N° d'ordre : 319
N° attribué par la bibliothèque : 05ENSL0 319

École Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

THÈSE

en vue d'obtenir le titre de
Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon

Spécialité : Mathématiques
École doctorale : Mathématiques et Informatiques Fondamentale

présentée et soutenue publiquement le 6 septembre 2005 par

Mikaël PICHOT

Titre :

QUASI-PÉRIODICITÉ ET THÉORIE DE LA MESURE

Directeur de thèse :	Monsieur Damien GABORIAU	
Après avis de :	Monsieur Pierre PANSU	
	Monsieur Georges SKANDALIS	
Devant la commission d'examen formée de :	Monsieur Damien GABORIAU,	Membre/Directeur
	Monsieur Étienne GHYS,	Membre
	Monsieur Pierre PANSU,	Membre/Rapporteur
	Monsieur Jean RENAULT,	Membre
	Monsieur Georges SKANDALIS,	Membre/Rapporteur

Introduction

Cette introduction est divisée en plusieurs parties qui ont pour thème commun relations d'équivalence, espaces singuliers, et quasi-périodicité sous diverses formes.

1. - Relations d'équivalences mesurées. Soit (X, μ) un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité sans atome. Une **relation d'équivalence mesurée** sur X est une relation d'équivalence qui peut être engendrée par une famille dénombrable $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ d'isomorphismes boréliens non singuliers entre parties boréliennes de X. Ainsi, si x et y sont deux points équivalents de X, on peut par définition passer de l'un à l'autre en appliquant un nombre fini de transformations de Φ et de leurs inverses. Une telle relation est à classes dénombrables, et on dit que Φ en est un système générateur. Dans ce contexte, on ne distingue pas une relation d'équivalence de sa restriction à une partie saturée de X de mesure 1.

En particulier, un groupe dénombrable agissant sur (X, μ) en préservant la classe de μ définit une relation d'équivalence mesurée sur X.

Le phénomène récurrent que l'on rencontre dans l'étude d'une relation d'équivalence mesurée, qui les distingue de la théorie des groupes dénombrables et les rapproche de la théorie des algèbres d'opérateurs, peut être énoncé dès maintenant : *les 'applications de changement de variables' d'un système générateur à un autre sont en général délicates à manipuler, du fait de fluctuations importantes sur des parties (certes) arbitrairement petites de l'espace.*

Soit R une relation d'équivalence mesurée. Le *coût* de R est l'infimum sur ses systèmes générateurs $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ de la quantité

$$C(\Phi) = \sum_i \mu(\operatorname{dom} \varphi_i) \in [0, \infty].$$

Ce nombre n'a d'intérêt que si la mesure μ est *invariante* pour l'un des systèmes générateurs Φ, au sens où $\mu(\varphi A) = \mu(A)$ pour $\varphi \in \Phi$ et $A \subset \operatorname{dom} \varphi$ (le lecteur pourra vérifier que μ est alors invariante pour tout autre système générateur Φ', et confronter la démonstration à la question du changement de variable). On dit dans ce cas que R est de type II_1 (on suppose ici que presque toutes les classes de R sont infinies) et on note $C(R)$ son coût, relativement à cette mesure. Il s'agit par définition d'un invariant de R, représentant le 'volume minimal' (souvent infimal) de générateurs nécessaire pour l'engendrer. Si R est *ergodique*, i.e. si toute partie borélienne saturée de X est négligeable ou de complémentaire négligeable, il existe au plus une mesure de probabilité invariante équivalente à μ.

Damien Gaboriau a démontré le théorème fondamental suivant. Soit R une relation d'équivalence obtenue par action libre préservant la mesure de probabilité (i.e. de type II_1) du groupe libre F_n à n générateurs. Alors

$$C(R) = n.$$

Ce théorème permet par exemple de distinguer entre elles les relations d'équivalence obtenues par action libre de type II_1 de F_n pour différentes valeurs de n (voir [69]).

Une question ouverte importante de la théorie est la suivante (que l'on peut baptiser 'altenative de Tits' ou 'conjecture de von Neumann' par analogie avec la théorie des groupes) : est-ce vrai qu'une relation d'équivalence mesurée de type II_1 non moyennable contient une sous-relation arborable non moyennable ? La réponse est non en théorie des groupes. Les définitions de moyennabilité et arborabilité sont rappelées quelques lignes plus loin. Le théorème suivant, obtenu indépendamment par Alekos Kechris et Benjamin Miller, sera démontré au chapitre II de cette thèse. Une relation de coût > 1 est en particulier non moyennable.

Théorème 1. *Toute relation d'équivalence mesurée de type* II_1 *et de coût* > 1 *contient une sous-relation arborable non moyennable.*

2. - Des systèmes générateurs aux espaces quasi-périodiques. Un système générateur Φ est aussi appelé un *graphage* de R. La suspension de Φ au-dessus de X, i.e. le procédé consistant à coller une arêtes entre x et φx pour tout $x \in X$ et $\varphi \in \Phi$, munit en effet *mesurablement* chaque orbite d'une structure de graphe. Dire que Φ est un système générateur équivaut à dire que presque toutes les orbites de R sont connexes pour cette structure. Un graphage dont les orbites sont des arbres simpliciaux est appelé arborage, et une relation d'équivalence est arborable si elle admet un arborage ; une relation d'équivalence est moyennable si elle admet un arborage dont les orbites sont presque sûrement des droites (ou des segments).

De façon générale, tout graphe ne peut pas « apparaître » comme graphe d'une orbite de relation d'équivalence *ergodique* — ou du moins, comme graphe de l'orbite 'générique' : un tel graphe doit vérifier des conditions de quasi-périodicité.

La même chose est vraie plus généralement pour les espaces métriques. La description des **espaces quasi-périodiques**, au sens où nous l'entendons dans ce texte et qui correspond à l'idée intuitive de « pouvoir coller 'proprement' l'espace sur l'orbite générique d'une relation d'équivalence », est l'un des buts des chapitres II et III. Ils sont obtenus en « translatant des motifs » d'une *famille* $F = (F^x)_{x\in X}$, indexée par X, à l'aide d'une relation d'équivalence sur X. L'espace ainsi construit est un fibré Y au-dessus de X, qui possède F pour domaine fondamental. Chacune des fibres Y^x de ce fibré, que l'on peut voir comme « réalisation » de l'espace quasi-périodique Y considéré, est un assemblage de motifs de F. On emploiera le terme « quasi-périodique » seulement dans le cas où la relation d'équivalence sur X est ergodique, en accord avec l'idée suivante :

$$\text{Ergodicité} \Longrightarrow \text{Quasi-périodicité longitudinale.}$$

Définition. *Un* espace métrique quasi-périodique *est, étant donnée une relation d'équivalence mesurée R sur X, un foncteur covariant $Y : R \to \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces métriques (dont les morphismes sont les isométries) [ainsi à chaque $x \in X$ on associe un espace métrique $Y(x)$ et à chaque $(x, y) \in R$ une isométrie $Y(x, y)$:*

$Y(y) \to Y(x)$ vérifiant les propriétés algébriques naturelles], et qui vérifie les trois conditions suivantes,

- *$Y^X = \amalg_{x \in X} Y^x$ est un champ mesurable d'espaces métriques sur X, où l'on note $Y^x = Y(x)$.*
- *l'application $Y : R *_X Y^X \to Y^X$ qui à $(x,y) \in R$ et $u \in Y^y$ associe $Y(x,y)u \in Y^x$ est mesurable.*
- *il existe une partie borélienne $F \subset Y^X$ (domaine fondamental) tel que pour tout $x \in X$, $Y^x = \amalg_{y \sim x} Y(x,y)F^y$.*

Nous renvoyons ici à l'article d'Alain Connes [25]. (Notons que nous employons le mot « quasi-périodique » dans un sens relativement différent de celui utilisé dans la littérature, cf. les fonctions 'presque périodiques', 'faiblement presque périodiques' (WAP), et 'quasi-périodiques'.) Voici un premier exemple de condition devant satisfaire un espace métrique pour être quasi-périodique en ce sens.

Répétition des motifs. *Soit Y un espace métrique quasi-périodique et P un motif apparaissant dans Y. Alors Y contient une infinité de copies de P.*

Dans cet énoncé, on appelle *motif apparaissant dans Y* une partie compacte de la feuille générique, c'est-à-dire une partie borélienne $P \subset Y^X$ non négligeable, et compacte (ou vide) en restriction à presque toute réalisation. On dit que Y *contient une infinité de copies de P* si la réunion des translatés de P par la relation R intersecte presque toute réalisation selon une partie d'adhérence non compacte. Cette observation, à replacer dans son cadre d'origine, la théorie des feuilletages, résultera très simplement de l'hypothèse d'ergodicité (cf. chap. II).

3. - Différentes sortes de quasi-périodicité. Disons qu'un espace métrique Y est *périodique* Y s'il est muni d'une action libre d'un groupe d'isométries (dénombrable et infini) ayant un domaine fondamental. L'espace quotient par la relation de périodicité dans Y (i.e. par l'action du groupe) est un espace métrique usuel. De même que dans le cas périodique, lorsque l'on quotiente un espace *quasi-périodique* Y par la relation de quasi-périodicité, on obtient un espace standard Ω. Dans le cas quasi-périodique cependant, la structure métrique sur Ω provenant de Y est remplacée par une structure d'espace feuilleté, dont les feuilles sont isomorphes aux réalisations de Y.

L'ensemble Q des feuilles de Ω, i.e. l'ensemble $Q = \Omega/\sim$ obtenu en réduisant les feuilles de Ω à des points, est un exemple d'espace singulier. Cette opération de passage au quotient a pour effet d'oublier la géométrie des feuilles pour se concentrer sur la structure transverse de l'espace Ω. Ici Q peut aussi s'ecrire sous la forme $Q = X/R$, où R est la relation d'équivalence définissant la quasi-périodicité de Y (X est une *transversale* dans Ω, i.e. une partie borélienne rencontrant toutes ses feuilles selon une partie dénombrable). On appelle **structure mesurée singulière** sur un ensemble Q la donnée d'une présentation $Q = X/R$ de cet ensemble comme quotient d'une relation d'équivalence mesurée. L'ergodicité, par exemple, est (par définition) une propriété de $Q = X/R$ plutôt qu'une propriété de R. Deux présentations $Q = X/R$ et $Q = X'/R'$ définissent la même structure mesurée sur Q si et seulement si R et R' sont *stablement orbitalement équivalentes* (ou *stablement isomorphes*), au sens suivant.

Définition. *Deux relations d'équivalence boréliennes R et R' sur X et X' sont* isomorphes *s'il existe un isomorphisme borélien $\rho : X \to X'$ tel que $x \sim y$ si et seulement si $\rho(x) \sim' \rho(y)$ pour tout $x, y \in X$. On dit que R et R' sont* stablement isomorphes *s'il existe deux parties boréliennes $\Omega \subset X$ et $\Omega' \subset X'$ rencontrant respectivement toutes les classes de R et R', telles que les relations restreintes $R_{|\Omega}$ et $R'_{|\Omega'}$ soient isomorphes.*

L'idée qui émerge, et que nous adopterons pour principe dans ce texte, est qu'un espace mesuré singulier *ergodique* Q est un concept de quasi-périodicité. En d'autres termes : il y a autant de sortes de quasi-périodicité que d'espaces singuliers, i.e. de classes d'isomorphisme stable de relations d'équivalence. Ceci conduit par exemple à utiliser des expressions du type « Soit Y un espace métrique Q-quasi-périodique ». Le cas non ergodique correspond à des mélanges de quasi-périodicité.

On peut se faire d'un espace quasi-périodique en au sens de la définition ci-dessus l'image d'un espace quasi-périodique au sens intuitif (bien que ce soit un fibré sur X), portant ainsi résolument l'accent dans la direction longitudinale. L'hypothèse d'ergodicité signifie précisément que $L^\infty(Q) = \mathbf{C} = L^\infty(*)$ (pour la structure négligeable quotient), i.e. qu'il n'y a du point de vue de μ qu'un seul point dans Q. Ce point est la réalisation « fondamentale », ou « générique », de Y (celle que l'on se représente intuitivement).

4. - Espaces Q-quasi-périodiques avec Q fortement ergodique. Nous renforçons maintenant l'ergodicité et étudions les contraintes imposées sur la quasi-périodicité.

Considérons d'abord une notion classique pour les relations d'équivalence (provenant de la théorie des algèbres d'opérateurs) appelée **ergodicité forte**. Elle est étudiée dans ce texte à partir du chapitre II. Une relation d'équivalence ergodique R sur X est fortement ergodique s'il n'existe pas de parties boréliennes 'asymptotiquement invariantes' non triviales dans X au sens suivant : il n'existe pas de suite $(A_n)_n$ de parties boréliennes de X de mesure $\mu(A_n) = 1/2$ telle que pour tout automorphisme φ de R, on ait

$$\mu(A_n \Delta \varphi A_n) \to_n 0.$$

L'ergodicité forte est une propriété d'espace mesuré singulier (invariance par équivalence orbitale stable) : bien qu'il y ait en général de nombreuses « cartes » $X \twoheadrightarrow Q$ définissant des structures mesurés équivalentes sur Q, elle ne dépend pas de la carte choisie, et définit ainsi une propriété de Q. La question de son interprétation en terme de quasi-périodicité est résolue par le théorème suivant, démontré au chapitre III.

Théorème 2. *Un espace singulier ergodique de type fini est fortement ergodique si et seulement s'il est concentré.*

Pour comprendre le lien entre ergodicité forte et quasi-périodicité, il faut préciser la signification du terme 'concentration' figurant dans l'énoncé : il s'agit de **concentration de la mesure**. Ce phénomène, lui aussi relativement classique, a été découvert par Paul Lévy. Sa première manifestation en est la loi des grands nombres. Il concerne habituellement les (produits et familles d') espaces métriques usuels (munis d'une mesure), mais sa pertinence dans le cadre feuilleté a été récemment mise en avant par Mikhael Gromov (voir les références dans la première partie du chapitre III). La propriété de concentration de la mesure repose dans ce cas, comme dans le cas classique, sur la notion de structures métriques-mesurés. Le rôle principal étant ici tenu par les **espaces métriques mesurés quasi-périodiques** associés à un espace mesuré singulier Q, tels que décrits au chapitre III (espaces métriques quasi-périodiques munis d'un covolume). Dans ce cadre le *lemme de Rohklin*, par exemple, s'interprète comme un résultat de concentration (cf. chap. III).

Définition. *On dit qu'un espace métrique-mesuré quasi-périodique* (Y, d, λ) *[d est la métrique,* λ *est le covolume] est* concentré *s'il existe une fonction* $c :]0, \infty]^2 \to \mathbf{R}_+$ *telle que pour toutes parties boréliennes quasi-périodiques non négligeables* $A, B \subset Y$*, on a*

$$d(A, B) \leqslant c(\lambda(A), \lambda(B)).$$

Le théorème suivant est démontré dans le cas des graphes quasi-périodiques dans la première partie du chap. III, et étendu à une classe plus large d'espaces métriques, dits à géométrie essentiellement uniformément localement finie (u.l.f.), dans la seconde partie de ce chapitre.

Précisions sur le théorème 2. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Alors Q est fortement ergodique si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée,*

- *il existe un espace métrique-mesuré Q-quasi-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. concentré,*
- *tout espace métrique-mesuré Q-quasi-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. est concentré.*

Ce résultat s'applique directement, par exemple, en théorie des feuilletages. Les feuilles d'un feuilletage ergodique sont des exemples interessants de variétés quasi-périodiques. La présence additionnelle d'une structure transverse lisse (donnée par la variété ambiante) permet également de les voir comme « modèles lisses » de variétés quasi-périodiques — comme on peut par exemple trouver des modèles topologiques (le plus souvent des espaces de Cantor) de systèmes dynamiques mesurés. Il serait intéressant, par exemple, d'étudier les restrictions que peut imposer une variété quasi-périodique donnée sur ses modèles lisses (i.e., quand est-ce que tel type de variété quasi-périodique provient de tel type de feuilletage).

Corollaire 3. *Soit M une variété compacte et F un feuilletage orientable de classe C^r sur M, $r \geqslant 1$. Pour toute mesure transverse fortement ergodique et toute métrique riemannienne le long des feuilles de F, les variétés riemanniennes quasi-périodiques constituées des feuilles de F sont concentrées pour le covolume, supposé fini, défini par la mesure transverse.*

5. - Diversité des espaces singuliers. Un espace singulier est un quotient d'espace usuel par une relation d'équivalence. Selon la nature de cette relation d'équivalence, mesurée, topologique, etc., on obtient un espace singulier mesuré, topologique, etc. Il existe de nombreux espaces singuliers « différents ». Par exemple, le quotient du cercle $\mathbf{S}^1$ par une rotation d'angle irrationnel est un espace singulier, ou le quotient de toute relation d'équivalence mesurée. Dans de nombreux cas l'espace singulier est donné a priori : c'est cet espace que l'on veut étudier, et non sa « présentation » comme quotient de relation d'équivalence.

Les exemples principaux d'espaces singuliers qui m'ont intéressé au cours de ma thèse, outre les espaces de feuilles, sont d'une part **l'espace des groupes de type fini** (qui est célèbre, par exemple, pour permettre de montrer l'existence de groupes infinis de torsion, la généricité de la propriété T,...), et d'autre part **l'espace des immeubles triangulaires**, i.e. des immeubles de Bruhat-Tits de type $\tilde{A}_2$ (que nous avons introduit en collaboration avec Sylvain Barré). Ils sont tous deux munis d'une structure topologique singulière. La recherche de structures mesurées (e.g. ergodiques, i.e. de structures quasi-périodiques) sur ces espaces est une question naturelle que nous n'abordons pas dans ce texte.

Dans la première partie du chapitre I, nous démontrons le théorème suivant. Nous renvoyons à cette première partie et ses références pour la définition précise de la topologie naturelle sur l'ensemble des groupes de type fini.

Théorème 4. *Soit Γ_n une suite de groupes de type fini convergeant vers un groupe Γ dans l'espace des groupes de type fini. Alors*

$$\overline{\lim}\ \beta_1(\Gamma_n) \leqslant \beta_1(\Gamma).$$

En d'autres termes la fonction premier nombre de Betti ℓ^2 est semi-continue supérieurement sur l'ensemble des groupes de type fini à isomorphisme près, muni de la topologie quotient.

Dans l'énoncé, $\beta_1(\Gamma)$ est un nombre réel positif appelé premier nombre de Betti ℓ^2 de Γ. C'est un invariant d'isomorphisme qui a été défini (pour un groupe dénombrable quelconque) par Cheeger-Gromov (voir le chapitre I). Il est nul pour les groupes de Kazhdan, ainsi que les groupes moyennables. Il est non nul pour les groupes libres (non moyennables), ainsi que pour les limites de groupes libres (groupes limites de Sela).

Passons aux immeubles triangulaires. Un immeuble affine de rang n est (voir [16]) un polyèdre métrique de dimension n dont l'une des propriétés les plus importantes est de contenir de nombreuses copies isométriques de $\mathbf{R}^n$. Les immeubles triangulaires sont des immeubles affines de rang 2. Les copies de $\mathbf{R}^2$ qu'ils contiennent sont pavées de triangles équilatéraux. Nous démontrons dans la deuxième partie du chapitre I le résultat suivant, en collaboration avec Sylvain Barré, qui permet d'introduire pour chaque q de la forme $q = p^n$ où p est un nombre premier, l'espace singulier des immeubles triangulaires d'ordre q où, dans un immeuble triangulaire, le nombre de faces attachées à chaque arête est constant et noté $q + 1$ (voir [8] pour la preuve de ce théorème dans le cas $q = 2$).

Théorème 5. *Pour tout $q \geqslant 2$ de la forme $q = p^n$ où p est un nombre premier, il existe une infinité non dénombrable d'immeubles de Bruhat-Tits de type $\tilde{A}_2$ et d'ordre q.*

La démonstration de ce théorème s'appuie sur une étude géométrique des immeubles triangulaires, par exemple sur le lemme suivant (voir le chapitre I).

Lemme géométrique. *On peut toujours plonger deux boules, de deux immeubles triangulaires distincts, dans un même immeuble triangulaire.*

Pour chaque $q = p^n$, ces immeubles triangulaires peuvent alors être rassemblés en une lamination sur un espace compact, présentant l'ensemble des immeubles triangulaires d'ordre q comme quotient définissable d'espace compact.

6. - Marches aléatoires sur les espaces quasi-périodiques. Les marches aléatoires considérées dans ce texte sont définies directement sur l'espace X. Nous adopterons le point de vue équivariant des marches aléatoires sur des espaces quasi-périodiques, dans un article en préparation (intitulé « Harmonic analysis from quasi-periodic domains »).

Soit X un espace borélien standard. Une **marche aléatoire sur** X est la donnée, pour chaque $x \in X$, d'une mesure de probabilité $\nu : x \mapsto \nu_x \in \mathrm{Prob}(X)$, que l'on suppose à support fini (pour simplifier). On note $\nu(x \to y) = \nu_x(y)$ la probabilité d'aller de x à y en un pas, et $[x]$ la trajectoire de x, i.e. l'ensemble des points $y \in X$ atteints après un nombre fini de pas débutant en x. On suppose que $\nu(x \to y) > 0 \iff \nu(y \to x) > 0$. Il est naturel pour en étudier le comportement de regrouper les trajectoires de ν, i.e. de considérer la relation d'équivalence R sur X dont les classes sont ces trajectoires. On suppose que ν est borélienne, i.e. que son support $K = \{(x, y) \mid \nu(x \to y) > 0\}$ est une partie borélienne de $X \times X$ sur laquelle $\nu : K \to]0, 1]$ est une fonction borélienne. Dans ce cas R est une relation d'équivalence borélienne (i.e. est une partie borélienne de $X \times X$). En fait on se concentre plus volontiers sur la 'trajectoire générique' de ν en se donnant une mesure de probabilité quasi-invariante μ sur l'espace X. Alors R est une relation d'équivalence mesurée sur X.

On se propose d'étudier dans quelle mesure le comportement de ν reflète les propriétés algébriques de R, et inversement.

Il est intéressant ici de perturber la marche aléatoire sur R en une marche sur diverses représentations de R. Dans ce texte on s'interesse aux représentations unitaires π de R sur un champ H d'espaces de Hilbert. Une *représentation unitaire* π de R sur un champ mesurable H d'espace de Hilbert de base X est une famille $\{\pi(x,y)\}_{(x,y)}$, indexée par R, d'opérateurs unitaires

$$\pi(x,y) : H^y \to H^x$$

satisfaisant à des conditions naturelles de compositions (cocycle) et mesurabilité. Par exemple la *représentation régulière* λ de R,

$$\lambda(x,y) : \ell^2(R^y, \mathfrak{h}^y) \to \ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$$

où $R^x = \{(x,y) \in R\}$ et $\mathfrak{h}^x$ est la mesure de décompte sur R^x, est définie par

$$\lambda(x,y)f(x,z) = f(y,z)$$

pour toute fonction mesurable f sur R dont les fibres sont de carré intégrable. La *représentation triviale* de R, sur le champ $X \times \mathbf{C}$, est la fonction constante qui à $(x,y) \in R$ associe $1 \in \mathbf{C}$.

À une marche aléatoire et une représentation unitaire est associée une matrice $D_{\nu,\pi}$ définie par l'expression

$$(D_{\nu,\pi}\xi)^x = \sum_{y\sim x} \nu(x \to y)\pi(x,y)\xi^y.$$

On suppose que ν est symétrique relativement à μ, de sorte que $D_{\nu,\pi}$ détermine un opérateur hermitien, encore noté $D_{\nu,\pi}$, sur l'espace de Hilbert $L^2(X,H)$ des sections de carré intégrable du fibré H. Cet opérateur, appelé diffusion à coefficients dans π, est borné de norme $\leqslant 1$. On dit qu'il possède un trou spectral au voisinage de 1 si la valeur 1 est isolée dans son spectre (ou n'est pas une valeur spectrale).

Dans la suite nous serons intéressés par l'étude de la propriété T de Kazhdan, et la façon dont cette propriété se manifeste au niveau des opérateurs $D_{\nu,\pi}$ (caractérisation spectrale de la propriété T). Les techniques de démonstration utilisées par Connes-Feldman-Weiss dans [28] auront une grande importance dans cette étude. Ces techniques permettent également d'obtenir deux autres caractérisations spectrales (voir le chapitre IV). La première concerne la moyennabilité, et constitue l'analogue du théorème de Kesten caractérisant la moyennabilité des groupes dénombrables.

Théorème 6. *Une relation d'équivalence ergodique R est moyennable si, et seulement si, pour toute marche aléatoire symétrique bornée sur toute sous-relation de R, l'opérateur de diffusion à coefficients réguliers associé n'a pas de trou spectral.*

La seconde caractérisation concerne l'ergodicité forte.

Théorème 7. *Une relation d'équivalence ergodique R est fortement ergodique si, et seulement si, il existe une marche aléatoire symétrique bornée sur une sous-relation de R telle que l'opérateur de diffusion à coefficients triviaux associé possède un trou spectral. Si de plus elle préserve une mesure de probabilité et elle est de type fini, alors elle est fortement ergodique si, et seulement si, il existe une marche aléatoire symétrique bornée sur R telle que l'opérateur de diffusion à coefficients trivaux associé possède un trou spectral.*

7. - La propriété T de Kazhdan dans le cadre mesuré. La **propriété T de Kazhdan** dans le cadre des relations d'équivalence mesurées a été introduite par Calvin Moore et Robert Zimmer. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X,μ). On dit qu'une représentation π de R sur un champ hilbertien H de base X *contient presque des champs invariants* s'il existe une suite ξ_n de champs de vecteurs tels que $||\xi_n^x|| = 1$ pour presque tout $x \in X$, une suite (K_n) croissante exhaustive de R, et une suite (ε_n) de nombres réels tendant vers 0, telles que

$$||\pi(x,y)\xi_n^y - \xi_n^x|| \leqslant \varepsilon_n, \quad \forall (x,y) \in K_n.$$

On dit qu'un champ de vecteurs ξ est invariant si $\pi(x,y)\xi^y = \xi^x$ pour presque tout $(x,y) \in R$.

Définition. *On dit que R* possède la propriété T de Kazhdan *si toute représentation unitaire ayant presque des champs invariants possède un champ invariant ξ tel que $||\xi^x|| = 1$ pour presque tout $x \in X$.*

Le théorème suivant est démontré au chapitre IV.

Théorème 8. *Une relation d'équivalence ergodique R possède la propriété T de Kazhdan si, et seulement si, il existe une marche aléatoire symétrique ν sur une relation stablement isomorphe à R, dont les diffusions à coefficients unitaires possèdent un trou spectral au voisinage de 1.*

L'énoncé analogue pour les groupes dénombrables a été observé récemment par Gromov, pour lequel nous renvoyons à l'article d'Étienne Ghys [42]. Les arguments nécessaires dans ce cadre mesuré ne se limitent cependant pas à ceux utilisés pour les groupes discrets (voir le chapitre IV). Par exemple, contrairement au cas des groupes, *toute marche aléatoire ν ne convient pas pour obtenir ce critère spectral.* La première étape dans la démonstration est d'obtenir un critère suffisant sur les marches aléatoire permetant une telle caractérisation spectrale. Ce critère repose notamment sur le théorème suivant, démontré dans le chapitre III (première partie).

Théorème 9. *Un espace singulier ergodique de type fini Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout espace métrique Q-périodique à géométrie essentiellement uniformément localement finie possède des suites de Følner évanescentes.*

D'après le théorème de Jones-Schmidt, l'ergodicité forte équivaut à l'absence de quotient moyennable, et le théorème 9 est la troisième caractérisation concernant l'ergodicité forte démontrée dans cette thèse (cf. th. 2 et th. 7). Cette caractérisation, ne concernant que la géométrie (quasi-périodique) « évanescente », est essentiellement différente celle du théorème 2, en termes de concentration de la mesure. Les suites de Følner considérées ici, et définies au chapitre IV, sont sujettes à des comportements isopérimétriques similaires aux comportements des suites de Følner classiques. Cependant, on ne fait ici aucune hypothèse de 'finitude' sur ces suites (pas plus que de 'cofinitude' modulo quasi-périodicité).

Aussi, pour en obtenir une caractérisation spectrale, il fut nécessaire de mener une étude détaillée de la propriété T de Kazhdan dans le cadre mesuré. Pour une présentation des résultats de cette étude, nous renvoyons à l'introduction du chapitre IV.

8. - Immeubles quasi-périodiques et propriété T de Kazhdan. Comme expliqué dans [42], les critères spectraux ont permis de donner une nouvelle preuve du **'critère $\lambda_1 > 1/2$'** pour la propriété T (cf. [111]). Le résultat suivant est l'exact analogue de ce critère dans le cadre mesuré (voir le chapitre IV). Rappelons que la constante $\lambda_1(L)$ associée à un graphe fini L est la première valeur propre non nulle du Laplacien sur ce graphe fini.

Théorème 10. *Soit Y un complexe simplicial Q-quasi-périodique de type* II_1*, de dimension 2, et à géométrie essentiellement u.l.f. On suppose que presque tout link L de Σ est connexe et vérifie $\lambda_1(L) \geqslant \lambda$ pour un nombre réel $\lambda > 1/2$.*

Alors Q possède la propriété T de Kazhdan. De plus, Y ne contient pas de suites de Følner évanescentes.

Les exemples les plus populaires de complexes simpliciaux vérifiant le critère $\lambda_1 > 1/2$ sont les **immeubles triangulaires,** ou immeubles de Bruhat-Tits de type $\tilde{A}_2$. Un théorème remarquable de Jacques Tits affirme que les immeubles affines analogues de rang supérieur (i.e. de type $\tilde{A}_n$, $n > 2$) sont *classifiables.* Ceci signifie qu'ils sont tous obtenus à partir d'un groupe algébrique sur un corps local (non nécessairement commutatif) muni d'une valuation, et en particulier ils sont homogènes (cocompacts). Pour $n = 2$, la situation est radicalement différente. Nous avons déjà vu qu'il existe une infinité non dénombrable d'immeubles triangulaires. Ils ne peuvent donc pas tous être associés à un groupe algébrique. Et effectivement, Tits, Ronan, etc., ont découvert de nombreux immeubles triangulaires non associés à un couple (corps local, valuation). Le théorème suivant est le résultat principal de la seconde partie du chapitre I.

Théorème 11. *Pour tout $q \geqslant 2$ de la forme $q = p^n$ où p est un nombre premier, le groupe de tous les automorphismes d'un immeubles de Bruhat-Tits* générique *de type $\tilde{A}_2$ et d'ordre q est trivial.*

En particulier, un immeuble triangulaire générique se situe à l'opposé des immeubles associés aux groupes algébriques sur des corps locaux. Dans le théorème, une famille d'immeubles est dite générique si elle est G_δ-dense pour la topologie singulière.

Nous travaillons actuellement avec Sylvain à l'existence de mesures ergodiques non triviales sur l'espace des immeubles triangulaires, pour lesquelles le théorème 10 pourrait s'appliquer.

Références

[12] Bekka B., de la Harpe P., Valette A., « Kazhdan's Property (T) for locally compact groups », en préparation.

[16] Brown K.S., « Five lectures on buildings », Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 254–295, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, *1991*.

[25] Connes A., « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs, Lecture Notes in Math., 725, 19-143, *1979*.

[26] Connes A., « Noncommutative geometry », Academic Press, Inc., San Diego, CA, *1994*.

[28] Connes A., Feldman J., Weiss B., « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1, 431-450, *1981*.

