné* $\mathrm{G}^g$ *et d'une représentation* $\chi$ *de* $\mathrm{G}^g$ *dans* $\mathcal{A}$ *telle que les saturés des relations d'équivalence boréliennes induites par les représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de* $\mathrm{G}^g$ *forment une partition de l'espace des sommets* $\mathcal{A}^0$*.*

*Remarque :* Un arboretum de représentants induit dans $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ une forêt singulière dont l'espace singulier des sommets coïncide avec celui de $\mathrm{G}_s$.

*Remarque :* Étant donné un relevé d'un arbre maximal de l'espace quotient d'une action d'un groupe sur un graphe connexe, on définit naturellement un arbre de groupes en considérant les stabilisateurs des sommets et des arêtes de ce relevé.

Un arboretum de représentants correspond à une donnée analogue dans le cas des groupoïdes boréliens.

Nous allons introduire une dernière notion, celle de *désingularisation d'une action.*

**Définition 3.29** (Désingularisation d'une action)**.** *Une désingularisation de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ (ou désingularisation du graphe singulier quotient $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$) est la donnée d'un graphe orienté de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ (c'est-à-dire de graphe sous-jacent* G *orienté), d'un sous-arbre maximal enraciné $\mathrm{A}_m$ de* G *et d'un isomorphisme partiel $\phi_a$ de $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ pour chaque arête $a$ de l'orientation de* G *n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$ tel que :*

- *l'arbre de groupoïdes enraciné $\mathrm{A}_m^g$ induit par $\mathrm{G}^g$ sur le sous-arbre maximal enraciné $\mathrm{A}_m$ soit un arboretum de représentants du graphe singulier quotient $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ dont l'espace borélien standard porté par la racine de $\mathrm{A}_m$ est identifié à* X *(notons $\chi$ l'isomorphisme de représentation) ;*
- *pour toute arête $a$ de l'orientation de* G *n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$, il existe une section partielle d'arêtes définie sur la source de $\phi_a$, dont les sommets origines appartiennent à la représentation dans $\mathcal{A}$ de l'espace borélien standard porté le sommet origine de $a$ et dont les images sous l'action de $\phi_a$ des sommets terminaux appartiennent à la représentation dans $\mathcal{A}$ de l'espace borélien standard porté le sommet terminal de $a$. Comme pour les sommets, nous dirons que l'image de cette section partielle est une représentation de l'espace borélien standard associée à l'arête ;*
- *pour toute arête $a$ de l'orientation de* G *n'appartenant pas à $\mathrm{A}_m$, $\chi$ induit un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre $Stab(s_a) \subset \mathcal{G}_{\chi(o(a)))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à $\bar{a}$ du groupoïde borélien porté par $\bar{a}$ dans le groupoïde borélien porté par $t(\bar{a}) = o(a)$, ainsi qu'un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre $\phi_a Stab(s_a)\phi_a^{-1} \subset \mathcal{R}_{\chi(t(a)))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à $a$ du groupoïde borélien porté par $a$ dans le groupoïde borélienne porté par $t(a)$ ;*
- *les saturés des relations d'équivalence boréliennes induites par les représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de $\mathrm{G}^r$ forment une partition de l'espace des arêtes $\mathcal{A}^1$.*

Démontrons à présent l'existence d'une désingularisation pour toute action d'un groupoïde borélien sur un arboretum, cas qui nous intéresse le plus pour la suite. Ce résultat d'existence est analogue à la construction d'un graphe de groupes associé à une action d'un groupe sur un arbre et est la généralisation au cadre des groupoïdes boréliens du théorème 2.53 concernant les relations d'équivalence boréliennes.

**Théorème 3.30.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur* X*. Alors il existe une désingularisation du graphe singulier quotient $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$.*

La fin de cette partie est consacrée à la démonstration de ce théorème au cours de laquelle nous démontrerons le théorème suivant concernant le cas particulier des actions quasi-libres :

**Théorème 3.31.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien agissant quasi-librement (sans inversion) sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur* X. *Alors $\mathcal{G}$ est stablement isomorphe à un groupoïde borélien libre sur* X.

*Remarque :* Par définition, une action quasi-libre sur un arboretum est une action quasi-libre sur l'espace des sommets et, par suite, sur l'espace des arêtes également. Remarquons qu'il découle de la définition d'action quasi-libre que les groupes d'isotropie de $\mathcal{G}$ agissent librement sur les fibres de $\mathcal{A}$ qui sont des arbres. On en déduit donc déjà que les groupes d'isotropie sont des groupes libres. De même, le théorème 2.33 assure que la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ définie par $\mathcal{G}$ sur X est arborable.

Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien libre sur une partie borélienne $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{G}$ agit quasi-librement sur le $\mathcal{G}$-arboretum canonique de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G},\mathcal{S})$ (cf. p. 61). Ceci nous permet de déduire de ce qui précède le théorème suivant :

**Corollaire 3.32.** *Un sous-groupoïde d'un groupoïde borélien libre sur* X *est un groupoïde borélien libre sur* X.

Voici les différentes étapes des démonstrations des résultas précédents :

1. construction d'un arboretum de représentants $(\mathrm{A}_m^g, \chi)$ de $\mathrm{G}_s$ (cf. prop. 3.33) ;
2. désingularisation de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ (cf. lem. 3.34) ;
3. si de plus l'action est quasi-libre, alors la représentation $\chi$ de $\mathrm{A}_m^g$ dans $\mathcal{A}$ est un sous-arboretum $\mathcal{A}'$ défini sur une partie borélienne $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ de $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$ dont l'espace des sommets $\mathcal{A}'^0$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ (cf. rem. p. 74). On en déduit une partie libre et génératrice de $\mathcal{G}$ (cf. lem. 3.35).

**Proposition 3.33.** *Si $\mathcal{G}$ agit (sans inversion) sur un arboretum $\mathcal{A}$, alors il existe un arboretum de représentants $(\mathrm{A}_m^g, \chi)$ du graphe singulier quotient $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ tel que la représentation identifie l'espace borélien standard porté par la racine de $\mathrm{A}_m$ à* X.

*Démonstration :* Donnons-nous une numérotation borélienne indexée par les entiers dans chaque fibre de l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$. Nous allons construire la partie borélienne $\mathcal{A}'^0$ par étape à partir de sections partielles de sommets de $\mathcal{A}^0$. Soit $s_1$ la section borélienne de sommets de $\mathcal{A}^0$ correspondant au numéro le plus petit dans chaque fibre. Notons $\mathrm{U}_1$ l'image de $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}$ par $s_1$ et $\mathrm{C}_1$ le complémentaire dans $\mathcal{A}^0$ du saturé de $\mathrm{U}_1$. Si $\mathrm{C}_1$ est vide, alors $\mathrm{U}_1$ est un domaine complet pour l'action de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{A}^0$ et le résultat est démontré avec $\mathrm{A}_m$ un arbre avec un seul sommet portant le groupoïde borélien $\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(s_1)$, $\mathcal{A}'^0 = \mathrm{U}_1$ et $\mathcal{A}'^1 = \varnothing$.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ . Supposons avoir construit les familles finies de sections partielles $\mathrm{S}_j = \{s_i \,;\, i \in \mathrm{I}_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ de $\mathcal{A}^0$ dont les domaines de définition sont des parties boréliennes de X et vérifiant les deux conditions suivantes : les saturés des images de ces sections partielles sont d'intersection triviale et l'intersection de la réunion $\mathrm{U}_{n-1}$ des images de ces sections partielles avec chaque fibre de $\mathcal{A}^0$ est une partie connexe. Notons $\mathrm{C}_{n-1}$ le complémentaire dans $\mathcal{A}^0$ du saturé de $\mathrm{U}_{n-1}$. Si ce dernier est vide, la proposition est démontrée avec $\mathcal{A}'^0 = \mathrm{U}_{n-1}$ et

$\mathcal{A}'^1 = \mathrm{U}_{n-1}$ la partie borélienne de $\mathcal{A}'^1$ constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à $\mathrm{U}_{n-1}$.

Sinon, il existe des éléments de $\mathrm{C}_{n-1}$ à distance unité de $\mathrm{U}_{n-1}$. En effet, les fibres de $\mathcal{A}$ étant connexes, il existe des éléments de $\mathrm{C}_{n-1}$ à distance unité du saturé de $\mathrm{U}_{n-1}$ et $\mathcal{G}$ agit en préservant les distances sur $\mathcal{A}^0$. Désignons par $s_n$ la section partielle de sommets de $\mathcal{A}^0$ qui a pour image le plus petit élément à distance unité de $\mathrm{U}_{n-1}$ dans chaque fibre. Quitte à découper $\mathrm{X}_n$ en un nombre fini de parties boréliennes, on peut raffiner $s_n$ en un nombre fini $\mathrm{S}_n = \{s_i \ ; \ i \in \mathrm{I}_n\}$ de sections partielles dont chacune est telle que les éléments de son image soient à distance unité de l'image de l'une des sections partielles déjà construites.

Montrons désormais que le saturé de la réunion des $\mathrm{U}_k$ est égal à l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$. En effet, sinon il existe un élément $a$ appartenant au complémentaire du saturé de la réunion des $\mathrm{U}_k$ dans $\mathcal{A}^0$ dont la projection $\pi(a)$ est un élément de $\mathrm{X}_1$. On peut supposer que dans la fibre de $\pi(a)$, le sommet $a$ soit à distance unité de la partie connexe formée par la réunion des sommets $s_k(\pi(a))$ et de numéro minimal. Désignons par $n_0$ l'entier naturel tel que les sommets $a$ et $s_{n_0}(\pi(a))$ soient adjacents. Mais alors, par construction de la section partielle $s_{n_0+1}$, on doit avoir que le sommet $a$ est l'image de $\pi(a)$ par $s_{n_0+1}$, ce qui est absurde.

Il ne reste plus qu'à poser $\mathcal{A}'^0 = \bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{U}_k$ et $\mathcal{A}'^1$ la partie borélienne de $\mathcal{A}'^1$ constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à $\mathcal{A}'^0$. Par construction, deux sommets de $\mathcal{A}$ dans la même orbite n'appartiennent pas tous les deux à $\mathcal{A}'^0$ ; puisque le saturé de la réunion des $\mathrm{U}_k$ est égal à l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$, on en déduit que $\mathcal{A}'$ est la représentation d'un arboretum de représentants de $\mathrm{G}_s$. □

*Remarque :* Étant donné une action quasi-libre d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur un champ de graphes borélien $\mathcal{A}$ sur X, il existe un sous-arboretum $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ défini sur une partie borélienne A de X dont l'espace des sommets est un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}^0$. Puisque les sommets de $\mathcal{A}'$ forment en particulier un domaine fondamental de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ engendrée par l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}^0$, on en déduit que $\mathcal{A}'$ s'injecte par passage au quotient dans $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ en une forêt borélienne dont l'espace borélien standard des sommets coïncide avec celui de $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$.

**Lemme 3.34.** *; Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{G}$-arboretum sur* X. *Alors il existe une désingularisation de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$.*

*Démonstration :* La proposition 3.33 assure l'existence d'un arboretum de représentants, c'est-à-dire un arbre de groupoïdes enraciné $\mathrm{A}_m^r$ et d'un isomorphisme de représentation $\chi$ de $\mathrm{A}_m^r$ dans $\mathcal{A}$ telle que l'espace borélien porté par le sommet racine de $\mathrm{A}_m$ s'identifie avec X. Ainsi les orbites sous l'action de $\mathcal{G}$ des représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de $\mathrm{A}_m^r$ forment une partition $\mathcal{G}$-invariante de l'espace des sommets $\mathcal{A}^0$. Désignons par C le complémentaire dans $\mathcal{A}^1$ des $\mathcal{G}$-orbites des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de $\mathrm{A}_m^r$. Si C est vide, alors $\mathrm{A}_m^r$ est déjà une désingularisation de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$. Sinon, la partie borélienne C′ de C constituée des éléments dont le seul sommet origine appartient à l'arboretum de représentants est non vide car les fibres de $\mathcal{A}$ sont des graphes connexes et que $\mathcal{G}$ agit en préservant les distances sur $\mathcal{A}^0$.

Nous allons construire une famille de sections partielles de C dont les saturés des images forment une partition borélienne de C.

Soit P un sommet de $\mathrm{A}_m^r$ et $s$ la section partielle de sommets de $\mathcal{A}$ représentant l'espace borélien standard associé à P. Pour tout sommet Q de $\mathrm{A}_m^r$, considérons la partie borélienne $\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$ de C constituée des arêtes dont le sommet origine appartient à l'image de $s$ et dont le sommet terminal appartient au saturé de la représentation de l'espace borélien standard porté par Q. Si $\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$ est non vide, c'est un espace fibré standard sur $\pi(\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})})$ que nous pouvons exhauster à l'aide de sections partielles dont les saturés des images forment une partition borélienne de $\mathrm{C}_{(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$. Chacune de ces sections partielles d'arêtes donne lieu à une arête dans $\mathrm{A}_m^r$ entre les sommets P et Q : le groupoïde borélien associé à chaque nouvelle arête n'est autre que le groupoïde borélien induite par $\mathcal{G}_{\mathcal{A}^1}$ sur l'image de la section partielle de $\mathcal{A}^1$ correspondante et ce dernier s'injecte comme sous-groupoïde du groupoïde borélien associé à Q via un isomorphisme partiel de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ induit par la section de sommets terminaux de $s$ et l'arboretum de représentants. $\square$

**Lemme 3.35.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien agissant quasi-librement (et sans inversion) sur un arboretum $\mathcal{A}$ sur* X. *Soit $\mathcal{A}_r$ un arboretum de représentants de l'espace quotient* $\mathrm{G} = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ *(cf. p. 65). Fixons une orientation $\mathcal{G}$-invariante sur l'espace des arêtes (ce qui est possible car $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}^1$ est lisse et l'action sans inversion) et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments $\gamma$ de $\mathcal{G}$ pour lesquels il existe une arête positive reliant $\mathcal{A}_{r,y}$ et $\gamma.\mathcal{A}_{r,x}$ où $x$ et $y$ désignent respectivement la source et le but de $\gamma$. Alors $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien libre sur $\mathcal{S}$.*

**Corollaire 3.36.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur* X. *Alors $\mathcal{G}$ est libre si et seulement si $\mathcal{G}$ agit quasi-librement sur un arboretum sur* X. *Par suite, un sous-groupoïde d'un groupoïde borélien libre sur* X *est libre.*

*Remarque :* On retrouve le cas particulier des relations d'équivalence boréliennes. En effet, si $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ est un groupoïde borélien principal et sous les hypothèses du théorème précédent, $\mathcal{R}$ est libre sur une partie borélienne $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ et nous avons vu qu'alors $\mathcal{S}$ est un arborage de $\mathcal{R}$. Ainsi $\mathcal{R}$ est arborable.