[38] Gaboriau D., « Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes », Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95, 93–150, *2002*.

[41] Ghys É., « Topologie des feuilles génériques », Ann. of Math., 141, 387-422, *1995*.

[42] Ghys É., « Groupes aléatoires [d'après Misha Gromov,...] », Séminaire Bourbaki, Exp. No. 916, *2003*.

[49] Gromov M., « Random walk in random groups », Geom. Funct. Anal. 13, no. 1, 73–146, *2003*.

[69] Kechris A., Miller B., « Topics in orbit equivalence », Lecture Notes in Mathematics, 1852, Springer-Verlag, Berlin, *2004*.

[73] Ledoux M., « The concentration of measure phenomenon », Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, *2001*.

Une bibliographie plus complète figure à la fin de ce texte. La numérotation utilisée est celle de cette bibliographie. Quatre articles ont été extraits de cette thèse :

[aut] « Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble triangulaire générique », seconde partie du chap. I.

[ts] « Sur la théorie spectrale des relations d'équivalence mesurées », chap. IV.

[ef] « Espaces mesurés singuliers fortement ergodiques », première partie du chap. III.

[sc] « Semi-continuity of the first ℓ^2-Betti number on the space of finitely generated groups », première partie du chap. I.

Ils sont classés par ordre (inverse) d'écriture. Le dernier écrit, [aut], est un travail en collaboration avec Sylvain Barré.

Table des matières

CHAPITRE I. ESPACES SINGULIERS

—

Sommairement, les *espaces singuliers*, tels que l'espace des groupes de type fini à isomorphisme près, sont des espaces non standard. Le but de ce premier chapitre est d'illustrer ce concept sur des exemples. En particulier, les espaces de feuilles de feuilletages, l'espace des groupes de type fini, et l'espace des immeubles triangulaires ; concernant la nature générale des espaces singuliers, nous nous limiterons à la brêve esquisse qui suit.

Nous appellerons espace singulier un ensemble, au sens usuel du terme et ayant le cardinal du continu, dont la caractéristique principale est la conjonction de deux propriétés antagonistes. L'une reflète la volonté de considérer ses éléments comme des points et par là-même d'étudier les relations et interactions mutuelles entre ces points : en d'autres termes, de considérer cet ensemble comme un espace. L'autre signifie que ces points, néanmoins, contiennent visiblement trop d'informations pour être véritablement considérés comme des points ; un tel espace est alors déclaré singulier dans la mesure où les théories classiques qui admettent pour ingrédient de base un espace — par exemple, théorie de la mesure, topologie, géométrie — présupposent implicitement que les points sont des « atomes » ne contenant aucune information, et ne sont pas directement adaptées à son étude. Dans ce texte, on réserve le terme 'espace singulier' aux espaces non standard « les plus proches » des espaces standard, dont les points ne contiennent pas trop d'informations : on peut très bien, par exemple, se restreindre à la classe des ensembles d'espaces, i.e. des ensembles dont les points sont des espaces au sens usuel du terme (e.g. des espaces métriques). Évidemment, le point de vue reste celui des espaces singuliers, ses points doivent être autant que possible considérés comme des points. En particulier la notion d'isomorphisme entre espaces singuliers (qu'elle soit de nature mesurée, topologique, différentielle, etc., voir ci-dessous) ne doit pas 'retenir' les propriétés géométriques que peuvent posséder leurs points.

La terminologie est empruntée à A. Connes [25] qui décrivait ainsi les espaces de feuilles de feuilletages (1979). Par la suite il donna de nombreux autres exemples d'espaces singuliers, voir e.g. [27], et développa le point de vue analytique (C^*-algébrique), plus général, de la géométrie non commutative [26].

La spécificité des espaces singuliers réside dans le fait qu'il est possible par une opération élémentaire, dite de *désingularisation*, de ramener leur étude à des techniques standard en *les présentant comme quotients* d'espaces usuels (condition de 'proximité' aux espaces standard). Par exemple, un feuilletage sur une variété désingularise l'espace de ses feuilles. Ceci permet de révéler la nature *dynamique intrinsèque* de ces espaces en effectuant un codage des interactions entre leurs points. Un espace singulier est muni d'une structure borélienne, mesurée, topologique, différentielle, etc., selon la désingularisation qui le définit. Le chapitre III, par exemple, donne un sens précis au concept d'espace mesuré singulier à l'aide de la théorie de la mesure de Lebesgue.

—

Permière partie — Semi-continuity of the first ℓ^2-Betti number on the space of finitely generated groups

—

Abstract

To each finitely generated group is associated a sequence $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ of non negative real numbers, its ℓ^2-Betti numbers. On the other hand, the set of finitely generated groups *desingularizes* into a usual topological space, the space MG of finitely generated *marked* groups. It is proved in this note that if a sequence $\Gamma_n \in MG$ of marked groups converges to a group Γ, then $\overline{\lim}\ \beta_1(\Gamma_n) \leq \beta_1(\Gamma)$.

1 Introduction

Two countable groups Γ and Λ are said to be *measure equivalent* if they admit commuting and essentially free actions on some (infinite) measured space, which both preserve the measure and have fundamental domain of finite volume. Two lattices in a same Lie group are measure equivalent as they act by left and right multiplication on this Lie group. All infinite amenable groups are measure equivalent by a deep theorem of Ornstein-Weiss. On the other hand Kazhdan's Property T groups are never measure equivalent to non property T groups, in particular to infinite amenable groups.

The ℓ^2-*Betti numbers* of a countable group Γ are non negative real numbers $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ coming from ℓ^2-homology as Γ-dimensions. Yet being non trivial, they enjoy remarkable stability features due to their invariance under rough kind of homotopies. The theory originated with the work of Atiyah [5] on the index theory on non compact (periodic) manifolds, and then ramified into several directions. It came to geometric group theory after the homotopy invariance results of Dodziuk [31] and the work of Cheeger-Gromov [22]. Among the important recent results about ℓ^2-Betti numbers in group theory is Gaboriau's proportionality theorem asserting their invariance under measure equivalence, up to a multiplicative constant [38] (where the measure equivalence can be considered as an homotopy).

It is a theorem of Cheeger-Gromov that all these numbers are zero for any infinite amenable group. For the (1-dimensional) free group on n letters, the β_i are also zero for $i \geq 2$, but $\beta_1 = n-1$ as it is easy to see (we will forget here about β_0 which is always zero except in the trivial case of finite groups). This leads to the somewhat popular $\beta_1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})) = 1/12$ thanks to their multiplicative behavior under finite index extension. For property T groups one has $\beta_1 = 0$ and more generally, for non amenable groups, $\beta_1 = 0 \Longleftrightarrow H^1(\Gamma, \lambda_\Gamma) = 0$ where $H^1(\Gamma, \lambda_\Gamma)$ is the first cohomology group of Γ with coefficients in the left regular representation [13].

Two short and interesting (geometric) surveys on ℓ^2-Betti numbers can be found in [46, 87]. The reference treatise for the detailed (and more algebraic) story is [76].

A *marked group* is a countable group Γ together with a given generating set $S \subset \Gamma$. The marking S turns Γ into a connected (labeled) graph by putting an edge between two elements γ and $\gamma' \in \Gamma$ if $\gamma^{-1}\gamma' \in S$. This graph is called the *Cayley graph* of the marked group Γ_S. For instance this pictures the free group on n letters as a tree of valence $2n$.

Let Γ_S and $\Gamma'_{S'}$ be marked groups. We put $d(\Gamma_S, \Gamma'_{S'}) = e^{-n}$ where n is the largest integer such that the balls of radius n in the Cayley graphs of Γ_S and $\Gamma'_{S'}$ are simplicially isomorphic (with respect to a isomorphism respecting the labelings). This function is an ultrametric distance that gives a separated topology on the set MG of marked groups. Gromov showed that Baire's property mixed with hyperbolicity in MG lead to highly surprising results in group theory, concerning particularly the (generic) existence of finitely generated groups with unexpected properties.

Our aim here is to prove the following,

Théorème 12. *Let $(\Gamma^n_{S^n})_n$ be a sequence of marked groups in MG converging to a marked group Γ_S. Then*
$$\overline{\lim}\ \beta_1(\Gamma^n) \leq \beta_1(\Gamma).$$

Obviously the inequality can be strict. For instance the (residually finite) free group on 2 letters has $\beta_1 = 1$ and can be approximated in MG by finite groups whose $\beta_1 = 0$. It is actually a result of Gromov that property T groups are dense in the adherence of (some) hyperbolic groups in MG, so that each such a group can be approximated by groups with $\beta_1 = 0$.

Let us observe that it was not known before Gaboriau's proportionality theorem that there are uncountably many classes of measure equivalence in MG. These classes are distinguished by their sequences of ℓ^2-Betti numbers.

The space of marked groups has been studied in details by Champetier in [20]. Recently it has found new applications by putting into a topological framework the study of the so-called 'limit groups' of Sela : the limit groups are those which appear as limits of free groups. We refer to [21], where a detailed presentation of the space MG is also given. Note that our result implies that a limit of free groups in MG has its first ℓ^2-Betti number greater or equal to 1 (when non abelian). Here too, the inequality can be strict as one can realize the free group on k letters as a limit of free groups on 2 letters.

This work is taken from the beginning of my Ph. D. thesis. I would like to thank my advisor Damien Gaboriau.

2 Preliminary

Let Γ be a countable group.

1. The Murray-von Neumann dimension. Consider the Hilbert space

$$\ell^2(\Gamma)$$

of square-integrable functions on Γ, where Γ acts by left translations (the left regular representation of Γ). It is a remarkable result of Murray and von Neumann that if Γ has infinite conjugacy classes, then the Γ-*invariant Hilbert subspaces* of $\ell^2(\Gamma)$ are classified up to equivariant isometry by a real number in $[0,1]$, *their dimension.* More precisely for a closed and Γ-invariant subspace H of $\ell^2(\Gamma)$ the dimension is given by the explicit formula

$$\dim_\Gamma H = \langle P_H \delta_e \mid \delta_e \rangle$$

where P_H is the orthogonal projection onto H and δ_e is the characteristic function of the identity in Γ, *and* the function $H \mapsto \dim_\Gamma H$, called the Γ-dimension function, is the *unique* one (up to normalization) satisfying the usual properties of a dimension function. The map $\mathrm{Tr}_\Gamma(P_H) = \langle P_H \delta_e \mid \delta_e \rangle$ on Γ-equivariant projections in $B(\ell^2(\Gamma))$ extends to the unique normalized trace on the whole (von Neumann) algebra of Γ-equivariant operators.

The same is true for subspaces of any multiple $\oplus_0^N \ell^2(\Gamma)$ of the regular representation, where the dimension

$$\dim_\Gamma H = \sum_{i=0}^{N} \langle P_H \delta_e^i \mid \delta_e^i \rangle$$

now ranges in $[0,N]$ with $N \in \{1,2,3,\ldots,\infty\}$. For non infinite conjugacy classes groups one also take this formula as the definition of the dimension.

We refer to [72] for more details.

2. The first ℓ^2-Betti number. Let Y be a locally finite oriented 2-dimensional cellular complex. For $i = 0,1,2$ denote by $\mathbf{C}[Y^i]$ the algebras of functions with finite support on the i-cells of Y and complete them to the ℓ^2 cochains spaces $\ell^2(Y^i)$ for the standard $||c||^2 = \sum_{\sigma\ i-\mathrm{cells}} |c(\sigma)|^2$ hilbertian norm. The natural boundary operators

$$\partial_i : \mathbf{C}[Y^i] \to \mathbf{C}[Y^{i-1}]$$

coming from the 'attaching cells maps' extend to bounded operators $\partial_i^{(2)} : \ell^2(Y^i) \to \ell^2(Y^{i-1})$ *if* Y is uniformly locally finite (which means that the number of cells incident to any point is uniformly bounded). We define the *first reduced ℓ^2-homology space* of Y as the quotient space $\overline{H}_1^{(2)}(Y) = \ker \partial_1^{(2)} / \overline{\mathrm{Im}\, \partial_2^{(2)}}$. It is naturally isometric to the orthogonal complement $\mathcal{H}_1^{(2)}(Y)$ of $\overline{\mathrm{Im}\, \partial_2^{(2)}}$ in $\ker \partial_1^{(2)}$. The elements of $\mathcal{H}_1^{(2)}(Y)$ are called the ℓ^2 harmonic 1-cochains on Y.

Let Γ be a finitely presented group. Attaching the relations of a finite presentation to the Cayley graph leads to a *Cayley complex* of Γ. It is a simply connected cellular complex Y of dimension 2 on which Γ acts freely, so that the quotient $X = Y/\Gamma$ is a finite polyhedron of fundamental group Γ. The action of Γ on Y being free, $\ell^2(Y^i)$ is equivalent to a multiple $\oplus_1^{\alpha_i} \ell^2(\Gamma)$ of the regular representation, where α_i is the number of orbits of the action of Γ on the i-cells. The subspace $\mathcal{H}_1^{(2)}(Y)$ of $\ell^2(Y^1)$ is Γ-invariant and equivariantly isometric to $\overline{H}_1^2(Y)$. Moreover it does actually not depend on the choice of the presentation, up to equivariant isometry (and nor on the choice of any simply connected Y with free cocompact action of Γ for that matter [31]). The first ℓ^2-Betti number of Γ is then defined by $\beta_1(\Gamma) = \dim_\Gamma \overline{H}_1^2(Y)$ where Y is associated to any finite presentation.

This definition has been extended to arbitrary countable groups by Cheeger-Gromov [22]. This is done by using the following results. Let Y be an oriented 2-dimensional cellular complex on which the countable group Γ acts freely. Given a Γ-invariant and cocompact exhaustion $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y$ of Y let

$$J_{m,n} : \overline{H}_1^{(2)}(Y_m) \to \overline{H}_1^{(2)}(Y_n)$$

be the morphism induced in homology by the inclusion maps $Y_m \subset Y_n$ for $m \leq n$. Then the number

$$\sup_{m\geq 0} \inf_{n\geq m} \dim_\Gamma \overline{\operatorname{Im} J_{m,n}}$$

is actually independent of the chosen cocompact and Γ-invariant exhaustion $(Y_n)_n$ of Y and is called the first ℓ^2-Betti number of Y. Let's denote it by $\beta_1(Y, \Gamma)$. The point of the definition is that this number is still invariant under equivariant homotopies of Y (and coincide with the previous $\beta_1(Y, \Gamma) = \dim_\Gamma \overline{H}_1^2(Y)$ in the cocompact case). So one defines $\beta_1(\Gamma)$ as $\beta_1(Y, \Gamma)$ for any simply connected Y on which Γ acts freely (for example the Cayley complex coming from a presentation of Γ). Note that this generalization was crucial in the equivalence relation case as shown in [38].

The other ℓ^2-Betti numbers are defined exactly in the same way and will not be used in this article.

3. The space of finitely generated groups. We refer here to the papers of Champetier [20] and Champetier-Guirardel [21]. Let's briefly summarize the context. A *marked group* is a finitely generated group and an finite ordered system of generators $S \subset \Gamma$. Let's consider the set MG' of finitely generated marked groups. If Γ_S and $\Gamma'_{S'}$ are two marked groups one puts $d(\Gamma_S, \Gamma'_{S'}) = e^{-r}$ where r is the largest integer for which one can find a simplicial isomorphism respecting the edge labelings between the balls of radius r in the Cayley graphs of Γ_S and $\Gamma'_{S'}$. Thus such groups have exactly the same relations of length $\leq r$. The map d defines an ultrametric distance on the quotient space $MG = MG'/\{d = 0\}$ of marked groups up to relabeling the edges (that is, changing the generating set while keeping the same relations), which is naturally called *the space of marked groups*. This gives a "singular topology" on the set of finitely generated groups up to isomorphism.

3 The rate of relations of a finitely generated group

Let Γ be a finitely generated group. In order to prove the semi-continuity of β_1 on MG it will be more convenient to deal with the "quantity of relations" associated to finite generating sets S of Γ rather than the dimension of the ℓ^2-harmonic cochains of a Cayley complex. The easy link between the two is as follows.

Let Γ_S be a marked group and Y be the associated Cayley graph (from Γ_S to Y one just forgets the labeling, keeping the orientation). The family of 1-dimensional cycles in Y is stable under the action of Γ and leads to the Γ-invariant vector subspace

$$Z_1(Y) = \ker \partial_1$$

of $\mathbf{C}[Y^1]$ (complex functions with finite support on Y^1). The closure of $Z_1(S)$ in $\ell^2(Y^1)$ for the norm topology is a Γ-invariant subspace and has a dimension

$$\tau(\Gamma_S) = \dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)}.$$

We call this dimension the *rate of relations* of the marked group Γ_S. The *rate of relations of* Γ is then defined to be the infimum $\tau(\Gamma) = \inf_S \tau(\Gamma_S)$ over the finite generating sets S of Γ.

Example. The rate of relations in a finite group Γ is $\tau(\Gamma_S) = \#S - 1 + 1/\#\Gamma$. Indeed the space $\ell^2(Y^1)$ and $\ell^2(Y^0)$ have finite (complex) dimension $\#\Gamma \cdot \#S$ and $\#\Gamma$ respectively, and the dimension of $Z_1(\Gamma_S)$ is computed as follow. One easily sees that the image of ∂_1 coincide with the kernel of the linear map $\ell^2(Y^0) \to \mathbf{C}$ defined by $c \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} c(\gamma)$, which has codimension 1 in $\ell^2(Y^0)$. In particular,

$$b_1(Y) = \dim_{\mathbf{C}} Z_1(Y) = \#\Gamma \cdot \#S - \#\Gamma + 1.$$

As $\dim_\Gamma = \frac{1}{\#\Gamma} \cdot \dim_{\mathbf{C}}$, the result follows immediately. Recall that the classical Betti number $b_1(Y)$ is the number of cycles in Y, whereas $b_0(Y) = 1$ is the number of its connected components.

Proposition 13. *Let Γ_S be an infinite marked group. Then*

$$\beta_1(\Gamma) = \#S - 1 - \tau(\Gamma_S).$$

Démonstration. Assume first that there exists a finite presentation $P = \langle S \mid R \rangle$ of Γ, and let Y be the 2-dimensional associated Cayley complex. It is by definition simply connected and cocompact, so that $\beta_1(\Gamma) = \dim_\Gamma \ker \partial_1^{(2)} / \overline{\operatorname{Im} \partial_2^{(2)}}$ for the associated closure of the boundary operators ∂_i. The simple connectedness expresses homologically by the relation $\ker \partial_1 = \operatorname{Im} \partial_2$. So $\tau(\Gamma_S) = \dim_\Gamma \overline{\ker \partial_1} = \dim_\Gamma \overline{\operatorname{Im} \partial_2}$, and one easily verifies that $\overline{\operatorname{Im} \partial_2} = \overline{\operatorname{Im} \partial_2^{(2)}}$ from the fact that $\partial_2^{(2)}$ is bounded. So, as $\dim_\Gamma \ell^2(Y^0) = 1$, $\dim_\Gamma \ell^2(Y^1) = \#S$, and $\partial_1^{(2)}$ has dense image, the rank formula for $\partial_1^{(2)}$ (see [76]) with respect to the Γ-dimension gives

$$\beta_1(\Gamma) = \#S - 1 - \tau(\Gamma_S).$$

We now proceed with the approximation case of arbitrary (finitely generated) Γ_S. Let $P = \langle S \mid R \rangle$ be a presentation of Γ and Y be the associated Cayley complex. Denote by R_n the set of the n first relations in R, and Y_n be the Γ-invariant subcomplex of Y associated to R_n. Then Y_n is a cocompact exhaustion of Y. Let

$$J_{m,n} : \overline{H}_1^{(2)}(Y_m) \to \overline{H}_1^{(2)}(Y_n)$$

be the morphism induced in homology by the inclusion maps $Y_m \subset Y_n$ $(m \leq n)$. Note that the 1-skeleton of the Y_m is fixed so that $J_{m,n}$ is simply the orthogonal projection from the ℓ^2-harmonic chains $\mathcal{H}_1^{(2)}(Y_m) \subset \ell^2(Y^1)$ on Y_m to the subspace $\mathcal{H}_1^{(2)}(Y_n) \subset \mathcal{H}_1^{(2)}(Y_m)$ of ℓ^2-harmonic chains on Y_n. Due to the simple connectedness of Y the first ℓ^2-Betti number of Γ can be computed using the formula

$$\beta_1(\Gamma) = \sup_{m\geq 0} \inf_{n\geq m} \dim_\Gamma \overline{\operatorname{Im} J_{m,n}}.$$

On the other hand $\partial_{2,Y_n} : \mathbf{C}[Y_n^2] \to \mathbf{C}[Y_n^1]$ extends to a bounded operator $\partial_{2,Y_n}^{(2)}$ on $\ell^2(Y_n^2)$, so that $\overline{\partial_{2,Y_n}(\mathbf{C}[Y_n^2])} = \overline{\partial_{2,Y_n}^{(2)}(\ell^2(Y_n^2))}$. We have,

$$\overline{\partial_{2,Y_1}^{(2)}(\ell^2(Y_1^2))} \subset \ldots \subset \overline{\partial_{2,Y_n}^{(2)}(\ell^2(Y_n^2))} \subset \ldots \subset \overline{Z_1(Y)},$$

and the union of these subspaces is dense in $\overline{Z_1(Y)}$ (indeed let $\sigma \in \overline{Z_1(Y)}$ be a cycle which is orthogonal to $\overline{\partial_{2,Y_n}^{(2)}(\ell^2(Y_n^2))}$ for all n and consider any finite cycle $c \in Z_1(Y)$. Then $c \in \partial_{2,Y_n}(\mathbf{C}[Y_n^2])$ for some large n, so that $\langle c \mid \sigma \rangle = 0$ and $\sigma = 0$). Thus

$$\dim_\Gamma \overline{\partial_{2,Y_n}^{(2)}(\ell^2(Y_n^2))} \to_{n\to\infty} \dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)}$$

and

$$\inf_{n\geq m} \dim_\Gamma \overline{\operatorname{Im} J_{m,n}} = \dim_\Gamma \ker \partial_1^{(2)} - \dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)}$$

(which is thus independent of m). As $\dim_\Gamma \ker \partial_1^{(2)} = \#S - 1$ we get

$$\beta_1(\Gamma) = \#S - 1 - \tau(\Gamma_S),$$

hence the proposition. ∎

In particular the infimum defining $\tau(\Gamma)$ is attained for any finitely generated Γ and we have $\tau(\Gamma_S) \in \tau(\Gamma) + \mathbf{N}$. Observe that $\tau(\Gamma) = 0$ if and only if Γ is a free group. In general we have $\tau(\Gamma) \leq g(\Gamma) - 1$ and $\tau(\Gamma) \leq r(\Gamma)$ for any infinite finitely generated Γ, where $g(\Gamma)$ is the minimal number of generator of Γ and $r(\Gamma)$ the minimal number of relations of a presentation. Let us recall here a still open (particular case of a) question due to Atiyah [5] : is it true that the rate of relations of a torsion free finitely presented group is an integer ? (see [44])

4 The semi-continuity of β_1

We now prove theorem 1.

Lemme 14. *For any $\varepsilon > 0$ the condition $\tau(\Gamma'_{S'}) \geq \tau(\Gamma_S) - \varepsilon$ defines a neighborhood of Γ_S in MG.*

Démonstration. The finite groups being isolated in MG we may assume that Γ is infinite. Let $P = \langle S \mid R \rangle$ be a presentation of Γ associated to the finite generating set S and Y be the corresponding 2-dimensional Cayley complex.

Denote by $c_i \in Z_1(Y)$ the family of characteristic functions of the fundamental cycles in Y, that is the cycles given by the relations (i.e. the elements of R and their conjugates). As P is a presentation we get that $\{c_i\}$ generates $Z_1(Y)$ as a vector space. Alternatively we can take for c_i a (countable) generating set of the space of cycles with rational coefficients in $Z^1(Y)$. Assume moreover that $(c_i)_i$ is well ordered and let $(e_k)_k$ be the ordered family obtained from $(c_i)_i$ by the Gram-Schmidt orthonormalization procedure for the scalar product of $\ell^2(Y^1)$. Then $(e_k)_k$ is an orthonormal basis of $\overline{Z_1(Y)}$. Observe that by construction the support of e_n is then included into the union of the supports of c_i for $i \leq n$.

Let $P : \ell^2(Y^1) \to \ell^2(Y^1)$ be the orthogonal (equivariant) projection on $\overline{Z_1(Y)}$. By definition

$$\tau(\Gamma_S) = \dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)} = \mathrm{Tr}(P) = \sum_{s \in S} \langle P(\delta_s) \mid \delta_s \rangle$$

where δ_s is the characteristic function of the edge $s \in Y^1$ starting at the origin (i.e. the identity of $\Gamma = Y^0$). The family $(e_k)_k$ being an orthonormal basis of $\overline{Z_1(Y)}$ we get

$$\dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)} = \sum_{s \in S} \sum_1^\infty |\langle e_k \mid \delta_s \rangle|^2.$$

Let N be an integer such that

$$\dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)} - \sum_{s \in S} \sum_1^N |\langle e_k \mid \delta_s \rangle|^2 \leq \varepsilon$$

and let us fix a real number r sufficiently large for the supports of the cycles c_i corresponding to e_k with $k \leq N$ to be included in the ball of radius r and center the identity element in Y. The set of marked groups such that the ball of radius r coincide with that of the (labeled) complex Y define a neighborhood V of Γ_S in MG.

Let $\Gamma'_{S'}$ be a point in V and denote by Y' the associated Cayley complex. Then there exists an isometry φ between the ball of radius r in Y^1 et Y'^1 which fix the identity and permutes the labelings $S \leftrightarrow_\varphi S'$. Observe that φ induces an isometry φ_* between the finite dimensional Hilbert spaces $\ell^2(B^1_Y(r), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ and $\ell^2(B^1_{Y'}(r), \langle \cdot \mid \cdot \rangle')$ where $B_Y(r)$ is the ball of radius r in Y centered at the identity in $\Gamma = Y^0$ and B^1_Y is the 1-skeleton. As for the case of Γ let's number the fundamental cycles $(c'_i)_i$ of Y'. We may of course assume that $\varphi_*(c_i) = c'_i$ for the cycle c_i leading to e_k for $k \leq N$. Then the Gram-Schmidt orthonormalization procedure for the scalar product of $\ell^2(Y')$ gives a basis $(e'_k)_k$ of $\overline{Z_1(Y')}$ for which we have

$$\begin{aligned}
\dim_{\Gamma'} \overline{Z_1(Y')} &= \sum_{s' \in S'} \sum_1^\infty |\langle e'_k | \delta'_s \rangle'|^2 \geq \sum_{s' \in S'} \sum_1^N |\langle e'_k | \delta'_s \rangle'|^2 \\
&= \sum_{s \in S} \sum_1^N |\langle \varphi_*(e_k) | \varphi_*(\delta_s) \rangle'|^2 \geq \dim_\Gamma \overline{Z_1(Y)} - \varepsilon,
\end{aligned}$$

so that V satisfies the required assumptions. ■

Théorème 15. *Let $\Gamma^n_{S_n}$ be a sequence in MG converging to Γ_S. Then,*

$$\underline{\lim}\ \ \tau(\Gamma^n_{S_n}) \geq \tau(\Gamma_S) \qquad \text{and} \qquad \overline{\lim}\ \ \beta_1(\Gamma^n) \leq \beta_1(\Gamma).$$

The set $\{\Gamma_S \in MG|\ \beta_1(\Gamma) < \epsilon\}$ is open in MG for any $\varepsilon > 0$.

This follows immediately from the lemma and the proposition.

Deuxième partie — Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble triangulaire générique

Écrite en collaboration avec Sylvain Barré

—

Résumé

Étant donné un nombre entier $q \geqslant 2$, nous construisons une lamination sur un espace topologique compact dont l'espace des feuilles est l'ensemble des immeubles de Bruhat-Tits de type $\tilde{A}_2$ et d'ordre q. Pour chacune de ces laminations, nous montrons qu'une feuille générique au sens de Baire a un groupe d'automorphismes trivial.

Abstract

The automorphisms group of a generic triangular building is trivial. Given an integer $q \geq 2$, we construct a lamination on a compact topological space whose leaf space is the set of Bruhat-Tits building of type $\tilde{A}_2$ and order q. For each of these laminations, it is proved that a generic leaf in the sense of Baire has a trivial automorphisms group.

5 Introduction

Un immeuble de Tits euclidien de dimension deux est un analogue bi-dimensionnel d'un arbre. Les plats (plans euclidiens pavés régulièrement) jouent alors le rôle des géodésiques bi-infinies (ou droites pavées par les arêtes) dans les arbres. L'infinie richesse de ces immeubles a deux origines. D'une part la géométrie locale ne détermine pas la géométrie globale, d'autre part la tentation de ramener l'étude de ces objets à celle de certains groupes de Lie $p-$adiques échoue. Nous décrivons donc ici un cadre qui permet de voir s'entremêler les immeubles classiques (ceux qui peuvent être définis à l'aide d'un groupe de Lie $p-$adique), les immeubles exotiques qui cependant ont un groupe d'automorphismes cocompact, et enfin ceux qui paraissent très hétérogènes, n'ayant pas d'automorphisme non trivial. On construit à partir de l'ensemble de tous les immeubles triangulaires une structure de lamination dont les feuilles correspondent aux immeubles eux-mêmes. S'ils admettent un quotient compact, leur feuille sera compacte.

Cette construction nous permet de jouer sur les interactions entre géométrie et dynamique : de la richesse de ces immeubles relève *la dynamique extrêmement fine* *de cette lamination*, et inversement, la présence de cette dynamique révèle la richesse de l'ensemble des immeubles (plus particulièrement des immeubles non classiques). On pourra par exemple commencer par observer que cette lamination est loin d'être irréductible. Elle contient de nombreuses « composantes » non triviales (non réduites à une feuille compacte), et chacune de ces composantes est susceptible de présenter un comportement dynamique nouveau (et une géométrie intéressante pour les immeubles correspondant). On se contente ici d'aborder ces questions ; tout l'intérêt de cette structure n'est assurément pas complètement utilisé dans cet article. Nous irons un peu plus loin dans l'étude de ses sous-laminations, tant du point de vue topologique que du point de vue mesuré (ergodique), dans un prochain article. Dans le présent article, nous nous concentrons sur certains aspects topologiques de cette lamination, et plus précisément, nous développons des résultats concernant la géométrie *locale* des immeubles triangulaires pour en tirer des conclusions sur la géométrie *globale* d'un immeuble *générique*.

Il y a trois types d'immeubles euclidiens de dimension deux, un pour chacun des trois pavages réguliers du plan. Les immeubles triangulaires (ou de type $\tilde{A}_2$) correspondent au pavage par des triangles équilatéraux (le diagramme du type $\tilde{A}_2$ est un triangle d'où la terminologie). Rien n'empêche de généraliser notre construction aux autres types d'immeubles, nous nous sommes restreints aux cas triangulaire car il est plus facile à manipuler et a été pour le moment beaucoup plus étudié que les autres. Pour une description très détaillée de ces immeubles, nous renvoyons à [10], voir aussi [96]. Le link aux sommets, qui décrit la géométrie locale, est codé par un plan projectif fini (ayant $q+1$ points par droites, $q+1$ étant le nombre de faces incidentes à une même arête). Il existe des plans projectifs exotiques finis (voir [4]) dès que $q \geqslant 16$, ainsi, en mélangeant du classique et de l'exotique dans les constructions, on obtient facilement une infinité non dénombrable d'immeubles exotiques. C'est de là que provient l'idée qu'il n'est pas envisageable de classifier l'ensemble de tous les immeubles ([96],[97]). Rappelons ici qu'une classification complète a été faite par J. Tits en dimension plus grande [102] et s'est terminée récemment par une description des polygones de Moufang [104]. L'idée étant de classifier certains immeubles sphériques qui apparaissent par exemple comme bords à l'infini dans les immeubles euclidiens de dimension 2. À défaut de considérer tous ces immeubles sphériques, ne sont classifiés que ceux qui ont *a priori* un groupe d'automorphismes suffisamment transitif.

Nous montrerons qu'en fait il n'est pas du tout nécessaire de faire apparaître de l'exotisme localement pour obtenir un grand nombre d'immeubles. Ainsi, dès $q = 2$ l'infinie richesse est déjà présente :

Théorème 16. *Pour tout $q \geqslant 2$, il existe une infinité non dénombrable d'immeubles deux à deux non isométriques ayant le même ordre q.*

On dit souvent que « la plupart » de ces immeubles ont un groupe d'automorphismes trivial, sans préciser en quel sens (voir e.g. [88]). Il faut être prudent car certes les immeubles classiques sont en nombre dénombrable, mais il y a aussi des immeubles exotiques avec un groupe d'automorphismes non trivial [10], [106], parfois transitif sur les sommets, d'autres fois pas !

Avant de continuer, il convient de faire une remarque sur l'ordre q des immeubles considérés. Pour construire un immeuble triangulaire d'ordre q, la donnée de départ est un plan projectif (ou plusieurs) du même ordre. Bien que nous ne le précisions pas, *nous supposons toujours l'entier q choisi de sorte qu'il existe au moins un plan projectif d'ordre q.* On peut par exemple restreindre tous nos énoncés aux seuls entiers de la forme $q = p^n$, où p est un nombre premier. Dans ce cas il existe (au moins) le plan projectif classique d'ordre q, associé au corps $\mathbf{F}_q$. (L'existence de plan projectif d'ordre $q \neq p^n$ est encore une question ouverte.)

Notons Q_q l'ensemble de tous les immeubles triangulaires d'ordre q. Cet ensemble est visiblement plus « étoffé » qu'un ensemble usuel, au sens de la théorie des ensembles. Cependant, si l'on essaie de le munir directement d'une structure supplémentaire (e.g. mesurée, topologique, etc.), on se trouve confronté à des difficultés. En fait, Q_q est un « espace singulier ». Ceci signifie qu'il existe une opération très simple, dite de désingularisation, qui permet de le ramener à un espace standard (les espaces singuliers peuvent être considérés comme « les espaces non standard les plus proches des espaces standard »). Plus précisément, nous allons dans ce texte munir Q_q d'une *structure topologique singulière* : on peut déterminer la proximité relative de deux immeubles triangulaires si l'on se permet cette opération élémentaire de désingularisation, qui consistera simplement ici à pointer chacun des immeubles.

Nous considérons *l'ensemble des immeubles triangulaires pointés en un sommet.* Deux éléments de cet ensemble sont dits proches s'ils sont isométriques sur une grosse boule centrée en leur point base. Cette topologie est à l'origine d'une *lamination sur un espace compact T_q*, que nous avons déjà évoquée ci-dessus, et dont l'espace des feuilles est exactement l'ensemble de toutes les classes d'isométries d'immeubles triangulaires ; on définit ainsi la *structure topologique singulière naturelle* de Q_q. Soulignons que la notion de généricité ainsi obtenue est alors parfaitement définie *sur l'espace Q_q lui-même.* Une partie générique et saturée de la lamination T_q est une famille générique d'immeubles triangulaires. Cette topologie nous permet de montrer, à l'aide du lemme de Baire, des résultats de généricité concernant les immeubles triangulaires. Notamment, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 17. *Génériquement au sens de Baire, le groupe d'automorphismes d'un immeuble triangulaire d'ordre q est trivial.*

L'ensemble Q_q a le cardinal du continu et il en est de même de ses parties génériques. On pourra, avant d'aborder la preuve du théorème 2, commencer par examiner la figure 1. Elle représente un immeuble générique décrit par ce théorème. En fait, elle permet de délivrer un « instantané » des éléments importants de la démonstration, ainsi que de dresser l'allure générale d'une infinité non dénombrable d'immeubles sans automorphisme ; essentiellement, un automorphisme sur cette figure est à la fois contraint à respecter la structure simpliciale (cercles et segments) et les couleurs (densités de points), et ne peut qu'être trivial. Il suffit alors de faire varier les paramètres pour obtenir une infinité non dénombrable d'immeubles sans automorphisme non isométriques.

Cet article est présenté de la façon suivante. Dans la partie 2, on rappelle une construction de tous les immeubles triangulaires (voir [10] et [96]), ainsi qu'un théorème de prescription du type des link d'ordre 2 valable uniquement pour $q = 2$. De ce dernier théorème, on peut tirer de nombreuses sous-laminations intéressantes de T_2.

Dans la partie 3, on démontre des résultats géométriques très précis, qui dans un premier temps permettent de montrer le théorème 1 pour toutes les valeurs de q.

La partie 4 décrit la lamination sur le compact T_q et introduit la notion de généricité avec un premier exemple de propriété générique. Enfin, les deux dernières parties sont consacrées à la preuve du théorème 17. On distingue les cas $q = 2$ et $q \geqslant 3$ car les outils utilisés pour chacun ne sont pas tout à fait les mêmes.

Pour finir, nous tenons à remercier chaleureusement Étienne Ghys qui nous a invités à travailler ensemble et toujours encouragés.

6 Préliminaires

1. Construire des immeubles triangulaires. Le link d'un immeuble triangulaire est un graphe qui s'identifie toujours au graphe d'incidence d'un plan projectif. On attribue la longueur $\pi/3$ à chacune des arêtes, ce qui correspond à la longueur angulaire naturelle dans les immeubles euclidiens. On utilisera la projection sur la boule de B rayon un et de centre le sommet $\star$, qu'on peut identifier au link : le segment géodésique $[\star, A]$ vient intersecter la boule B en un point B qui est le projeté du point A. Dans [10], on définit aussi un objet intermédiaire entre deux boules consécutives : le link d'ordre k. La figure 2 montre le link d'ordre 2 dans le cas le plus simple. Ce cas est déjà très significatif car il fait apparaître clairement la souplesse dans la construction d'immeubles, mais aussi certaines rigidités : il existe en effet deux types de boules de rayon deux dans ce cas, et l'invariant qui les distingue n'est pas localisé. C'est ce qui permettra le théorème de prescription rappelé plus loin. Rappelons ici quelques détails de construction. Pour passer du link au link d'ordre 2, il faut d'une part, remplacer chaque sommet par le graphe d'incidence d'un plan affine (un plan projectif auquel on a enlevé tous les points d'une même droite, disons la droite à l'infini). D'autre part démultiplier chaque arête allant vers ce point en $q + 1$ arêtes qui vont rejoindre le plan

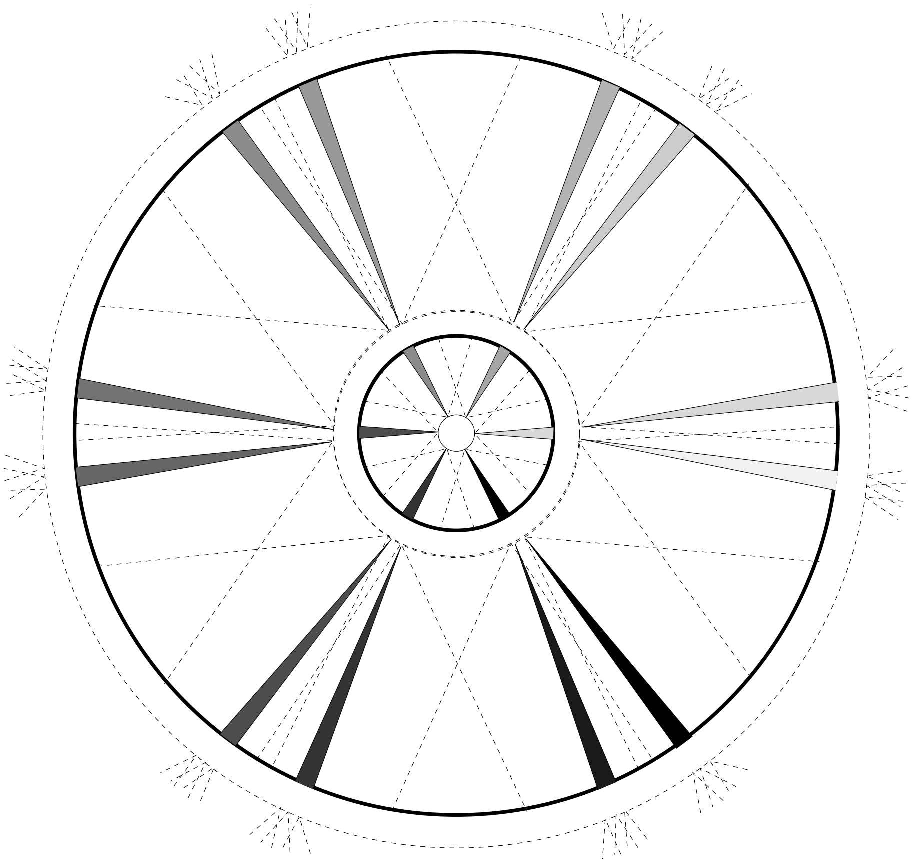


Fig. 1 – Un immeuble triangulaire sans automorphisme

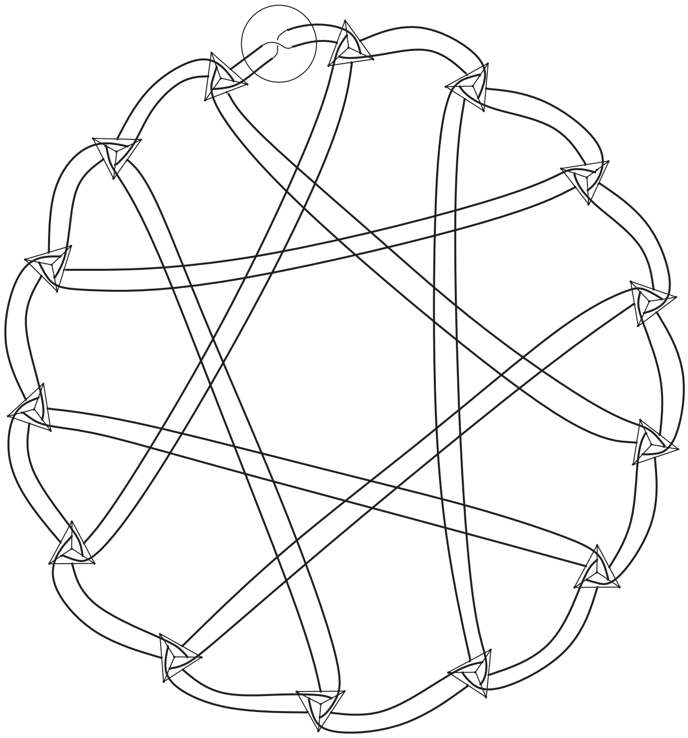


Fig. 2 – Le link d'ordre 2 dans le cas $q = 2$

affine en des sommets qui correspondent à des droites parallèles (« elles se couperaient suivant un point de la droite à l'infini »). Cette construction se généralise pour passer d'une boule de rayon n à une boule de rayon $n+1$ en distinguant toutefois la nature des sommets. Le point essentiel dans ces constructions est que tout complexe simplement connexe qui possède une géométrie locale d'immeuble est une immeuble. On peut voir [7] pour une preuve élémentaire.

Théorème 18. *Un complexe simplicial simplement connexe dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux et dont tous les links correspondent à des plans projectifs, est un immeuble de Bruhat-Tits.*

2. La tour des links. On peut pousser plus loin l'étude des emboîtements entre links et sphères d'ordre supérieur et décrire explicitement une construction de tous les immeubles triangulaires. Dans [10], on décrit une tour des links, qui précise cette construction. On dira qu'un sommet d'une sphère de rayon n est un sommet *coin* s'il se projette sur toutes les sphères de rayon inférieur sur un sommet. On utilisera souvent ces sommets là. La manière de border une sphère au voisinage d'un sommet dépend fortement de sa nature *coin* ou *non coin*. Les sommets de la sphère de rayon un sont tous des sommets coins, c'est ce qui rend simple la description du link d'ordre deux au-dessus du link.

Considérons une arête a reliant deux sommets s et s'. L'ensemble F des faces contenant cette arête correspond dans chacun des links aux sommets s et s', à une droite projective. Ainsi, sur F opèrent simultanément les transformations projectives issues du sommet s et celle issues du sommet s'. Dès que le nombre de transformations projectives est inférieur à celui des bijections, il se peut que ces deux actions ne soient pas conjuguées. La liberté dans la construction générale des immeubles assure alors l'existence d'immeubles ayant des liaisons non projectives dès que $q \geqslant 5$. Dans le cas classique une liaison correspond à la restriction d'une polarité (bijection du graphe d'incidence du plan projectif qui échange points et droites).

Rappelons que l'ensemble des plans projectifs est divisé en deux catégories : les plans projectifs sur un corps et ceux (appelés exotiques ou non classiques) qui ne proviennent pas d'un corps. La propriété de Desargues sépare exactement ces deux mondes (voir [4]). Il est décrit dans [10] comment déceler au niveau des links d'ordre k la propriété de Desargues du plan projectif à l'infini.

Dans un plan projectif, étant donnés deux triangles ABC et $A'B'C'$ en perspective (i.e. tels que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourrantes) les trois points d'intersection $(AB) \cap (A'B')$, $(AC) \cap (A'C')$ et $(CB) \cap (C'B')$ sont toujours alignés dans le cas d'un plan classique et des fois pas dans le cas exotique. Ce que nous utiliserons ici, c'est qu'il est possible en ne modifiant qu'une seule liaison, d'assurer le caractère non Desarguesien du plan à l'infini. En quelque sorte, on force trois droites à ne pas être concourantes alors qu'elles devraient l'être si la propriété de Desargues était satisfaite.

3. Prescription dans le cas $q = 2$. Comme on l'a déjà souligné, la différence entre les deux boules de rayon deux, disons la noire et la blanche, n'est pas localisée. On démontre dans [10] le résultat de prescription (positive) suivant :

Théorème 19. *Il est toujours possible de border une boule de rayon n de telle sorte que le type d'isomorphisme des sommets de la sphère de rayon $n-1$ réalise un coloriage prescrit quelconque (en noir et blanc) de l'ensemble de ces sommets.*

L'idée de la preuve de ce théorème est d'associer à chacun des sommets de la sphère de rayon $n - 1$ au moins une liaison de la sphère de rayon $n + 1$ qui n'interfère que sur la nature de son propre link d'ordre deux. Il s'agit là d'une méthode très spécifique au cas $q = 2$. Cependant cette même approche conduit à un résultat de prescription négative décrit plus loin dans les cas où $q \geqslant 3$.

7 Quelques résultats géométriques

Les alentours d'une boule dans un immeuble triangulaire peuvent présenter toutes sortes de géométries bien que la géométrie locale (i.e. la géométrie des links) soit fixée en tout point. Il est important en vue du théorème 17 de disposer de cette liberté dans les constructions.

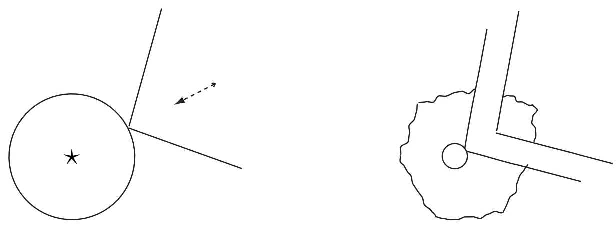


FIG. 3 – Modifier la géométrie au voisinage d'une boule

Fixons l'ordre $q \geqslant 2$ des immeubles considérés.

1. Le cône de définition d'une projection. Soit Δ un immeuble triangulaire. Considérons deux sommets distincts $\star$ et s de Δ et notons $S = S_0$ la sphère de centre $\star$ passant par s.

Soit S_n (resp. B_n) la sphère (resp. la boule) de centre $\star$ et de rayon $n + d(\star, s)$. On construit par récurence deux suites C_n et T_n de complexes simpliciaux en posant $C_0 = T_0 = \{s\}$ et, supposant les complexes C_n et T_n construits, en définissant C_{n+1} comme l'ensemble des triangles de $B_{n+1} \backslash B_n$ (et de leurs bords) qui se projettent sur C_n (i.e. dont la trace sur S_n est incluse dans C_n), et T_{n+1} comme l'ensemble des arêtes (et de leurs bords) du bord de C_{n+1} qui ont exactement un sommet dans T_n. Posons $C_s^\star = \cup_n C_n$ et $T_s^\star = \cup_n T_n$, et notons que $T_s^\star = \partial C_s^\star$ est le bord de $C_s^\star$.

Définition. *On appelle $C_s^\star$ le* cône de définition *de la projection sur s relative à la sphère de centre $\star$ passant par s.*

Le lemme suivant est élémentaire.

Lemme 20. *$T_s^\star$ est un arbre.*

Démonstration. S'il existe un cycle non trivial dans $T_s^\star$, il existe deux arêtes a_1 et a_2 de $T_s^\star$ issues d'un même point $p \in T_n$ dont les extrémités sont deux points distincts de T_{n-1}. Ces extrémités sont nécessairement reliées par une arête (il est clair que deux sommets non reliés par une arête sur une sphère conduisent à des sommets distincts sur la sphère immédiatement supérieure), et ceci contredit le fait que a_1 et a_2 sont dans le bord de C_n. ■

Les arbres $T_s^\star$ peuvent être (à isométrie près) de deux types différents : tout sommet de $T_s^\star$ distinct de la racine est un non-coin (il se projette par construction sur une arête) et la valence en un tel sommet est q^2 ; de plus, si la racine s est un coin de S, elle est de valence $q(q+1)$ alors que si c'est un non-coin, sa valence est $2q^2$.

Ainsi le nombre s_n de sommets au niveau n de $T_s^\star$ vérifie

$$s_{n+1} = q^2 s_n$$

où $s_1 = q(q+1)$ ou $2q^2$.

2. L'âme du cône de définition d'un coin. Soit Δ un immeuble triangulaire. Considérons le cône de définition $C_s^\star$ de la projection sur un sommet s relativement à une sphère S de centre $\star$ passant par s. Supposons que s soit un coin de S.

On considère l'ensemble

$$A_s^\star \subset C_s^\star$$

de toutes les demi-droites issues de $\star$ et contenant le segment $[\star, s]$.

Définition. *On appelle $A_s^\star$* l'âme *du cône $C_s^\star$ issu du coin s.*

Il est clair que $A_s^\star$ est uniquement constitué de sommets coins de sphères centrées en $\star$. Ainsi $A_s^\star$ est un arbre, dont la racine s a valence q^2, et les descendants q^2+1.

Proposition 21. *Soient s_1 et s_2 deux sommets coins distincts de S. L'intersection de l'âme $A_{s_1}^\star$ et du cône $C_{s_2}^\star$ est vide. De plus, la distance de $A_{s_1}^\star$ à $C_{s_2}^\star$ est au moins égale au rayon de S.*

Il suffit en effet de le vérifier dans les plats, pour lesquels le résultat est immédiat.

3. Prescription négative des couleurs. Dans un immeuble, deux boules de rayon deux voisines peuvent s'intersecter sur une partie relativement grande. Malgré cela, dans le cas où $q = 2$, on peut prescrire les types des 2-boules. Pour $q \geqslant 3$ il n'en est rien : il est très facile de vérifier cela pour $q \geqslant 5$ en constatant qu'une 2-boule classique ne peut pas s'intersecter avec une 2-boule dont aucune liaison n'est projective (cf. §6). Les cas $q = 3$ et $q = 4$ sont plus délicats.

Théorème 22. *Soient B^2 une boule de rayon deux (qu'on suppose classique dans les cas $q = 3$ et $q = 4$) et B_0 une autre boule de rayon $R \geqslant 1$ de centre O. Il existe une boule B_1 de rayon $R+1$ contenant B_0 dans son centre telle qu'aucune de ses boules de rayon deux centrées sur les sommets de la sphère de centre O de rayon $R-1$ ne soient isomorphes à B^2.*

Démonstration. La cas $q = 2$ se déduit immédiatement du théorème de prescription (positive). Remarquons toutefois que la prescription négative est un énoncé allégé du théorème de prescription, même si sa preuve, elle, est exactement identique.

Supposons désormais $q \geqslant 3$. Partons d'une boule B_1' quelconque de centre $\star$, contenant B_0 dans son centre. On se fixe A un sommet de la sphère de rayon $R+1$ centrée sur $\star$. Dans la construction des immeubles triangulaires via la tour des links, on constate qu'il est possible de modifier une seule liaison au niveau $N+1$ sans modifier aucune

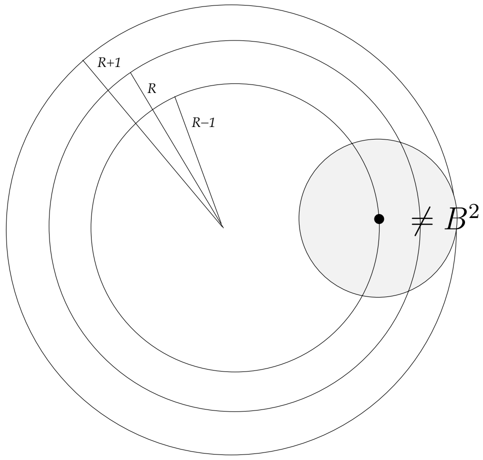


FIG. 4 – Boule interdite

des boules de rayon deux du niveau $R-1$ exceptée une seule : celle qui est centrée sur A (voir [10, page 594]). Il reste donc à vérifier que quel que soit l'ordre q, on peut modifier le type d'un link d'ordre deux en modifiant seulement l'une de ses liaisons.

Pour $q \geqslant 5$, on peut jouer sur le nombre de liaisons projectives du link d'ordre deux : il est possible de le modifier d'une unité en plus ou en moins.

Pour $q = 3$ ou 4, en modifiant une seule liaison, on peut tranformer une configuration de Desargues classique en une configuration qui ne se complète plus symétriquement. Ainsi, on peut s'assurer du caractère non classique d'un link d'ordre deux en ne modifiant qu'une seule liaison. Nous avons pris soin de supposer la boule B^2 classique, il est donc bien possible de rendre exotique celle qui se trouve au-dessus de A.

On a donc montré qu'une boule B_0 peut être « couronnée » de telle sorte qu'aucune des 2-boules de sa périphérie ne soit du type donné (type de la boule B^2). ■

4. Plongement de boules dans un même immeuble.

Théorème 23. *Soit B une boule d'immeuble triangulaire. Pour toute autre boule B', il existe un immeuble triangulaire Δ contenant à la fois B et B'. De plus, étant donné un coin s de B, on peut positionner B' de sorte que son centre soit sur l'âme du cône issu de s relativement à B dans Δ.*

Démonstration. Nous construisons l'immeuble Δ en recollant le long de leurs bords deux morceaux d'immeubles qui chacun contiennent l'une des boules de départ ; ceci nécessite en particulier que ces bords soient isométriques, et indépendants de la classe d'isométrie de l'immeuble considéré.

Soit $B_1 \subset \Delta_1$ et $B_2 \subset \Delta_2$ deux boules d'immeubles triangulaires, respectivement de centre $\star_1$ et $\star_2$ et de rayon r_1 et r_2. Considérons un plat A dans Δ_2 passant par $\star_2$ et fixons une droite $d \subset A$ passant par $\star_2$ et par un coin de la sphère $S_2 = \partial B_2$. Il est facile de trouver deux points $\star$ et s sur d tels que la trace $B_2 \cap A$ de B_2 sur A soit incluse dans $C_s^\star \cap A$ (rappelons que $C_s^\star$ est le cône de définition de la projection sur s relative à $\star$). On a alors $B_2 \subset C_s^\star$.

Par construction, s est un coin de la sphère centrée en $\star$ et passant par s, et le centre de B_2 est sur l'âme de $C_s^\star$.

Considérons un coin s_1 de B_1. Les arbres $T_{s_1}^{\star_1} \subset \Delta_1$ et $T_s^\star \subset \Delta_2$ bordant chacun des cônes $C_{s_1}^{\star_1}$ et $C_s^\star$ sont isomorphes. Découpons les immeubles Δ_1 et Δ_2 le long de ces arbres, et recollons les complexes simpliciaux

$$\Delta_1 \backslash \overset{\circ}{C}{}_{s_1}^{\star_1} \quad \text{et} \quad C_s^\star$$

en respectant le parallélisme. Plus précisément, on procède par récurrence, en positionnant le link en s de $C_s^\star$ à l'aide du (morceau de) plan affine qu'il définit (recollant les triangles de $\Delta_1 \backslash \overset{\circ}{C}{}_{s_1}^{\star_1}$ arrivant en s parallèlement) et en poursuivant ainsi d'étage en étage.

Il reste à vérifier que le polyèdre obtenu est un immeuble de type $\tilde{A}_2$: ceci résulte du théorème 18. ■

Corollaire 24. *Toute suite de boule s'injecte dans un même immeuble.*

En particulier il existe un immeuble contenant tous les types d'isomorphismes de boules d'immeuble $\tilde{A}_2$.

Théorème 25 (Chirurgie des cônes)**.** *Soit B une boule de rayon r centrée en $\star$. Pour chaque coin s de la sphère S bordant B, considérons un immeuble triangulaire Δ_s contenant B et notons $C_s^\star$ le cône de définition de la projection sur s relative à B. Il existe un immeuble triangulaire Δ contenant B tel que, en notant $C_s^\star(\Delta)$ le cône de définition de s dans Δ, le r-voisinage de l'âme de $C_s^\star(\Delta)$ dans $C_s^\star(\Delta)$ soit isomorphe au r-voisinage de l'âme de $C_s^\star$ dans $C_s^\star$.*

Démonstration. Numérotons les sommets coin de S et répétons successivement l'opération de chirurgie décrite dans la démonstration précédente. Si s est un sommet coin de S, effectuer cette chirurgie sur un sommet coin $s' \neq s$ ne modifie pas le type d'isométrie du r-voisinage dans $C_s^\star$ de l'âme au dessus de s (prop. 21). ■

5. Une infinité non dénombrable d'immeubles. Nous sommes désormais en mesure de montrer le résultat suivant :

Lemme 26. *Toute boule B d'un immeuble peut se prolonger en deux boules B_1 et B_2 de même rayon qui ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Considérons une boule B^2 de rayon deux classique et une boule B quelconque. D'après le théorème 23, il existe une boule B_1 qui prolonge B et qui fait apparaître le type de boule B^2 parmi les sommets en dehors de la boule B. Or, d'après le théorème 22, il existe une boule B_2 prolongeant B dont aucun des sommets hors de B ne soient du type B^2.

Ainsi, les deux boules B_1 et B_2 ne peuvent pas être isomorphes. ∎

Remarque. Dans le cas $q = 2$ ce lemme se déduit directement du théorème 19 de prescription. Aussi, dans le cas $q \geqslant 5$, jouer sur le nombre de liaisons projectives permet de montrer ce résultat sans faire appel au théorème 23.

En faisant varier les corps locaux, tout en conservant le même corps résiduel $\mathbb{F}_q$, on peut montrer ([102]) qu'il existe une infinité d'immeubles classiques deux à deux non isométriques ayant même ordre q. On donne ici un résultat qui tient compte des immeubles exotiques (résultat partiellement montré dans [8]).

Théorème 27. *Il existe une infinité non dénombrable d'immeubles deux à deux non isométriques ayant le même ordre q.*

Démonstration. En effet, d'après le lemme précédent, il existe une infinité non dénombrable de tours de links, à isomorphisme de tours près. Or à un immeuble ne peuvent correspondre qu'au plus un nombre dénombrable de tours (l'ensemble des sommets d'un immeuble étant bien sûr dénombrable), donc l'ensemble des immeubles d'ordre fixé est infini non dénombrable. ∎

Remarque. Notons qu'il serait possible de fixer toute la géométrie locale : non seulement tous les immeubles considérés seraient de même ordre, mais aussi ils auraient tous le même plan projectif en chacun de leurs sommets.

8 L'espace des immeubles triangulaires

Fixons $q \geqslant 2$. L'objet de ce paragraphe est la construction de *l'espace T_q des immeubles triangulaires pointés* d'ordre q. Il s'agit d'un espace topologique dont les points sont des classes d'isomorphisme d'immeubles pointés. La construction est comparable à celle de l'espace des groupes marqués de type fini pour lequel nous renvoyons à l'article de Champetier [20]. La relation d'isomorphisme sur T_q définit une lamination dont l'espace des feuilles est l'ensemble Q_q des immeubles euclidiens de type $\tilde{A}_2$ et d'ordre q. Cette lamination admet une transversale naturelle $S_q \subset T_q$ constituée de l'ensemble des sommets des feuilles de T_q. On peut facilement décrire S_q comme une limite projective à l'aide de la tour des links. Les deux désingularisations S_q et T_q sont équivalentes et conduisent à des notions de généricité identiques (au sens de Baire) sur Q_q.

1. L'espace compact T_q. On appelle immeuble pointé la donnée d'un couple (Δ, y) formé d'un immeuble Δ triangulaire d'ordre q et d'un point $y \in \Delta$.

Soit T_q' l'ensemble des immeubles pointés. Considérons la valuation

$$v : T_q' \times T_q' \to [0, \infty]$$

définie par

$$v(Y, Y') = \sup\{r \in [0, \infty],\ B_\Delta(y, r) \simeq B_{\Delta'}(y', r)\},$$

où $Y = (\Delta, y)$ et $Y' = (\Delta', y')$ sont deux immeubles pointés. $B_\Delta(y, r)$ est la boule de centre y et de rayon r dans Δ et le symbole « $\simeq$ » signifie qu'il existe un isomorphisme isométrique de $B_\Delta(y, r)$ sur $B_{\Delta'}(y', r)$. On munit T'_q de la topologie pour laquelle

$$Y_n \to Y$$

si et seulement si, en notant $Y = (\Delta, y)$ et $Y_n = (\Delta_n, y_n)$, il existe deux suites $z_n^1 \in \Delta$ et $z_n^2 \in \Delta_n$ telles que

$$d_\Delta(z_n^1, y) \to 0,\ d_{\Delta_n}(z_n^2, y_n) \to 0,\ \text{et } v((\Delta, z_n^1), (\Delta_n, z_n^2)) \to \infty.$$

Cette topologie est non séparée.