## 2 Structure de $\mathcal{G}$

Étant donné un $\mathcal{G}$-arboretum $\mathcal{A}$ où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien sur X, nous avons vu (cf. th. 3.30) l'existence d'une désingularisation du graphe singulier quotient $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$. À partir d'une telle désingularisation dont le graphe de groupoïdes est noté $\mathrm{G}^g$, nous allons voir qu'il est possible de reconstruire $\mathcal{G}$ en termes de *produits amalgamés* des groupoïdes boréliens portés par les sommets de $\mathrm{G}^g$. Plus précisément le théorème 3.44 assure que $\mathcal{G}$ soit stablement isomorphe au *groupoïde fondamental borélien* (cf. déf. 3.43) du graphe de groupoïdes $\mathrm{G}^g$.

### Quand la désingularisation est un arbre de groupoïdes

Nous avons rappelé (cf. III du chapitre précédent), les notions de produit libre et produit amalgamé pour les relations d'équivalence boréliennes (cf. déf. 2.38 et 2.43).

Plus précisément, Gaboriau définit dans [Gab00] une relation d'équivalence borélienne qui est le produit amalgamé de deux sous-relations suivant une sous-relation commune. Nous allons ici généraliser ces idées au cadre « plus naturel » des groupoïdes boréliens, ces derniers étant *a priori* définis sur des espaces boréliens standards différents.

À tout arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$, nous allons associer un groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ sur un certain espace borélien standard $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ que nous allons décrire, ainsi que des morphismes des groupoïdes boréliens portés par les sommets et les arêtes de $\mathrm{G}^g$ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ de telle sorte que les diagrammes évidents de morphismes de groupoïdes boréliens induits par les arêtes de $\mathrm{G}^g$ soient commutatifs. De plus, le groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ satisfait la propriété universelle suivante : si $\mathcal{H}$ est un groupoïde borélien sur un espace borélien standard Y et si pour chaque sommet de $\mathrm{G}^g$, on se donne un morphisme du groupoïde borélien porté par ce sommet dans $\mathcal{H}$ de telle sorte que les diagrammes évidents de morphismes de groupoïdes boréliens induits par les arêtes de $\mathrm{G}^g$ soient commutatifs, alors il existe un unique morphisme de groupoïdes boréliens de $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ dans $\mathcal{H}$ qui fasse commuter tous les diagrammes. La proposition suivante assure l'existence (l'unicité étant une conséquence de la propriété universelle) d'un tel groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ que nous appellerons la *limite inductive* de l'arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$.

**Proposition 3.37.** *À tout arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$, on peut associer un groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ comme ci-dessus, bien défini à isomorphisme unique près.*

*Remarque :* Dans le cas où X est un singleton, on retrouve la notion de limite inductive d'un arbre de groupes (cf. [Ser77]).

*Démonstration :* Rappelons que le foncteur *d'oubli* associe à tout arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ un arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$, ce dernier définissant naturellement une relation d'équivalence borélienne sur la réunion disjointe des espaces boréliens standards associés aux sommets de $\mathrm{G}^{ip}$. Désignons par $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ l'espace quotient de cette relation d'équivalence borélienne lisse (cf. p. 45). Les groupoïdes boréliens associés aux arêtes et aux sommets de $\mathrm{G}^g$ s'injectent dans l'espace quotient $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ et induisent ainsi des groupoïdes boréliens définis sur des parties boréliennes de $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$. On construit alors $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ en se donnant une présentation (cf. déf. 3.20) de celui-ci : c'est le groupoïde borélien engendré par les injections dans $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ des groupoïdes boréliens portés par les sommets de $\mathrm{G}^g$ avec les relations évidentes : pour toute arête $a$ de $\mathrm{G}^g$ et tout élément $\gamma$ du groupoïde borélien porté par l'arête $a$, on a $\gamma^a \cdot \gamma^{\overline{a}} = id_{s(\gamma^a)}$, où $\cdot^a$ désigne l'injection du groupoïde borélien porté par l'arête $a$ dans le groupoïde borélien porté par le sommet terminal de $a$ (cf. déf. 3.27). $\square$

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne sur X qui est le produit libre (au sens de déf. 2.38) des sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ; autrement dit $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation triviale sur X. Considérons le segment de groupoïdes constitué d'un sommet portant le groupoïde borélien principal $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_1}$ de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_1$ sur X, de l'autre sommet portant $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_2}$ sur X ainsi que de l'unique arête portant le groupoïde borélien trivial sur X et l'isomorphisme partiel « identité » identifiant les trois espaces boréliens standards. La limite inductive de cet arbre de groupoïdes est exactement le groupoïde borélien principal de $\mathcal{R}$. Plus généralement, si $\mathcal{R}$ est le produit amalgamé sur X de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$, alors la limite inductive du segment de groupoïdes naturellement définis par $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ sur X est le groupoïde borélien principal de $\mathcal{R}$.

Ainsi, étant donné deux relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur X ainsi qu'une sous-relation commune $\mathcal{R}_3$, on peut construire le produit amalgamé des $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_3$ : c'est un groupoïde borélien sur X, bien défini à isomorphisme près. Si ce dernier est principal, on retrouve la définition d'une relation d'équivalence borélienne qui est le produit amalgamé de deux sous-relations suivant une sous-relation commune.

**Définition 3.38** (Produit amalgamé)**.** *Soit* $(\mathcal{G}_1, \mathrm{X}_1)$ *et* $(\mathcal{G}_2, \mathrm{X}_2)$ *deux groupoïdes boréliens et* $(\mathcal{G}_3, \mathrm{X}_3)$ *un sous-groupoïde commun sur une partie borélienne commune* $\mathrm{X}_3$ *de* $\mathrm{X}_1$ *et* $\mathrm{X}_2$*. Le produit amalgamé de* $(\mathcal{G}_1, \mathrm{X}_1)$ *et* $(\mathcal{G}_2, \mathrm{X}_2)$ *suivant* $(\mathcal{G}_3, \mathrm{X}_3)$ *est la limite inductive* $(\mathcal{G}, (\mathrm{X}_1 \sqcup \mathrm{X}_2)/\mathrm{X}_3)$ *de* $(\mathcal{G}_1, \mathrm{X}_1)$ *et* $(\mathcal{G}_2, \mathrm{X}_2)$ *suivant* $(\mathcal{G}_3, \mathrm{X}_3)$*, noté*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \star_{\mathcal{G}_3} \mathcal{G}_2.$$

En particulier, la définition précédente s'applique au cas de groupoïdes boréliens principaux de relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur X ayant une sous-relation commune sur $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$).

*Remarque :* Si A est vide, la limite inductive de $(\mathcal{G}_1, \mathrm{X}_1)$ et $(\mathcal{G}_2, \mathrm{X}_2)$ est alors la réunion disjointe de ces deux groupoïdes boréliens. Ceci s'étend sans difficulté supplémentaire au cas d'une famille dénombrable de groupoïdes boréliens, généralisant ainsi la notion de réunion disjointe d'une famille dénombrable de relations d'équivalence boréliennes (cf. definition 2.28).

Ceci permet de donner une nouvelle définition du produit libre de sous-relations. Étant donné une famille dénombrable $(\mathcal{R}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ de relations d'équivalence boréliennes sur X, on peut considérer le produit libre de leurs groupoïdes boréliens principaux : c'est un groupoïde borélien sur X, non principal *priori* (par exemple si toutes les $\mathcal{R}_j$ sont des copies d'une même relation d'équivalence borélienne sur X). Si ce dernier est principal, la relation d'équivalence borélienne induite par ce dernier sur X est le produit libre, au sens de la définition 2.60 des sous-relations $\mathcal{R}_j$.

**Théorème 3.39.** *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde borélien agissant (sans inversion) sur un arboretum* $\mathcal{A}$ *sur* X*. On suppose qu'il existe une désingularisation de l'espace quotient singulier* $\mathrm{G}_s = \mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ *qui soit un arbre de groupoïdes* $\mathrm{G}^g$*. Alors* $\mathcal{G}$ *est stablement isomorphe à la limite inductive de* $\mathrm{G}^g$*.*

Par définition d'une désingularisation, $\mathrm{G}^g$ est un arbre de groupoïdes enraciné ; si on désigne par A le domaine de définition de la première section partielle de sommets dans la construction de l'arboretum de représentants, la limite inductive $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ de $\mathrm{G}^g$ est un groupoïde borélien dont l'espace des unités $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ est isomorphe à A (via l'arboretum de représentants et la projection de $\mathcal{A}$ dans X) et nous allons montrer que $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ est isomorphe à la restriction de $\mathcal{G}$ à A. Précisons l'idée de la démonstration. À tout arbre de groupoïdes enraciné $\mathrm{G}^g$, on associe un arboretum sur $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ sur lequel la limite inductive de l'arbre de groupoïdes $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ agit de telle sorte que $\mathrm{G}^g$ soit une désingularisation de cette action. Ainsi, étant donné l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ et $\mathrm{G}^g$, on en déduit un morphisme de groupoïdes boréliens

$$\psi : \mathcal{G}_{\mathrm{G}^g} \longrightarrow \mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$$

dont il s'agira de démontrer que c'est un isomorphisme.

**Théorème 3.40.** *Soit* $\mathrm{G}^g$ *un arbre de groupoïdes enraciné dont on note* $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ *la limite inductive sur* $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$. *Notons* $\mathcal{A}^{ip}$ *l'arboretum naturellement défini par l'arbre d'isomorphismes partiels* $\mathrm{G}^{ip}$ *induit par* $\mathrm{G}^g$ *sur l'espace borélien standard* A *associé à la racine de* $\mathrm{G}^g$. *Alors il existe un unique (à unique isomorphisme près) arboretum* $\mathcal{A}$ *sur* A *contenant* $\mathcal{A}^{ip}$ *et sur lequel* $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ *agit de telle sorte que* $\mathrm{G}^g$ *soit une désingularisation (via* $\mathcal{A}^{ip}$*) de l'espace quotient singulier* $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$.

*Démonstration :* Par définition, l'espace des unités $\mathrm{X}_{\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}}$ de $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ est canoniquement isomorphe à A et nous pouvons identifier ces deux espaces boréliens standards : notons alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ la limite inductive de $\mathrm{G}^g$ sur A. Tout groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ associé au sommet P de $\mathrm{G}^g$ induit un sous-groupoïde partiel de $\mathcal{G}$ sur une partie borélienne $\mathrm{X}_{\mathrm{P}}$ de A : notons $\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ le $\mathcal{G}_{|\overline{\mathrm{X}_{\mathrm{P}}}}$ -espace fibré standard associé à $(\mathcal{G}_{|\overline{\mathrm{X}_{\mathrm{P}}}}, \mathcal{G}_{\mathrm{P}})$ où $\overline{\mathrm{X}_{\mathrm{P}}}$ désigne le $\mathcal{G}$-saturé de $\mathrm{X}_{\mathrm{P}}$, et de même pour les groupoïdes boréliens associés aux arêtes de $\mathrm{G}^g$. Puisque les groupoïdes boréliens associés aux arêtes de $\mathrm{G}^g$ s'injectent dans les groupoïdes boréliens associés aux sommets correspondants, on en déduit des morphismes de $\mathcal{G}$-espaces fibrés standards. On construit ainsi un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}$ sur A contenant $\mathcal{A}^{ip}$ comme sous-arboretum, les sommets de ce dernier étant constitués par les images dans $\mathcal{A}$ des sections diagonales $d_{\mathrm{P}}$ des $\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ (idem pour les arêtes).

La seule chose qui reste à voir, c'est que les fibres de $\mathcal{A}$ sont des arbres, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{G}$-arboretum. Par récurrence sur le nombre $n$ de sommets, démontrons ce fait dans le cas où $\mathrm{G}^g$ est un arbre de groupoïdes fini ; le résultat s'étend des arbres de groupoïdes fini au cas général en remarquant que la limite inductive d'un arbre de groupoïdes coïncide avec la limite inductive d'un arbre de groupoïdes dont les sommets sont les entiers naturels et dont chaque groupoïde borélien associé à un sommet s'injecte comme sous-groupoïde partiel dans le groupoïde borélien associé au sommet suivant. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Désignons par P un sommet terminal de l'arbre fini sous-jacent à $\mathrm{G}^g$ : l'arbre de groupoïdes enraciné $\mathrm{G}^g$ est donc composé de l'arbre de groupoïdes $\mathrm{G}'^g$ naturellement enraciné par $\mathrm{G}^g$ dont la limite inductive est notée $\mathcal{G}'$, du sommet terminal P portant le groupoïde borélien $\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ et d'une paire d'arêtes $(a, \overline{a})$ portant le groupoïde borélien $\mathcal{G}_a$. Il est alors clair que

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \star_{\mathcal{G}_a} \mathcal{G}_{\mathrm{P}}.$$

Considérons ensuite l'action de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{A}'^{ip} \subset \mathcal{A}$ : l'image $\mathcal{G}'.\mathcal{A}'^{ip}$ est un sous-champ de graphes borélien de $\mathcal{A}$ (éventuellement défini sur une partie borélienne de A) qui est exactement le $\mathcal{G}'$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}'$ associé à $\mathcal{G}'$ : par récurrence c'est un arboretum. Enfin, contractons le champ de graphes borélien $\mathcal{A}$ suivant les sous-arbres $\mathcal{G}'.\mathcal{A}'^{ip}$ dans chaque fibre et prolongeons cette opération par $\mathcal{G}$-équivariance. On obtient un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $\mathcal{B}$ possédant une section partielle d'arêtes (provenant de l'arête $a$) dont l'image est un domaine complet de l'action de $\mathcal{G}$ sur l'espace des arêtes $\mathcal{B}^1$ et dont les sommets origines et terminaux induisent une partition en deux parties boréliennes de l'espace des sommets $\mathcal{B}^0$ (notons que la section de sommets terminaux ainsi définie est en fait -une restriction de- la section partielle $d_{\mathrm{P}}$).