Lemme 28. *Deux points $Y = (\Delta, y)$ et $Y' = (\Delta', y')$ de T'_q sont indistinguables si et seulement si il existe un isomorphisme $\theta : \Delta \to \Delta'$ tel que $\theta(y) = y'$.*

Démonstration. Il est clair que si $\theta : \Delta \to \Delta'$ est un isomorphisme tel que $\theta(y) = y'$, alors $Y = (\Delta, y)$ et $Y' = (\Delta', y')$ sont indistinguables. Réciproquement considérons deux points indistinguables $Y = (\Delta, y)$ et $Y' = (\Delta', y')$ de T'_q. Il existe donc une suite $Y_n = (\Delta_n, y_n) \in T'_q$ qui converge vers Y et Y'. Par suite, en considérant deux paires de suites $z_n^1 \in \Delta$, $z_n^2 \in \Delta_n$, et $z_n'^1 \in \Delta'$, $z_n'^2 \in \Delta_n$, telles que

$$d_\Delta(z_n^1, y) \to 0,\ d_{\Delta_n}(z_n^2, y_n) \to 0,\ \text{et } v((\Delta, z_n^1), (\Delta_n, z_n^2)) \to \infty.$$

et

$$d_\Delta(z_n'^1, y') \to 0,\ d_{\Delta_n}(z_n'^2, y_n) \to 0,\ \text{et } v((\Delta, z_n'^1), (\Delta_n, z_n'^2)) \to \infty.$$

on en déduit l'existence d'une suite

$$\theta_n : B_\Delta(y, r_n) \to B_{\Delta'}(\theta_n(y), r_n)$$

d'isomorphismes partiels entre Δ et Δ' tels que $r_n \to \infty$ et $d_{\Delta'}(y', \theta_n(y)) \to 0$. De plus, θ_n préservant les structures simpliciale et métrique, la position de $\theta_n(y)$ dans l'image par θ_n d'un triangle contenant y est fixe, et l'hypothèse $d_{\Delta'}(y', \theta_n(y)) \to 0$ entraine $\theta_n(y) = y'$ pour n assez grand. Cette famille d'isomorphismes partiels s'étend en un isomorphisme global θ tel que $\theta(y) = y'$ par procédé diagonal, du fait que pour tout $r \geqslant 0$, l'ensemble des classes d'isomorphismes de boules d'immeubles triangulaires centrées en un sommet et de rayon r est fini. ∎

Définition. *On note T_q l'espace topologique $T_q = T'_q/\simeq$ obtenu en séparant T'_q.*

Proposition 29. *T_q est un espace compact sans point isolé.*

Démonstration. Montrons que T_q est compact. Soit $Y_k = (\Delta_k, y_k)$ une suite (de représentants) d'éléments de T_q. Notons $\star_k$ le (ou l'un des) plus proche sommet de y_k dans Δ_k. Pour tout $r \geqslant 0$ fixé, les boules de rayon r et de centre $\star_k$ dans Δ_k constituent un nombre fini de classes d'isomorphisme et, par procédé diagonal, la suite $(\Delta_k, \star_k)$ admet une valeur d'adhérence $(\Delta, \star)$. Supposons, quitte à extraire, qu'il existe un isomorphisme θ_k de $B_{\Delta_k}(\star_k, k+1)$ sur $B_\Delta(\star, k+1)$, et que $d_\Delta(y, \theta_k(y_k)) \leqslant \frac{1}{k}$ pour un point $y \in \Delta$ (la boule de rayon 1 est compacte). Alors Y_k converge vers $Y = (\Delta, y)$.

Montrons que T_q n'a aucun point isolé. Soit $Y = (\Delta, y)$ un point de T_q et r un nombre réel strictement positif. Il faut montrer l'existence d'un point $Y' = (\Delta', y')$ de T_q, distinct de Y, et tel que $v(Y, Y') \geqslant r$. Or ceci est une simple traduction du fait qu'il existe un immeuble non isométrique à Δ coincidant avec lui sur la boule de centre y et de rayon r dans Δ (th. 27). ■

2. Structure de lamination (cellulaire) sur T_q. Soit Δ un immeuble triangulaire. On définit une application

$$\rho_\Delta : \Delta \to T_q$$

par l'expression

$$y \in \Delta \mapsto (\Delta, y) \in T_q.$$

Notons que si $\theta : \Delta \to \Delta$ est un isomorphisme isométrique de Δ, alors $\rho_\Delta(y) = \rho_\Delta(\theta(y))$ par définition de T_q. Réciproquement si $\rho_\Delta(y) = \rho_\Delta(y')$, il existe un isomorphisme de Δ qui envoie y sur y'. Ainsi ρ_Δ passe au quotient en un homéomorphisme de $\Delta/\mathrm{Aut}(\Delta)$ sur son image. Notons que lorsque Δ varie, les images de ρ_Δ sont disjointes ou confondues. On appelle *feuille* de T_q chacune de ces images. Chaque feuille est munie d'une structure cellulaire qui en fait un quotient d'immeuble triangulaire.

L'espace T_q est donc muni d'une structure de lamination admettant l'ensemble

$$S_q \subset T_q$$

des sommets des feuilles pour transversale totale. La relation d'équivalence transverse sur S_q est borélienne à classes dénombrables ; deux points $X = (\Delta, \star)$ et $X' = (\Delta', \star')$ de S_q sont équivalents si et seulement si il existe un isomorphisme de Δ sur Δ' envoyant $\star$ sur $\star'$ (« dynamique du point base »).

Exemples. Les immeubles ont été introduits par Tits pour géométriser l'étude de certaines classes de groupes : ces groupes apparaissent comme groupe d'automorphismes d'une structure géométrique donnée. Les immeubles de type $\tilde{A}_2$ sont associés à $\mathrm{SL}_3(K)$ où K est un corps local. Cependant les conditions qu'un complexe simplicial doit remplir pour être un immeuble (définies par Tits, puis Bruhat-Tits) offrent des libertés en rang 2 et donnent naissance à des immeubles exotiques qui ont beaucoup moins de symétries que les précédents, même s'ils restent cocompacts. Par exemple il est construit dans [10] un immeuble cocompact dont le groupe d'automorphismes coïncide (à indice fini près) avec le groupe des automorphismes du revêtement.

Dans la lamination T_q, l'ensemble de ces immeubles forme la famille dénombrable des feuilles compactes. Comme nous le verrons ci-dessous, un immeuble « générique » se situe à l'extrême opposé ; par exemple il a un groupe d'automorphismes trivial et il contient toutes les géométries possibles (au sens de la proposition ci-dessous, cf. prop 31).

Proposition 30. *La lamination T_q est topologiquement transitive (il existe une orbite dense). En particulier toute application continue invariante de T_q vers les nombres réels est constante.*

En effet c'est équivalent à l'existence d'un immeuble triangulaire contenant une copie isométrique de chaque boule d'immeuble triangulaire, et ceci fait l'objet du théorème 23.

Nous montrons dans un prochain article qu'il est impossible de faire une classification borélienne des immeubles triangulaires de type $\tilde{A}_2$ et d'ordre q.

3. L'espace transverse des sommets comme limite projective. On rappelle que la *tour des links* associée à l'espace des immeubles triangulaires d'ordre q est la suite infinie

$$\star \xleftarrow{p_1} F_1 \xleftarrow{p_2} F_2 \longleftarrow \ldots$$

où F_n désigne la famille (finie) des classes d'isomorphismes de boules de rayon n d'immeubles triangulaires d'ordre q (centrées sur un sommet) et $p_n : F_n \to F_{n-1}$ applications associées aux rétractions canoniques. L'espace

$$S_q = \varprojlim_n F_n$$

obtenu comme limite projective des niveaux est un espace topologique compact (une base d'ouverts pour cette topologie est constituée par la famille dénombrable des classes d'isomorphismes de boules de rayon fini).

Plus précisément S_q est l'espace des suites $s = (x_0 = \star, x_1, x_2, \ldots)$ telles que $x_i = p_{i+1}(x_{i+1}) \in F_i$ pour tout $i \geqslant 1$. Chaque point $s \in S_q$ s'identifie avec une classe d'isomorphisme

$$(\Delta_s, \star_s) = \varinjlim x_i$$

d'immeuble pointé (où la limite est relative aux inclusions canoniques d'une réalisation géométrique). En effet il est clair que deux immeubles pointés isomorphes $(\Delta, \star)$ et $(\Delta', \star')$, i.e. tels qu'il existe un isomorphisme isométrique $\Delta \to \Delta'$ envoyant $\star$ sur $\star'$, définissent le même point de S_q, et la réciproque s'obtient par procédé diagonal.

L'application $s \mapsto (\Delta_s, \star_s)$ identifie les deux ensembles S_q déjà construits. Il est facile de voir que cette application est un homéomorphisme. Notons que S_q est un espace de Cantor (du fait que $\#F_i \to \infty$, voir aussi la prop. 29). L'application

$$d(X, X') = e^{-v(X,X')}$$

définit une distance ultramétrique sur S_q compatible avec la topologie ambiante.

4. Notion de généricité pour les immeubles $\tilde{A}_2$. Une propriété d'immeuble triangulaire (e.g. avoir un groupe d'automorphismes trivial) définit un partie saturée de T_q. On dira que cette propriété est *générique au sens de Baire* si cette partie est intersection dénombrable d'ouverts denses de T_q (de façon équivalente, on peut remplacer T_q par la transversale S_q des sommets). On définit ainsi une notion de généricité sur l'espace quotient Q_q.

Donnons immédiatement un exemple de propriété générique.

Proposition 31. *Une feuille générique de T_q est dense. En d'autres termes, un immeuble triangulaire générique au sens de Baire contient tous les types d'isomorphismes de boules de rayon fini.*

Démonstration. Soit B une boule d'immeuble triangulaire (centrée en un sommet). L'ensemble $O(B)$ des immeubles pointés contenant la boule B, qui est clairement ouvert, est dense d'après le théorème 23. Par suite $\cap_B O(B)$ est générique. ∎

9 Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble générique – Le cas $q = 2$

Les immeubles considérés dans ce paragraphe sont triangulaires d'ordre $q = 2$ fixé.

Rappelons que $S_2 \subset \mathcal{T}_2$ est l'espace des (classes d'isomorphismes d') immeubles pointés en un sommet. Il s'agit d'un espace ultramétrique compact : la distance entre deux immeubles pointés $X = (\Delta, \star)$ et $X' = (\Delta', \star')$ est e^{-d} où d est le grand entier tel que les boules de centre $\star$ et $\star'$ (de Δ et Δ' respectivement) soient isomorphes. Dans la suite, quand on parlera de boule de X, il s'agira par défaut de boule de centre $\star$ dans Δ.

1. Trivialité des sous-groupes d'isotropie. Pour tout immeuble $X \in S_2$ et pour $i \leqslant j$, on note $G_j^i(X)$ le groupe des automorphismes de la boule de rayon j qui fixe point par point la boule de rayon i. On a clairement les inclusions $G_j^{i+1}(X) \subset G_j^i(X)$. Notons également que $G_j^0(X)$ est le groupe de tous les automorphismes de la boule de rayon j.

Pour tous $i \leqslant j$, on définit :

$$O_j^i = \{X \in S_2, \;\; G_j^i(X) = G_j^0(X)\} \;\text{ et }\; O^i = O_\infty^i = \bigcup_{j \geqslant i} O_j^i.$$

En d'autres termes, O^i est l'ensemble des immeubles pointés dont le groupe des automorphismes qui fixent le point base $\star$ fixe aussi la boule de rayon i.

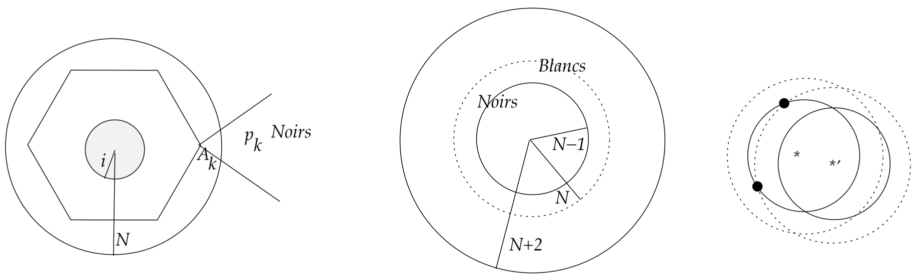
Proposition 32. *Les ensembles O^i sont ouverts et denses dans S_2.*

Démonstration. Il est clair que chacun des O^i_j est ouvert : en effet, soit $X \in O^i_j$, alors tout immeuble qui coïncide avec X au moins sur la boule de rayon j est dans O^i_j.

Montrons que les O^i sont denses. On considère donc un immeuble $X \in S_2$ et des entiers $N > i$. On va montrer que la boule (de S_2) de centre X et de rayon e^{-N} rencontre O^i. Pour cela, il suffit de construire une boule d'immeuble B de rayon $M > N$ qui contienne la boule B_0 de X de rayon N telle qu'on ait : $G^i_M(B) = G^0_M$. Notons c le nombre de sommets coins de la sphère de X de rayon $N-1$ et désignons par A_k ces sommets, $k = 1..c$. Il existe alors un entier $M > N$ et une boule $B \supset B_0$ de rayon M tel que dans la couronne de rayons $N-1 \leqslant M-1$ la proportion p_k de sommets coins noirs de l'âme au-dessus de A_k soit dans l'intervalle $]\frac{k-1}{c}, \frac{k}{c}[$ et cela pour tout $k = 1..c$ (rappelons qu'un sommet est dit blanc si sa boule de rayon deux est d'un type, et noir s'il est de l'autre type). Ceci est possible grâce au théorème 19 de prescription des types des boules de rayon deux.

Le groupe d'automorphismes d'une telle boule $B \supset B_0$, fixe alors tous les sommets coins de la sphère de rayon $N-1$ (un automorphisme permute les âmes et les âmes sont disjointes). Or un automorphisme qui fixe les sommets coins d'une sphère, fixe aussi tous ses disques plans et donc toute la boule point par point. Ainsi, tout automorphisme de B fixe la boule de rayon i.

Finalement, tout immeuble dont la boule de rayon M est B se trouve dans l'intersection de O^i et de la boule de centre X et de rayon e^{-N}. ∎



sous-groupes d'isotropie quotients d'isotropie

FIG. 5 – Trivialité du groupe d'automorphismes

2. Trivialité des quotients d'isotropie. On note U_l, l'ensemble des immeubles de X qui n'ont pas d'automorphisme ϕ qui envoie le point base $\star$ sur un point $\phi(\star) \neq \star$ à distance $\leqslant l$.

Proposition 33. *Les ensembles U_l sont ouverts et denses dans S_2.*

Démonstration. Soit X un point de U_l. Les immeubles obtenus à partir de X en déplaçant le point base $\star$ sur tous les sommets $\star' \neq \star$ de la boule de X de centre $\star$ et de rayon l diffèrent tous de X. Ainsi, il existe un nombre $M > 0$ tel que la boule de centre $\star$ et de rayon M de X soit différente de toutes les autres boules de X de centres $\star'$ et de rayon M (avec $d(\star, \star') \leqslant l$).

On voit donc alors que la boule de S_2 de centre X et de rayon e^{-M} est entièrement incluse dans U_l. Les ensembles U_l sont donc bien ouverts.

Pour voir qu'ils sont denses, considérons un immeuble $X \in S_2$ et des entiers $N > l$. On va montrer que la boule (de S_2) de centre X et de rayon e^{-N} rencontre U_l. On note B_0 la boule de X de rayon N. On peut construire une boule $B \supset B_0$ de rayon $N+2$ telle tous les sommets de sa sphère de rayon $N-1$ soient noirs alors que tous les sommets de sa sphère de rayon N sont blancs. Soit Y un immeuble dont la boule de rayon $N+2$ soit B, montrons que $Y \in U_l$. On considère donc un automorphisme de Y qui envoie $\star$ sur $\star' \neq \star$ tel que $d(\star, \star') \leqslant l$. Puisque $l < N$ la sphère de Y de centre $\star'$ et de rayon N ne peut pas être toute blanche car elle rencontre la sphère de centre $\star$ et de rayon $N-1$ qui est toute noire (on peut vérifier cela très facilement sur un plat passant par $\star$ et $\star'$). ∎

3. Démonstration du théorème.

Théorème 34. *Dans l'espace des immeubles pointés d'ordre 2, génériquement au sens de Baire, le groupe de tous les automorphismes d'un immeuble est trivial.*

Démonstration. Les ouverts O^i et U_l pour $i, l \in \mathbf{N}$ sont denses. Un immeuble qui est dans l'intersection $\bigcap_{i\geqslant 0} O^i$ n'a pas d'automorphisme non trivial qui fixe le point base $\star$. De plus, un immeuble qui est dans l'intersection dense suivante $\bigcap_{l\geqslant 0} U_l$ n'a pas d'automorphisme qui déplace $\star$. Ainsi tout immeuble de l'intersection

$$\bigcap_{i\geqslant 0} O^i \quad \cap \quad \bigcap_{l\geqslant 0} U_l$$

a un groupe d'automorphismes trivial. ∎

10 Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble générique – Le cas $q \geqslant 3$

Supposons maintenant l'ordre $q \geqslant 3$. Fixons une classe d'isomorphisme de boule *classique* de rayon 2, et disons qu'un sommet est noir si sa boule de rayon 2 est de ce type, et qu'il est blanc sinon. On ne peut pas prescrire en toute liberté la couleur des sommets dans le cas où $q \geqslant 3$. Les boules de rayon deux deviennent trop grosses et peuvent contenir localement des invariants non triviaux.

Lemme 35. *Étant donnée une boule B de centre $\star$ de rayon au moins 2 dans un immeuble triangulaire, on peut augmenter à volonté (par chirurgie dans le complémentaire de B) le nombre de sommets noirs de l'âme $A_s^\star$ d'un sommet coin s du bord de B donné, sans modifier ce nombre pour les sommets des âmes des autres sommets coin du bord de B.*

Démonstration. En effet, les âmes au-dessus des sommets coin distincts de s sont alors à distance au moins 2 du cône issu de s (prop. 21). Par suite l'opération de chirurgie du théorème 23 ne modifie pas la couleur des sommets des âmes au-dessus des coins distincts de s dans l'immeuble de départ. On peut donc réaliser de cette façon le nombre maximum c_r de sommets noirs qu'il est possible de mettre au-dessus de s dans la boule centrée en $\star$ de rayon r. En fait, on réalise ainsi seulement $c_r - q^2 - 1$ (a priori), du fait qu'on ne contrôle pas la couleur du sommet s et des sommets immédiatement au-dessus, mais ce sera amplement suffisant pour la suite. Notons que c_r tend vers l'infini avec r en vertu du théorème 23. ∎

En particulier on peut alors, à l'aide du théorème 22, construire une boule prolongeant B ayant des sommets noirs *seulement* au-dessus de s (en quantité arbitrairement grande).

Proposition 36. *La proposition 32 reste vraie pour tout $q \geqslant 3$.*

Démonstration. (Les notations sont celles de la proposition 32) Reprenons la même preuve que pour la proposition 32, mais plutôt que de jouer sur le pourcentage de boules d'un type, on construit une boule B dont les nombres de boules noires au-dessus de chacun des sommets coins de la boule B_0 soient deux à deux distincts. Pour cela, on considère les sommets coin de B_0 , $C_i,\ i = 0..N$ les uns après les autres, et on crée des couronnes pour qu'il y ait au moins un sommet noir au-dessus du sommet C_1 ; ceci sans ajouter de sommets noirs au-dessus des autres C_i (ce qui est posssible d'après le lemme précédent). Si on note c_i le nombre de sommets noirs au-dessus du sommet C_i, on a alors $c_0 = 0 < c_1$. On construit ainsi successivement des couronnes de telle sorte que $c_i < c_{i+1}$. ∎

Proposition 37. *La proposition 33 reste vraie pour tout $q \geqslant 3$.*

Démonstration. Reprenons l'idée de la preuve de la proposition 33. Le point clé était de border une boule de telle sorte qu'une couronne soit entièrement blanche alors que la suivante est entièrement noire. Il n'est pas possible d'en faire autant pour $q \geqslant 3$. Opérons comme suit. On se donne une boule B_0 d'un immeuble X de centre $\star$ et de rayon $N_0 \geqslant 2$. On se fixe une hexagone plat H_0 de même centre que B_0 et de même rayon. On peut construire une boule $B \supset B_0$ de rayon $N \geqslant N_0 + 4$, qui contient un hexagone plat H de rayon $N - 2$ qui prolonge H_0 tel que ses six sommets coins soient noirs (th. 25).

Il suffit maintenant de couronner B de sommets blancs. Plus précisément, il existe une boule B' de rayon $> 2N$ qui prolonge B dont tous les sommets en dehors de la boule B'' de rayon $N-2$ sont blancs (on peut grâce au théorème 22). Considérons donc un automorphisme d'un immeuble Y qui contient B' et qui envoie le sommet $\star$ sur un sommet $\star' \neq \star$ à distance au plus $N - 2$. Au moins l'un des six sommets de H doit être envoyé dans la couronne $B' \setminus B''$, ce qui n'est pas compatible avec les types des 2-boules. Ainsi le raisonnement de la preuve de la proposition 2 peut bien s'appliquer dans le cas $q \geqslant 3$. ∎

Théorème 38. *Dans l'espace des immeubles pointés d'ordre $q \geqslant 3$, génériquement au sens de Baire, le groupe de tous les automorphismes d'un immeuble est trivial.*

CHAPITRE II. QUASI-PÉRIODICITÉ ET THÉORIE DE LA MESURE

—

Dans ce chapitre nous parlerons d'espaces métriques quasi-périodiques. La perspective générale est d'utiliser la richesse des relations d'équivalence mesurées, mêlée aux notions très faibles d'isomorphisme (isomorphisme et isomorphisme stable), pour « formaliser » des concepts intéressants de quasi-périodicité. Le fait que les relations d'équivalence mesurées ne soient pas classifiables conduit à une « abondance[1] » de géométries quasi-périodiques différentes.

—

La démarche adoptée consiste, partant d'un espace mesuré singulier $(Q, [\Lambda])$ comme « concept de quasi-périodicité », à définir la notion d'espace quasi-périodique relativement à ce concept. Nous dirons plus brièvement qu'un tel espace est un espace Q-périodique. Dans le but d'illustrer cette définition, nous démontrons un résultat de « réduction des relateurs » dans un système générateur (graphage) d'une relation d'équivalence, qui a pour corollaire qu'une relation d'équivalence ergodique de type II_1, et de coût > 1, possède un sous-arborage non moyennable (th. 1). Vient ensuite une démonstration du fait que les motifs d'un espace quasi-périodique se répètent. Ce chapitre s'appuie fondamentalement sur [25] et [38].

[1] Alors que j'écris ces lignes, on ne dispose pas encore « d'espace (désingularisant) de relations d'équivalence mesurés », analogue à l'espace des groupes de type fini (voir également [59]). Une difficulté provenant du fait que les points de cet ensemble sont, eux-même, des espaces singuliers.

11 Complexes simpliciaux quasi-périodiques

Nous nous contenterons ici d'examiner les structures simpliciales quasi-périodiques les plus simples, de dimension 1, associées à une relation d'équivalence ou un espace singulier (i.e. les graphes). Nous renvoyons à l'article de Damien Gaboriau sur les nombres de Betti L^2 de relations d'équivalence [38] pour le cas général (voir aussi [ef]).

1. Les graphes. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ). Soit $K \subset R$ une partie borélienne symétrique de R. On dit que K est un *graphage* de R si pour tous points équivalents $x, y \in X$, il existe un nombre fini $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ de points de X tels que $(x_i, x_{i+1}) \in K$.

En suspendant K au-dessus de X, i.e. en attachant pour tout $(x, y) \in K$ une arête $\simeq [0, 1]$ entre x et y, on obtient alors un « espace feuilleté » Σ_K dont les feuilles sont des graphes, et dont X est une transversale totale. Les orbites de R sont connexes dans Σ_K.

Connes, Feldman, et Weiss [28] ont pour la première fois considéré les parties boréliennes $K \subset R$ comme des familles mesurables de graphes sur les orbites de R ; la notion de graphage au sens ci-dessus (i.e. lorsque les orbites sont connexes) a été introduite par Levitt (cf. [37]).

Étant donnés une relation d'équivalence R sur X et un graphage K de R, on construit également un *graphe quasi-périodique* $\tilde{\Sigma}_K$ dont, par définition, les sommets sont les points de $R \subset X \times X$, et les arêtes sont les couples $((x, y), (x, z))$ de points de R tels que $(y, z) \in K$. On dit dans ce cas que $\tilde{\Sigma}_K$ est *un graphe Q-périodique*, où $Q = X/R$ est l'espace mesuré singulier de ses feuilles.

La relation entre $\tilde{\Sigma}_K$ et Σ_K est simple : Σ_K est le quotient du graphe quasi-périodique $\tilde{\Sigma}_K$ par la relation de quasi-périodicité ($\Sigma_K = \tilde{\Sigma}_K / R$).

Définition. *Soit R une relation d'équivalence mesurée. On dit que R est* arborable *si elle admet un graphage presque surement sans cycles (i.e. un graphage K tel que presque toutes les feuilles de la lamination Σ_K sont des arbres).*

2. Réduction des cycles d'un graphe quasi-périodique. Rappelons qu'un graphage K d'une relation d'équivalence mesurée peut être présenté par une famille $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ d'isomorphismes partiels dont les graphes partitionnent K (voir chap. II). Φ est l'analogue pour les relations d'équivalence des systèmes générateurs pour les groupes dénombrables. Soit Γ un groupe dénombrable. La donnée d'un système générateur $S \subset \Gamma$ détermine une présentation de Γ « par générateurs et relateurs », et il est clair que si l'on ôte un relateur de cette présentation, le groupe résultant n'est en général plus isomorphe à Γ. Pour les relations d'équivalence, il est possible d'ôter tout relateur de tout système générateur tout en engendrant la même relation d'équivalence, comme le montre le lemme suivant.

Soit (X, μ) un espace de probabilité et Φ une famille d'isomorphismes partiels de X. Un *cycle* sur X relatif à Φ est la donnée d'un Φ-mot cycliquement réduit m et d'une partie borélienne $D \subset \{m(x) = x\}$ spécifiant son domaine de définition.

Lemme de réduction. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ) et Φ un graphage de R. On considère un Φ-mot réduit m et un borélien $D \subset \{m(x) = x\}$. Alors il existe un* graphage *Φ' de R contenu dans Φ, tel que si l'on note m' le Φ'-mot associé à m,*

$$\mu\{x \in D \mid m'(x) = x\} = 0.$$

Avant de démontrer ce lemme, déduisons-en le résultat suivant (théorème 1 de l'introduction).

Corollaire 39. *Toute relation d'équivalence mesurée R préservant une mesure de probabilité contient une sous-relation arborable de coût $\geqslant C(R)$.*

Démonstration. Soit Φ un graphage de R. Numérotons les Φ-mots réduits, disons $m_1, m_2, \ldots$, et notons $D_i = \{x \in X, m_i(x) = x\}$ le domaine de m_i. Soit Φ_1 un graphage de R tel que

$$\mu\{x \in D_1, m_1^1(x) = x\} = 0,$$

où m_1^1 est la réduction de m_1 pour $\Phi_1 \subset \Phi$. Ôter une partie d'un générateur quelconque de Φ_1 n'accroît pas la mesure des domaines D_i et on obtient par récurrence (une numérotation des Φ-mots étant une numérotation des Φ_i-mots pour tout i) une suite $\Phi_2, \Phi_3, \ldots$ de graphages de R de sorte que pour Φ_N,

$$\mu\{x \in D_i,\ m_i^i(x) = x\} = 0,\ i \leqslant N.$$

Notons $\Phi_\infty = \cap_N \Phi_N$ le graphage limite (qui n'est plus *a priori* un graphage de R). Il ne contient aucun cycle non trivial. Comme pour tout N

$$C(\Phi_N) \geqslant C(R),$$

on a $C(\Phi_\infty) \geqslant C(R)$. ■

Remarque. 1. - Ce résultat a également été obtenu par A. Kechris et B. Miller [68] (indépendamment), voir [69].

2. - Mes motivations originales concernaient la relation entre le coût et les invariants L^2. Plus précisément, soient R une relation d'équivalence ergodique de type II_1 et $K \subset R$ un graphage de R. L'espace $Z_1(K)$ des cycles usuels dans le graphe quasi-périodique associé à K est R-invariant, et on note

$$\tau(K) = \dim_R \overline{Z_1(K)}$$

la dimension son adhérence, au sens de von Neumann (voir [38]). Le *taux de cycle de* R est alors défini par $\tau(R) = \inf_K \tau(K)$ où K parcourt la famille des graphages de R. Avec une démonstration identique à celle présentée dans [sc], on a les relations $C(K) - \tau(K) = \beta_1(R) + 1$, et $C(R) - \tau(R) = \beta_1(R) + 1$, où $C(K)$ désigne le coût de K. Notons que l'infimum définissant $\tau(R)$ est atteint si et seulement si R est arborable. Damien Gaboriau a montré que $C(R) \geqslant \beta_1(R) + 1$. La question de l'égalité qui m'intéressait alors (voir [38] question 3.22), et qui est toujours ouverte, conduit naturellement à étudier la possibilité d'effacer les cycles de K.

Question [38]. Existe-t-il une relation d'équivalence mesurée R ergodique de type II_1 telle que $\tau(R) > 0$?

Passons à la démonstration du lemme. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ). Fixons un graphage $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ de R et considérons un cycle m sur X relatif à Φ. On peut supposer (quitte à effectuer une permutation cyclique) que m s'écrit $\omega_n\varphi^{\varepsilon_n} \ldots \varphi^{\varepsilon_2}\omega_1\varphi$, où ω_i sont des Φ-mots ne contenant pas φ. Étant donnés $x \in D$ et $i \leqslant n$, on note $m^i(x)$ l'origine de la i-ème arête φ dans le cycle $m_{|x}$. Plus précisément, m^i est défini par $m^i = \omega_{i-1}\varphi^{\varepsilon_{i-1}} \ldots \varphi$ si $\varepsilon_i = 1$ et $m^i = \varphi^{-1}\omega_{i-1}\varphi^{\varepsilon_{i-1}} \ldots \varphi$ si $\varepsilon_i = -1$ (avec $m^1 = \mathrm{Id}$). Par exemple pour $m = \omega_3\varphi\omega_2\varphi^{-1}\omega_1\varphi$, $m^1 = \mathrm{Id}$, $m^2 = \varphi^{-1}\omega_1\varphi$ et $m^3 = \omega_2\varphi^{-1}\omega_1\varphi$. On dit que m est *simple* si la famille $(m^1(x), m^2(x), \ldots, m^n(x))$ des itérés de x est constituée de points deux à deux distincts pour μ-presque tout x de D. Sinon on dit que m est *composé*. Ainsi, m est composé si et seulement si il contient une conjugaison non triviale, i.e. m s'écrit sous la forme $m_3\varphi^{-1}m_2\varphi m_1$ avec $\{\varphi^{-1}m_2\varphi(x) = x\}$ non négligeable dans $m_1(D)$.

Fixons un cycle simple $m = \omega_n\varphi^{\varepsilon_n} \ldots \varphi^{\varepsilon_2}\omega_1\varphi$ de domaine D, et montrons qu'*il existe un borélien $A \subset D$ tel que la famille d'isomorphismes partiels obtenue en remplaçant φ par $\varphi_{|D\setminus A}$ dans Φ soit un graphage $\tilde{\Phi}$ de R pour lequel*

$$\mu\{x \in D,\ \tilde{m}(x) = x\} = 0.$$

Ceci entraîne le lemme pour les cycles simples. Si m est composé, il se décompose en cycles simples de la façon suivante. m est réduit par hypothèse, donc il existe pour presque tout x de D un sous-mot non trivial m_x de m commençant par φ, cyclique, simple et défini sur un itéré de x. Ceci détermine un nombre fini de boréliens sur lesquels m_x est un sous-mot fixé de m cyclique et simple sur son domaine, d'où l'assertion.

Il suffit donc de montrer l'affirmation. Notons m_i la i-ème φ-permutation cyclique de m qui commence par φ, définie par $m_i = \omega_{i-1}\varphi^{\varepsilon_{i-1}} \ldots \varphi^{\varepsilon_{i+1}}\omega_i\varphi$ si $\varepsilon_i = 1$ et $m_i = \omega_i^{-1}\varphi^{-\varepsilon_{i+1}} \ldots \varphi^{-\varepsilon_{i-1}}\omega_{i-1}^{-1}\varphi$ si $\varepsilon_i = -1$ (avec $m_1 = m$). Par exemple pour $m = \omega^{-1}\varphi^{-1}\omega\varphi$, on a (avec la notation m^i introduite ci-dessus) $m_2 = \omega\varphi^{-1}\omega^{-1}\varphi$, $m_1^2 = \varphi^{-1}\omega\varphi$ et $m_2^2 = \varphi^{-1}\omega^{-1}\varphi$. Soit

$$\mathcal{A} = \{A \subset D \mid \mu(A \cap m^k(A)) = 0 \ \ \forall k \geqslant 2\}.$$

Soit $A \in \mathcal{A}$. Par définition pour presque tout $x \in A$, la famille des itérés de x par m distincts de x est disjointe de A (A coupe chaque cycle $m_{|x}$ au plus une fois). Par suite on définit un graphage de R en remplaçant φ par $\tilde{\varphi} = \varphi_{|\,\mathrm{dom}(\varphi)\setminus A}$ dans Φ.

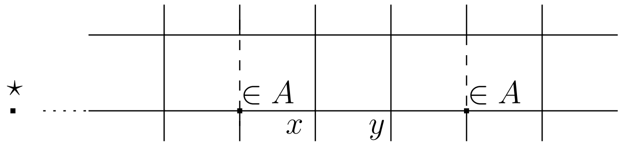


FIG. 6 – Un borélien A « localement maximal » dans l'orbite $\mathbf{Z}^2.\star$ (ni x ni y ne peuvent être ajoutés à A)

Montrons qu'un élément maximal $A \in \mathcal{A}$ contient pour presque tout $x \in D$ au moins un point du *bouquet de cycles*

$$B_x = \bigcup_{i \text{ t.q. } x \in D_i} \mathrm{Iter}_i(x),$$

où $D_i = m^i(D)$ est le domaine de m_i et $\mathrm{Iter}_i(x) = (m_i^1(x), \ldots, m_i^n(x))$, $x \in D_i$. En général A ne contient pas nécessairement un itéré de chaque point de D (ce qui effacerait complètement le cycle au sens où $\mu\{x \in D,\ \tilde{m}(x) = x\} = 0$). Remarquons d'abord que $\mathcal{A}$ est inductif. En effet si $A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots$ est une famille croissante d'élément de $\mathcal{A}$, la limite $A = \cup_n A_n$ obtenue en choisissant une suite A_n telle que $\sup_n \mu(A_n) = \sup_\alpha \mu(A_\alpha)$ appartient à $\mathcal{A}$ car $m^k(A) = \cup_\alpha m^k(A_\alpha)$ à un négligeable près. Notons également que *pour tout* $\Omega \subset D$ *non négligeable, il existe* $\Omega' \subset \Omega$ *non négligeable tel que* $\Omega' \cap m^k(\Omega') = 0$ *pour tout* $k \geqslant 2$. En effet, on a ponctuellement $m^k(x) \neq x$ pour $k \geqslant 2$ et tout x de $\Omega \subset D$. Or d'après le théorème de Lusin, il existe quitte à supposer que $X = [0,1]$, des fonctions continues $u^2, \ldots, u^n : [0,1] \to [0,1]$ telles que $\mu\{x \in \Omega,\ u^i(x) \neq m^i(x)\} \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En choisissant ε suffisamment petit, on obtient donc un borélien $B \subset \Omega$ non négligeable sur lequel $u^i = m^i$ pour tout $i \geqslant 2$. Soit x un point de densité de B. On a $\mu(V \cap B) > 0$ pour tout segment ouvert V contenant x. Soit V contenant x suffisamment petit pour que $u^i(V) \cap V = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. Alors $\Omega' = B \cap V$ convient.

En particulier $\mathcal{A}$ est contient des boréliens non négligeables. Soit A un élément maximal. Montrons que chaque bouquet de cycle B_x contient au moins un point de A. Sinon il existe un borélien $\Omega \subset D$ disjoint de A et de mesure > 0 tel que

$$A \cap m_i^k(\Omega \cap D_i) = 0, \quad \forall i,\ k = 1..n.$$

On peut supposer d'après le paragraphe précédent que $\Omega \in \mathcal{A}$. Montrons que $A \cup \Omega$ est disjoint de ses itérés, ce qui contredira la maximalité de A. Sinon il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $\mu(m^k(A \cup \Omega) \ \cap\ (A \cup \Omega)) > 0$, c'est-à-dire $\mu(m^k(A) \cap A) > 0$ ou $\mu(m^k(\Omega) \cap \Omega) > 0$ ou $\mu(m^k(\Omega) \cap A) > 0$ ou $\mu(m^k(A) \cap \Omega) > 0$. Les deux premiers cas ne peuvent arriver car A et $\Omega \in \mathcal{A}$, de même que le troisième par définition de Ω. Dans le dernier cas $\tilde{\Omega} = m^k(A) \cap \Omega$ est un borélien de mesure > 0 inclus dans Ω. Considérons deux entiers i' et k' tels que $m_{i'}^{k'} m^k(x) = x$ pour presque tout x de D (on peut choisir $i' = k$ et $D_{i'} = m^k(D)$). Alors $\tilde{\Omega} \subset \Omega \cap D_{i'}$ et $\mu(m_{i'}^{k'}(\tilde{\Omega}) \cap A) > 0$. Ceci contredit à nouveau la définition de Ω. Donc chaque bouquet de cycle B_x, $x \in D$, contient au moins un point de A.

Nous pouvons à présent conclure en itérant le procédé, i.e. en *effeuillant* chacun des bouquets de cycles. Considérons une suite $\varphi_{|\Omega_1} = \varphi \supset \varphi_{|\Omega_2} \supset \ldots \supset \varphi_{|\Omega_n}$ de restrictions de φ obtenue en appliquant successivement la procédure précédente à $m_{|D_i}$ où $D_1 = D$ et $D_i = \{x \in D_{i-1},\ m_{\varphi_{|\Omega_i}}(x) = x\}$. On note B_x^i ($x \in D_i$) le bouquet de cycle relatif à $m_{|D_i}$. Pour presque tout $x \in D_1$, B_x^1 contient au plus n cycles $\mathrm{Iter}_1(x), \ldots, \mathrm{Iter}_n(x)$. L'un d'eux au moins contient presque surement un point de $\Omega_1 \backslash \Omega_2$. Ainsi si $x \in D_2$ (i.e. si $\mathrm{Iter}_1(x)$ ne contient pas de point de $\Omega_1 \backslash \Omega_2$) alors B_x^2 contient au plus $n-1$ cycles. A la $n-1$-ième étape, B_x^{n-1} ($x \in D_{n-1}$) contient exactement un cycle, $\mathrm{Iter}_1(x)$. A la dernière étape, ce cycle contient au moins un point de $\Omega_{n-1} \backslash \Omega_n$, donc D_n est négligeable. Ceci achève la preuve du lemme. ∎

Remarque quantitative. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité invariante μ. Si m est un cycle simple de domaine D et A est un borélien maximal de $\mathcal{A}$, on a

$$\mu(A) \geqslant \frac{1}{n^2}\mu(D),$$

où n est la φ-longueur de m. En effet chaque bouquet de cycle contient au moins un point de A si et seulement si

$$D \subset \cup_{i,\ k \geqslant 1} m_i^k(A \cap D_i),$$

à un ensemble négligeable près. Pour effacer complétement le cycle (i.e. après n applications de la procédure), il faut ôter un borélien dont la taille est au moins

$$\mu(A) \geqslant \mu(D)/n.$$

Enfin, en choisissant les arêtes φ que l'on ôte en dehors d'un arborage fixé on obtient la version suivante du lemme de réduction.

Corollaire 40. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ) et $K \subset R$ un graphage de R. Soit $T \subset K$ un sous-arborage de K. Il existe une suite de borélien $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset K \backslash T$ telle que, en notant $E = \cup_n E_n$,*

- $K \backslash E_n \subset R$ est un graphage de R pour tout $n \geqslant 1$,

- $K \backslash E$ est un arborage.

12 Espaces métriques quasi-périodiques

1. Champ mesurable d'espaces métriques. Soit (X, μ) un espace de probabilité. On appelle *champ mesurable d'espaces métriques sur* X la donnée pour tout $x \in X$ d'un espace métrique (Y^x, d_x) tel que l'espace total $Y^X = \amalg_{x \in X} Y^x$ ait une structure borélienne standard pour laquelle,

– l'inclusion $Y^x \hookrightarrow Y^X$ est, pour tout x, un isomorphisme mesurable sur son image,
– la projection naturelle $p : Y^X \to X$ est mesurable.
– l'application $d : Y^X *_X Y^X \to [0, \infty[$ qui à deux points u et v tels que $p(u) = p(v)$ associe $d_{p(u)}(u, v)$, est mesurable.

Rappelons que le *produit fibré* $Y^X *_X Y^X$ de Y^X avec lui même au-dessus de X est la partie mesurable de $Y^X \times Y^X$ définie par

$$Y^X *_X Y^X = \{(u, v) \in Y^X \times Y^X \mid p(u) = p(v)\}.$$

2. Quasi-périodicité d'un espace métrique. Soit Q un espace singulier ergodique. On appelle *espace métrique Q-périodique* la donnée d'un foncteur covariant $Y : R \to \mathcal{C}$, où $R = R_p$ est associée à une désingularisation discrète $p : X \to Q$ de Q et $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces métriques (dont les morphismes sont les isométries), et qui vérifie les trois conditions suivantes,

– $Y^X = \amalg_{x \in X} Y^x$ est un champ mesurable d'espaces métriques sur X (où l'on note $Y^x = Y(x)$).
– l'application $Y : R *_X Y^X \to Y^X$ qui à $(x, y) \in R$ et $u \in Y^y$ associe $Y(x, y)u \in Y^x$ est mesurable.
– il existe une partie borélienne $F \subset Y^X$ (domaine fondamental) tel que pour tout $x \in X$, $Y^x = \amalg_{y \sim x} Y(x, y) F^y$.

Soit Y un espace métrique quasi-périodique. On appelle Y^X *l'enveloppe de* Y et on note Ω l'espace quotient de Y^X par l'action de R. L'existence d'un domaine fondamental assure que Ω est un espace borélien standard, qu'on appelle quotient de Y par la relation de quasi-périodicité. On dit que Y^x est une *réalisation* (géométrique) de Y.

On dit qu'un espace métrique quasi-périodique Y est *séparable* s'il existe une partie borélienne de Y^X dont l'intersection avec presque toute réalisation est dénombrable et dense. On appelle *point de* Y la donnée d'une section mesurable $u : X' \to Y^X$ de la projection, où X' est une partir non négligeable de X. Ainsi Y est séparable si et seulement si il contient une famille dénombrable dense de points.

Exemple. Il est facile de vérifier qu'un complexe simplicial quasi-périodique est un espace métrique séparable quasi-périodique (pour la métrique simpliciale).

Soit P un espace métrique compact. On dit que P est un *motif* de Y s'il existe une partie borélienne $P^X \subset Y^X$ non négligeable, au sens où la projection X_P de P^X sur

X est une partie (nécessairement mesurable) non négligeable de X, et telle que P^x est isométrique à P pour presque tout $x \in X_P$.

Répétition des motifs. *Soit Y un espace métrique quasi-périodique et P un motif apparaissant dans Y. Alors presque toute réalisation de Y contient une infinité de copies de P.*

Démonstration. Soit P un motif. Considérons le borélien $U \subset Y^X$ saturé de P^X par l'action de R. L'ensemble X' des $x \in X$ pour lesquels U^x ne contient qu'un nombre fini d'itérés de P distinctes est une partie mesurable de X. En effet X' est la réunion des parties $X'_i \subset X$ définies par

$$\begin{aligned} X'_i = \{x \in X \mid \exists\, z_1 \sim z_2 \sim \ldots \sim z_i \sim x,\ \forall y \sim x, Y(x,y)P_y = P^x \\ \text{ou } Y(x,y)P_y = Y(x,z_1)P^{z_1} \text{ ou } Y(x,y)P_y = Y(x,z_i)P^{z_i}\} \end{aligned}$$

qui sont mesurables, comme on le voit facilement en partitionnant R en isomorphismes partiels. De plus, cet ensemble étant clairement invariant, il est négligeable ou de complémentaire négligeable. Dans le second cas, choisissons un ordre mesurable total sur le domaine fondamental F (tiré en arrière de l'ordre de $[0,1]$), et étendons le par équivariance en un ordre mesurable sur Y^X. Ainsi si $V \subset Y^X$ est une partie borélienne rencontrant chaque réalisation de Y selon une partie finie, la fonction qui à $x \in X$ associe le plus petit des points de $V \cap Y^x$ est mesurable. Par ailleurs, il est bien connu qu'il existe une section mesurable $u : X_P \to P^X$, i.e. qu'il existe un point dans P^X (cf. [67]). Il en résulte facilement que l'application v qui à $x \in X'$ associe la plus petite valeur d'adhérence de l'orbite de u dans Y^x est bien définie (car le saturé de P est compacte dans Y^x) et mesurable. De plus, étant équivariante, elle passe au quotient en une application mesurable $X' \to \Omega$ et invariante, donc essentiellement constante. Ceci contredit le fait que $v(x) \in Y^x$ presque surement. ∎

3. Quotient par la relation de quasi-périodicité. Soit Y un espace métrique quasi-périodique, et $\Omega = Y/R$ le quotient de Y par la relation de quasi-périodicité. Il y a sur Ω une relation d'équivalence borélienne naturelle $\mathcal{R} \subset \Omega \times \Omega$ dont les classes sont

FIG. 7 – Quasi-périodicité, périodicité.

les projections dans Ω des réalisations de Y. De plus l'application $d_\Omega : \Omega \times \Omega \to [0,\infty]$ définie en projettant la distance de Y sur Ω est bien définie, mesurable, et vérifie tous les axiomes d'une métrique, expectée le fait qu'elle prend (génériquement) la valeur $+\infty$. On a $\mathcal{R} = \{d < \infty\}$.

La situation globale est décrite par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
(X,R) \arrow[r, dashed, shift left, "u"] \arrow[dd, "p_X"'] & (Y^X, d_Y) \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[d, "q"] \\
 & (\Omega, d_\Omega) \arrow[dl, "q_\Omega"] \\
(Q, [\Lambda]) &
\end{tikzcd}$$

13 Quasi-périodicité du point de vue probabiliste

Cette section plus spéculative présente la quasi-périodicité du point de vue de probabiliste. L'espace des évènements est ici singulier (ses points contiennent de l'information) alors qu'il est standard en théorie des probabilités — où l'on place dans le cadre des espaces topologiques polonais, hypothèse naturelle incluant par exemple les espaces fonctionnels. La lecture de cette section peut être omise sans problème. Elle ne contient aucun résultat mathématique.

L'idée de base est de considérer qu'un espace quasi-périodique concret Y (variété riemannienne,...) est une **réalisation**, au sens probabiliste du terme, **d'un évènement** ayant lieu sur un espace auxiliaire $\mathcal{U}_Y$ — l'univers dans la terminologie probabiliste — et que l'on présentera pour l'instant comme « l'ensemble des espaces indistinguables de Y ». Cet espace ne sera pas réduit à Y, sauf dans le cas périodique. Le terme indistinguable signifie par définition que toutes les observations

$$f : \mathcal{U}_Y \to E$$

effectuées sur $\mathcal{U}_Y$ et à valeurs dans 'écran' standard, par exemple $E = \mathbf{R}^n$ ou un espace borélien standard, conduisent à un résultat *trivial.* Notons que $\mathcal{U}_Y$ est un espace singulier au sens empirique du chapitre I. Ses points sont eux-même des espaces et l'hypothèse d'indistinguabilité impose de nombreuses relations entre ces points. Sur l'espace singulier des groupes de type fini par exemple (voir le chapitre I), on dispose de nombreuses observables naturelles, e.g. les nombres de Betti ℓ^2

$$\beta_n : \mathfrak{gr} \to [0, \infty],$$

et plus généralement tout invariant d'isomorphisme (propriété T, etc). Il ne rentre donc pas (immédiatement) dans le cadre de ce chapitre.

L'intérêt de l'hypothèse d'indistinguabilité peut être illustré par l'observation suivante. Si l'idée de quasi-périodicité est difficile à cerner en elle-même, l'une de ses conséquences est claire, néanmoins : toute une région finie de Y (ou plus généralement compacte) doit se répèter au moins une fois — et donc une infinité de fois — dans Y (définir une notion de quasi-périodicité consiste à décrire de quelle façon ces régions se répètent). On peut déduire cette propriété de l'hypothèse ci-dessus de la façon suivante. Supposons qu'il existe une region compacte suffisamment grande de $P \subset Y$ qu'on ne peut retrouver nulle part ailleurs dans Y. Par indistinguabilité, tous les elements de $\mathcal{U}_Y$ contiennent une copie de P (considérer l'observable qui à $Y \in \mathcal{U}_Y$ associe 1 si Y contient P et 0 sinon). Alors l'observable f, qui à un point de $\mathcal{U}_Y$ associe un point de la copie de P qu'il contient, prend uniquement des valeurs distinctes, par définition, et est en particulier non triviale.

Techniquement, et dans le cadre *mesuré* (probabiliste) qui nous concerne, la trivialité des observables fait référence à la « loi du 0-1 », et celle-ci consiste précisément en la donnée d'une structure mesurée **ergodique** sur $\mathcal{U}_Y$ (le terme ergodique provient de la nature dynamique de l'univers $\mathcal{U}_Y$ des espaces possibles). Ceci signifie que toute fonction *mesurable* $f : \mathcal{U}_Y \to E$ à valeur dans un espace borélien standard est *essentiellement constante*, où 'mesurable' et 'essentiellement' font référence à la structure mesurée singulière sur $\mathcal{U}_Y$ et une mesure « singulière » Λ relative à cette structure (voir ci-dessous). En ce sens toutes les observables sont triviales. Soulignons que l'hypothèse de mesurabilité sur ces observables, classique en théorie des probabilités, est également essentielle dans notre cas. L'axiome du choix, en effet, signifie précisement que si l'on se donne un espace singulier tel que $\mathcal{U}_Y$, i.e. dont les éléments sont des espaces, on peut choisir un point dans chacun de ces éléments et donc construire une observable non triviale. Étant donné que nous conservons cet axiome comme outil (bien que ce ne soit pas toujours indispensable), ceci conduit à décrêter que toute fonction dont l'existence résulte d'un axiome n'est pas observable : seules les fonctions dont l'existence est 'averée', par exemple les nombres de Betti ℓ^2 sur l'espace des groupes, le sont. Dans l'esquisse de raisonnement ci-dessus, impliquant la répétition des parties compactes, nous avons admis la mesurabilité de f ainsi que la nature standard de l'espace de ses valeurs (ce sera justifié ci-dessous). En contrepartie nous avons construit « explicitement » cette fonction. Le choix d'un point dans chaque copie de P ne nécessite pas l'axiome du choix.

Dans ce contexte, *l'espace quasi-périodique concret* qui résulte de cette modélisation *est déterminé par les observations effectuées*, au sens où il s'agit d'un élément de

$$\chi_{f_1=a_1} \cap \ldots \cap \chi_{f_n=a_n} \cap \ldots$$

où les fonctions $f_i : \mathcal{U}_Y \to E_i$ sont une suite d'observations et l'évènement $\chi_{f_i=a_i}$ est constitué de l'ensemble des espaces sur lesquel f_i prend la valeur a_i. Si l'une des valeurs a_i n'est pas la valeur essentielle de f_i, les réalisations de l'espace quasi-périodique qui en résultent sont dégénérées, signifiant simplement que $f_i = a_i$ n'est pas une propriété de l'espace quasi-périodique considéré. Ceci permet d'exhiber très simplement un aspect « quantique » des espaces mesurés singuliers. Il est essentiel ici que les éléments de l'univers $\mathcal{U}$ soient eux-même des espaces. (Avec le défault cependant que toutes les observations considérées ici donnent des résultats triviaux ; pour récuperer des observables non triviales dans la présente situation, il faut faire intervenir les algèbres de von Neumann.)

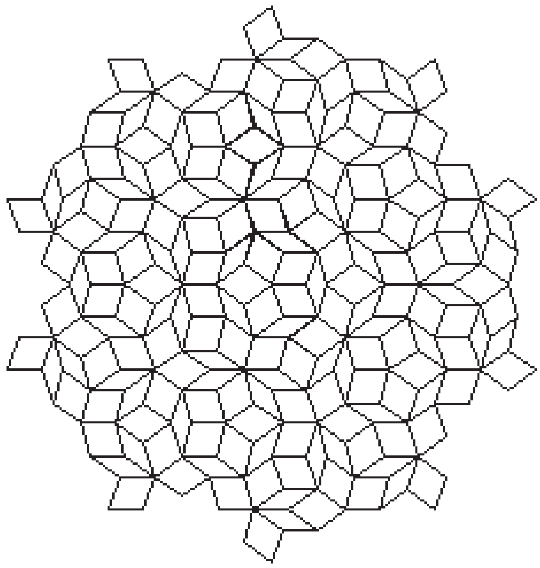


FIG. 8 – Feuilletages du tore et pavages de Penrose.

—

Au niveau de précision qui nous concerne, il résulte de ce qui précède que la structure quasi-périodique sur Y est entièrement déterminée par la structure mesurée singulière sur $\mathcal{U}_Y$. Nous appelons donc *concept (mesuré) de quasi-périodicité* la donnée d'une *classe d'isomorphisme d'espaces mesurés singuliers.*

Par définition, un espace mesuré singulier est un ensemble de la forme $Q = X/R$ où R est une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ). L'hypothèse d'ergodicité traduit le fait que toute fonction **mesurable invariante** $f : X \to E$ à valeurs dans un espace borélien *standard* est *presque sûrement* constante (la définition concerne le cas $E = \{0, 1\}$ et s'étend immédiatement à $E \simeq [0, 1]$). Ceci signifie d'une part qu'il est impossible de sélectionner mesurablement une partie finie dans presque toutes les classes, et d'autre part qu'il est impossible de distinguer les classes entre elles par des observables mesurables. Nous interprètons ces deux propriétés en disant que presque toutes *les classes sont quasi-périodiques*, et ce, relativement à la *même notion de quasi-périodicité.* (En d'autres termes, il m'est très souvent arrivé de dire que, dans de nombreux cas, une relation d'équivalence ergodique n'est rien d'autre qu'un ensemble dénombrable quasi-périodique.)

Un tel concept de quasi-périodicité s'applique aux espaces métriques (ou plus généralement, topologiques, ou boréliens) de la façon suivante. Étant donnés deux espaces quasi-périodiques Y_1 et Y_2, on commence par 'oublier' toute l'information géométrique qu'ils contiennent en choisissant dans chacun d'eux une partie dénombrable qui reflète fidèlement leur aspect quasi-périodique. En termes techniques, on fixe deux sous-relations d'équivalence mesurées à classe dénombrables R_1 et R_2 dans Y_1 et Y_2 telles que R_i et Y_i soient **stablement isomorphes**. On compare ensuite la quasi-périodicité de ces deux ensembles dénombrables, eux-même devant contenir deux parties dénombrables identiquement quasi-périodique (i.e. R_1 et R_2 sont elles même stablement isomorphes). L'isomorphisme de deux espaces mesurés singuliers signifie par définition l'isomorphisme stable des relations d'équivalence mesurées qui les définissent.

Signalons enfin que, étant donné un espace mesuré singulier arbitraire, on peut le décomposer en composantes ergodiques et ceci revient à rechercher les différentes notions de quasi-périodicités qu'il peut définir.

CHAPITRE III. STRUCTURES MÉTRIQUES-MESURÉES QUASI-PÉRIODIQUES

—

Au niveau intuitif, la situation est la suivante. Considérons un espace métrique Y, au sens usuel du terme, non compact, mais satisfaisant à certaines propriétés de quasi-périodicité. On peut alors espérer associer à chaque partie borélienne quasi-périodique de Y un nombre réel positif représentant le *covolume* de cette partie dont la valeur est proportionelle à sa « densité » dans Y. Dans le cas périodique, i.e. lorsque Y est muni d'une action libre d'un groupe discret, la donnée d'une mesure sur l'espace quotient détermine une telle densité. Dans le cas quasi-périodique, et si nous prenons le terme au sens du chapitre précédent, alors une réponse identique est aussi aussi satisfaisante. Nous avons en effet à disposition un espace borélien standard représentant le quotient de Y par la relation de quasi-périodicité, et l'on peut munir cet espace d'une mesure borélienne, convenablement choisie. Ceci détermine un covolume sur Y.

L'existence conjointe d'un covolume et de la métrique définit une structure *d'espace métrique-mesuré* sur Y.

Les résultats de la première partie ont pour objet l'étude métrique-mésurée des espaces mesurés singuliers, et plus précisément, des structures géométriques associées à ces espaces. En fait, ils concernent essentiellement le cas des *graphes* quasi-périodiques. Le but de la deuxième partie de ce chapitre est de les étendre à des structures géométriques plus générales.

—

Abstract

Recall Jones-Schmidt's theorem that an ergodic measured equivalence relation is strongly ergodic if and only if it has no nontrivial amenable quotient. In this paper, we give two new characterizations of strong ergodicity, in terms of metric-measured spaces. The first one identifies strong ergodicity with the concentration property as defined, in this (foliated) setting, by Gromov [48]. The second one characterize the existence of nontrivial amenable quotients in terms of "Følner sequences" in graphs naturally associated to (the leaf space of) the equivalence relation.

We also present a formalization of the concept of quasi-periodicity, based on measure theory. The "singular measured spaces" appearing in the title refer to the leaf spaces of measured equivalence relations.

14 Introduction

L'importance fondamentale des structures transverses de feuilletages a été mise en avant au milieu des années 1950 par les travaux d'André Haefliger ([54] par exemple, voir l'exposé historique [55]). Ces structures, définies sur les variétés transverses et invariantes par holonomie, reflètent des propriétés de *l'espace des feuilles* du feuilletage considéré.

Il est bien connu que l'espace des feuilles en lui-même est, le plus souvent, « singulier ». Ainsi en est-il des exemples les plus simples, dont les feuilletages linéaires du tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ de dimension 2, par droites de pente irrationnelle (feuilletages de Kronecker). Néanmoins, une analyse non triviale de ces espaces reste possible. Elle a été initiée à la fin des années 1970 par A. Connes dans [25]. De façon générale, le concept d'*espace singulier* traduit l'existence sur de nombreux espaces quotients *a priori* non standard, en particulier sur l'espace des feuilles d'un feuilletage ou d'une lamination, de structures canoniques non triviales et intrinsèques. Ces structures, de même que pour les espaces classiques, peuvent être de natures diverses, e.g. mesurée, topologique, différentielle, métrique. Cette étude concerne la théorie de la mesure des espaces singuliers.

—

Les *relations d'équivalence* interviennent par nature même dans l'étude des espaces quotients. Elles en constituent, par définition, des *désingularisations.* Désingulariser un espace singulier en un espace usuel a pour avantage immédiat d'en permettre l'étude à l'aide d'outils mathématiques standard. D'une certaine mesure, ce point de vue rapproche les espaces singuliers des variétés : une désingularisation est l'analogue d'une carte en géométrie différentielle, son rôle est de (sur)paramétrer convenablement l'espace quotient. Une structure singulière sur un ensemble consiste, ainsi, en la donnée d'un « système de désingularisations compatibles » de cet ensemble. La théorie de la mesure des espaces singuliers repose alors sur la notion de *relation d'équivalence mesurée*, fondée dans [33].

Soit X un espace borélien standard. Une relation d'équivalence *à classes dénombrables* sur X est *borélienne* si son graphe $R \subset X \times X$ est réunion d'une famille dénombrable d'isomorphismes partiels boréliens de X. Lorsque X est muni d'une mesure de probabilité sans atome μ et que ces isomorphismes partiels *préservent la classe de* μ, on dit que R est une *relation d'équivalence mesurée* (cf. §15). Par exemple, une action α d'un groupe dénombrable par automorphismes boréliens de (X, μ) définit une relation d'équivalence borélienne sur X (la partition en orbites), et cette relation est mesurée si μ est *quasi-invariante* par α. De nombreux travaux importants (notamment, Adams, Furman, Gaboriau, Hjorth, Kechris, Monod, Popa, Shalom,...) ont récemment contribué à un développement significatif de la théorie.

Deux relations d'équivalence mesurées R_1 sur (X_1, μ_1) et R_2 sur (X_2, μ_2) désingularisent un même espace mesuré singulier si et seulement si elles sont *stablement isomorphes*, au sens où il existe un isomorphisme borélien non singulier $\rho : X_1' \to X_2'$ entre deux parties boréliennes non négligeables $X_1' \subset X_1$ et $X_2' \subset X_2$ tel que $x \sim_{R_1} y \iff \rho(x) \sim_{R_2} \rho(y)$ pour $x, y \in X_1'$. Nous dirons d'une propriété de relation d'équivalence mesurée, invariante par isomorphisme stable, qu'elle est une *propriété de l'espace mesuré singulier* des orbites de cette relation.

L'*ergodicité* et l'*ergodicité forte* sont des propriétés d'espaces mesurés singuliers. L'ergodicité est une notion dynamique classique. Une relation d'équivalence mesurée sur X est *ergodique* si tout borélien *saturé* est négligeable ou de complémentaire négligeable, i.e. si X ne contient pas de boréliens invariants non triviaux. L'ergodicité forte, également de nature dynamique, a été introduite par Connes-Weiss [30] et Schmidt [99]. Une action borélienne α d'un groupe dénombrable Γ quasi-préservant une mesure de probabilité μ sur X est *fortement ergodique* si elle ne possède pas de parties boréliennes asymptotiquement invariantes non triviales. Rappelons que, suivant [29, 99, 30, 100], une suite $A_n \subset X$ de parties boréliennes est dite *asymptotiquement invariante* sous l'action α si

$$\mu(\alpha(\gamma)A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, et qu'elle est dite *non triviale* s'il existe $\delta > 0$ tel que, à extraction

près,
$$\delta \leqslant \mu(A_n) \leqslant 1 - \delta.$$
On vérifie que l'existence de suites asymptotiquement invariantes non triviales ne dépend effectivement que de l'espace singulier des orbites de l'action α.

La notion d'ergodicité forte a permis à Connes et Weiss [30] de caractériser les groupes de Kazhdan dénombrables par leurs actions ergodiques *préservant une mesure de probabilité* (que l'on appellera ergodique de type II_1), et à Schmidt [100] et Losert-Rindler [75] ont de caractériser les groupes moyennables, dans le même esprit. Plus précisément, on la les résultats suivants : *i)* toute action ergodique de type II_1 d'un groupe de Kazhdan est fortement ergodique, comme l'a observé K. Schmidt [99] *ii)* un groupe qui possède pas la propriété T possède au moins une action ergodique de type II_1 non fortement ergodique [30] *iii)* un groupe est moyennable si et seulement s'il ne possède pas d'action ergodique de type II_1 qui soit fortement ergodique [75, 100].

Citons également un théorème particulièrement remarquable, le *théorème de Jones-Schmidt*, montrant qu'une relation d'équivalence mesurée (à classes dénombrables) ergodique est fortement ergodique si et seulement si elle ne possède pas de quotient moyennable non trivial (cf. [62]).

L'article récent G. Hjorth et A. Kechris [58, App. 1] contient une présentation détaillée de la notion d'ergodicité forte pour les relations d'équivalence mesurées.

—

Avant d'énoncer nos résultats, décrivons la nature des structures métriques-mesurées associées aux espaces singuliers.