Nous avons démontré dans le cas particulier de groupoïdes boréliens principaux (cf. cor. 2.47) que $\mathcal{B}$ est alors l'arboretum associé à $\mathcal{G} = \mathcal{G}' \star_{\mathcal{G}_a} \mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ et c'est bien un arboretum (le résultat s'étend des relations d'équivalence boréliennes au cas général des groupoïdes boréliens sans difficulté supplémentaire). Finalement si $\mathcal{B}$ est un arboretum, il en est de même de $\mathcal{A}$. □

Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien connexes où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien sur X. On suppose que l'espace quotient singulier $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ se désingularise en un arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$. Notons $\mathcal{A}_{\mathrm{G}^g}$ l'arboretum (défini sur l'espace borélien standard associé à la racine de $\mathrm{G}^g$ et qui s'identifie via la projection de $\mathcal{A}$ dans X à une partie borélienne A de X) obtenu dans le théorème précédent et sur lequel $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ agit. On se ramène au cas où $\mathrm{A} = \mathrm{X}$, quitte à considérer la restriction de $\mathcal{G}$ à X. Rappelons que $\psi$ est le morphisme de groupoïdes boréliens de $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$ dans $\mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$ et notons $\widetilde{\psi}$ le morphisme de champ de graphes boréliens sur A du $\mathcal{G}_{\mathrm{G}^g}$-arboretum donné par le théorème précédent dans le $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}$.

**Théorème 3.41.** *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *i) $\mathcal{A}$ est un arboretum ;*
- *ii) $\widetilde{\psi}$ est un isomorphisme ;*
- *iii) $\psi$ est un isomorphisme.*

*Démonstration :* iii) $\Longrightarrow$ ii) et ii) $\Longrightarrow$ i) sont clairs d'après le théorème précédent (cf. unicité et $\mathcal{A}_{\mathrm{G}^g}$ qui est un arboretum).
iii) $\Longrightarrow$ ii) Le fait que $\psi$ soit injectif assure que $\widetilde{\psi}$ soit localement injectif (c'est-à-dire injectif au voisinage de chaque sommet) d'un arboretum dans un champ de graphes borélien connexes. Donc $\widetilde{\psi}$ est injectif.
ii) $\Longrightarrow$ iii) $\psi$ envoie $\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ sur $\mathcal{G}_{\mathrm{P}}$ (et induit un isomorphisme). Donc le noyau isotrope de $\psi$ est trivial et la surjectivité de $\psi$ est une conséquence du lemme suivant. □

Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien connexes où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien sur X.

**Lemme 3.42.** *Étant donné un arboretum de représentants dans $\mathcal{A}$ et un sous-champ de graphes de $\mathcal{A}$ contenant l'arboretum de représentants et dont chaque arête dans la fibre d'un élément $x$ de X a au moins une de ses extrémités dans cet arboretum de représentants, considérons les stabilisateurs des sections partielles de sommets induites par l'arboretum de représentants ainsi qu'une partie borélienne de $\mathcal{G}$ dont les éléments agissent en envoyant les sommets du sous-champ de graphes n'appartenant pas à l'arboretum de représentants dans cet arboretum. La réunion de ces sous-groupoïdes partiels de $\mathcal{G}$ et de cette partie borélienne de $\mathcal{G}$ engendrent $\mathcal{G}$.*

*Remarque :* Dans le cas où $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$ se désingularise en un arbre de groupoïdes $\mathrm{G}^g$, on peut prendre la partie borélienne ci-dessus vide. Dans ce cas, le morphisme naturel de $\psi : \mathcal{G}_{\mathrm{G}^g} \longrightarrow \mathcal{G}$ est surjectif.

### Cas général d'un graphe de groupoïdes

Nous allons généraliser la notion de limite inductive d'un arbre de groupoïdes (cf. p. 76) et définir le *groupoïde fondamental borélien* d'un graphe de groupoïdes.

Soit $\mathrm{G}^g$ est un graphe de groupoïdes orienté (c'est-à-dire de graphe sous-jacent G orienté) et $\mathrm{A}_m^g$ l'arbre de groupoïdes induit par $\mathrm{G}^g$ sur un sous-arbre maximal enraciné $\mathrm{A}_m$ de G. Rappelons que, via le foncteur d'oubli, l'arbre d'isomorphismes partiels $\mathrm{A}_m^{ip}$ définit une relation d'équivalence borélienne lisse dont un domaine fondamental est l'espace borélien standard X porté par la racine de $\mathrm{A}_m$.

**Définition 3.43.** *Le groupoïde fondamental borélien* $\pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ *d'un couple* $(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ *comme ci-dessus est le groupoïde borélien sur* X *engendré par les injections dans* X *via l'arbre maximal* $\mathrm{A}_m$ *des groupoïdes boréliens portés par les sommets de* $\mathrm{G}^g$ *ainsi que par les injections (dans* X *via* $\mathrm{A}_m$*) des isomorphismes partiels* $\phi$ *portés par les arêtes de* $\mathrm{G}^g$*, et assujettis aux relations* $\phi = Id_{|\mathrm{A}_\phi}$ *pour tout isomorphisme partiel* $\phi : \mathrm{A}_\phi \subset \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{B}_\phi \subset \mathrm{X}$ *porté par une arête de* $\mathrm{A}_m$ *et*

$$(x, \phi(x)) \cdot \gamma^a \cdot (\phi(y), y) \cdot (\gamma^{\overline{a}})^{-1} = id_x,$$

*pour tout isomorphisme partiel* $\phi : \mathrm{A}_\phi \subset \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{B}_\phi \subset \mathrm{X}$ *porté par une arête* $a$ *de* G *et tout élément* $\gamma$ *du groupoïde borélien porté par* $a$ *de source* $\phi(x)$ *et de but* $\phi(y)$*, où* $x$ *et* $y$ *appartiennent à* $\mathrm{A}_\phi$*.*

*Remarque :* Dans le cas d'un arbre de groupoïdes (c'est-à-dire $\mathrm{G} = \mathrm{A}_m$), le groupoïde fondamental borélien est, par définition, canoniquement isomorphe à la limite inductive (cf. prop. 3.37) de cet arbre de groupoïdes.

Nous en venons au résultat principal de cette partie qui donne la structure de tout groupoïde borélien agissant sur un arboretum.

**Théorème 3.44.** *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde borélien agissant sans inversion sur un arboretum sur* X*. Alors* $\mathcal{G}$ *est stablement isomorphe au groupoïde fondamental borélien d'un certain graphe de groupoïdes.*

L'idée de la démonstration est la même que dans le cas particulier que nous avons traité dans le paragraphe précédent où la désingularisation était un arbre de groupoïdes. À la donnée d'un graphe de groupoïdes $\mathrm{G}^g$ et d'un sous-arbre maximal enraciné de groupoïdes $\mathrm{A}_m^g$, on associe un arboretum sur la racine de $\mathrm{A}_m^g$ sur lequel le groupoïde fondamental borélien $\pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ agit de telle sorte que $\mathrm{G}^g$ soit une désingularisation de cette action. Ainsi, étant donné l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ et $\mathrm{G}^g$, on en déduit un morphisme de groupoïdes boréliens

$$\psi : \pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g) \longrightarrow \mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$$

qui est en fait un isomorphisme, où A est le domaine de définition de la section partielle de sommets correspondant à la représentation de l'espace borélien standard associé à la racine de $\mathrm{A}_m^g$. Comme dans le cas d'un arbre de groupoïdes, on peut démontrer le résultat d'existence suivant :

**Proposition 3.45.** *Soit* $\mathrm{G}^g$ *est un graphe de groupoïdes orienté (c'est-à-dire de graphe sous-jacent* G *orienté) et* $\mathrm{A}_m^g$ *l'arbre de groupoïdes induit par* $\mathrm{G}^g$ *sur un sous-arbre maximal enraciné* $\mathrm{A}_m$ *de* G *dont on désigne par* X *l'espace borélien standard* *porté par la racine de* $\mathrm{A}_m$*. Alors il existe un unique (à unique isomorphisme près) arboretum* $\mathcal{A}$ *sur* X *contenant* $\mathcal{A}^{ip}$ *et sur lequel* $\pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ *agit de telle sorte que* $\mathrm{G}^g$ *soit une désingularisation (via* $\mathcal{A}_m^{ip}$*) de l'espace quotient singulier* $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$*.*

Soit $\mathcal{A}$ un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien connexes où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien sur X. On désigne par $(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ une désingularisation de l'espace quotient singulier $\mathcal{G}\backslash\mathcal{A}$. Notons $\mathcal{A}_{\mathrm{A}_m^g}$ l'arboretum (défini sur l'espace borélien standard associé à la racine de $\mathrm{A}_m^g$ et qui s'identifie via la projection de $\mathcal{A}$ dans X à une partie borélienne A de X) donné par le théorème précédent et sur lequel $\pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ agit. Quitte à considérer la restriction $\mathcal{A}_{|\mathrm{A}}$ de $\mathcal{A}$ à A, on se ramène au cas où $\mathrm{A} = \mathrm{X}$. Rappelons que $\psi$ est le morphisme de groupoïdes boréliens de $\pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$ dans $\mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$ et notons $\widetilde{\psi}$ le morphisme de champ de graphes boréliens sur X du $\pi_1(\mathrm{G}^g, \mathrm{A}_m^g)$-arboretum donné par la proposition précédente dans le $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien $\mathcal{A}$.

**Théorème 3.46.** *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *i)* $\mathcal{A}$ *est un arboretum ;*
- *ii)* $\widetilde{\psi}$ *est un isomorphisme ;*
- *iii)* $\psi$ *est un isomorphisme.*

On déduit des résultats précédents une nouvelle démonstration du théorème 2.61 concernant les sous-relations d'un produit libre.

**Théorème 3.47.** *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence borélienne sur* X*, produit amalgamé dénombrable de sous-relations* $(\mathcal{R}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *suivant la sous-relation commune* $\mathcal{R}'$*. Si* $\mathcal{S}$ *est une sous-relation de* $\mathcal{R}$ *dont l'intersection avec toute conjuguée partielle de* $\mathcal{R}'$ *est lisse, alors*

$$\mathcal{S} = \star_{i\in\mathrm{I}} \left(\star_{k_i\in\mathrm{K}(i)}\mathcal{S}_{k_i}\right) \star \mathcal{T},$$

*où, pour tout* $k_i$ *d'un ensemble dénombrable* $\mathrm{K}(i)$*, il existe un élément* $\phi_{k_i}$ *de* $[[\mathcal{R}]]$ *défini sur une partie borélienne* $\mathrm{A}_{k_i}$ *de* X *tel que*

$$\mathcal{S}_{k_i} = \left(\phi_{k_i}^{-1}\mathcal{R}_{i|\phi_{k_i}(\mathrm{A}_{k_i})}\ \phi_{k_i}\right) \cap \mathcal{S},$$

*et où* $\mathcal{T}$ *est une sous-relation arborable de* $\mathcal{S}$*. De plus, pour tout* $i$ *de* I*, il existe* $k_i$ *dans* $\mathrm{K}(i)$ *tels que*

$$\mathrm{A}_{k_i} = \mathrm{X} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{S}.$$

*Démonstration :* Considérons l'arbre de groupoïdes enraciné $\mathrm{G}^g$ dont l'arbre sous-jacent G est composé d'un sommet racine portant le groupoïde borélien principal de la relation triviale sur X et dont les autres sommets sont les éléments de J, chacun portant le groupoïde borélien principal de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_j$ sur X et étant relié au sommet racine par une paire d'arêtes portant le groupoïde borélien principal de la relation triviale et l'isomorphisme partiel « identité ». La limite inductive de cet arbre de groupoïdes enraciné est bien sûr le groupoïde borélien principal induit par $\mathcal{R}$ sur X. Le théorème 3.40 permet de déduire une action du groupoïde borélien principal induit par $\mathcal{S}$ sur un arboretum $\mathcal{A}$ et le théorème de structure 3.44 permet de conclure en construisant une désingularisation de $\mathcal{S}\backslash\mathcal{A}$ à partir de $\mathrm{G}^g$. $\square$

# Chapitre 4

# Groupoïdes boréliens libres et revêtements boréliens

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne arborable sur X et $\Phi$ un arborage de $\mathcal{R}$. Désignons par $(\mathcal{A}_\Phi, \pi)$ et $\mathrm{G}_\Phi$ le $\mathcal{R}$-arboretum canonique gauche sur X (cf. ex. fond. suivant déf. 2.32) et le graphe borélien naturellement associés à $\Phi$ (cf. ex. suivant déf. 4.3). L'espace des sommets $\mathrm{G}^0_\Phi$ de $\mathrm{G}_\Phi$ est X, l'espace des sommets $(\mathcal{A}^0_\Phi, \pi^0)$ de $(\mathcal{A}_\Phi, \pi)$ est quant à lui l'espace fibré standard canonique gauche $(\mathcal{R}, \pi_l)$. La projection $\pi_r : \mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ se prolonge naturellement en un morphisme de graphes boréliens de $\mathcal{A}_\Phi$ sur $\mathrm{G}_\Phi$. De plus, pour tout élément $x$ de X, on remarque que l'image réciproque par $\pi_r$ de l'étoile $\mathrm{E}_x$ de $x$ dans $\mathrm{G}_\Phi$ est la réunion disjointe des étoiles en chaque élément de $\pi_r^{-1}(x)$ dans le graphe borélien $\mathcal{A}_\Phi$ et que $\pi_r$ induit un isomorphisme de graphes entre chacune de ces étoiles et $\mathrm{E}_x$.