Au niveau intuitif, la situation est la suivante. Considérons un complexe simplicial Y, au sens usuel du terme, non compact, mais satisfaisant à certaines propriétés de *quasi-périodicité*. On peut alors légitimement espérer associer, à chaque partie borélienne quasi-périodique de Y, un nombre réel positif représentant le *covolume* de cette partie, de valeur proportionelle à sa « densité » dans Y. Dans le cas périodique, i.e. lorsque Y est muni d'une action libre d'un groupe discret, la donnée d'une mesure sur l'espace quotient détermine une telle densité. L'existence conjointe d'un covolume et d'une métrique (de la métrique simpliciale par exemple) définit alors sur Y une structure *d'espace métrique-mesuré*. De façon similaire, *les espaces métriques-mesurés associés aux espaces singuliers sont des espaces métriques quasi-périodiques, munis d'un covolume.*

Soit M une variété et F un feuilletage *minimal* sur M (i.e. toutes les feuilles sont denses). Il est relativement clair que la fonction indicatrice d'un voisinage ouvert d'un point de M est, en restriction à chaque feuille de F, une fonction « quasi-périodique » définie sur cette feuille. Si F est *ergodique*, la même observation est valable, non seulement pour les voisinages ouverts, mais aussi pour la fonction indicatrice de toute partie borélienne non négligeable ; celle-ci définit une fonction quasi-périodique en restriction à une feuille générique de F. Ces observations sont bien connues. Elles peuvent être illustrées plus précisément, par exemple par les théorèmes de Ghys [41] et Cantwell-Conlon [17] sur la topologie des feuilles d'une feuilletage de dimension 2. Il est également intéressant de noter, réciproquement, qu'un espace métrique possédant certaines propriétés de quasi-périodicité peut parfois être plongé dans une lamination minimale, ou ergodique, de façon interessante ; pour un exemple concret d'une telle construction, nous renvoyons le lecteur à l'étude des quasi-cristaux telle qu'exposée dans [11] par exemple.

Le point de vue que nous adoptons dans cet article est de considérer que chaque espace singulier, par exemple l'espace $Q = M/F$ des feuilles de F, est un concept (une notion) de quasi-périodicité. Nous nous intéressons uniquement ici aux *aspects mesurés* du concept de quasi-périodicité et de sa formalisation (i.e. au cas *ergodique*).

Considérons l'exemple le plus simple, celui des *graphes quasi-périodiques associés à un espace mesuré singulier* Q (que l'on appellera *graphes* Q*-périodiques*) :

•) Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ). Soit $K \subset R$ une partie borélienne symétrique de R. On dit que K est un *graphage* de R si pour tous points équivalents $x, y \in X$, il existe un nombre fini $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ de points de X tels que $(x_i, x_{i+1}) \in K$. En suspendant K au-dessus de X, i.e. en attachant pour tout $(x, y) \in K$ une arête $\simeq [0, 1]$ entre x et y, on obtient alors une « lamination » Σ_K dont les feuilles sont des graphes, et dont X est une transversale totale. Soulignons que les orbites de R sont connexes dans Σ_K. Connes, Feldman, et Weiss [28] ont pour la première fois considéré les parties boréliennes $K \subset R$ comme des familles mesurables de graphes sur les orbites de R ; la notion de graphage au sens présenté ici (i.e. lorsque les orbites sont connexes) a été introduite par Levitt (cf. [37]). (voir §15)

•) À une relation d'équivalence mesurée R sur X et un graphage K de R, on associe le *graphe quasi-périodique* $\tilde{\Sigma}_K$ dont, par définition, les sommets sont les points de $R \subset X \times X$, et les arêtes sont les couples $((x, y), (x, z))$ de points de R tels que $(y, z) \in K$. Soit Q un espace singulier. On dit que $\tilde{\Sigma}_K$ est *un graphe* Q*-périodique* lorsque Q est l'espace de ses feuilles, i.e. $Q = X/R$.

La relation entre $\tilde{\Sigma}_K$ et Σ_K est simple : Σ_K est le quotient du graphe quasi-périodique $\tilde{\Sigma}_K$ par la relation de quasi-périodicité ($\Sigma_K = \tilde{\Sigma}_K/R$). Ces définitions s'étendent bien sûr en dimension supérieure. Les complexes simpliciaux Q-périodiques ont été introduits par D. Gaboriau dans [38] en relation avec les nombres de Betti L^2 (voir aussi le paragraphe §17). Plus généralement, de nombreuses catégories d'espaces métriques séparables contiennent de façon naturelle des espaces quasi-périodiques en un sens analogue (en particulier les variétés riemanniennes).

La *structure métrique-mesurée* sur Σ_K est par définition donnée par la métrique simpliciale d sur chaque feuille et par la mesure transverse μ définie sur les boréliens de

X. Cette structure se revèle à $\tilde{\Sigma}_K$ qui est un exemple fondamental d'espace métrique-mesuré quasi-périodique associé à Q. Le support du covolume ainsi défini sur $\tilde{\Sigma}_K$ est constitué de boréliens *quasi-périodiques* (de sommets, i.e. inclus dans R). Les graphes quasi-périodiques que nous considérons sont toujours supposés *connexes et de covolume fini.* Notons que la métrique simpliciale sur $\tilde{\Sigma}_K$ peut prendre la valeur $+\infty$ (deux points sont à distance infinie si et seulement s'ils ne sont pas sur une même feuille). Les complexes simpliciaux quasi-périodiques associés aux espaces mesurés singuliers sont des espaces métriques-mesurés au sens où l'a défini M. Gromov dans [48] (dans le cadre des feuilletages, où la métrique est longitudinale et la mesure, la mesure de Lebesgue sur la variété).

Ce paragraphe peut être résumé par les diagrammes suivants.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \Sigma = \tilde{\Sigma}/\Gamma \arrow[dl, "p"] \\
Q = \{\star\} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \Sigma = \tilde{\Sigma}/R \arrow[dl, "p"] \\
Q &
\end{tikzcd}$$

Sur le digramme de gauche, $\tilde{\Sigma}$ est un complexe simplicial usuel muni d'une action libre et disons, cocompacte, d'un groupe discret Γ. Il s'agit du cas périodique. Sur le diagramme de droite $\tilde{\Sigma}$ est un complexe simplicial quasi-périodique au sens ci-dessus muni d'une action libre d'une relation d'équivalence R. Il s'agit du cas quasi-périodique. L'hypothèse de cocompacité est remplacée dans le cas quasi-périodique par la définition suivante.

Définition. *On dit qu'un complexe simplicial Q-périodique est* uniformément localement fini (u.l.f.) *si le nombre de simplexes attachés en chacun de ses sommets est uniformément fini.*

—

La première question qui se pose lors de l'étude d'un espace métrique-mesuré est celle de la concentration de la mesure. Notre premier résultat établit un lien direct entre ergodicité forte et concentration.

La plus simple des notions de quasi-périodicité (non périodique) obtenue à l'aide des espaces mesurés singuliers est *l'hyperfinitude.* Considérons par exemple une *droite* *quasi-périodique* Σ, i.e. $\Sigma = \Sigma_K$ est associé au graphe $K \subset X \times X$ d'un automorphisme partiel φ de (X, μ) agissant essentiellement librement (automorphisme apériodique) en préservant la mesure μ. L'espace singulier $Q = X/\langle\varphi\rangle$ est hyperfini (ce qui signifie que la relation d'équivalence R_φ des orbites de φ est réunion *croissante* de sous-relations à *orbites finies*). On peut alors vérifier la propriété suivante. Étant donnés un nombre fini de parties boréliennes quasi-périodiques de Σ de covolume suffisament petit, on peut écarter (pour la métrique simpliciale) chacune de ces parties les unes des autres sans toutefois en modifier les covolumes respectifs. En effet, le *lemme de Rokhlin* montre qu'il existe pour tout n une famille finie $\Omega_1, \dots \Omega_n$ de boréliens disjoints de X tels que $\varphi(\Omega_i) = \Omega_{i+1}$ et $\mu(X \setminus \amalg\, \Omega_i) \leqslant \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \to_n 0$. Il est alors élémentaire de construire deux (ou plusieurs) suites (A_n) et (B_n) de mesure (convergeant vers) $1/4$ (ou $c > 0$ assez petit), formées de réunions de certaines des parties Ω_i, et telles que la distance entre A_n et B_n converge vers $+\infty$.

Définition ([48]). *On dit qu'un espace métrique-mesuré* (Σ, d, μ) *est* concentré *s'il existe une fonction* $c :]0, \infty]^2 \to \mathbf{R}_+$*, telle que pour tous boréliens non négligeables* $A, B \subset \Sigma$*, on a*

$$d(A, B) \leqslant c(\mu(A), \mu(B)).$$

Nous dirons d'une propriété d'espace singulier ergodique qu'elle est un *paramètre de quasi-périodicité*. Le résultat qui suit (cf. §19) montre que la concentration des graphes Q-périodiques un paramètre de quasi-périodicité (l'hypothèse « de type fini » figurant dans ce théorème est comparable à celle utilisée en théorie des groupes et reflète l'existence de suffisamment de complexes simpliciaux Q-périodiques u.l.f., voir la proposition 50).

Théorème 41. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes,*

i. Il existe un graphe Q-périodique u.l.f. concentré,

ii. Tout graphe Q-périodique u.l.f. est concentré.

On dira dans ce cas que l'espace singulier Q est concentré.

Remarque. Ce théorème s'étend à d'autres espaces métriques séparables que les graphes. Rappelons que la structure métrique-mesurée considérée pour les graphes est donnée par le couple (distance simpliciale, covolume) ; le support du covolume est de dimension 0 au sens où il néglige les boréliens (non quasi-périodiques ou) non portés par les sommets. Il est néanmoins clair que, si ces graphes sont concentrés, alors les complexes simpliciaux Q-périodiques u.l.f., munis par exemple d'un covolume porté sur les simplexes de dimension i, sont également concentrés ; il en résulte aussi que les variétés Q-périodiques sont également concentrées, où l'on remplace l'hypothèse u.l.f. par l'hypothèse « à géométrie bornée ». (cf le chapitre la seconde partie)

Nous montrons au paragraphe 19 le théorème suivant.

Théorème 42. *Un espace singulier ergodique de type fini est concentré si et seulement s'il est fortement ergodique.*

Le point de vue de la concentration de la mesure pour les relations d'équivalence, et notamment une version *quantitative* de la propriété de concentration des espaces quasi-périodiques associés à un espace singulier, sont susceptibles de donner de nouveaux invariants pour les relations d'équivalence fortement ergodiques. Observons que, dans le cas périodique cocompact, la propriété de concentration est un phénomène trivial au niveau qualitatif (tous les espaces compacts sont concentrés au sens ci-dessus), mais que des phénomènes remarquables apparaissent au niveau quantitatif (e.g. concentration normal ou exponentielle), et il semble être intéressant de mener une étude « systématique » de la concentration pour les relations d'équivalence mesurées (cette étude est en projet).

—

La *classification des relations d'équivalence moyennables* (mesurées à classes dénombrables) a été achevée en 1981 suite à la démonstration par Connes, Feldman et Weiss du théorème suivant. *Toute relation d'équivalence mesurée moyennable peut être engendrée par une seule transformation de l'espace.* Les auteurs montrent l'équivalence de plusieurs définitions du concept de moyennabilité pour les relations d'équivalences mesurées, et obtiennent notamment une caractérisation des relations moyennables en terme de suites de Følner présentes dans les structures de graphes mesurables sur les orbites de la relation (cf. [28]). Nous définissons au paragraphe 20, étant donné un graphe quasi-périodique $\tilde{\Sigma}$, la notion de *suites de Følner évanescentes* dans $\tilde{\Sigma}$. Il s'agit d'une reformulation géométrique de la notion dynamique de *I-suites* considérée par Schmidt dans [100] pour des actions de groupes dénombrables préservant une mesure de probabilité.

Définition. *Soit $\tilde{\Sigma}$ un graphe Q-périodique u.l.f. muni de sa structure métrique-mesurée $(\tilde{d},\tilde{\mu})$ =(métrique simpliciale, 0-covolume) décrite ci-dessus. Étant donnée une partie borélienne $\tilde{A}\subset\tilde{\Sigma}^{(0)}$ de sommets, on note $\partial_K\tilde{A}$ l'ensemble des sommets de $\tilde{\Sigma}^{(0)}\backslash\tilde{A}$ reliés à $\tilde{A}$ par une arête. On dit qu'une suite $(\tilde{A}_n)$ de parties boréliennes non négligeables de $\tilde{\Sigma}$ est une* suite de Følner évanescente *s'il existe une suite (ε_n) de nombres réels convergeant vers 0 telles que*

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}_n)\to 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mu}(\partial_K\tilde{A}_n)\leqslant\varepsilon_n\tilde{\mu}(A_n).$$

Nous démontrons au paragraphe 20 le théorème suivant. Notons que la preuve que nous en donnons, inspirée par [28], ne fait usage de l'existence de quotients moyennables non triviaux qu'en termes de suites asymptotiquement invariantes.

Théorème 43. *Un espace singulier ergodique de type fini Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphe Q-périodique uniformément localement fini possède des suites de Følner évanescentes.*

Ce théorème également s'étend à d'autres espaces métriques-mesurés que les graphes.

—

Je remercie Damien Gaboriau pour son aide constante au cours de l'élaboration de ce travail.

Je dois également beaucoup à Étienne Ghys, ainsi qu'aux excellentes conditions de travail dont on bénéficie au sein de l'UMPA.

Je remercie Yann Ollivier pour sa lecture critique du manuscrit. Je remercie Damien Gaboriau pour ses lectures, du manuscrit et des nombreuses versions antérieures, qui auront permis d'améliorer considérablement ce texte.

—

15 Relations d'équivalence mesurées

Soit X un espace borélien standard. Rappelons qu'il s'agit d'un espace polonais (topologique séparable admettant une métrique complète) muni de sa structure borélienne. On dit qu'une relation d'équivalence R sur X est *borélienne* si son graphe $R \subset X \times X$ est une partie borélienne.

Les relations d'équivalence *à classes dénombrables* jouent un rôle privilégié dans la théorie. Un résultat bien connu de Feldman-Moore montre qu'une telle relation est borélienne si et seulement si on peut munir *de façon borélienne* chacune de ses orbites d'une structure de graphe complet. Plus précisément, il existe une partition dénombrable

$$R = \amalg_{i \in \mathbf{N}} \mathrm{graph}(\varphi_i) \subset X \times X$$

de toute relation borélienne R, à classe dénombrables, en graphes d'isomorphismes partiels $\varphi_i : A_i \xrightarrow{\simeq} B_i$ entre deux boréliens A_i et B_i de X (cf. [33]) ; on *construit* ainsi entre deux points équivalents quelconques x et y de X une unique arête orientée $x \xrightarrow{\varphi_i} y$ [37, 38] (ce qui, d'un point de vue algébrique, revient à postuler l'existence d'un espace classifiant pour R).

Exemples. i. Une action $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$ d'un groupe dénombrable Γ, par isomorphismes boréliens, définit sur X une relation d'équivalence borélienne R_α à classes dénombrables, donnée par la partition de X en les orbites de α. Le résultat de Feldman-Moore ci-dessus peut s'interpréter en disant que toute relation d'équivalence à classes dénombrables est la partition en orbites d'une action mesurable de groupe discret (en choisissant une partition de cette relation par des isomorphismes partiels d'ordre 2 étendus à X).

ii. Un feuilletage sur une variété la partitionne en feuilles et définit ainsi une relation d'équivalence borélienne. En restreignant cette relation à une transversale T, on obtient une relation d'équivalence à classes dénombrables (dont le graphe $R \subset T \times T$ est partitionné par des applications d'holonomie).

iii. Une source importante de relations d'équivalence provient, par leur nature même, des problèmes de classifications. On se contentera ici d'évoquer un exemple, l'espace des groupes de type fini, étudié dans [20]. L'espace X considéré est l'espace topologique compact des groupes marqués (l'espace des quotients d'un groupe libre), sur lequel on étudie (par exemple) la relation d'isomorphisme. Il s'agit d'une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables.

Soit R une relation d'équivalence borélienne sur X. On appelle *isomorphisme partiel (intérieur) de* R un isomorphisme partiel $\varphi : A \to B$ entre deux boréliens de X tel que $\varphi(x) \sim x$ pour tout $x \in A$. L'ensemble des isomorphismes partiels de R se note $[[R]]$. Le groupe des automorphismes intérieurs d'une relation d'équivalence se note $[R]$, ou $\mathrm{Int}(R)$, et s'appelle le *groupe plein*. Il est ainsi constitué des isomorphismes $X \to X$ dont le graphe est inclus dans $R \subset X \times X$. Il s'agit bien sûr d'un invariant d'isomorphisme au sens suivant.

Définition. *Deux relations d'équivalence boréliennes R et R' sur X et X' sont* isomorphes *s'il existe un isomorphisme borélien $\rho : X \to X'$ tel que $x \sim y$ si et seulement si $\rho(x) \sim' \rho(y)$ pour tout $x, y \in X$. On dit que R et R' sont* stablement isomorphes *s'il existe deux parties boréliennes $\Omega \subset X$ et $\Omega' \subset X'$ rencontrant respectivement toutes les classes de R et R', telles que les relations restreintes $R_{|\Omega}$ et $R'_{|\Omega'}$ soient isomorphes.*

Exemple. Un feuilletage et sa restriction à une transversale totale définissent deux relations d'équivalence stablement isomorphes.

La théorie des relations d'équivalence dans le cadre borélien est principalement développée en logique (cf. [59] par exemple). Dans la suite de ce texte, nous supposerons toujours la présence additionnelle d'une *mesure quasi-invariante*, dans la tradition de [33] (et de Murray-von Neumann) — on identifie alors deux relations d'équivalence ayant *presque* les mêmes orbites.

Plus précisément, soit (X, μ) un espace de probabilité, i.e. un espace borélien standard muni d'une mesure borélienne de probabilité sans atome. On dit qu'une relation d'équivalence borélienne *à classes dénombrables* sur X est une *relation d'équivalence mesurée* si la mesure μ est *quasi-invariante* au sens où tout borélien négligeable a un saturé négligeable (notons que le saturé d'un borélien, i.e. la réunion des classes intersectant ce borélien, est borélien). Le théorème célèbre suivant, par exemple, constitue une question encore ouverte dans le cadre borélien (avec une hypothèse convenable d'irréductibilité remplaçant l'ergodicité).

Théorème 44 (Connes-Feldman-Weiss [28]). *Soit R une relation d'équivalence ergodique moyennable sur (X, μ). Il existe un isomorphisme borélien T de l'espace X préservant la classe de μ tel que $x \sim_R y \iff y = T^n(x)$ pour presque tous $x, y \in X$.*

Rappelons qu'une relation d'équivalence mesurée est dite *ergodique* si les parties boréliennes invariantes (i.e. saturées) sont négligeables ou co-négligeables. La notion de moyennabilité intervenant dans le théorème a été définie par Zimmer. Toute action d'un groupe discret moyennable préservant la classe de μ définie une relation d'équivalence mesurée moyennable au sens de Zimmer. Rappelons également qu'une relation d'équivalence est engendrée par un seul automorphisme de X si et seulement si elle est *hyperfinie*, i.e. si elle s'écrit comme réunion dénombrable croissante de relations d'équivalence mesurées à classes finies (Dye). Le théorème de Connes-Feldman-Weiss est la conclusion d'une série de travaux, dont ceux d'Ornstein-Weiss sur la généralisation du lemme de Rokhlin aux groupes moyennables et le théorème selon lequel une action ergodique d'un groupe moyennable, préservant une mesure de probabilité, est hyperfinie [86].

Définition. *Deux relations d'équivalence mesurées R et R' sur (X, μ) et (X', μ') sont* isomorphes *(resp.* stablement isomorphes*) s'il existe deux boréliens $\Omega \subset X$ et $\Omega' \subset X'$ de mesure totale (resp. dont les saturés sont de mesure totale) et un isomorphisme de relations d'équivalence boréliennes entre $R_{|\Omega}$ et $R_{|\Omega'}$, qui est non singulier au sens où il envoie la classe de μ sur la classe de μ'.*

Nous renvoyons à [77, 25, 94] pour l'extension de ces notions aux relations d'équivalence à classes non nécessairement dénombrables.

Une relation d'équivalence mesurée ergodique peut être de type II ou de type III, selon qu'il existe ou non une mesure σ-finie invariante dans la classe de μ. Une mesure quasi-invariante σ-finie μ est dite *invariante pour R* si pour une partition $R = \amalg_i \mathrm{graph}(\varphi_i)$ en graphes d'isomorphismes partiels, on a $\mu(\varphi_i(\Omega)) = \mu(\Omega)$ pour tout Ω inclus dans le domaine de φ_i. Vérifier que cette définition est indépendante de la partition choisie constitue un exercice typique de la théorie géométrique des relations d'équivalence mesurées, nous renvoyons à [37] pour de nombreuses illustrations de cette technique (découpage des domaines). Lorsqu'il existe une mesure de probabilité invariante dans la classe de μ, on dit que R est de type II_1. Ces définitions s'étendent aux relations non ergodiques.

Remarque. La notion d'isomorphisme décrite ci-dessus (« l'équivalence orbitale »), ainsi que la répartition en types, ont été introduites par Murray et von Neumann au cours de leurs travaux sur les algèbres d'opérateurs (1936-1943). L'algèbre de von Neumann associée à une action libre d'un groupe dénombrable sur (X, μ) ne dépend que (de la relation d'équivalence mesurée formée) des orbites de cette action.

Concluons cette section par des faits standard.

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ). La mesure μ s'étend canoniquement à R en une mesure $\mathfrak{h}$ définie par

$$\mathfrak{h}(K) = \int_X \#K^x d\mu(x)$$

où $K \subset R$ est une partie borélienne et $K^x = \{(x, y) \in K\}$ (mesure de décompte horizontal). L'image $\mathfrak{h}^{-1}$ de $\mathfrak{h}$ par l'inversion $^{-1} : R \to R$ définie par $(x, y)^{-1} = (y, x)$ est équivalente à $\mathfrak{h}$ et on obtient un homomorphisme borélien δ de R (vu comme groupoïde mesurable) dans $]0, \infty[$, i.e. une application mesurable vérifiant

$$\delta(x, z) = \delta(x, y)\delta(y, z)$$

pour tous x, y, z équivalents, en posant

$$d\mathfrak{h}(x, y) = \delta(x, y) d\mathfrak{h}^{-1}(x, y)$$

(dérivée au sens de Radon-Nikodỳm). Notons que $\mathfrak{h}^{-1}$ est la mesure de décompte vertical définie par $\mathfrak{h}^{-1}(K) = \int_X \#K_y d\mu(y)$ où $K_y = \{(x, y) \in K\}$. (cf. [33])

Nous dirons qu'une partie borélienne $K \subset R$ est *symétrique* si $K = K^{-1}$. Une partie borélienne symétrique $K \subset R$ définit une distance $d_K : R \to [0, \infty]$ sur les orbites de R associant à $(x, y) \in R$ le plus petit entier n pour lequel il existe une suite $x_0 = x$, $x_1, \ldots x_{n-1}$, $x_n = y$ telle que $(x_i, x_{i+1}) \in K$. On dit que K est un *graphage de* R si $d(x, y) < \infty$ pour presque tout $(x, y) \in R$ (on supposera toujours dans la suite qu'un graphage est une partie *symétrique* de R, i.e. qu'il est non orienté). Cela revient à dire que $R = \cup_n K^n$ à un négligeable près, où K^n est l'ensemble des couples $(x, y) \in R$ tels que $d(x, y) \leqslant n$, ou encore que presque toutes les orbites sont connexes pour la structure simpliciale obtenue en « collant » une arête entre deux points x et y de X si et seulement si $(x, y) \in K$. Un graphage peut être étiqueté par une famille dénombrable de lettres Φ, i.e. on peut choisir une famille dénombrable Φ d'isomorphismes partiels de R, de sorte que $K = \cup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{graph}(\varphi)$, où l'étiquettage est bijectif si cette réunion est disjointe (on peut bien sûr supposer alors que Φ est symétrique au sens où $\varphi \in \Phi \iff \varphi^{-1} \in \Phi$). On appellera également Φ un *graphage* de R (cette définition a été introduite par Levitt en relation avec la notion de *coût* pour les relations d'équivalence mesurées de type II_1, cf. [37]). Si les éléments de Φ partitionnent K, la structure simpliciale associée à K coincide avec la structure obtenue par le procédé standard de suspension de Φ au-dessus de X. (cf. [33, 37, 38])

Nous dirons qu'une partie borélienne symétrique $K \subset R$ est u.l.f. (uniformément localement finie) si $\#K^x$ et $\#K_y$ sont uniformément finis sur X, et qu'elle est u.l.b. (uniformément localement bornée), relativement à μ, si elle est u.l.f. et si $|\delta|_K = \sup_{(x,y)\in K} |\ln \delta(x,y)|$ est fini. Toute partie u.l.f. $K \subset R$ peut être partitionnée en un nombre fini d'isomorphismes partiels de R ; toute partie u.l.b. $K \subset R$ peut être partitionné en un nombre fini d'isomorphismes partiels $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de R tels que les fonctions $d(\varphi_{i*}\mu)/d\mu$ soient uniformément bornées. Nous dirons qu'une relation d'équivalence mesurée est *de type fini* si elle possède un graphage u.l.f., i.e. si elle peut être engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels. (cf. [33, 28] et notamment [28, Lemma 3])

16 Espaces singuliers

Soit Q un ensemble.

Définition. *On appelle* désingularisation *(borélienne) de Q la donnée d'un espace borélien standard X et d'une application surjective* définissable $p : X \to Q$.

Nous dirons qu'une application $p : X \to Q$ est *définissable* si

$$R_p = \{(x,y) \in X \times X \mid p(x) = p(y)\}$$

est une partie borélienne de $X \times X$ (i.e. R_p est une relation d'équivalence borélienne).

Exemple. Soit M une variété et F un feuilletage de M. L'application

$$p : M \to M/F$$

définie par $x \mapsto \ell$ où ℓ est l'unique feuille contenant x, est une désingularisation de l'espace M/F des feuilles de F.

Définition. *On dit que deux désingularisations $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ sont* équivalentes *(au sens borélien) s'il existe deux applications boréliennes $\varphi : X \to X'$ et $\varphi' : X' \to X$ telles que $p'\varphi = p$ et $p\varphi' = p'$.*

On vérifie immédiatement qu'on obtient ainsi une relation d'équivalence sur les désingularisations.

Exemple. Considérons une lamination L sur un espace topologique X et notons $p : X \to X/L$ la désingularisation naturelle. Soit $T \subset X$ une transversale totale de L. Notons $p' = p_{|T} : T \to X/L$ la désingularisation associée. Alors p et p' sont équivalente. En effet $p = p'r$ où r est une rétraction mesurable $X \to T$, obtenue par exemple en fixant une famille mesurable de métriques le long des feuilles et en associant (mesurablement) à $x \in X$ l'un des points de T le plus proche de x.

Définition. *On appelle* structure singulière *(borélienne) sur Q la donnée d'une classe d'équivalence de désingularisations. Un* espace singulier *(borélien) est un ensemble muni d'une structure singulière.*

En pratique, l'espace singulier ainsi qu'une ou plusieurs de ses désingularisations apparaissent souvent de façon naturelle. Citons simplement ici,
– l'espace des groupes de type fini (cf. [20]),
– l'espace des immeubles de type $\tilde{A}_2$ (cf. chap. I).
De nombreux exemples supplémentaires figurent dans [26, 27].

Soit Q un espace singulier.

On supposera toujours que Q admet une désingularisation discrète au sens suivant.

Définition. *On dit qu'une désingularisation $p : X \to Q$ de Q est* discrète *si les fibres de p sont dénombrables.*

(On renvoie à [35, 94] pour des résultats généraux concernant l'existence de désingularisations discrètes « presque sûrement surjectives ».)

Lemme 45. *Les relations d'équivalence boréliennes R_p et $R_{p'}$ associées à deux désingularisations discrètes (équivalentes) $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ de Q sont stablement isomorphes.*

Démonstration. Soit $\varphi : X \to X'$ une application borélienne telle que $p'\varphi = p$. En particulier $x \sim_p y$ si et seulement si $\varphi(x) \sim_{p'} \varphi(y)$. L'image $X_1' \subset X'$ de φ est une partie borélienne de X' et on peut choisir une section borélienne $s : X_1' \to X$ de φ (φ étant à fibres dénombrables). Il est clair que $\varphi : X_1 \to X_1'$ réalise un isomorphisme entre les restrictions de R_p et $R_{p'}$ respectivement à l'image X_1 de s et à X_1'. Notons que X_1 rencontre toutes les classes de R_p, et comme p est surjective et vérifie $p'\varphi = p$, il en est de même de X_1' relativement à $R_{p'}$. En particulier R_p et $R_{p'}$ sont stablement orbitalement équivalentes (relativement à un isomorphisme fixant Q). ■

Remarque. Ce lemme reprend le fait bien connu que les restrictions d'une relation d'équivalence à deux boréliens rencontrant toutes les orbites sont stablement isomorphes. Ici R_p et $R_{p'}$ sont les restrictions de R_q à X et X', où R_q est associée à la désingularisation discrète $q = p \amalg p' : X \amalg X' \to Q$. Observons que l'isomorphisme partiel construit ici est intérieur, en ce sens qu'il fixe l'espace singulier Q.

Définition. *Soit Q et Q' deux espaces singuliers. On appelle* application définissable de Q vers Q' *une application $\rho : Q \to Q'$ telle qu'il existe une application borélienne $\overline{\rho} : X \to X'$, où $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q'$ sont deux désingularisations de Q et Q', vérifiant $\rho p = p'\overline{\rho}$. On dira que $\overline{\rho}$ désingularise ρ.*

Exemple. Un automorphisme extérieur d'une relation d'équivalence borélienne induit une application bijective (bi-)définissable de l'espace singulier associé.

Lemme 46. *Soit $\rho : Q \to Q'$ une application définissable. Il existe une application désingularisante $\overline{\rho} : X \to X'$ de ρ entre X et X', où $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q'$ sont deux désingularisations discrètes données de Q de Q'.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_X"'] & Y \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "p"'] & Y' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "p'"'] & X' \arrow[dl, "p_{X'}"] \\
& Q \arrow[r, "\rho"] & Q' &
\end{tikzcd}$$

où $X \to Q$ et $X' \to Q'$ sont des désingularisations discrètes respectivement de Q et Q', et $\tilde{\rho} : Y \to Y'$ une application désingularisante de ρ. Il suffit en effet de poser $\overline{\rho} = \varphi'\tilde{\rho}\varphi : X \to X'$. ∎

On note $\mathrm{Def}(Q)$ l'ensemble des bijections définissables de Q.

Corollaire 47. $\mathrm{Def}(Q)$ *est un groupe (groupe des automorphismes de Q).*

Démonstration. Observons tout d'abord que si ρ est bijective, on peut choisir une application désingularisante $\overline{\rho} : X \to X'$ entre deux désingularisations discrètes, qui soit un isomorphisme de relations d'équivalence boréliennes (cf. la preuve du lemme 45). Par suite $\mathrm{Def}(Q)$ est stable par inversion. Par ailleurs si $\overline{\rho} : X_1 \to X_2$ et $\overline{\rho}' : X_1' \to X_2'$ sont deux désingularisations bijectives de ρ et ρ', alors il existe un borélien $A \subset X_2$ et un borélien $B \subset X_1'$, et un isomorphisme $\varphi : A \to B$ entre les relations $R_{p_2|A}$ et $R_{p'_1|B}$ qui fixe l'espace quotient. Alors $\overline{\rho}'\varphi\overline{\rho} : \overline{\rho}^{-1}(A) \to \overline{\rho}'(B)$ est une désingularisation de $\rho'\rho$, et $\mathrm{Def}(Q)$ est stable par produit. ∎

Mesure transverse sur Q. On dira que deux désingularisations $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ de Q sont *conjuguées* s'il existe une bijection borélienne φ de X sur X' telle que $p'\varphi = p$. On note T la famille des ensembles boréliens X lorsque $X \to Q$ parcourt les désingularisations discrètes de Q. Il est clair que T est stable par réunion disjointe (dénombrable). On appelle *mesure transverse (invariante) sur Q* la donnée d'une application

$$\Lambda : \mathcal{B}(T) \to [0, \infty]$$

définie sur les boréliens d'éléments de T et satisfaisant aux propriétés suivantes :

– σ-additivité, i.e. $\Lambda(\amalg\Omega_i) = \sum \Lambda(\Omega_i)$ pour toute partie borélienne $\Omega_i \subset X_i$, où $(p_i : X_i \to Q)_i$ est une famille (au plus dénombrable) de désingularisations,
– non singularité des projections, i.e. $\Lambda(A) = 0$ si et seulement si $\Lambda(\bar{A}) = 0$ pour toute désingularisation $p : X \to Q$ et toute partie borélienne $A \subset X$, où $\bar{A} = p^{-1}p(A)$ est le saturé de A,
– invariance, i.e. $\Lambda(X) = \Lambda(X')$ si X et X' sont deux désingularisations conjuguées.

Parties négligeables de Q. On appelle borélien de Q la projection d'un borélien par une désingularisation discrète $X \to Q$. La tribu $\mathcal{B}(Q)$ obtenue sur Q coïncide donc avec la tribu des boréliens saturés de X et ne dépend pas de la désingularisation discrète choisie. La donnée d'une mesure invariante Λ sur Q permet de définir sans ambigüité la notion de partie négligeable $N \subset Q$. On notera $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(Q)$ la famille des boréliens négligeables de Q relatifs à Λ. On appelera *espace mesuré singulier* la donnée d'un espace singulier Q et d'une famille de boréliens négligeables $\mathcal{N}$ associée à une mesure transverse invariante Λ.

Définition. *On dit que deux espaces mesurés singuliers $(Q_1, \mathcal{N}_1)$ et $(Q_2, \mathcal{N}_2)$ sont* isomorphes *s'il existe deux parties négligeables $N_1 \subset Q_1$ et $N_2 \subset Q_2$ telles que les espaces mesurés singuliers $Q_1 \backslash N_1$ et $Q_2 \backslash N_2$ sont* strictement isomorphes *au sens où il existe une bijection définissable non singulière ρ entre les deux (i.e. N est négligeable si et seulement si $\rho(N)$ est négligeable).*

Ainsi deux désingularisations discrètes d'espaces mesurés singuliers isomorphes sont stablement isomorphes en tant que relations d'équivalence mesurées. Nous dirons d'une propriété de relation d'équivalence mesurée, invariante par isomorphisme stable, qu'elle est une *propriété de l'espace singulier des orbites de cette relation.*

L'ensemble des applications définissables non singulières de Q, bijectives en restriction au complémetaire d'une partie négligeable, forme un groupe (en effet la composition $\varphi_2 \circ \varphi_1$ d'applications φ_1 et φ_2, bijectives en dehors de N_1 et N_2 respectivement, est bijective en restriction au borélien $\varphi_1^{-1}(\varphi_1(X \backslash N_1) \cap X \backslash N_2)$, dont le complémentaire est négligeable). On note $\mathrm{Def}(Q, \mathcal{N})$ le quotient de ce groupe obtenu en identifiant deux applications coïncidant presque sûrement.

On dit que $(Q, \mathcal{N})$ est *ergodique* si toute partie borélienne de Q est négligeable ou de complémentaire négligeable. Notons que dans le cas ergodique $\mathcal{B}(T)$ coïncide avec T aux parties négligeables près. Suivant le point de vue évoqué en introduction, une propriété d'un espace singulier ergodique Q est une propriété de la notion de quasi-périodicité choisie. On dira ainsi qu'une telle propriété est un *paramètre de quasi-périodicité* (et qu'un invariant d'isomorphisme est une *constante de quasi-périodicité*).

Soit $(Q, \mathcal{N})$ un espace mesuré singulier ergodique. Il existe sur Q au plus une (à constante multiplicative près) mesure transverse invariante σ-finie Λ définissant $\mathcal{N}$. De plus, suivant les valeurs que peut prendre Λ, $(Q, \mathcal{N})$ peut être de l'un des trois types suivants :

- type I : $\operatorname{Im} \Lambda = \{0, \lambda, 2\lambda, \ldots, \infty\} = \lambda\mathbf{N} \cup \{\infty\}$, où $\lambda > 0$,
- type II : $\operatorname{Im} \Lambda = [0, \infty]$,
- type III : $\operatorname{Im} \Lambda = \{0, \infty\}$,

où, pour les espaces de type III, toute mesure transverse invariante Λ est triviale (ne contient aucune information autre que les parties négligeables). Il existe à isomorphisme près une unique désingularisation discrète proprement infinie de Q ; plus précisément, les désingularisations discrètes d'un espace de type III sont toutes conjuguées, et les désingularisations discrètes d'un espace de type II sont classifiées (à conjugaison près) par leur mesure transverse. Les définitions précédentes s'étendent de façon naturelle au cas non ergodique, et tout espace mesuré singulier admet une décomposition $Q = Q_{\mathrm{I}} \amalg Q_{\mathrm{II}} \amalg Q_{\mathrm{III}}$ en composantes de chaque type, unique aux parties négligeables près. Ces résultats sont de Murray et von Neumann.

Convention. Au cours de ce texte, il n'est question que d'espaces singuliers munis d'une famille $\mathcal{N}$ de boréliens négligeables (i.e. d'espaces mesurés singuliers), et on omettra désormais de préciser cet ensemble dans les notations. On omettra également l'adjectif « mesuré » pour qualifier les espaces singuliers.

Considérons un espace singulier ergodique $Q = (Q, \mathcal{N})$ et notons $\operatorname{Def}(Q) = \operatorname{Def}(Q, \mathcal{N})$ son groupe d'automorphismes. Supposons que Q soit de type II et fixons une mesure transverse invariante σ-finie Λ.

Lemme 48. *Considérons $\rho \in \operatorname{Def}(Q)$. Il existe un unique nombre $\lambda \in]0, \infty[$ tel que, pour tout isomorphisme désingularisant $\overline{\rho} : X \to X'$ entre deux désingularisations discrètes, on a $\Lambda(\overline{\rho}(\Omega)) = \lambda\Lambda(\Omega)$ pour tout borélien $\Omega \subset X$.*

Démonstration. Quitte à remplacer Q par $Q \backslash N$, où $N \subset Q$ est négligeable, on peut supposer que ρ est bijective. Considérons deux désingularisations bijectives $\rho_1 : X_1 \to X'_1$ et $\rho_2 : X_2 \to X'_2$ de ρ, où $p_i : X_i \to Q$ et $p'_i : X'_i \to Q$ sont des désingularisations discrètes de Q $(i = 1, 2)$. La mesure transverse invariante Λ étant unique à un facteur multiplicatif près, il existe deux nombres λ_1 et λ_2 tels que $\Lambda(\rho_i(\Omega)) = \lambda_i\Lambda(\Omega)$ pour tout borélien $\Omega \subset X_i$. Par définition il existe deux applications $\varphi : X_1 \to X_2$ et, respectivement, $\varphi' : X'_1 \to X'_2$ telles que $p_2\varphi = p_1$ et $p'_2\varphi' = p'_1$. D'après le lemme 45, φ et, respectivement, φ', sont en restriction à des boréliens non négligeables $A \subset X_1$ et $A' \subset X'_1$, des isomorphismes entre les relations restreintes $R_{p_1|A}$ et $R_{p_2|B}$, et, respectivement, $R_{p'_1|A'}$ et $R_{p'_2|B'}$, où $B = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(A')$. Notons que φ préserve la mesure Λ (invariance de Λ par conjugaison). De plus, en conjuguant chacune des équivalences stables par des isomorphismes partiels intérieurs, on peut supposer que $A = X_1$ ou $B = X_2$ (resp. $A' = X'_1$ ou $B' = X'_2$). Supposons par exemple $A = X_1$ et $B' = X_2$. On a alors $\rho_1 \circ \varphi^{-1} = \varphi'^{-1} \circ \rho_2$ sur le borélien non négligeable $\varphi(X_1) \subset X_2$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2$. ■

L'application $\mathrm{mod}_\Lambda : \mathrm{Def}(Q) \to \mathbf{R}_+^*$ qui à ρ associe λ est un morphisme de groupes. On note $\mathrm{Def}_\Lambda(Q)$ son noyau et $F_\Lambda(Q) \subset \mathbf{R}_+^*$ son image (groupe fondamental de Q). On a donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Def}_\Lambda(Q) \longrightarrow \mathrm{Def}(Q) \xrightarrow{\mathrm{mod}_\Lambda} F_\Lambda(Q) \longrightarrow 1.$$

Notons que $F(Q) = F_\Lambda(Q)$ ne dépend à multiplication par un scalaire strictement positif près que de la classe d'isomorphisme de Q.

Le groupe fondamental d'un espace singulier hyperfini est $\mathbf{R}_+^*$. Damien Gaboriau a donné de nombreux exemples d'espaces singuliers à groupe fondamental trivial en faisant usage des nombres de Betti L^2 pour les relations d'équivalence [38] (ou alternativement du coût). Le r-ième nombre de Betti L^2 de (Q, Λ) est le nombre réel positif

$$\beta_r(Q, \Lambda) = \Lambda(X) \cdot \beta_r(R_p, \Lambda_1),$$

où $p : X \to Q$ est une désingularisation discrète de type II_1 (i.e. telle que $\Lambda(X) < \infty$), $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda(X)$ est la mesure de probabilité sur X associée à Λ, et $\beta_r(R_p, \Lambda_1)$ est le r-ième nombre de Betti de la relation d'équivalence R_p, défini dans [38] (observons que $\beta_r(Q, \Lambda)$ ne dépend pas de la désingularisation discrète choisie, cf. [38, Corollaire 5.5]). Les nombres $\beta_r(R_p) = \beta_r(R_p, \mu)$, où $\mu = \Lambda_1$ est l'unique mesure de probabilité invariante par R_p, sont invariants par isomorphisme de relation d'équivalence mesurée. Par suite, si les relations d'équivalence mesurées R_p et R'_p associées à deux désingularisations discrètes $p : X \to Q$ et $p' : X' \to Q$ de Q sont isomorphes, et que $\beta_r(Q, \Lambda) \neq 0$ pour un indice r, alors $\Lambda(X) = \Lambda(X')$, et $F(Q)$ est trivial. (La suite des nombres de Betti L^2 à multiplication par un scalaire strictement positif près est une constante de quasi-périodicité au sens ci-dessus.)

Proposition 49. *Si $p : X \to Q$ est une désingularisation de Q, on a alors*

$$\mathrm{Def}_\Lambda(Q) \simeq \mathrm{Out}(R_p) = \mathrm{Aut}(R_p)/\mathrm{Int}(R_p).$$

Démonstration. Il est facile de voir que l'application p induit un morphisme $\mathrm{Aut}(R_p) \to \mathrm{Def}_\Lambda(Q)$ de noyau $\mathrm{Int}(R_p)$. Ce morphisme est surjectif. En effet soit $\rho : Q \to Q$ une bijection préservant Λ. Il existe une bijection désingularisante $\overline{\rho} : \Omega \to \Omega$, où Ω est une partie borélienne de X. On peut alors étendre $\overline{\rho}$ à X en considérant des expressions de la forme $\psi_i \overline{\rho} \phi_i$ où $\phi_i : \Omega_i \to \Omega$ et $\psi_i : \Omega \to \Omega_i$ sont des isomorphismes partiels (intérieurs) de R_p et $X = \Omega \amalg \Omega_i$ est une partition bien choisie. ∎

Terminons par une définition.

Définition. *On dira qu'un espace singulier Q est* de type fini *si toute désingularisation discrète est de type fini, i.e. possède un graphage u.l.f. (uniformément localement fini).*

Notons qu'un espace singulier est de type fini si et seulement si toute désingularisation discrète peut être engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels. Cette notion peut être clarifiée très simplement par la proposition suivante.

Proposition 50. *Soit Q un espace singulier ergodique. Si Q est de type* II*, il est de type fini si et seulement si il admet une désingularisation discrète de type* II_1 *engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels. Si Q est de type* III*, il est nécessairement de type fini.*

Démonstration. Soit Q un espace singulier ergodique de type II. Si Q est de type fini, il admet une désingularisation discrète de type II_1 et de type fini par définition. Réciproquement soit $p : X \to Q$ une désingularisation discrète de type II_1 de Q engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels. D'après un résultat de Gaboriau [37, Prop. II.6], toute désingularisation discrète de Q de type II_1 est alors de type fini. Soit $p : X \to Q$ une désingularisation discrète de Q de type II_∞, munie d'une mesure invariante σ-finie μ. Soit $A_0 \subset X$ une partie de mesure finie. Par hypothèse il existe une famille finie Φ_0 d'isomorphismes partiels de A_0 engendrant la restriction $R_{|A_0}$ de R à A_0. Choisissons une partition de X en parties boréliennes A_i, $i \geqslant 1$, pour lesquels il existe un isomorphisme partiel $\varphi_i : A_i \to A_{i-1}$ de R. Alors le recollement $\varphi = \amalg_{i\geqslant 1}\varphi_i$ de ces isomorphismes partiels est un isomorphisme partiel de X qui, avec Φ_0, engendre R. Les espaces singuliers ergodiques de type II se répartissent en trois sous-type, II^1, $\mathrm{II}^{1\sim\infty}$, et II^∞, selon le coût, 1, fini distinct de 1, ou infini respectivement, de leurs désingularisations discrètes de type II_1 (voir [37]).

Soit Q un espace singulier ergodique de type III et $p : X \to Q$ une désingularisation discrète de Q. Partitionnons X en un infinité dénombrable $X = \amalg_{i\geqslant 0} A_i$ de parties boréliennes non négligeables. Soit pour tout $i \geqslant 1$ un isomorphisme partiel $\psi_i : A_i \to A_{i-1}$ de R, et considérons un graphage $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ de $R_{|A_0}$ (par exemple une partition de cette relation en isomorphismes partiels). Soit $\psi = \amalg_i \psi_i$ et $\varphi = \amalg_i \psi_i^{-1}\psi_{i-1}^{-1} \ldots \psi_1^{-1}\varphi_i\psi_1 \ldots \psi_{i-1}\psi_i$. Alors $\varphi_i = \psi^i\varphi\psi^{-i}{}_{|A_0}$ et (φ, ψ) engendre R (ceci montre aussi que toute relation d'équivalence de type II_∞ est de type fini). ∎

Références. La notion d'équivalence orbitale stable a été introduite par Mackey [77] (voir également les travaux de Kakutani, par exemple [65]). Elle a depuis été étudiée des deux points de vue borélien et mesuré ; cf. [59] et [36, 38] pour des références récentes. La considération d'espaces quotients singuliers et de désingularisations a été initiée par Connes dans [25]. Nous renvoyons également à [24], par exemple, pour d'autres développements.

17 Structures quasi-périodiques et représentations

Notre but dans ce paragraphe est de présenter les notions de représentation hilbertienne et de structure simpliciale associées à une relation d'équivalence mesurée, suivant

[77], [25] et [38]. Comme annoncé en introduction, nous en profitons pour analyser le concept de quasi-périodicité, et notamment sa formalisation à l'aide de la théorie de la mesure. Une structure quasi-périodique sur un espace est dans ce formalisme une représentation de relation d'équivalence agissant sur cet espace « avec domaine fondamental ». La possibilité nous est offerte de commencer par une description générale de la situation, en termes de catégories et foncteurs, isolant celles des représentations qui sont susceptibles de conduire aux structures quasi-périodiques. Cette description est uniquement destinée à fixer les idées et reste informelle. Une fois ce contexte général précisé, nous pourrons nous pencher plus attentivement sur les cas particuliers des complexes simpliciaux et des espaces de Hilbert.

I - Le cadre général. Nous suivrons bien entendu le principe de base, de ne considérer que des structures que l'on peut « contruire effectivement » (i.e. sans recourir à l'axiome du choix). Nous les appelerons « définissables » dans ce paragraphe. La signification exacte de ce terme ne sera précisée qu'au paragraphe suivant, concernant les cas particuliers. On le remplacera alors par le terme « mesurables ».

Fixons une catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont des ensembles.

Soit R une relation d'équivalence (ou un groupoïde) borélienne sur un espace X, considérée comme une petite catégorie dont les objets sont les points de X et les morphismes les éléments de R. On appelle *représentation de R dans $\mathcal{C}$* la donnée d'un foncteur *définissable* $F : R \to \mathcal{C}$ (que l'on supposera covariant).

Lorsque R est une relation d'équivalence mesurée, on appelera encore représentation de R la donnée d'un foncteur F dont les lois de composition ont lieu *presque sûrement* (i.e. F est une représentation d'une relation $R_{|X'}$ où $X' \subset X$ est un borélien de complémentaire négligeable).

Soit Q un espace singulier et $p : X \to Q$ une désingularisation discrète. On note $R = R_p$ la relation d'équivalence mesurée associée. Une représentation F de R induit une action (encore notée F) de R sur l'ensemble

$$F(X) = \amalg_{x \in X} F(x).$$

On considère pour chaque $q \in Q$ l'ensemble quotient

$$\underline{F}(q) = \amalg_{x \in p^{-1}(q)} F(x)/\sim,$$

obtenu en identifiant $F(y)$ et $F(x)$ par $F(x, y)$, comme un objet de $\mathcal{C}$. On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & O(\mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{\underline{F}} & O(\mathcal{C}) \end{array}$$

où $\underline{F}$ est une application définissable de Q dans les objets $O(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$.

Un exemple. Prenons pour $\mathcal{C}$ la droite réelle $\mathbf{R}$ (sans morphisme), pour laquelle la notion de foncteur définissable (i.e. mesurable) $F : R \to \mathbf{R}$ est claire. Tout foncteur mesurable est, par ergodicité, presque sûrement constant, et l'espace $\underline{F}(Q)$ est, à un négligeable près, un nombre réel usuel. Cet exemple concerne plus généralement toute catégorie dont les objets sont des points, i.e. lorsqu'on choisit pour $\mathcal{C}$ un espace topologique séparable sans morphisme : un point ne possède pas de notion intéressante de quasi-périodicité (au sens suivant).

On appelle *élément Q-périodique de $\mathcal{C}$* le R-espace constitué par l'image

$$F(X)$$

d'un foncteur F de R dans $\mathcal{C}$, *lorsque que l'action de R sur $F(X)$ admet un domaine fondamental définissable* au sens où il existe une partie définissable

$$D = \amalg_{x \in X} D_x \subset F(X)$$

qui rencontre chaque orbite exactement une fois. En d'autres termes on a

$$F(x) = \amalg_{y \sim x} F(x,y) D_y.$$

pour presque tout $x \in X$.

À un élément Q-périodique de $\mathcal{C}$ est associée la *lamination* $\underline{F}(Q) = F(X)/R_p$ obtenue en considérant l'espace quotient de $F(X)$ par l'action de R_p via F.

Commentaires. 1. - Ainsi, bien qu'un espace singulier soit un ensemble au sens usuel du terme, ses points contiennent *a priori* trop d'informations pour être véritablement considérés comme des points. La structure singulière sur cet ensemble détermine des relations entre chacun de ses points, et ces relations prennent ensuite effet lorsque l'on substitue à chacun d'eux un élément d'une catégorie fixée par la procédure ci-dessus.

2. - On comprend facilement le terme « quasi-périodique » lorsque le domaine fondamental D est *localement trivial*, au sens où il admet une partition dénombrable $D = \amalg_i (X_i \times D_i)$, où $X_i \subset X$ est une partie définissable non négligeable : par ergodicité presque toute feuille de cette lamination contient pour tout i une infinité de copie de D_i « uniformément réparties » (chaque partie D_i apparaissant avec une certaine « proportion » dans le cadre mesuré). Dans le cas général, il y a une « dépendance définissable » entre deux parties D_x et D_y pour x et y dans une même feuille. Le cas non ergodique concerne le mélange de différents concepts de quasi-périodicité.

3. - La lamination associée à un élément Q-périodique de $\mathcal{C}$ s'identifie de façon définisssable au domaine fondamental D. Le choix d'une section définissable du fibré $D \to X$ détermine alors un plongement transverse de X de cette lamination.

4. - On reprend essentiellement ici des techniques introduites par A. Connes dans [25]. Rappelons qu'il est construit dans [25], à l'aide de ces techniques, une théorie

de l'intégration (transverse) « en présence d'un groupoïde mesuré ». Celle-ci permet d'intégrer des « fonctions positives » définies sur l'espace Q des orbites de ce groupoïde, où une fonction positive est une application qui à une orbite $q \in Q$ associe un espace mesuré standard (Y_q, α_q), où α_q est une mesure positive sur Y_q. Décrire la mesurabilité d'une telle application conduit naturellement à la notion de foncteur mesurable du groupoïde vers les espaces mesurés. L'intégration d'une telle fonction s'effectue à l'aide d'une mesure transverse quasi-invariante, associée à un cocycle δ défini sur le groupoïde (son module).

II - Exemples de catégories. Définissons plus précisément la notion de mesurabilité pour les catégories suivantes :

– ensembles dénombrables/bijections,
– espaces boréliens standard/isomorphismes mesurables,
– complexes simpliciaux/isomorphismes simpliciaux,
– espace de Hilbert/opérateurs unitaires.

Soit Q un espace mesuré singulier.

1 - La catégorie des ensembles dénombrables ou des boréliens standard. Commençons par un exemple simple. Soit $p : X \to Q$ une désingularisation discrète de Q. Le foncteur naturel $F : X \to R_p$, qui à $x \in X$ associe $R_p^x = \{(x, y)\} \subset R_p$ et à (x, y) l'application évidente $R_p^y \to R_p^x$, est mesurable et définit l'ensemble dénombrable Q-périodique R_p. La lamination associée est l'espace $X = R_p/R_p$ et on a $\underline{F} = p^{-1}$.

Plus généralement soit R une relation d'équivalence mesurée et $F : R \to \mathcal{C}$ une représentation de R dans la catégorie des espaces boréliens standard et des isomorphismes mesurables (ou des ensembles dénombrables et des bijections). On définit la mesurabilité de F de la façon suivante (cf. [25]). Soit $\tilde{\Omega}$ la réunion disjointe

$$\tilde{\Omega} = \amalg_{x \in X} F(x).$$

On dit que F est *mesurable* si $\tilde{\Omega}$ possède une structure d'espace borélien standard compatible avec les restrictions aux fibres définie par la projection naturelle $\tilde{p} : \tilde{\Omega} \to X$, telle que $\tilde{p}$ et l'application $R * \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$ définie par

$$(x, y) * a \mapsto F(x, y)a$$

soient mesurables (où $R * \tilde{\Omega}$ est le produit fibré de R et $\tilde{\Omega}$, i.e. l'ensemble des couples $((x, y), a)$ tels que $\tilde{p}(a) = y$, cf. [38] par exemple). La notion de domaine fondamental *borélien* $D \subset \tilde{\Omega}$ est claire (D est une partie borélienne rencontrant exactement une fois chaque orbite) et il en résulte une notion d'espace borélien standard Q-périodique (cf. ci-dessus). À chaque espace borélien standard Q-périodique est associée une lamination sur l'espace $\Omega = \underline{F}(Q)$ (standard) muni de la désingularisation $p : \Omega \to Q$ obtenue par passage au quotient de l'application $\tilde{p} : \tilde{\Omega} \to X$ par les actions naturelles de R.

2 - La catégorie des complexes simpliciaux. Soit $p : \Sigma \to Q$ une désingularisation de Q. On dit que Σ est *une désingularisation simpliciale de* Q si pour tout $x \in \Sigma$ la classe $\Sigma_x \subset \Sigma$ de x est munie d'une structure simpliciale connexe, i.e. d'une partition $\Sigma_x = \amalg_{i\geqslant 0}\Sigma_x^{(i)}$ en simplexes non orientés de dimension i (satisfaisant aux conditions usuelles de compatibilité), telle que les parties $\Sigma^{(i)} \subset \Sigma$ constituées des simplexes de dimension i soient boréliennes.

Soit R une relation d'équivalence mesurée. On dit qu'un foncteur F de R dans la catégorie des (réalisations géométriques de) complexes simpliciaux (non orientés) est *mesurable* s'il est mesurable en tant que foncteur à valeurs dans les espaces boréliens standard, et si les parties $\tilde{\Omega}^{(i)} \subset \tilde{\Omega} = F(X)$ constituées des simplexes de dimension i sont boréliennes. On dit que F admet un domaine fondamental borélien si, de même que ci-dessus, il existe une partie borélien $D \subset \tilde{\Omega}$ rencontrant exactement une fois chaque orbite ; la notion de complexe simplicial Q-périodique en résulte. Elle coïncide (à réalisation géométrique près) avec la notion de R-complexe simplicial définie par D. Gaboriau dans [38].

On associe à une désingularisation simpliciale de Q un complexe simplicial Q-périodique de la façon suivante. Fixons une désingularisation simpliciale $p : \Sigma \to Q$ de Q. Notons $X = \Sigma^{(0)}$ la lamination des sommets et $p^{(0)} : X \to Q$ la désingularisation discrète associée. Soit $R = R_{p^{(0)}} = \tilde{\Sigma} \cap X \times X$, où $\tilde{\Sigma} = \Sigma\ _p \subset \Sigma \times \Sigma$ est la relation d'équivalence associée à p. Il est facile de voir que le foncteur F de R dans $\tilde{\Sigma}_X = (X \times \Sigma) \cap \tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Sigma}$ qui à $x \in X$ associe le complexe $\tilde{\Sigma}_x \subset \tilde{\Sigma}_X$ et à $(x,y) \in R$ l'isomorphisme naturel $\tilde{\Sigma}_y \to \tilde{\Sigma}_x$ est mesurable. De plus la donnée d'une section mesurable de la projection sur la seconde coordonnée $\tilde{\Sigma}_X \subset X \times \Sigma \to \Sigma$ (à fibres dénombrables) détermine un domaine fondamental borélien et, choisissant convenablement cette section, on définit ainsi un domaine fondamental (borélien) simplicial. Réciproquement à un complexe simplicial Q-périodique, donné par un foncteur F, on associe la désingularisation simpliciale $\Sigma = F(X)/R \to Q$ obtenue en considérant F comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des espaces boréliens standard, où la partition borélienne $\Sigma = \amalg_{i\geqslant 0}\Sigma^{(i)}$ est donnée par la projection naturelle (à fibres dénombrables) de $F(X)^{(i)}$ dans Σ. Les deux opérations décrites dans ce paragraphe sont inverse l'une de l'autre, identifiant ainsi la catégorie des désingularisations simpliciales de Q à celle des complexes simpliciaux Q-périodiques.

Remarques. i. Un complexe simplicial quasi-périodique est nécessairement localement trivial (au sens défini au paragraphe I) du fait qu'il ne possède qu'un nombre dénombrable de géométries locales possibles.

ii. Le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma})$ d'un complexe simplicial quasi-périodique $\tilde{\Sigma}$ est formé des bijections boréliennes de $\Sigma = \tilde{\Sigma}/R$, non singulières et définies à un négligeable près, qui respectent la structure simpliciale longitudinale. Le sous-groupe distingué $\mathrm{Int}(\tilde{\Sigma})$ est formé des éléments de $\mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma})$ qui fixent l'espace singulier quotient. Notons que $\mathrm{Out}(\tilde{\Sigma}) = \mathrm{Aut}(\tilde{\Sigma})/\mathrm{Int}(\tilde{\Sigma})$ diffère en général de $\mathrm{Out}(R)$.

iii. Étant donné un complexe simplicial Q-périodique $\tilde{\Sigma}$, la famille des boréliens standard Q-périodiques inclus dans $\tilde{\Sigma}$ forme une sous-tribu de la tribu borélienne de

$\tilde{\Sigma}$. La donnée d'une mesure quasi-invariante μ sur $X = \Sigma^{(0)}$ et d'un système de Haar s sur $\tilde{\Sigma}$ (i.e. un champ invariant $(s^x)_{x\in X}$ de mesures sur $\tilde{\Sigma}$ telle que la mesure s^x soit portée par le complexe simplicial $\tilde{\Sigma}_x \subset \tilde{\Sigma}$) détermine une mesure $\mathfrak{h}_\mu^{(s)}$ sur cette tribu (cf. [25, 3, 38]).

Complexe quasi-périodique universel. Il existe un unique (à isomorphisme près) complexe simplicial Q-périodique, contenant une copie isométrique de tout autre complexe simplicial Q-périodique [38].

On dit qu'un complexe simplicial Q-périodique est un *arbre Q-périodique* si presque toute ses classes sont des arbres, et qu'un espace singulier Q est *arborable* s'il existe un arbre Q-périodique. De même on définit ainsi les notions de dimension, p-connexité, etc., d'un complexe simplicial quasi-périodique (cf. [37, 38]).

3 - La catégorie des espaces de Hilbert. Rappelons enfin la notion de foncteur mesurable à valeurs dans la catégorie hilbertienne ([25]).

Soit X un espace borélien standard et R une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables sur X. Soit H un champ mesurable d'espaces hilbertiens de base X (cf. [32]).

Une *représentation unitaire de R sur H* est la donnée d'une famille d'opérateurs unitaires

$$\pi(x, y) : H_y \to H_x,$$

$(x, y) \in R$, satisfaisant aux conditions de composition et de mesurabilité suivantes :

– $\pi(x, x) = \mathrm{Id}$ et $\pi(x, z) = \pi(x, y)\pi(y, z)$ pour tout $x \sim y \sim z$.
– les coefficients

$$(x, y) \mapsto \langle \pi(x, y)\xi_y|\eta_x\rangle_x$$

sont mesurables pour tous champs de vecteurs mesurables $\xi, \eta : X \to H$.

Exemples. Représentation triviale de R. La représentation triviale de R est la famille $(x, y) \mapsto 1 \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}$ opérant sur le champ constant $H = X \times \mathbf{C}$ de fibre $\mathbf{C}$.

Représentation régulière de R. On considère le champ d'espaces de Hilbert $H : x \mapsto \ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$ qui à tout point $x \in X$ associe l'espace des fonctions de carré intégrable sur la classe d'équivalence de x pour la mesure de décompte horizontal $\mathfrak{h}^x$. Comme $\mathfrak{h}^x = \mathfrak{h}^y$ pour tout $(x, y) \in R$, les espaces $\ell^2(R^y, \mathfrak{h}^y)$ et $\ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$ sont naturellement identifiés par un opérateur unitaire $\pi(x, y)$; explicitement,

$$\pi(x, y) : \ell^2(R^y) \to \ell^2(R^x)$$

est défini par $\pi(x, y)f(x, z) = f(y, z)$.

Intégration d'une représentation. Soit π une représentation unitaire de R sur un champ d'espaces de Hilbert H de base X. Soit μ une mesure de probabilité quasi-invariante sur X. Considérons l'espace de Hilbert $L^2(X, H)$ des sections de H de carré intégrable pour μ. On définit pour tout sous-groupe dénombrable $\Gamma \subset [R]$ du groupe plein de R une représentation unitaire $\overline{\pi}$ sur $L^2(X, H)$ par la formule

$$\overline{\pi}(\gamma)\xi : x \mapsto \pi(x, \gamma^{-1}x)\xi_{\gamma^{-1}x}\sqrt{\delta(x, \gamma^{-1}x)}$$

où δ est le module de μ.