## I Revêtements boréliens d'un graphe borélien

Nous allons définir les notions de *graphe borélien fibré sur* X (déf. 4.3), de *groupoïde fondamental borélien* (déf. 4.9) et de *revêtement borélien* d'un graphe borélien (déf. 4.13). Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des *bouquets de cercles boréliens* pour lesquels nous expliciterons une correspondance bijective entre les sous-groupoïdes partiels de son groupoïde fondamental borélien définis à conjugaison stable près et ses revêtements boréliens *homogènes* définis à isomorphisme près (th. 4.17).

### 1 Graphes boréliens

Rappelons les définitions de graphe borélien et de morphisme de graphes boréliens pour commencer.

**Définition 4.1** (Graphe borélien)**.** *Un graphe borélien* G *est un graphe localement dénombrable (c'est-à-dire que chaque sommet n'a qu'un nombre dénombrable de sommets voisins) dont les ensembles de sommets* $\mathrm{G}^0$ *et d'arêtes* $\mathrm{G}^1$ *sont des espaces boréliens standards et tel que les applications sommet origine* $o$*, sommet terminal* $t$ *et arête opposée*$^-$ *soient des applications boréliennes.*

On rappelle que si $x$ un sommet d'un graphe G, l'étoile de $x$ est le graphe « local » en $x$ déduit de G (cf. après déf. 3.14).

**Définition 4.2.** *Un morphisme de graphes boréliens est un morphisme de graphes dont les applications sous-jacentes entre sommets et arêtes sont boréliennes.*

*Remarque :* Un graphe borélien G induit naturellement une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ sur l'espace des sommets $\mathrm{G}^0$, chaque classe de $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ étant canoniquement munie d'une structure de graphe connexe, son *graphe de Cayley*.

*Exemple :* Un arboretum sur X possède une structure canonique de graphe borélien. Plus généralement, un champ de graphes borélien sur X définit un graphe borélien. Un morphisme de champs de graphes borélien induit un morphisme de graphes boréliens entre les graphes boréliens canoniques associés.

Deux cas particuliers de graphes boréliens vont particulièrement nous intéresser : ce sont les graphes boréliens dont l'espace des sommets est X et, plus généralement, ceux dont l'espace des sommets est un espace fibré standard sur X.

**Définition 4.3** (Bouquet de cercles et graphe borélien fibré sur X)**.** *Un bouquet de cercles borélien sur* X *est un graphe borélien* G *dont l'espace des sommets* $\mathrm{G}^0$ *est* X*. Un graphe borélien fibré sur* X *est un graphe borélien* G *dont l'espace des sommets* $\mathrm{G}^0$ *est un espace fibré standard sur* X*.*

*Exemple :* Étant donné un L-graphage $\Phi = (\phi : \mathrm{A}_i \longrightarrow \mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sur X (cf. déf. 2.2), on définit un bouquet de cercles borélien $\mathrm{G}_\Phi$ sur X dont l'espace des arêtes orientées $\mathrm{G}^1_\Phi$ est la réunion disjointe des $\mathrm{A}_i$. L'origine de toute arête $(i, x)$ de $\mathrm{G}^1_\Phi$ est par définition l'élément $x$ de X et son sommet terminal $\phi_i(x)$. De la même façon, étant donné une partie génératrice $(\mathcal{S}, s, r)$ sur X (cf. déf. 3.5), on définit canoniquement un bouquet de cercles borélien $\mathrm{G}_{\mathcal{S}}$ sur X dont l'espace des arêtes orientées $\mathrm{G}^1_{\mathcal{S}}$ est $\mathcal{S}$, les sommets origine et terminal d'une arête $\sigma$ de $\mathrm{G}^1_{\mathcal{S}}$ étant $s(\sigma)$ et $t(\sigma)$.

Nous dirons qu'un graphe borélien fibré G sur X est un graphe borélien *homogène* sur X s'il existe une section borélienne *saturante* de $\mathrm{G}^0$, c'est-à-dire dont l'image rencontre toutes les classes de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ : un graphe borélien *enraciné* $(\mathrm{G}, s)$ sur X est la donnée d'un graphe borélien fibré homogène G sur X et d'une telle section borélienne $s$ appelée *racine* de G.

Nous allons à présent introduire la notion d'espace fibré standard *uniformément fini*.

**Définition 4.4** (Espace fibré standard uniformément fini)**.** *La valence d'un espace fibré standard* $(\mathrm{F}, \pi)$ *sur* X *est l'application borélienne* $v : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ *qui, à un élément* $x$ *de* X*, associe le cardinal de* $\pi^{-1}(x)$*. L'espace fibré standard* $(\mathrm{F}, \pi)$ *sur* X *est dit uniformément fini si* $v$ *est une application borélienne bornée.*

Autrement dit, un espace fibré standard $(\mathrm{F}, \pi)$ sur X est uniformément fini si et seulement s'il existe une famille finie de sections de F dont les images recouvrent F.

*Remarque :* Notons qu'un espace fibré standard uniformément fini est en particulier à fibres finies mais qu'il s'agit d'une condition plus restrictive.

Une sous-relation $\mathcal{S}$ définie sur un domaine complet A d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur X est d'*indice fini* si, pour tout élément $x$ de A, la $\mathcal{R}_{|\mathrm{A}}$-classe de $x$ est la réunion disjointe d'un nombre fini de $\mathcal{S}$-classes. Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien sur X, on appelle $\mathcal{G}$-classe à droite (resp. à gauche) d'un élément $x$ de X l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}$ de source (resp. de but) $x$. Notons que les $\mathcal{G}$-classes à droite et à gauche sont en bijection puisque la source d'un élément $\gamma$ de $\mathcal{G}$ est le but de $\gamma^{-1}$.

**Définition 4.5** (Indice fini)**.** *Un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ défini sur un domaine complet* A *d'un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur* X *est d'indice fini si, pour tout élément $x$ de* A*, la $\mathcal{G}$-classe (à droite) de $x$ est la réunion disjointe d'un nombre fini de $\mathcal{H}$-classes (à droite). Nous dirons que $\mathcal{H}$ est uniformément d'indice fini s'il existe un entier non nul* N *tel que le nombre de $\mathcal{H}$-classes contenues dans toute $\mathcal{G}$-classe est inférieur à* N.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions.

**Lemme 4.6.** *L'espace fibré standard $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, d)$ sur* X *(cf. p. 63) est à fibres finies si et seulement si $\mathcal{H}$ est un sous-groupoïde d'indice fini du groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur* X*. L'espace fibré standard $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, d)$ sur* X *est uniformément fini si et seulement si $\mathcal{H}$ est uniformément d'indice fini dans $\mathcal{G}$.* □

Rappelons qu'un graphage G$r$ sur X (déf. 2.3) est une partie borélienne symétrique de X × X, localement dénombrable et qui ne rencontre pas la diagonale. La restriction à G$r$ de la projection $\pi_l : \mathrm{X}\times\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ sur le premier facteur étant à fibres dénombrables, $\pi_l^{-1}(\pi_l(\mathrm{G}r))$ est un espace fibré standard sur $\pi_l(\mathrm{G}r)$. En prolongeant par 0 sa valence sur le complémentaire de $\pi_l(\mathrm{G}r)$ dans X, on obtient une application borélienne $v : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Nous dirons que $v$ est la *valence* du graphage G$r$.

**Définition 4.7** (Uniformément de rang fini)**.** *Un graphage sur* X *est uniformément de rang fini si sa valence est une fonction borélienne bornée. Plus généralement, si $(\mathcal{S}, s, r)$ est une partie génératrice sur* X *(déf. 3.5), $\mathcal{S}$ est uniformément de rang fini si les valences des espaces fibrés standards $(\mathcal{S}, s)$ sur $s(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}, r)$ sur $r(\mathcal{S})$ sont bornées.*

*Un groupoïde borélien $\mathcal{G}$ sur* X *est uniformément de rang fini s'il existe une partie génératrice $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ uniformément de rang fini. En particulier, une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}$ sur* X *est uniformément de rang fini s'il existe un graphage de $\mathcal{R}$ uniformément de rang fini.*

On déduit directement des définitions et du théorème de sélection (th. 2.10) qu'un groupoïde borélien sur X (en particulier une relation d'équivalence borélienne) est uniformément de rang fini si et seulement s'il existe un L-graphage de cardinal fini.

*Exemple :* Si $\Gamma$ est un groupe de rang fini qui agit sur X par automorphismes boréliens, alors $\mathcal{G}_\Gamma$ est un groupoïde borélien uniformément de rang fini.

Soit $(\mathrm{G}, \pi)$ un graphe borélien fibré sur X. Un couple d'éléments $(x, y)$ de X se *relève* dans G s'il existe une arête de G de sommet origine appartenant à $\pi^{-1}(x)$ et de sommet terminal appartenant à $\pi^{-1}(y)$. Nous dirons qu'un isomorphisme partiel $\phi$

de X se *relève* dans G s'il existe une application borélienne $\widetilde{\phi}$ définie sur le graphe de $\phi$ et à valeurs dans $G^1$ telle que, pour tout $x$ dans la source de $\phi$, $\widetilde{\phi}(x)$ relève le couple d'éléments $(x, \phi(x))$. En particulier, le relevé $\widetilde{\phi}$ d'un isomorphisme partiel $\phi$ de X dans G définit naturellement une section partielle de sommets sur la source de $\phi$ et une section partielle de sommets sur le but de $\phi$.

**Définition 4.8** (Graphe borélien fibré sur X uniformément fini)**.** *Un graphe borélien fibré* $(G, \pi)$ *sur* X *est uniformément fini si l'espace des sommets est un espace fibré standard uniformément fini et s'il existe un nombre fini d'isomorphismes partiels de* X *qui se relèvent dans* G *et tels que leurs images recouvrent l'espace des arêtes* $G^1$*.*

*Exemples :* Étant donné un entier naturel non nul N, un champ de graphes borélien sur X dont les fibres sont des graphes finis ayant au plus N sommets définit un graphe borélien fibré sur X uniformément fini ; dans ce cas, les isomorphismes partiels de X que l'on relève dans G sont (des restrictions de) l'identité. Le bouquet de cercles borélien sur X associé à un L-graphage (cf. ex. suivant déf. 4.3) uniformément de rang fini est uniformément fini (en tant que graphe borélien fibré sur X).

Introduisons à présent la notion de *groupoïde fondamental borélien* pour un graphe borélien enraciné sur X. Dans le cas où l'espace X est un singleton, on retrouve la notion de *groupe fondamental* pour un graphe connexe enraciné.

**Définition 4.9** (Groupoïde fondamental borélien)**.** *Soit* $(G, s)$ *un graphe borélien enraciné sur* X*. Le groupoïde fondamental borélien* $\pi^1(G, s)$ *de* $(G, s)$ *est le groupoïde dont l'espace des unités est* $s(X)$ *et dont les morphismes sont les chemins réduits (c'est-à-dire sans aller-retour) dans* G *dont les extrémités appartiennent à* $s(X)$*.*

*Remarque :* $\pi^1(G, s)$ est bien un groupoïde borélien sur X, la structure d'espace borélien standard sur l'ensemble des morphismes étant déduite de celle de $G^1$ et de la régularité borélienne des applications sommet origine et sommet terminal.

*Exemple :* Le groupoïde fondamental borélien d'un bouquet de cercles borélien associé à une partie génératrice $\mathcal{S}$ sur X et le groupoïde borélien libre sur $\mathcal{S}$ sont canoniquement isomorphes par définition.

Dans la suite, nous serons également intéressés par la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_{\pi^1(G,s)}$ sur $s(X)$ induite par $\pi^1(G, s)$. D'autre part, puisque $s : X \longrightarrow s(X)$ est un isomorphisme borélien, $\pi^1(G, s)$ et son groupoïde principal associé donnent (par isomorphisme) un groupoïde borélien et une relation d'équivalence borélienne sur X. Dans la suite, il nous arrivera de dire que $\pi^1(G, s)$ est un groupoïde borélien sur X.

**Proposition 4.10.** *Soit* G *un graphe borélien homogène sur* X*. Soit* $s$ *et* $s'$ *deux sections boréliennes de sommets saturantes. Alors les groupoïdes boréliens* $\pi^1(G, s)$ *et* $\pi^1(G, s')$ *sont stablement isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe des parties boréliennes* A *et* A′ *de* X *telles que les restrictions* $\pi^1(G, s)_{|A}$ *et* $\pi^1(G, s')_{|A'}$ *soient isomorphes.*

*Remarque :* Dans le cas où X est un singleton, on retrouve le fait que le groupe fondamental d'un graphe connexe est bien défini à isomorphisme près.

*Démonstration :* Puisque $s$ et $s'$ sont deux sections boréliennes de sommets saturantes, pour tout point $x$ de X, il existe un élément $x'$ de X et un chemin dans G reliant le sommet $s(x)$ au sommet $s'(x')$. On déduit du théorème de sélection (cf. th. 2.10) et du lemme 2.13 l'existence d'un isomorphisme partiel $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}'$ de X tel que $\phi$ soit une équivalence orbitale entre les relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}_{\pi^1(\mathrm{G},s)}$ et $\mathcal{R}_{\pi^1(\mathrm{G},s')}$ induites par les groupoïdes boréliens $\pi^1(\mathrm{G}, s)$ et $\pi^1(\mathrm{G}, s')$ et tel que tout point $s(x)$ de $s(\mathrm{A})$ soit relié par un chemin au point $s(\phi(x))$ de $s(\mathrm{A}')$, où A (et donc A′) désigne un domaine complet de $\mathcal{R}_{\pi^1(\mathrm{G},s)}$ (resp. $\mathcal{R}_{\pi^1(\mathrm{G},s')}$). L'isomorphisme partiel $\phi$ induit alors un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre $\pi^1(\mathrm{G}, s)_{|\mathrm{A}}$ et $\pi^1(\mathrm{G}, s')_{|\mathrm{A}'}$ : à tout chemin $c$ dans G d'origine $s(x)$ et d'extrémité $s(y)$ où $x$ et $y$ appartiennent à A, est associé le chemin $\phi \circ \phi^{-1}$ d'origine $s'(\phi(x))$ et d'extrémité $s'(\phi(y))$. □

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le groupoïde fondamental borélien associé à un bouquet de cercles borélien sur X est isomorphe au groupoïde borélien libre sur l'espace des arêtes du bouquet. C'est un fait général aux graphes boréliens enracinés sur X. Ce résultat généralise aux groupoïdes boréliens enracinés sur X le fait que le groupe fondamental d'un graphe connexe (cas où X est un singleton) est un groupe libre.

**Proposition 4.11.** *Soit* $(\mathrm{G}, s)$ *un graphe borélien enraciné sur* X. *Alors le groupoïde fondamental borélien* $\pi^1(\mathrm{G}, s)$ *est un groupoïde borélien libre sur* $s(\mathrm{X}) \cong \mathrm{X}$. *Si de plus* $(\mathrm{G}, s)$ *est un graphe borélien uniformément fini sur* X, *alors* $\pi^1(\mathrm{G}, s)$ *est uniformément de rang fini.*

*Démonstration :* Nous allons utiliser les techniques de la démonstration du théorème 2.33 afin de construire une forêt borélienne $\mathcal{F}$ dans G telle que chaque composante connexe ne rencontre $s(\mathrm{X})$ qu'en un seul sommet et telle que toute arête de G n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ connecte deux composantes connexes (ce qui entraîne que l'espace des sommets de $\mathcal{F}$ coïncide avec $\mathrm{G}^0$). Étant donné une telle forêt borélienne $\mathcal{F}$, opérons une opération de contraction de G suivant $\mathcal{F}$. Autrement dit considérons l'espace quotient de $\mathrm{G}^0$ par la relation d'équivalence borélienne lisse de domaine fondamental $s(\mathrm{X})$ dont les classes sont les ensembles de sommets des composantes connexes de $\mathcal{F}$, ainsi que l'espace quotient de $\mathrm{G}^1$ par la relation d'équivalence borélienne lisse de domaine fondamental naturellement isomorphe à $s(\mathrm{X}) \sqcup (\mathrm{G}^1 \smallsetminus \mathcal{F}^1)$ dont les classes sont soit les ensembles d'arêtes des composantes connexes de $\mathcal{F}$, soit les arêtes de $\mathrm{G}^1 \smallsetminus \mathcal{F}^1$. On obtient ainsi un bouquet de cercles borélien B sur $s(\mathrm{X}) \cong \mathrm{X}$ puisque pour toute arête de $\mathrm{G}^1 \smallsetminus \mathcal{F}^1$, il correspond un unique chemin dans $\mathcal{F}$ joignant son sommet origine (respectivement terminal) à $s(\mathrm{X})$. Le groupoïde fondamental borélien de $(\mathrm{G}, s)$ est donc libre sur la partie génératrice décrite ci-dessus. Si une famille d'isomorphismes partiels de X se relèvent dans G et recouvre $\mathrm{G}^1$, alors l'image de cette famille dans le quotient B recouvre encore B. Ainsi, si $(\mathrm{G}, s)$ est uniformément fini sur X, il en est de même du rang de $\pi^1(\mathrm{G}, s)$.

La construction d'une forêt borélienne $\mathcal{F}$ comme ci-dessus est analogue à la construction d'un arboretum de représentants de la proposition 2.51, avec une étape supplémentaire dans chaque itération de la construction. Notons $\mathcal{F}_1$ l'image $s(\mathrm{X})$ de la section borélienne $s$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, ayant construit une forêt borélienne $\mathcal{F}_n$ de G telle que chaque composante connexe ne rencontre $s(\mathrm{X})$ qu'en un seul sommet, la forêt borélienne $\mathcal{F}_{n+1}$ est obtenue à partir de la forêt borélienne $\mathcal{F}_n$ et de sections partielles de sommets $s_{n,1,j_n} : \mathrm{A}_{j_n} \subset \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}_{n,1}$ et $s_{n,2,k_n} : \mathrm{A}_{k_n} \subset \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}_{n,2}$, où $\mathrm{S}_{n,1}$ désigne l'ensemble des sommets de G à distance 1 de $\mathcal{F}_n$ et ayant un unique voisin dans $\mathcal{F}_n$, et $\mathrm{S}_{n,2}$ le complémentaire de $\mathrm{S}_{n,1}$ dans l'ensemble des sommets à distance 1 de $\mathcal{F}_n$. Les sections partielles $s_{n,1,j_n}$ sont choisies de la même manière que dans la démonstration de la proposition 2.51, après avoir fixé une numérotation borélienne de l'espace des sommets $\mathrm{G}^0$. Quant aux sections boréliennes $s_{n,2,k_n}$, celle-ci doivent être des applications injectives afin que chaque composante connexe de $\mathcal{F}_{n+1}$ continue de ne rencontrer $s(\mathrm{X})$ qu'en un seul sommet. Pour cela, désignons par $\mathrm{S}'_{n,2}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{F}_n$ à distance 1 d'un sommet de $\mathrm{S}_{n,2}$ : on obtient ainsi un espace fibré standard $\mathrm{S}'_{n,2}$ sur $\mathrm{S}_{n,2}$ avec une projection borélienne évidente. Étant donné une section borélienne $s'_{n,2} : \mathrm{S}_{n,2} \longrightarrow \mathrm{S}'_{n,2}$ de cet espace fibré standard, découpons $\mathrm{S}_{n,2}$ en un nombre dénombrable de parties boréliennes de sorte que chaque $s'_{n,2,k_n}$ (définie sur une partie borélienne de $\mathrm{S}_{n,2}$) soit injective (et donc bijective) sur son image. Les sections partielles $s_{n,2,k_n} : \mathrm{A}_{k_n} \longrightarrow \mathrm{S}_{n,2}$ cherchées sont alors les $(s'_{n,2,k_n})^{-1}$, où $\mathrm{A}_{k_n} \subset \mathrm{X}$ est isomorphe via $\pi^0 : \mathrm{G}^0 \longrightarrow \mathrm{X}$ au but de $s'_{n,2,k_n}$. □

La démonstration précédente nous incite à poser la définition suivante :

**Définition 4.12** (Cœur d'un graphe borélien sur X)**.** *Soit* G *un graphe borélien homogène sur* X*. Le cœur de* G *est le plus petit sous-graphe de* G *contenant tous les chemins réduits de* G*.*

En particulier, il n'est pas difficile de voir que le cœur d'un graphe borélien sur X est encore un graphe borélien sur X.

*Exemple :* Si G est un bouquet de cercles borélien sur X, alors le cœur de G est exactement G. Le cœur d'un arboretum sur X est le graphe borélien vide. Plus généralement, le cœur d'un champ de graphes connexes borélien $\mathcal{A}$ est le champ de graphes boréliens dont les fibres sont les cœurs des fibres de $\mathcal{A}$.

*Remarque :* C'est une conséquence de la démonstration de la proposition précédente que si le cœur d'un graphe borélien enraciné $(\mathrm{G}, s)$ sur X contient l'image $s(\mathrm{X})$ de la racine et est uniformément fini, alors le groupoïde borélien fondamental $\pi^1(\mathrm{G}, s)$ de G est uniformément de rang fini.

## 2 Revêtements boréliens

Nous allons maintenant définir la catégorie des *revêtements boréliens* au-dessus d'un graphe borélien G.

**Définition 4.13** (Revêtement borélien)**.** *Soit* G *un graphe borélien. Un revêtement borélien de* G *est un graphe borélien* G′ *dont l'espace des sommets* $\mathrm{G}'^0$ *est un espace fibré standard sur* $\mathrm{G}^0$ *et tel que la projection* $p'$ *induise un isomorphisme de graphes entre l'étoile de* $x$ *dans* G′ *et l'étoile de* $p'(x)$ *dans* G *pour tout élément* $x$ *de* $\mathrm{G}'^0$*.*

Ainsi, si G′ est un revêtement de G, l'image réciproque par la projection $p$ du graphe de Cayley d'un élément de $\mathrm{G}^0$ est une réunion disjointe de graphes de Cayley d'éléments de $\mathrm{G}'^0$ telle qu'en restriction à chaque composante connexe, la projection $p$ induise un revêtement de graphes connexes.

**Définition 4.14** (Morphisme de revêtements)**.** *Un morphisme de revêtements boréliens de* $(\mathrm{G}', p')$ *dans* $(\mathrm{G}'', p'')$ *au-dessus de* G *est un morphisme de graphes boréliens* $f : \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G}''$ *tel que* $p'' \circ f = p'$.

*Remarque :* Un morphisme de revêtements boréliens $f : \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G}''$ induit un morphisme de revêtements de graphes du graphe de Cayley d'un élément $x$ de $\mathrm{G}'^0$ dans le graphe de Cayley de $f(x)$ dans $\mathrm{G}''^0$.

Étant donné un revêtement borélien G′ de G, l'application « identité » est un morphisme de revêtements de G′ dans lui-même. Si $f'$ est un morphisme de revêtements de $(\mathrm{G}'', p'')$ dans $(\mathrm{G}''', p''')$ au-dessus de G, alors $f' \circ f$ est encore un morphisme de revêtements boréliens. On définit ainsi la catégorie des revêtements boréliens au-dessus d'un graphe borélien G donné. On en déduit notamment la notion d'isomorphisme de revêtements boréliens.

*Remarque :* Si D est un ensemble dénombrable (par exemple fini), la projection sur le premier facteur $\mathrm{G} \times \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{G}$ est un revêtement borélien du graphe borélien G : un tel revêtement est dit trivial.

Nous allons maintenant reprendre l'exemple des relations d'équivalence boréliennes arborables sur X décrit au début de ce chapitre et le généraliser au cas des groupoïdes boréliens libres.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien libre sur X dont on note $\mathcal{S}$ une partie génératrice et libre. Désignons par $\mathrm{G}_{\mathcal{S}}$ le bouquet de cercles borélien sur X induit par $\mathcal{S}$ (cf. ex. suivant déf. 4.3) : on rappelle que son groupoïde borélien fondamental sur X est canoniquement isomorphe à $\mathcal{G}$ par définition. Soit $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, \pi)$ le $\mathcal{G}$-arboretum canonique sur X associé à $\mathcal{S}$ (cf. p. 61) dont l'espace des sommets $(\mathcal{A}^0_{\mathcal{S}}, \pi^0)$ est l'espace fibré standard canonique gauche $(\mathcal{G}, s)$. L'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ étant quasi-libre, notons $p_{\mathcal{S}} : \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathcal{S}}$ l'application de passage au quotient, sa restriction $\mathcal{A}^0_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathrm{G}^0_{\mathcal{S}}$ aux espaces de sommets étant égale à $r$. Enfin, par construction $p_{\mathcal{S}}$ est un revêtement borélien de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ sur $\mathrm{G}_{\mathcal{S}}$.

*Remarque :* C'est ici la même situation que pour le groupe libre F(S) sur un ensemble S où $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ joue le rôle de l'arbre de Cayley de $(\mathrm{F(S)}, \mathrm{S})$ et $\mathrm{G}_{\mathcal{S}}$ joue le rôle du bouquet de cercles indexés par S.

Nous allons maintenant démontrer que l'application $\Xi$ qui, à la classe de conjugaison stable d'un sous-groupoïde partiel $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$, associe la classe d'isomorphisme du revêtement homogène $\mathcal{H}\backslash\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ de $\mathrm{G}_{\mathcal{S}}$ est une bijection.

**Définition 4.15** (Revêtements pointés et homogènes)**.** *Un revêtement pointé* $(\mathrm{G}', \mathrm{G}^0)$ *d'un graphe borélien* G *est la donnée d'un revêtement borélien* $(\mathrm{G}', p')$ *de* G *et d'une section borélienne de l'espace fibré standard* $\mathrm{G}'^0 \longrightarrow \mathrm{G}^0$ *appelée relèvement de* $\mathrm{G}^0$ *dans* $\mathrm{G}'^0$. *Un revêtement pointé* $(\mathrm{G}', \mathrm{G}^0)$ *est homogène si le relèvement de* $\mathrm{G}^0$ *dans* $\mathrm{G}'^0$ *est de plus un domaine complet de* $\mathcal{R}_{\mathrm{G}'}$ *: un tel relèvement est dit saturant.*

*Remarque :* L'existence d'un relèvement de $\mathrm{G}^0$ dans $\mathrm{G}'^0$ est bien sûr une conséquence du fait que $\mathrm{G}'^0$ est un espace fibré standard sur $\mathrm{G}^0$. Le graphe borélien G est appelé la *base* du revêtement et nous allons être particulièrement intéressé par le cas où la base du revêtement est un graphe borélien sur X.

Soit un revêtement homogène $(\mathrm{G}', p', \mathrm{G}^0)$ d'un graphe borélien G dont on note $s$ le relèvement de $\mathrm{G}^0$ dans $\mathrm{G}'^0$. Notons que, par définition d'un revêtement, $p'$ induit un isomorphisme entre l'étoile de $x$ et l'étoile de $p'(x)$ pour tout $x$ de $\mathrm{G}'^0$ : la projection $p'$ se prolonge donc en un morphisme de groupoïdes boréliens $\overline{p'}$ : $\pi^1(\mathrm{G}', s(\mathrm{G}^0)) \longrightarrow \pi^1(\mathrm{G}, \mathrm{G}^0)$ entre les groupoïdes boréliens fondamentaux de $(\mathrm{G}', \mathrm{G}^0)$ et $(\mathrm{G}, \mathrm{G}^0)$, et ce dernier est injectif car l'image d'un chemin non trivial de $\mathrm{G}'$ d'extrémités dans $s(\mathrm{G}^0)$ par un tel morphisme est un chemin non trivial de G d'extrémités dans $\mathrm{G}^0$. De plus, remarquons qu'un tel revêtement induit une action du groupoïde borélien fondamental $\pi^1(\mathrm{G}, \mathrm{G}^0)$ sur l'espace fibré standard $p'^0 : \mathrm{G}'^0 \longrightarrow \mathrm{G}^0$, ce qui est une conséquence immédiate de la définition d'un revêtement.

*Exemple :* Si $\mathcal{H}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est une partie génératrice et libre de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ sur X, le graphe borélien $\mathcal{H}\backslash\mathcal{A}_\mathcal{S}$ est un revêtement homogène de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$ puisque l'espace quotient de l'action de $\mathcal{H}$ sur l'espace des sommets $\mathcal{A}_\mathcal{S}^0$ n'est autre que le $(\mathcal{G}, \pi_r)$-espace fibré standard homogène $\mathcal{H}\backslash\mathcal{G}$ dont la diagonale $d_\mathcal{H}$ est une section borélienne saturante de stabilisateur égal à $\mathcal{H}$.

Nous allons maintenant démontrer que l'application qui, à un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$ où $\mathcal{S}$ est une partie génératrice et libre de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ sur X, associe le revêtement homogène $\mathcal{H}\backslash\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{|\mathrm{A}}}$ de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$ déduit par passage au quotient de l'action quasi-libre de $\mathcal{H}$ sur le $\mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$-arboretum $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{|\mathrm{A}}}$, induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison stable de sous-groupoïdes de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ définis sur des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements homogènes de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$.

**Lemme 4.16.** *Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont des sous-groupoïdes de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ (définis sur des domaines complets* A *et* A′ *de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$) stablement conjugués via l'isomorphisme partiel $\phi : \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}' \subset \mathrm{A}'$, alors $\phi$ induit un isomorphisme de revêtements boréliens de $\mathcal{H}\backslash(\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{B}}$ dans $\mathcal{H}'\backslash(\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{B}'}$. Réciproquement si $(\mathrm{G}', p', \mathrm{G}^0)$ et $(\mathrm{G}'', p'', \mathrm{G}^0)$ sont deux revêtements homogènes isomorphes d'un graphe borélien* G*, alors les projections des groupoïdes boréliens fondamentaux $p(\pi^1(\mathrm{G}', \mathrm{G}^0))$ et $(\pi^1(\mathrm{G}'', \mathrm{G}^0))$ de $(\mathrm{G}', \mathrm{G}^0)$ et $(\mathrm{G}'', \mathrm{G}^0)$ sont stablement conjugués dans $\mathcal{G}$.*

*Démonstration :* Par hypothèse, $\phi$ est un isomorphisme partiel $\phi : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}'$ où B et B′ désignent des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$ et qui est de plus un morphisme intérieur de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$. Soit $\gamma$ un élément de $(\mathcal{G})_{\mathcal{S}_{|\mathrm{B}}}$ de source $x$ appartenant à B. L'application $\phi$ se prolonge en un isomorphisme entre les $\mathcal{G}$-espaces fibrés standards $\mathcal{H}\backslash\mathcal{A}_\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}'\backslash\mathcal{A}_\mathcal{S}$ en associant à la classe $([\mathcal{H}]\cdot\gamma)$ dans la fibre de $x$, la classe $([\mathcal{H}']\cdot\phi(\gamma))$ dans la fibre de $\phi(x)$. La réciproque est une conséquence immédiate de la proposition 4.10. □

**Théorème 4.17.** *L'application $\Xi$ qui, à un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ défini sur un domaine complet* A *de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$ où $\mathcal{S}$ est une partie génératrice et libre de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ sur* X*, associe le revêtement homogène $\mathcal{H}\backslash\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{|\mathrm{A}}}$ de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$ déduit par passage au quotient de l'action quasi-libre de $\mathcal{H}$ sur le $\mathcal{G}_{|\mathrm{A}}$-arboretum $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{|\mathrm{A}}}$, induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison stable de sous-groupoïdes de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ définis sur des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements homogènes de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$.*

*Remarque 1 :* Notons que le lemme 4.6 assure $\Xi$ établit de plus une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison stable de sous-groupoïdes uniformément d'indice fini de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ définis sur des domaines complets de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements homogènes uniformément finis de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$.

*Démonstration :* Le lemme précédent assure le bien-fondé et l'injectivité de $\Xi$ ; il reste donc à voir la surjectivité. Soit $(\mathrm{G}, p, \mathrm{X})$ un revêtement borélien homogène de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$ dont on note $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_\mathcal{S}$ l'image par $p$ du groupoïde borélien fondamental $\pi^1(\mathrm{G}, s)$, où $s$ désigne le relèvement de X dans $\mathrm{G}^0$. Considérons le revêtement borélien homogène $(\mathcal{H}\backslash\mathcal{A}_\mathcal{S}, d_\mathcal{H})$ de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$ déduit par passage au quotient de l'action quasi-libre de $\mathcal{H}$ sur le $\mathcal{G}$-arboretum canonique $\mathcal{A}_\mathcal{S}$. On déduit des isomorphismes $p_{\mathcal{H}_{|d_\mathcal{H}(\mathrm{X})}} : d_\mathcal{H}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{X}$ et $p_{|s(\mathrm{X})} : s(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{X}$ un isomorphisme naturel de $\phi : d_\mathcal{H}(\mathrm{X}) \longrightarrow s(\mathrm{X})$ qui fasse commuter le diagramme évident. Ce dernier se prolonge en un isomorphisme, encore noté $\phi$, de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$-espaces fibrés standards $\mathcal{H}\backslash\mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{G}^0$ car $d_\mathcal{H}(\mathrm{X})$ et $s(\mathrm{X})$ sont des domaines complets des relations d'équivalence boréliennes engendrées par l'action de $\mathcal{G}_\mathcal{S}$ sur $\mathcal{H}\backslash\mathcal{G}$ et $\mathrm{G}'^0$ respectivement et parce que les $\mathcal{G}$-stabilisateurs de $d_\mathcal{H}$ et $s$ sont égaux à $\mathcal{H}$. Mais puisque les $\mathcal{G}_\mathcal{S}$-espaces fibrés standards $\mathcal{H}\backslash\mathcal{G}$ et $\mathrm{G}^0$ sont les espaces de sommets de revêtements boréliens d'un même graphe borélien $\mathrm{G}_\mathcal{S}$, il est évident que $\phi$ se prolonge alors en un isomorphisme de revêtements boréliens. $\square$

Notons que si $\mathcal{H}$ est un sous-groupoïde défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$, on a donc un revêtement borélien de $p_\mathcal{H} : (\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{A}} \longrightarrow \mathcal{H}\backslash(\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{A}}$ ainsi qu'un revêtement borélien $p : \mathcal{H}\backslash(\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{A}} \longrightarrow (\mathrm{G}_\mathcal{S})_{|\mathrm{A}}$. Notons que si $\mathcal{H}_1$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{H}_2$ défini sur un domaine complet A de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$, on obtient un morphisme de revêtements boréliens de $\mathcal{H}_1\backslash(\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{A}}$ dans $\mathcal{H}_2\backslash(\mathcal{A}_\mathcal{S})_{|\mathrm{A}}$ au-dessus de $\mathrm{G}_\mathcal{S}$.

*Remarque 2 :* Le théorème précédent fournit une deuxième démonstration du fait que les sous-groupoïdes d'un groupoïde borélien libre $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ sur X sont des groupoïdes boréliens libres. En effet, un sous-groupoïde de $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ (défini sur un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_\mathcal{S}}$) est alors isomorphe au groupoïde fondamental borélien d'un certain revêtement homogène et la proposition 4.11 assure qu'un tel groupe fondamental borélien est libre sur X.

# II Applications

Nous allons dans cette partie déduire de ce qui précède quelques applications aux relations d'équivalence boréliennes arborables.

## 1 Sous-relations uniformément d'indice fini

**Proposition 4.18.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne arborable sur* X *et $\Phi = \{\phi_{i_1}, \phi_{i_2} \dots \phi_{i_n}\}$ un L-arborage fini de $\mathcal{R}$. On suppose que $m = \phi_{i_1}\phi_{i_2}\dots\phi_{i_n}$ est un $\Phi$-mot réduit. Alors il existe une sous-relation $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ uniformément d'indice fini telle que $m$ soit un élément d'un L-arborage de $\mathcal{S}$.*

*Démonstration :* Nous allons construire un graphe d'isomorphismes partiels $\mathrm{G}^{ip}$ ayant un nombre fini de sommets à partir des lettres de $m$ et tel que le graphe borélien sous-jacent soit un revêtement homogène de $\mathrm{G}_\Phi$. Le résultat sera alors une conséquence de la remarque 2 du théorème 4.17.

Considérons le graphe dont les sommets sont les éléments du groupe cyclique d'ordre $n \geqslant 1$, chaque sommet étant relié au sommet suivant par une seule paire d'arêtes inverses l'une de l'autre (nous dirons que le sommet associé à l'élément neutre est le sommet racine). On associe l'espace borélien standard X à chaque sommet de ce graphe, ainsi que les éléments de $\Phi$ constitutif du mot $m$ aux arêtes successives. À ce stade, nous avons construit un graphe d'isomorphismes partiels $\mathcal{G}'$ ayant un nombre fini de sommets : un tel graphe d'isomorphismes partiels définit un graphe borélien dont l'espace des sommets est la réunion des espaces boréliens standards portés par ces sommets. La restriction de la relation d'équivalence borélienne engendrée par ce graphe borélien sur le sommet racine, qui par définition porte une copie de X, est égale à la sous-relation de $\mathcal{R}$ engendrée par $m$ sur X. Il suffit alors de rajouter des arêtes à $\mathcal{G}'$ et de leur associer des isomorphismes partiels afin d'obtenir un nouveau graphe d'isomorphismes partiels qui soit un revêtement homogène de $\mathcal{G}_{\mathrm{L}}$. La définition de revêtement borélien impose alors que, pour tout élément $\phi_i$ de $\Phi$, chaque sommet $s$ de $\mathcal{G}'$ doit être le sommet terminal d'une arête portant l'isomorphisme partiel $\phi_i$ ainsi que le sommet origine d'une arête portant également l'isomorphisme partiel $\phi_i$. Donnons-nous une orientation sur les arêtes du graphe cyclique d'ordre $n$ sous-jacent à $\mathcal{G}'$ telle que toutes les arêtes positives (c'est-à-dire de l'orientation) soient cohérentes : le sommet terminal d'une arête positive est le sommet origine de l'arête positive suivante. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et pour toute arête positive, attribuons à son sommet terminal la valeur 1 si elle porte l'isomorphisme partiel $\phi_{i_k}$, la valeur $-1$ si elle porte $\phi_i^{-1}$ et 0 sinon, et les valeurs opposées à son sommet origine. Le mot $m$ étant réduit, la somme des valeurs attribuées en chaque sommet est 0, 1 ou $-1$ et la somme sur tous les sommets est nulle : on peut donc rajouter au graphe cyclique sous-jacent à $\mathcal{G}'$ des arêtes orientées portant l'isomorphisme partiel $\phi_{i_k}$ sur l'arête positive et $\phi_{i_k}^{-1}$ sur l'arête opposée, de telle sorte que désormais, la somme des valeurs attribuées en chaque sommet soit nulle. On construit ainsi un graphe d'isomorphismes partiels $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{G}'$ et tel que le graphe borélien sur la copie de X associée à la racine du graphe cyclique sous-jacent soit un revêtement enraciné de $\mathrm{G}_\Phi$. L'espace des sommets de ce dernier est par définition uniformément fini et il en est de même de l'espace des arêtes puisque $\Phi$ est fini. □

## 2 Intersection de sous-relations arborables de rang fini

Étant donné une relation d'équivalence borélienne arborable $\mathcal{R}$ sur X et un arborage $\Phi$ de $\mathcal{R}$, nous allons introduire la notion de *conjointement de rang fini* pour une paire de sous-relations de $\mathcal{R}$ définies sur des domaines complets de $\mathcal{R}$. Nous en déduisons (prop. 4.21) une version faible d'un analogue du théorème de Howson ([How54]) en théorie des groupes dont nous donnons ici une démonstration en termes de revêtements (voir aussi [Imr77]).

**Théorème 4.19** (Howson)**.** *Soit* $\mathrm{G}_1$ *et* $\mathrm{G}_2$ *deux sous-groupes de rang fini d'un groupe libre* G*. Alors* $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2$ *est de rang fini.*

*Démonstration :* Soit X un bouquet de cercles dont le groupe fondamental est G. Désignons par $X_{12}$, $X_1$ et $X_2$ les revêtements connexes pointés de X associés respectivement aux sous-groupes $G_1 \cap G_2$, $G_1$ et $G_2$ et rappelons qu'un morphisme de revêtements induit un morphisme injectif au niveau des groupes fondamentaux.

En particulier, les images des groupes fondamentaux de $X_{12}$, $X_1$ et $X_2$ par les morphismes de revêtements correspondants sont respectivement $G_1 \cap G_2$, $G_1$ et $G_2$. De plus, nous avons le diagramme commutatif de revêtements ci-contre.

$$\begin{tikzcd} & X_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_1 \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Pour tout élément $g$ de G, on désigne par $[g]_i$ la classe à droite de $g$ dans $G_i$. L'application $\Psi \colon \begin{cases} (G_1 \cap G_2)\backslash G \longrightarrow G_1\backslash G \times G_2\backslash G \\ \qquad [g]_{12} \qquad \longmapsto ([g]_1, [g]_2) \end{cases}$ est injective car si $\Psi([g]_{12})$ est égal à $\Psi([h]_{12})$, alors l'élément $gh^{-1}$ appartient à $G_1$ et $G_2$, donc à $G_1 \cap G_2$ et finalement $[g]_{12}$ est égal à $[h]_{12}$.

On en déduit donc qu'étant donné un sommet dans $X_1$ et un sommet dans $X_2$, il existe au plus un relevé de ce couple de sommets dans $X_{12}$. Or l'image d'un chemin fermé par un morphisme de graphes est un chemin fermé et, par conséquent, le cœur d'un graphe connexe (c'est-à-dire le plus petit sous-graphe contenant tous les chemins réduits) dans le cœur du graphe image. Puisque par hypothèse les graphes connexes $X_1$ et $X_2$ ont un cœur fini, on en déduit qu'il en est de même de $X_{12}$, ce qui assure que $G_1 \cap G_2$ soit de rang fini. $\square$

Nous en venons à la notion de *conjointement de rang fini* dans le contexte des relations d'équivalence boréliennes.

**Définition 4.20** (conjointement de rang fini)**.** *Deux sous-relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ définies sur des domaines complets d'une relation d'équivalence borélienne arborable sur* X *sont conjointement de rang fini dans $\mathcal{R}$ s'il existe un L-arborage $\Phi$ de $\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ soient engendrées par un nombre fini de $\Phi$-mots.*

Nous pouvons désormais démontrer le résultat annoncé.

**Proposition 4.21.** *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence borélienne arborable sur* X. *Soit $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux sous-relations de $\mathcal{R}$ définies sur* X *conjointement de rang fini. Alors $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est une sous-relation de $\mathcal{R}$ de uniformément de rang fini.*

*Question :* Est-il possible de se passer de l'hypothèse de « conjointement de rang fini » ?

*Démonstration :* Par définition de sous-relations conjointement de rang fini, il existe un L-arborage $\Phi$ de $\mathcal{R}$ pour lequel $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont engendrées par un nombre fini de $\Phi$-mots. Quitte à considérer la sous-relation de $\mathcal{R}$ engendrée par les éléments de $\Phi$ constituant ces $\Phi$-mots, on peut supposer que les éléments de $\Phi$ sont exactement les éléments de $\Phi$ constituant ces $\Phi$-mots, et ainsi supposer que $\Phi$ est fini. Considèrons alors le bouquet de cercles borélien $G_\Phi$ naturellement associé à $\Phi$. Désignons par

$\mathrm{G}_{12}$, $\mathrm{G}_1$ et $\mathrm{G}_2$ les revêtements enracinés de $\mathrm{G}_\Phi$ associés respectivement aux sous-relations $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et rappelons qu'un morphisme de revêtements induit un morphisme injectif au niveau des groupes fondamentaux (cf. 89).

En particulier, les images des relations d'équivalence boréliennes associées aux groupoïdes boréliens fondamentaux de $\mathrm{G}_{12}$, $\mathrm{G}_1$ et $\mathrm{G}_2$ par les morphismes de revêtements correspondants sont respectivement $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. De plus, nous avons le diagramme commutatif de revêtements boréliens ci-contre.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G}_1 \arrow[dr] & \\ \mathrm{G}_{12} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{G} \\ & \mathrm{G}_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Pour tout couple d'éléments $\mathcal{R}$-équivalents $(x, y)$ de X, désignons par $(x, [y]_i)$ l'image de $(x, y)$ dans l'espace fibré standard $\mathcal{R}_i \backslash \mathcal{R}$.

L'application $\Psi :\begin{cases} \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \backslash \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}_1 \backslash \mathcal{R} \times \mathcal{R}_2 \backslash \mathcal{R} \\ \quad (x, [y]_{12}) \quad \longmapsto ((x, [y]_1), (x, [y]_2)) \end{cases}$ est injective car si $(x, [y]_{12})$ et $(x', [y]_{12})$ ont la même image par $\Psi$, alors les éléments $x$ et $x'$ sont à la fois $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$-équivalents : ils sont donc $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$-équivalents et finalement $(x, [y]_{12})$ est égal à $(x', [y]_{12})$.

Or par construction les espaces de sommets de $\mathrm{G}_{12}$, $\mathrm{G}_1$ et $\mathrm{G}_2$ sont respectivement les espaces fibrés standards $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \backslash \mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1 \backslash \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_2 \backslash \mathcal{R}$ sur X. On en déduit donc qu'étant donné un sommet dans $\mathrm{G}_1$ et un sommet dans $\mathrm{G}_2$, il existe au plus un relevé de ce couple de sommets dans $\mathrm{G}_{12}$. Puisque $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont engendrées par un nombre fini de $\Phi$-mots, ceci assure les espaces de sommets de $\mathrm{G}_1$ et $\mathrm{G}_2$ soient des espaces fibrés uniformément finis sur X. Or un morphisme de graphes boréliens homogènes sur X envoie le cœur du graphe de départ dans le cœur (cf. déf. 4.12) du graphe d'arrivée car l'image d'un chemin fermé par un morphisme de graphes est un chemin fermé. On en déduit que l'espace des sommets du cœur de $\mathrm{G}_{12}$ est un espace fibré standard uniformément fini. Or $\mathrm{G}_{12}$ est un revêment borélien d'un bouquet de cercles borélien $\mathrm{G}_\Phi$ sur un L-arborage $\Phi$ fini, ce qui implique que son cœur soit uniformément fini. La remarque suivant la définition 4.12 permet de conclure. □

La démonstration précédente s'étend sans aucune difficulté au cas des groupoïdes boréliens. Nous dirons que deux sous-groupoïdes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ d'un groupoïde borélien libre sur X sont *conjointement de rang fini* dans $\mathcal{G}$ s'il existe un L-graphage libre et générateur $\Phi$ de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ soient engendrées par un nombre fini de $\Phi$-mots. Le résultat se reformule ainsi :

**Proposition 4.22.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien libre sur* X*. Soit $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux sous-groupoïdes de $\mathcal{G}$ conjointement de rang fini. Alors $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$ de rang fini.* □

## 3 Théorème de Grushko

En théorie des groupes, le théorème de Grushko ([Gru], voir [Imr84] et [Sta65] pour des preuves topologiques) est un résultat subtil sur les parties génératrices d'un produit libre de groupes. Dans le cas de deux facteurs $\mathrm{G}_1$ et $\mathrm{G}_2$, il assure que si le produit libre $\mathrm{G}_1 \star \mathrm{G}_2$ est de rang fini, alors à partir de toute partie génératrice de

$G_1 \star G_2$, on peut construire une partie génératrice de même cardinal dont les éléments appartiennent à $G_1$ ou $G_2$.

Nous allons démontrer un résultat analogue au théorème de Grushko pour les groupoïdes boréliens et expliciterons (cor. 4.25) le cas important des groupoïdes boréliens principaux.

**Théorème 4.23.** *Soit $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ un morphisme de groupoïdes boréliens surjectif où $\mathcal{G}$ est un groupoïde borélien libre sur* X *et $\mathcal{H} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{H}_i$ est un produit libre de groupoïdes boréliens sur un espace borélien standard* Y*. Alors il existe des sous-groupoïdes $\mathcal{G}_i$ de $\mathcal{G}$ définis sur* X *tels que $\mathcal{G} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{G}_i$ et vérifiant*

$$\forall i \in \mathrm{I} \qquad f(\mathcal{G}_i) = \mathcal{H}_i.$$

Commençons par donner une caractérisation géométrique des produits libres. Soit $\mathcal{G} = \star_{i\in \mathrm{I}}\mathcal{G}_i$ un produit libre (dénombrable) de groupoïdes boréliens sur un espace borélien standard X. Étant donné des parties génératrices $\mathcal{S}_i$ des $\mathcal{G}_i$ (cf. déf. 3.5), considérons la réunion $\mathcal{S}$ des $\mathcal{S}_i$ : c'est une partie génératrice de $\mathcal{G}$. Considérons le $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien connexes de Cayley $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ (cf. p. 61) : l'espace des sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ est l'espace fibré standard canonique source $(\mathcal{G}, s)$ et l'espace des arêtes est I-coloré (c'est-à-dire tel que chaque arête porte une couleur $i$ de I préservée par l'action de $\mathcal{G}$). Considérons un chemin fermé dans la fibre d'un élément $x$ de X. On peut découper ce chemin en sous-chemins monochromes (c'est-à-dire dont les arêtes sont de même couleur) et tel que deux sous-chemins consécutifs aient des colorations distinctes. L'espace des arêtes étant l'espace fibré standard $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ sur X par définition, on en déduit un uplet d'éléments composables de $\mathcal{G}$ tel que la source du premier et le but du dernier élément soient les mêmes et tel que deux éléments successifs appartiennent à des $\mathcal{G}_i$ distincts. Par définition d'un produit libre, on en déduit qu'au moins un des éléments de cet uplet est trivial, autrement dit que l'un des sous-chemins considérés précédemment est fermé.

**Lemme 4.24.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien sur* X*. Alors $\mathcal{G}$ est le produit libre des sous-groupoïdes $(\mathcal{G}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ si et seulement s'il existe un $\mathcal{G}$-champ de graphes borélien connexes* I*-coloré $\mathcal{A}$ sur* X *dont l'espace des sommets est $\mathcal{G}$ et tel que tout chemin fermé de $\mathcal{A}$ contienne un sous-chemin fermé monochromatique.*

*Démonstration :* Considérons dans $\mathcal{A}^0$ la partie borélienne constituée des sommets pour lesquels il existe un chemin monochromatique de couleur $i$ les reliant au sommet origine de leur fibre (c'est-à-dire à la diagonale de l'espace fibré standard $(\mathcal{G}, s)$). Cette partie borélienne $\mathcal{G}$-invariante définit un sous-groupoïde $\mathcal{G}_i$ de $\mathcal{G}$ (rappelons encore que l'espace des arêtes est l'espace fibré standard $\mathcal{G} \star \mathcal{S}$ sur X) et il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{G}$ est engendrée par les $\mathcal{G}_i$ puisque la diagonale de l'espace fibré standard $(\mathcal{G}, s)$ est un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}^0$.

Considérons des éléments de la réunion des $\mathcal{G}_i$ tels que le produit soit trivial (c'est-à-dire $\mathrm{id}_x$ pour un certain $x$ de X) et tels que deux éléments successifs soient dans des $\mathcal{G}_i$ distincts. Dans la fibre de $x$, on en déduit un chemin fermé constitué de sous-chemins monochromatiques que l'on peut supposer de longueurs minimales et tel que deux sous-chemins consécutifs soient de coloration différente. Par hypothèse, ce chemin contient un sous-chemin fermé monochromatique, ce qui est contradictoire avec la minimalité des longueurs des sous-chemins précédents. □

*Démonstration du théorème :* Soit $\mathcal{S}$ une partie borélienne libre et génératrice de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}$ le $\mathcal{G}$-arboretum canonique (gauche) de Cayley associé à $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ sur X. Quitte à considérer une restriction de $\mathcal{S}$ à une partie borélienne (et donc un sous-groupoïde libre de $\mathcal{G}$ d'après cor. 3.36), on peut supposer que l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le noyau d'isotropie de $f$ (cf. déf. 3.17) est vide.

L'image $f(\gamma)$ de tout élément $\gamma$ de $\mathcal{S}$ est un élément non trivial de $\mathcal{H}$ dont on peut considérer la décomposition réduite suivant les $\mathcal{H}_i$. Cette décomposition réduite induit naturellement une subdivision de l'arête $\gamma$ dans $\mathcal{A}$ en un nombre fini d'arêtes dont chacune porte une couleur $i$ de I. En prolongeant par $\mathcal{G}$-équivariance à $\mathcal{A}$ cette opération, on en déduit un arboretum $\mathcal{A}'$ sur X coloré (c'est-à-dire dont chaque arête porte une couleur $i$) sur lequel $\mathcal{G}$ agit en préservant la coloration, ainsi qu'un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur l'espace des sommets $\mathcal{A}'^0$ (rappelons que l'image de la diagonale de $(\mathcal{G}, s)$ est un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}^0$). Considérons l'application borélienne $\overline{f} : \mathcal{A}'^1 \longrightarrow \mathcal{H}$ qui envoie chaque arête de $\mathcal{A}'$ sur l'élément de $\mathcal{H}$ correspondant : c'est une application borélienne $\mathcal{G}$-invariante envoyant tout chemin de la fibre $\mathcal{A}'_x$ d'un élément $x$ de X sur un élément de $\mathcal{H}$.

Pour tout élément $x$ de X et pour tout chemin dans la $\mathcal{A}'$-fibre de $x$ dont l'image par $\overline{f}$ est trivial dans $\mathcal{H}$, on adjoint une arête blanche à $\mathcal{A}'_x$ joignant les extrêmités de ce chemin. Désignons par $\mathcal{A}''$ le champ de graphes borélien connexes sur X ainsi obtenu et sur lequel $\mathcal{G}$ continue d'agir avec un domaine fondamental pour l'action D. On prolonge l'application borélienne $\overline{f}$ à $\mathcal{A}''^1$ en envoyant toute arête blanche sur l'élément trivial correspondant de $\mathcal{H}$. Ainsi tout chemin fermé dans la fibre d'un élément $x$ de X a pour image par $\overline{f}$ un élément trivial de $\mathcal{H}$. Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de contracter le champ de graphes borélien ci-dessus de sorte que l'image de la diagonale soit un domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur l'espace des sommets (ce qui assurera que l'espace des sommets s'identifie au $\mathcal{G}$-espace fibré standard $(\mathcal{G}, s)$) et tel que tout chemin fermé de $\mathcal{A}$ contienne un sous-chemin fermé monochromatique. Le lemme précédent permettra alors de conclure.

Donnons-nous une numérotation borélienne (cf. 2.11) du domaine fondamental D de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}''^0$ telle que l'image de $d$ dans $\mathcal{A}''^0$ soit l'ensemble des sommets de numéro 1. Supposons que $s$ soit une section partielle, définie sur une partie borélienne A de X, à valeurs dans l'ensemble des sommets de numéros différents de 1 de ce domaine fondamental. Par surjectivité de $\overline{f}$, quitte à découper le domaine de définition de $s$ et à considérer des translatés de $s$ sous l'action de $\mathcal{G}$, on peut supposer que dans la fibre de tout élément $x$ de A, les sommets $\mathrm{id}_x$ et $s(x)$ soient reliés par une arête blanche. Pour tout élément $x$ de A, considérons le plus court chemin formé d'arêtes I-colorées reliant $\mathrm{id}_x$ et $s(x)$ : l'image par $\overline{f}$ de ce chemin est par construction un élément trivial de $\mathcal{H}$. Notons $c$ un tel chemin et $c = c_1 \dots c_n$ sa décomposition maximale en sous-chemins I-colorés. On a donc

$$\overline{f}(c_1) \dots \overline{f}(c_n) = 1$$

et deux éléments consécutifs $\overline{f}(c_k)$ et $\overline{f}(c_{k+1})$ du membre de gauche ne sont pas inverses l'un de l'autre car les sous-chemins $c_k$ et $c_{k+1}$ portent des couleurs distinctes. Par suite, l'un des $\overline{f}(c_k)$ doit être trivial par définition d'un produit libre. Mais par minimalité de $c$, les extrémités de $c_k$ ne sont pas des sommets de la même orbite sous l'action de $\mathcal{G}$ : ces deux sommets sont donc reliés par une arête blanche. On a ainsi construit une section partielle d'arêtes $s'$ définie sur A et sur laquelle on contracte alors le champ de graphes borélien $\mathcal{A}''$ en identifiant les sommets $o(s'(x))$ et $t(s'(x))$ et en supprimant l'arête $s'(x)$ pour tout $x$ de A. On prolonge cette contraction par $\mathcal{G}$-équivariance ; le domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}''^0$ passe au quotient en un nouveau domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur le nouvel espace des sommets, ainsi que la section de sommets $s$ mais, pour tout $x$ de A, la longueur du chemin formé d'arêtes I-colorées reliant $\mathrm{id}_x$ et $s(x)$ est strictement plus petite.

Cette construction itérative fournit une exhaustion du domaine fondamental de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}''^0$, chacune des contractions ne produisant que des chemins fermés I-monochromatiques. □

Le théorème précédent dans les cas particuliers où X et Y sont des singletons redonnent le théorème de Grushko classique.

**Corollaire 4.25.** *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde borélien libre sur X tel que la relation d'équivalence borélienne associée $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ soit le produit libre d'un ensemble dénombrable de sous-relations $\mathcal{R}_i$ définies sur X. Alors il existe des sous-groupoïdes $\mathcal{G}_i$ de $\mathcal{G}$ définis sur X tels que $\mathcal{G} = \star_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{G}_i$ et vérifiant*

$$\forall i \in \mathrm{I} \qquad \mathcal{R}_{\mathcal{G}_i} = \mathcal{R}_i.$$

□

# III Épilogue

Les groupoïdes boréliens libres et les relations d'équivalence boréliennes arborables jouent un rôle analogue aux groupes libres F(S) sur un ensemble S et la théorie des revêtements boréliens que nous avons développée donne un dictionnaire semblable à celui donné par la théorie des revêtements du bouquet de cercles indexé par S. Le contexte des groupoïdes boréliens (principaux) présente une particularité nouvelle en ceci qu'on est amené à considérer des conjugaisons à isomorphisme (équivalence orbitale) stable près. Mentionnons enfin que cette étude nous a paru d'autant plus intéressante qu'il est bien connu que la théorie des revêtements permet de démontrer simplement et de manière très élégante des résultats de nature algébrique (par exemple pour le groupe libre). Comme nous l'avons montré, de telles applications sont envisageables dans le contexte des groupoïdes boréliens.

Concluons en nous rappelant qu'en théorie des revêtements, certains revêtements (du bouquet de cercles par exemple) jouent un rôle privilégié : ce sont les revêtements galoisiens pour lesquels le groupe d'automorphismes du revêtement agit transitivement sur le revêtement et qui correspondent aux sous-groupes distingués dans le dictionnaire. Soit $\Phi$ un arborage sur X, $\mathcal{S}$ une sous-relation de la relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R}_\Phi$ engendrée par $\Phi$, $\mathcal{A}_\Phi$ le $\mathcal{R}_\Phi$-arboretum canonique et $p : \mathcal{S}\backslash\mathcal{A}_\Phi \longrightarrow \mathrm{G}_\Phi$ le revêtement borélien de du bouquet de cercles borélien $\mathrm{G}_\Phi$ correspondant. Étant donné deux sections partielles $s$ et $s'$ saturantes de $\mathcal{S}\backslash\mathcal{A}_\Phi$ définies sur le domaine complet A de $\mathcal{R}_\Phi$, existe-il un automorphisme de revêtement borélien $f$ qui enverrait $s$ sur $s'$ ? D'après le lemme 2.19, il est nécessaire que les stabilisateurs de $s$

et $s'$ soient égaux. Or nous savons qu'ils sont également stablement orbitalement équivalents à $\mathcal{S}$. Ainsi, si pour toute paire de sections partielles comme ci-dessus, il existe un automorphisme de revêtement borélien $f$ qui envoie l'une sur l'autre, on en déduit que $\mathcal{S}$ est stablement égale à toutes ses conjuguées. Mais ceci est équivalent à dire que $\mathcal{S}$ est lisse. Ceci est une nouvelle illustration du fait que les seules sous-relations « distinguées » $\mathcal{S}$ qui permettent de définir une notion raisonnable de « relation d'équivalence borélienne quotient » sont les sous-relations lisses...

# Bibliographie


[Ada88] S. ADAMS – « An equivalence relation that is not freely generated », *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), 565–566.

[AG] A. ALVAREZ et D. GABORIAU – « Free products, Orbit Equivalence and Measure Equivalence Rigidity », prépublication *http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+gaboriau+alvarez/0/1/0/all/0/1*.

[Ati76] M. F. ATIYAH – « Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras », Colloque « Analyse et Topologie » (Orsay, 1974). Astérisque **32-33**, Soc. Math. de France, Paris (1976), 43–72.

[CG86] J. CHEEGER et M. GROMOV – « $L_2$-cohomology and group cohomology », *Topology* **25** (1986), 189–215.

[Con79] A. CONNES – « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs (Sém. Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math. **725**, Springer, Berlin, (1979), 19–143.

[Con90] — , *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris (1990).

[Con94] — , *Noncommutative geometry*, Academic Press Inc., San Diego, CA (1994).

[CFW81] A. CONNES, J. FELDMAN et B. WEISS – « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **1** (1981), 431–450.

[CS05] A. CONNES et D. SHLYAKHTENKO – « $L^2$-homology for von Neumann algebras », *J. reine angew. Math.* **586** (2005), 125–168.

[CW80] A. CONNES et B. WEISS – « Property T and asymptotically invariant sequences », *Israel J. Math.* **37** (1980), 209–210.

[Dix96] J. DIXMIER – *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Éditions Jacques Gabay, Paris (1996).

[DJK94] R. DOUGHERTY, S. JACKSON et A. S. KECHRIS – « The structure of hyperfinite Borel equivalence relations », *Trans. Amer. Math. Soc.* **341** (1994), 193–225.

[Dye59] H. A. DYE – « On groups of measure preserving transformations I », *Amer. J. Math.* **81** (1959), 119–159.

[Dye63] — , « On groups of measure preserving transformations II », *Amer. J. Math.* **85** (1963), 551–576.

[Eps] I. EPSTEIN – « Orbit inequivalent actions of non-amenable groups », prépublication *http://www.math.ucla.edu/~iepstein/nonOE.pdf*.

[FM75] J. Feldman et C. C. Moore – « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras », *Bull. Amer. Math. Soc.* **81** (1975), 921–924.

[FM77a] — , « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I », *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), 289–324.

[FM77b] — , « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), 325–359.

[FSZ89] J. Feldman, C. E. Sutherland et R. J. Zimmer – « Subrelations of ergodic equivalence relations », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **9** (1989), 239–269.

[Fil96] P. A. Fillmore – *A user's guide to operator algebras*, Can. Math. Soc. Series of Monographs and Adv. Texts, John Wiley & Sons Inc., New York (1996).

[Fri70] N. A. Friedman – *Introduction to ergodic theory*, , Van Nost. Rein. Math. Stud. **29**. Van Nostrand Reinhold Co., New York (1970).

[Fur99a] A. Furman – « Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.

[Fur99b] A. Furman – « Orbit equivalence rigidity », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.

[Gab98] D. Gaboriau – « Mercuriale de groupes et de relations », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** (1998), 219–222.

[Gab00] — , « Coût des relations d'équivalence et des groupes », *Invent. Math.* **139** (2000), 41–98.

[Gab02] — , « Invariants $l^2$ de relations d'équivalence et de groupes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **95** (2002), 93–150.

[Gab05] D. Gaboriau – « Examples of groups that are measure equivalent to the free group », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **25** (2005), 1809–1827.

[GL] D. Gaboriau et R. Lyons – « A measure group theoretic solution to von Neumann's problem », prépublication *http://arxiv.org/abs/0711.1643*.

[GP05] D. Gaboriau et S. Popa – « An uncountable family of nonorbit equivalent actions of $\mathbf{F}_n$ », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), 547–559.

[Gru] I. A. Grushko – « Über die basen », *J. London Math. Soc.* **29** (1940).

[Hjo05] G. Hjorth – « A converse to Dye's theorem », *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 3083–3103.

[HK00] G. Hjorth et A. S. Kechris – « The complexity of the classification of Riemann surfaces and complex manifolds », *Illinois J. Math.* **44** (2000), 104–137.

[How54] A. G. Howson – « On the intersection of finitely generated free groups », *J. London Math. Soc.* **29** (1954), 428–434.

[Imr77] W. Imrich – « Subgroup theorems and graphs », Combinatorial mathematics V. Lecture Notes in Math. **622**, Springer, Berlin (1977), 1–27.

[Imr84] W. Imrich – « Grushko's theorem », *Arch. Math. (Basel)* **43** (1984), 385–387.

[Ioa] A. Ioana – « Orbit inequivalent actions for groups containing a copy of $\mathbf{F}_2$ », prépublication *http://aps.arxiv.org/abs/math.GR/0701027*.

[IPP05] A. Ioana, J. Peterson et S. Popa – « Amalgamated free products of $w$-rigid groups and calculation of their symmetry groups », *Acta Mathematica* (2005), to appear.

[JKL02] S. Jackson, A. S. Kechris et A. Louveau – « Countable Borel equivalence relations », *J. Math. Log.* **2** (2002), 1–80.

[Kec92] A. S. Kechris – « Countable sections for locally compact group actions », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **12** (1992), 283–295.

[Kec94] — , « Countable sections for locally compact group actions II », *Proc. Amer. Math. Soc.* **120** (1994), 241–247.

[Kec95] — , *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York (1995).

[Kec99] — , « New directions in descriptive set theory », *Bull. Symbolic Logic* **5** (1999), 161–174.

[KL97] A. S. Kechris et A. Louveau – « The classification of hypersmooth Borel equivalence relations », *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), 215–242.

[KM04] A. S. Kechris et B. D. Miller – *Topics in orbit equivalence*, Lecture Notes in Math. **1852**, Springer-Verlag, Berlin (2004).

[KMS76] A. Karrass, W. Magnus et D. Solitar – *Combinatorial group theory*, Dover Publications Inc., New York (1976).

[Kos04] H. Kosaki – « Free products of measured equivalence relations », *J. Funct. Anal.* **207** (2004), 264–299.

[Kur66] K. Kuratowski – *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York (1966).

[Kur34] A. G. Kurosh – « Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen », *Math. Ann.* **109** (1934), 647–660.

[Lev95] G. Levitt – « On the cost of generating an equivalence relation », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **15** (1995), 1173–1181.

[MS06] N. Monod et Y. Shalom – « Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology », *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), 825–878.

[Mos80] Y. N. Moschovakis – *Descriptive set theory*, Stud. in Logic and the Found. of Math. **100**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1980).

[MvN36] F. J. Murray et J. Von Neumann – « On rings of operators », *Ann. of Math. (2)* **37** (1936), 116–229.

[MvN37] F. J. Murray et J. von Neumann – « On rings of operators II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 208–248.

[OW80] D. S. Ornstein et B. Weiss – « Ergodic theory of amenable group actions I. The Rohlin lemma », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.

[Pop06a] S. Popa – « On a class of type $\mathrm{II}_1$ factors with Betti numbers invariants », *Ann. of Math. (2)* **163** (2006), 809–899.

[Pop06b] — , « Strong rigidity of $\mathrm{II}_1$ factors arising from malleable actions of $w$-rigid groups I », *Invent. Math.* **165** (2006), 369–408.

[Pop06c] — , « Strong rigidity of $\mathrm{II}_1$ factors arising from malleable actions of $w$-rigid groups II », *Invent. Math.* **165** (2006), 409–451.

[Pop07] — , « Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of $w$-rigid groups », *Invent. Math.* **165** (2007), 243–295.

[Sau05] R. Sauer – « $\mathrm{L}^2$-Betti numbers of discrete measured groupoids », *Inter. J. Alg. Comput.* **15** (2005), 1169–1188.

[SW79] P. Scott et T. Wall – « Topological methods in group theory », Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **36** (1979), 137–203.

[Ser77] J.-P. Serre – *Arbres, amalgames,* $\mathrm{SL}_2$, Astérisque **46**, Soc. Math. de France, Paris (1977).

[Sta65] J. R. Stallings – « A topological proof of Grushko's theorem on free products », *Math. Z.* **90** (1965), 1–8.

[Tak02] M. Takesaki – *Theory of operator algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **124**, Op. Alg. and Non-com. Geom. **5**, Springer-Verlag, Berlin (2002).

[Tak03a] — , *Theory of operator algebras II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **125**, Op. Alg. and Non-com. Geom. **6**, Springer-Verlag, Berlin (2003).

[Tak03b] — , *Theory of operator algebras III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **127**, Op. Alg. and Non-com. Geom. **8**, Springer-Verlag, Berlin (2003).

[Zim80] R. J. Zimmer – « Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups », *Ann. of Math. (2)* **112** (1980), 511–529.