Considérons deux représentations π et π' d'une relation d'équivalence mesurée R. On appelle *opérateur d'entrelacement* entre π et π' la donnée d'un champ mesurable essentiellement borné d'opérateurs $(T_x)_{x \in X}$ tels que

$$T_x \pi(x, y) = \pi'(x, y) T_y$$

pour tout $(x, y) \in R$.

Espaces de Hilbert quasi-périodiques. Nous n'utiliserons pas cette notion ici. Il sera naturel de dire qu'une représentation hilbertienne possède domaine fondamental si l'action obtenue par restriction au fibré en sphère unité en possède un, en un sens à préciser. L'exemple fondamental est celui de la représentation régulière associée à une désingularisation discrète $X \to Q$ d'un espace singulier Q. La lamination associée est donnée par $[x] \to \ell^2([x])$ qui à une classe $[x] \in Q$ associe l'espace des fonctions de carré intégrable définies sur cette classe. Pour des considérations récentes sur la dynamique des groupes dénombrables de transformations unitaires sur la sphère unité d'un espace de Hilbert, nous renvoyons à [89] par exemple.

III - Quelques commentaires.

Périodicité. L'espace singulier définissant les structures périodiques est le point (l'espace singulier ergodique de type I). Les désingularisations associées proviennent d'actions libres (ou propres) de groupes localement compacts : il est nécessaire ici d'étudier les groupes désingularisants sans se restreindre aux seules relations d'equivalence. Notons qu'il est également possible de mener une telle étude pour les espaces singuliers non triviaux, où l'on étudie des groupoïdes désingularisants [25] (dans le cadre de cet article, les relations d'équivalence suffisent).

Périodicité et quasi-périodicité. Soit Γ un groupe dénombrable et Y un Γ-complexe simplicial cocompact (ainsi Y est un complexe simplicial périodique). On peut munir Y d'une structure quasi-périodique de la façon suivante. Soit α une action ergodique de Γ sur un espace de probabilité (X, μ) et $R = R_\alpha$ la relation d'équivalence associée. L'action diagonale de Γ sur $X \times Y$ détermine une lamination

$$\Sigma = (X \times Y)/\Gamma,$$

qui est une désingularisation simpliciale de $Q = X/R$. On dira que le complexe simplicial Q-périodique $\tilde{\Sigma}$ associé à Σ *définit une structure Q-périodique sur Y*. (cf. [38, §3.4])

Faisons une constatation simple, extraite de [47, §5.33], illustrant cette idée. Désignons par $\mathbf{R}$ la droite réelle. Tout recouvrement périodique, disons $\mathbf{Z}$-invariant (où $\mathbf{Z}$ agit par translation), de cette droite par des intervalles de longueur n a multiplicité au moins n. Par ailleurs, on peut construire un recouvrement quasi-périodique (défini par exemple via un feuilletage irrationnel du tore) de $\mathbf{R}$ par des intervalles de longueur n, avec multiplicité au plus 2.

D'autres catégories. Nous étudierons prochainement, en collaboration avec S. Vassout, la notion de variété riemannienne quasi-périodique en relation avec la signature L^2. Plus généralement, toute catégorie d'espaces métriques séparables (espaces CAT(0),...) est *a priori* naturellement sujette à quasi-périodicité.

Notons aussi que certains espaces fonctionnels peuvent également jouir de propriétés de quasi-périodicité. Par exemple, si $p : X \to Q$ est une désingularisation discrète de Q, le fibré mesurable $x \mapsto \ell^\infty([x])$, où $[x]$ désigne la classe de $x \in X$, définit « l'espace ℓ^∞ quasi-périodique »

$$[x] \mapsto \ell^\infty([x]).$$

Cet espace est muni d'une structure d'algèbre (effectuer les opérations classe par classe), de la structure mesurée canonique, et la norme donnée par le supremum essentiel des normes ℓ^∞ en fait une algèbre de von Neumann (il s'agit bien sûr de $L^\infty(X)$). De même, si $[x] \mapsto \ell^2([x])$ est l'espace de Hilbert quasi-périodique associé à la représentation régulière de R_p, l'espace quasi-périodique

$$[x] \mapsto B(\ell^2([x]))$$

des opérateurs bornés sur $\ell^2([x])$ (où $[x] \mapsto q_{[x]}$ est mesurable si les fonctions $x \mapsto \langle q_{[x]}\xi_x \mid \eta_x \rangle$ sont mesurables pour toutes sections mesurables ξ, η de $\amalg_{x \in X} \ell^2([x])$) est une algèbre et le supremum essentiel en fait une algèbre de von Neumann, qui contient $L^\infty(X)$, agissant par multiplication (il s'agit de l'algèbre de von Neumann de la relation d'équivalence R_p). Nous renvoyons ici à [26, I.4.γ].

18 Ergodicité forte

Soit (X, μ) un espace de probabilité. Fixons une famille dénombrable Φ d'isomorphismes partiels de X préservant la classe de μ et considérons le pseudo-groupe $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ engendré par Φ. On dit qu'une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ de parties boréliennes de X est *asymptotiquement invariante* sous l'action de Γ si pour tout Φ-mot m de domaine $D \subset X$, on a

$$\mu(m(A_n \cap D) \backslash A_n) \to_n 0.$$

La notion de suite asymptotiquement invariante est classique et s'énonce traditionellement en terme d'actions de groupe. Si $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(X, \mu)$ est un groupe agissant en préservant la classe de μ, on dit qu'une suite (A_n) de parties boréliennes de X est *asymptotiquement invariante* sous l'action de Γ si

$$\mu(\alpha(\gamma)A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Il est facile de voir que les deux définitions données ci-dessus lorsque Φ est constitué d'isomorphismes de X coïncident (voir également le lemme 51). Une suite asymptotiquement invariante (A_n) est dite *non triviale* s'il existe $\delta > 0$ tel que, quitte à extraire,

$$\delta \leqslant \mu(A_n) \leqslant 1 - \delta.$$

Rappelons également qu'une suite (A_n) est asymptotiquement invariante sous l'action α d'un groupe Γ si et seulement si

$$\mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

pour tout $\varphi \in [R_\alpha]$, et l'existence de suites asymptotiquement invariantes non triviales ne dépend donc que de la relation d'équivalence $R = R_\alpha$ associée à l'action de Γ. On dit alors qu'une relation d'équivalence ergodique R est *fortement ergodique* si toute suite asymptotiquement invariante sous l'action de $[R]$ est triviale (cf. [29, 99, 30, 100, 62]). On vérifie facilement que cette propriété ne dépend que de la classe de μ.

Lemme 51. *Soit $\Gamma = \langle \Phi \rangle$ un pseudo-groupe d'isomorphismes partiels agissant ergodiquement sur (X, μ). L'existence de suites asymptotiquement invariantes non triviales sous l'action de Γ est invariante par équivalence orbitale stable, i.e. est une propriété de l'espace singulier $Q = X/\Gamma$ des orbites de Γ sur X.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'invariance asymptotique sous l'action de Γ équivaut à l'invariance asymptotique sous l'action du groupe plein $[\Phi]$ de la relation d'équivalence R engendrée par Φ (cf. [62, 58]). Fixons une suite (A_n) asymptotiquement invariante sous l'action de Γ. Soient $\varphi \in [\Phi]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Soient $m_1, \ldots, m_k$ une famille finie de Φ-mots et $\Omega_1, \ldots \Omega_k$ une famille finie de boréliens disjoints tel que $m_i(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \Omega_i$ et $\mu(\varphi A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$, où $A_\varepsilon = X \backslash \amalg \Omega_i$. Alors

$$\varphi A_n \backslash A_n = \amalg_1^k \; (m_i(A_n \cap \Omega_i) \backslash A_n) \amalg \varphi A_\varepsilon \backslash A_n \subset \cup_1^k \; (m_i(A_n \cap D_i) \backslash A_n) \cup \varphi A_\varepsilon \backslash A_n$$

où D_i est le domaine de m_i. Pour tout n suffisament grand on a par hypothèse $\mu(m_i(A_n \cap D_i) \backslash A_n) \leqslant \varepsilon/2k$. Donc $\mu(\varphi A_n \backslash A_n) \to 0$. Ainsi

$$\mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to 0,$$

car $A_n \backslash \varphi A_n = \varphi(\varphi^{-1}A_n \backslash A_n)$, et (A_n) est asymptotiquement invariante pour $[\Phi]$.

Réciproquement soit $m : D \to D'$ un Φ-mot. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ une famille d'isomorphismes partiels de domaines respectifs $D_1, \dots, D_k$ disjoints tels que $m(x) = \varphi_i(x)$ pour tout $x \in D_i$, et tels que $\mu(\varphi_i(D_i) \cap D_i) = 0$. On peut supposer $\mu(m(D_\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre réel fixé et $D_\varepsilon = D \backslash \amalg D_i$ [33]. Alors

$$m(A_n \cap D) \backslash A_n = \amalg_1^k \left(\varphi_i(A_n \cap D_i) \backslash A_n\right) \amalg m(D_\varepsilon) \backslash A_n \subset \cup_1^k \overline{\varphi}_i(A_n) \backslash A_n \cup m(D_\varepsilon) \backslash A_n$$

où $\overline{\varphi}_i$ est l'extension de φ_i à X en un isomorphisme d'ordre 2 coincidant avec l'identité sur $X \backslash (D_i \cup \varphi_i(D_i))$. Ainsi $\mu(m(A_n \cap D) \backslash A_n) \to 0$, donc (A_n) est asymptotiquement invariante pour $\Gamma = \langle \Phi \rangle$.

Montrons l'invariance par équivalence orbitale stable. Soit $Y \subset X$ un borélien non trivial rencontrant toutes les orbites de R. Soit $A_n \subset Y$ une suite asymptotiquement invariante non triviale pour $R_{|Y}$. Considérons un graphage Φ de $R_{|Y}$ et une famille Ψ d'isomorphismes partiels $X \backslash Y \to Y$ de R dont les domaines forment une partition de $X \backslash Y$. Alors $\tilde{\Phi} = \Phi \cup \Psi$ est un graphage de R et la suite (A'_n) des saturés de A_n par Ψ est $\tilde{\Phi}$-asymptotiquement invariante et non triviale (il suffit de vérifier l'invariance asymptotique sur les générateurs d'un graphage).

Réciproquement, soit (A_n) une suite asymptotiquement invariante non triviale pour R. Notons qu'il suffit de montrer qu'il existe un borélien $Y_0 \subset Y$ rencontrant toutes les orbites de R contenant des suites asymptotiquement invariantes pour $R_{|Y_0}$. Considérons un borélien $Y_0 \subset Y$ rencontrant toutes les orbites de R pour lequel il existe une partition $X \backslash Y_0 = \amalg_{i \geqslant 1} Y_i$ en domaines Y_i d'isomorphismes partiels $Y_i \simeq Y_0$. Notons que comme (A_n) est asymptotiquement invariante, on a

$$\mu(A_n \cap Y_i) \to_n 0 \Longleftrightarrow \mu(A_n \cap Y_j) \to_n 0$$

pour tous $i, j \geqslant 0$ fixés. Ainsi $(A_n \cap Y_0)_n$ définit une suite non triviale de $R_{|Y_0}$, au sens où l'on peut trouver une sous-suite (A'_m) de $(A_n \cap Y_0)_n$ dont la mesure converge vers un nombre réel non nul distinct de $\mu(Y_0)$. Cette suite est asymptotiquement invariante car si φ est un isomorphisme de $R_{|Y_0}$, il s'étend par l'identité en un isomorphisme de R, et

$$\varphi(A'_m) \Delta A'_m = \varphi(A_m) \Delta A_m.$$

■

Définition. *Soit Q un espace singulier ergodique. On dit que Q est* fortement ergodique *si toute suite asymptotiquement invariante d'une désingularisation discrète est triviale.*

Théorème 52 (Jones-Schmidt [62])**.** *Soit Q un espace singulier ergodique. On a l'alternative suivante :*

– *soit Q possède un quotient moyennable ergodique non trivial,*

– *soit Q est fortement ergodique.*

Rappelons la définition suivante, qui s'adapte immédiatement aux espaces singuliers.

Définition. *Soit R, resp. $\underline{R}$, une relation d'équivalence mesurée ergodique sur un espace de probabilité (X, μ), resp. $(\underline{X}, \underline{\mu})$. On dit que $\underline{R}$* est un quotient de *R s'il existe une application borélienne surjective non singulière $p : X \to \underline{X}$ tel que $p^{(1)}(R) = \underline{R}$, où $p^{(1)}(x, y) = (p(x), p(y))$.*

Nous renvoyons pour un exposé récent des résultats concernant l'ergodicité forte, et notamment pour une démonstration du théorème de Jones-Schmidt, à l'article de G. Hjorth et A. Kechris [58, App. 1].

19 Concentration

Ce paragraphe est essentiellement inspiré de l'observation suivante de Gromov, extraite de [48],

"If X is foliated (i.e. partitioned) into the orbits of an amenable *group G acting on X, then the resulting d on X is, essentially, never concentrated. But if G has property T, then it is concentrated."*

Soit un espace métrique-mesuré (X, d, μ) au sens de Gromov [48], où l'on permet que $d(x, y) = \infty$. Plus précisément X est un espace borélien standard, μ est une mesure de probabilité sans atome sur X, et d est une application borélienne satisfaisant aux axiomes traditionnels d'une distance, excepté que ses valeurs parcourent $[0, \infty]$. De plus, on suppose que, si $R = R_d \subset X \times X$ désigne la relation d'équivalence borélienne des couples (x, y) de points à distance finie, la mesure μ est *quasi-invariante* relativement à R.

Exemple. Considérons un feuilletage lisse sur une variété compacte. La donnée d'un champ mesurable de métriques sur chaque feuille détermine un espace métrique-mesuré, où on pose

$$d(x, y) = d_\ell(x, y)$$

si x, y sont sur une même feuille ℓ et $d(x, y) = \infty$ sinon. Notons que la probabilité pour la classe de Lebesgue que deux points soient à distance finie est nulle. Ici R est la relation d'équivalence sous-jacente au groupoïde d'holonomie (partition en feuilles).

Exemple. Soit R une relation d'équivalence mesurée. Un graphage K de R définit naturellement une métrique d_K sur les orbites (distance simpliciale).

Étant donnés deux parties boréliennes $A, B \subset X$ on note

$$d(A,B) = \inf_{x\in A}{}^{\mu} \inf_{y\in B} d(x,y)$$

où le symbole « $\inf^{\mu}$ » désigne l'infimum essentiel relativement à μ (et le symbole « inf » l'infimum usuel).

Définition ([48]). *On dit que* (X, d, μ) *est* concentré *s'il existe une fonction* $c :]0,\infty]^2 \to \mathbf{R}_+$*, telle que pour tous boréliens non négligeables* $A, B \subset X$*, on a*

$$d(A,B) \leqslant c(\mu(A), \mu(B)).$$

On vérifie facilement que cette définition est équivalente la suivante : pour tout $\delta > 0$ il existe une constante r_δ telle que pour tous boréliens $A, B \subset X$, on a

$$\mu(A),\ \mu(B) \geqslant \delta \Longrightarrow d(A,B) \leqslant r_\delta.$$

Notons que la fonction $c(\delta, \delta') = \sup\{d(A,B) \mid \mu(A) = \delta,\ \mu(B) = \delta'\}$ est décroissante à δ fixé.

Remarque. Il est à noter que la définition qualitative donnée ci-dessus ne permet pas d'obtenir, comme dans la situation classique, des résultats sur la concentration des fonctions 1-lipschitziennes.

Observons que les espaces métriques-mesurés concentrés sont en particulier ergodiques, au sens où R est ergodique relativement à μ ou, de façon équivalente, au sens suivant.

Définition. *Soit* (X, d, μ) *un espace métrique-mesuré au sens ci-dessus. On dit que* d *est* ergodique *(relativement à* μ*) si pour toutes parties boréliennes* $A, B \subset X$ *non négligeables, on a* $d(A,B) < \infty$*.*

Théorème 53. *Soit* (X, μ) *un espace borélien standard et* Φ *une famille finie d'isomorphismes partiels (préservant la classe de* μ *et) induisant une métrique ergodique* $d = d_\Phi$ *sur* X*. Alors* X *est concentré si et seulement s'il ne contient pas de boréliens asymptotiquement invariants non triviaux sous l'action du pseudo-groupe* $\Gamma = \langle \Phi \rangle$*.*

Démonstration. Soit (A_n) une suite asymptotiquement invariante telle que

$$\delta \leqslant \mu(A_n) \leqslant 1 - \delta.$$

Supposons en raisonnant par l'absurde que l'espace X soit concentré et considérons un entier $r = r_{\delta/2}$ telle que si $\mu(A)$, $\mu(B) \geqslant \delta/2$ alors $d(A,B) \leqslant r$. Soit $F = \{m^1, m^2, \ldots, m^f\}$ la famille finie des Φ-mots de longueur $\leqslant r$. Notons $B_n = X \backslash A_n$ et fixons un mot $m^i \in F$, de domaine D^i. Soit (D^i_n) la suite de boréliens définis par $D^i_n = \{x \in D^i \cap A_n | \, m^i(x) \in B_n\}$. Par définition de A_n on a

$$\mu(m^i(A_n \cap D^i) \backslash A_n) \to 0,$$

i.e., $\mu(m^i(D^i_n)) \to 0$, et il existe un entier N_i suffisament grand pour que pour $n \geqslant N_i$,

$$B_n^{m_i} = B_n \backslash m^i(D^i_n)$$

soit de mesure $\geqslant \delta - \frac{\delta}{2f}$. Choisissons $N = \max_i N_i$ et considérons le borélien $C_N = \cap_i B_N^{m^i}$, de mesure $\geqslant \delta/2$. On a

$$\mu(m(A_N \cap D) \cap C_N) = 0$$

pour tout mot $m \in F$ de domaine D. En d'autres termes $d(A_N, C_N) > r$, contrairement à l'hypothèse.

Réciproquement supposons que X ne soit pas concentré et construisons une suite asymptotiquement invariante. Soit (A_n), (B_n) deux suites de boréliens de taille $\geqslant \delta$ tels que

$$d(A_n, B_n) \geqslant n + 1.$$

Ainsi la « boule » de centre A_n et de rayon n est disjointe de B_n ; on supposera que B_n coïncide avec le complémentaire de cette boule. Construisons une suite de fonctions

$$\pi_n \in L^\infty(X, \mu)$$

de la façon suivante. Sur A_n (resp. B_n), on pose $\pi_n = 1$ (resp. 0). Sur la sphère de centre A_n et de rayon $i = 1 \ldots n$, on pose $\pi_n = 1 - 1/i$. Soit m un Φ-mot de domaine D et de longueur l. Il est clair que pour presque tout $x \in D$ on a

$$|\pi_n(m(x)) - \pi_n(x)| \leqslant \frac{l}{n}.$$

Plus généralement pour tout automorphisme partiel $\varphi \in [[R]]$ tel que

$$|\varphi| = \int_{D'} d(\varphi^{-1}x, x) d\mu(x) < \infty$$

où D' est l'image de φ, on a

$$\begin{aligned} ||(\pi_n \circ \varphi^{-1} - \pi_n)_{|D'}||_1 &= \int_{D'} |\pi_n(\varphi^{-1}x) - \pi_n(x)| d\mu(x) \\ &\leqslant \int_{D'} \frac{d(\varphi^{-1}x, x)}{n} d\mu(x) = \frac{|\varphi|}{n} \to_n 0. \end{aligned}$$

Notons $A_n^\alpha = \{\pi_n \geqslant \alpha\}$. On a pour tout $x \in D'$,

$$|\pi_n(\varphi^{-1}x) - \pi_n(x)| = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} \chi_{\varphi(A_n^{1-i/n} \cap D) \,\Delta\, (A_n^{1-i/n} \cap D')}(x),$$

où D est le domaine de φ. Donc

$$||(\pi_n \circ \varphi^{-1} - \pi_n)_{|D'}||_1 = \int_0^1 \mu(\varphi(A_n^\alpha \cap D)\Delta(A_n^\alpha \cap D'))d\alpha.$$

Il en résulte, quitte à extraire une sous-suite, que

$$\mu(\varphi(A_n^\alpha \cap D)\backslash A_n^\alpha) \to 0$$

pour presque tout α.

Par définition $|\varphi| = \mu(D')$ pour tout isomorphisme partiel $\varphi \in \Phi$ d'image D'. Comme Φ est de cardinal fini, on obtient ainsi par extractions successives une sous-suite (A_m) de (A_n) telle que $\mu(\varphi(A_m^\alpha \cap D)\backslash A_m^\alpha) \to 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$ et presque tout α. Comme il suffit de vérifier l'invariance asymptotique sur un système générateur de R, presque toute suite (A_m^α) est asymptotiquement invariante sous l'action de $\Gamma = \langle \Phi \rangle$. De plus, elles sont non triviales pour $\alpha > 0$, et le théorème en résulte. ■

Remarque. Le théorème précédent est clairement faux lorsque la métrique d_Φ n'est pas de type fini (on peut alors choisir pour Φ une partition de R en isomorphismes partiels). Dans ce cas, il est facile d'adapter la démonstration ci-dessus pour établir le résultat suivant. Étant donnée une famille dénombrable Φ d'isomorphismes partiels de X préservant la classe de la mesure μ, *l'action sur X du pseudo-groupe engendré par Φ contient une suite asymptotiquement invariante non triviale si et seulement si pour toute métrique de type fini $d \geqslant d_\Phi$, l'espace métrique-mesuré (X, μ, d) n'est pas concentré.*

Soit R une relation d'équivalence mesurée de type fini. On dit que R est *concentrée* si pour tout graphage fini Φ de R l'espace métrique-mesuré (X, d_Φ, μ) est concentré. Notons que si R n'est pas concentré, alors aucun des espaces (X, d_Φ, μ) associé à un graphage fini Φ ne l'est ; la propriété de concentration est ainsi indépendante de la métrique (de type fini) choisie sur l'espace ambiant. On dit qu'un espace singulier ergodique de type fini est *concentré* si toute désingularisation discrète l'est.

Théorème 54. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Alors Q est fortement ergodique si et seulement s'il est concentré.*

Rappelons que d'après le résultat de Schmidt-Connes-Weiss (cf. [99, 30]), un groupe dénombrable possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si toutes ses actions ergodiques de type II_1 sont fortement ergodiques.

Corollaire 55. *Soit Γ un groupe de type fini. Alors Γ possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si toutes ses actions ergodiques de type II_1 sont concentrées.*

Nous renvoyons le lecteur à [48] pour un éventail d'idées sur la concentration. On dit classiquement qu'un espace concentré est, en général, un espace « de grande dimension ». On retrouve dans le contexte quasi-périodique ce type phénomène. Par exemple, les shifts de Bernouilli (non moyennables), i.e. $\{0,1\}^\Gamma$ où Γ agit par translation, sont concentrés (cf. [75, 62, 58]).

20 Inégalités isopérimétriques

Soit R une relation d'équivalence mesurée de type fini sur un espace de probabilité (X, μ). Soit K une partie symétrique u.l.f. de R.

Définition. *On dit que K possède des* suites de Følner évanescentes *(vanishing Følner sequences) relativement à μ s'il existe une suite (A_n) de boréliens non négligeables de X et une suite (ε_n) de nombres réels convergeant vers 0 telles que*

$$\mu(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \mu(\partial_K A_n) \leqslant \varepsilon_n \mu(A_n).$$

Remarque. L'existence de telles suites de Følner est une propriété de K et non de R ; le résultat principal de ce paragraphe caractérise les relations d'équivalence dont tout graphage contient des suites de Følner évanescentes, dans l'esprit de [28, page 443] (cf. également [64]). Notons que dans la définition précédente les composantes connexes de A_n (relativement à la structure simpliciale) n'ont pas de raison d'être finies (c'est là une différence essentielle avec les suites de Følner de [28]). La notion de suites de Følner évanescentes est une reformulation géométrique de la notion dynamique de *I-suites* considérée dans [63, 100, 98], lorsque μ est une mesure de probabilité *invariante.*

Exemple. Soit R une relation d'équivalence de type II_1. Soit $A \subset X$ un borélien de mesure 1/4. Considérons un graphage borné K_A de $R_{|A}$, une partition infinie $A_1^1, A_2^1, \ldots$ de A et une partition

$$\{A_i^j\}_{i \geqslant 1,\ 2 \leqslant j \leqslant n_i}$$

de $X \backslash A$ de sorte que $\mu(A_i) = \mu(A_i^j)$ et que $n_i \to_i \infty$. En choisissant des isomorphismes partiels $A_i^j \to A_i^{j+1}$, il est facile de compléter K_A en un graphage borné K de R. Ce graphage contient des suites de Følner évanescentes. X peut cependant être fortement ergodique, si par exemple R possède la propriété T de Kazhdan.

Exemple. Schmidt [100] a construit un *arbre* quasi-périodique de type II_1 et de valence 6, à la fois concentré et contenant des suites de Følner au sens ci-dessus. Nous avons vu dans l'exemple précédent que tout espace singulier possède un graphe quasi-périodique contenant des suites de Følner. Hjorth et Kechris [58] ont montré que pour tout espace singulier obtenu par action mélangeante de type II_1 du groupe libre à deux générateurs, on peut construire un arbre quasi-périodique de valence 4 contenant des suites de Følner (le groupe libre à deux générateurs permet de définir une infinité non dénombrable de notions de quasi-périodicité différentes [39]). Il existe de nombreux graphes quasi-périodiques sans suite de Følner évanescente. Par exemple, un graphe de Cayley de groupe non moyennable, muni d'une structure quasi-périodique associée à une action par *shifts de Bernoulli* de ce groupe, n'en contient pas.

Théorème 56. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type fini préservant une mesure de probabilité μ. Alors R possède un quotient moyennable si et seulement si chacun de ses graphages u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes.*

Démonstration. D'après le théorème de Jones-Schmidt, nous devons montrer qu'une relation d'équivalence II_1 de type fini est fortement ergodique si et seulement si l'un de ses graphages u.l.f. ne contient pas de suites de Følner évanescentes.

Soit R une relation d'équivalence II_1 de type fini. Supposons que tout graphage u.l.f. de R contient des suites de Følner évanescentes et construisons une suite asymptotiquement invariante non triviale. Soit K un graphage u.l.f. de R et $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des boréliens A de X tels que

$$\mu(\partial_K A) \leqslant \varepsilon\mu(A)$$

et

$$\mu(A) \leqslant c,$$

où $c \in]0,1[$ est fixé. Étant donnés A et B dans $\mathcal{E}$ on pose

$$A \leqslant B \text{ si } A \subset B \quad \text{et} \quad \mu(\partial_K A' \backslash A) \leqslant \varepsilon\mu(A'),$$

où $A' = B \backslash A$ et l'inclusion $A \subset B$ a lieu à une partie négligeable près. Ceci définit un ordre partiel sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}'$ un sous-ensemble totalement ordonné et $A_n \in \mathcal{E}'$ une suite telle que $\sup_n \mu(A_n) = \sup_{A\in\mathcal{E}'} \mu(A)$. Posons $A_\infty = \cup_n A_n$ et $A_i' = A_i \backslash A_{i-1}$. Alors

$$\mu(\partial_K A_\infty) = \mu(\partial_K A_1 \backslash A_\infty) + \sum_{n\geqslant 2} \mu(\partial_K A_n' \backslash A_\infty) \leqslant \varepsilon\mu(A_1) + \varepsilon \sum_{n\geqslant 2} \mu(A_n') = \varepsilon\mu(A_\infty),$$

et, si $A \in \mathcal{E}'$, on a

$$\mu(\partial_K A_\infty' \backslash A) = \lim_n \mu(\partial_K A_n' \backslash A_\infty) \leqslant \varepsilon \lim \mu(A_n') = \varepsilon\mu(A_\infty')$$

où $A_\infty' = A_\infty \backslash A$ et $A_n' = A_n \backslash A$. Ainsi $\mathcal{E}$ est inductif. Soit $A \in \mathcal{E}$ un élément maximal (lemme de Zorn). Supposons par l'absurde que $\delta = c - \mu(A) > 0$ et notons $K' = X\backslash A \times X\backslash A \cap K$.

Complétons K' en un graphage u.l.f. K'' de $R_{|X\backslash A}$, et choisissons une famille finie d'isomorphismes partiels $\varphi_i : A \to X\backslash A$ de R dont les domaines partitionnent A. Alors

$$\overline{K} = K'' \cup_i (\mathrm{graph}\varphi_i \cup \mathrm{graph}\varphi_i^{-1})$$

est un graphage u.l.f. de R.

Soit $A_n \subset X$ une suite de Følner évanescentes pour $\overline{K}$. Posons $A'_n = A_n \cap X\backslash A$. Par définition de $\overline{K}$ on a $\mu(A'_n) > 0$ pour tout n suffisament grand. Soient

$$\begin{aligned} B_n^1 &= \{x \in A_n \cap A |\ \varphi_i(x) \notin A'_n \cup \partial_{K''} A'_n\}, \\ B_n^2 &= \{x \in A_n \cap A |\ \varphi_i(x) \in \partial_{K''} A'_n\}, \\ B_n^3 &= \{x \in A_n \cap A |\ \varphi_i(x) \in A'_n\}. \end{aligned}$$

On a

$$\mu(\partial_{\overline{K}} A_n) \geqslant \mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1) + \mu(\partial_{K''} A'_n).$$

Par ailleurs $\overline{K}$ étant u.l.b. (rappelons que μ est invariante), il existe une constante $C = C(\overline{K})$ telle que

$$\mu(B_n^1) \leqslant C\mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1), \quad \mu(B_n^2) \leqslant C\mu(\partial_{K''} A'_n), \quad \text{et} \quad \mu(B_n^3) \leqslant C\mu(A'_n).$$

Pour tout ε' il existe n tel que

$$\mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1) + \mu(\partial_{K''} A'_n) \leqslant \varepsilon'(\mu(B_n^1) + \mu(B_n^2) + \mu(B_n^3) + \mu(A'_n)),$$

donc

$$(1 - \varepsilon' C)\mu(\partial_{K''} A'_n) \leqslant (\varepsilon' C - 1)\mu(\partial_{\overline{K}} B_n^1) + \varepsilon'(1 + C)\mu(A'_n),$$

et si ε' vérifie

$$\varepsilon' C < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon'(1+C)}{1 - \varepsilon' C} \leqslant \varepsilon,$$

on obtient un entier n tel que que $0 < \mu(A'_n) < \delta$ et

$$\mu(\partial_{K''} A'_n) \leqslant \varepsilon \mu(A'_n).$$

Alors

$$\mu(\partial_K A'_n \backslash A) = \mu(\partial_{K'} A'_n) \leqslant \varepsilon \mu(A'_n)$$

donc $A < A \amalg A'_n$. Enfin,

$$\mu(\partial_K (A \amalg A'_n)) \leqslant \mu(\partial_K A \backslash A'_n) + \mu(\partial_K A'_n \backslash A) \leqslant \varepsilon \mu(A) + \varepsilon \mu(A'_n) = \varepsilon \mu(A \amalg A'_n),$$

donc $A \amalg A'_n \in \mathcal{E}$, d'où une contradiction. Ainsi on peut trouver une famille $A_n \subset X$ de borélien tels que $\mu(A_n) = c$ et $\mu(\partial_K A_n) \leqslant 1/n$; il en résulte, en partionnant K en un nombre fini d'isomorphismes partiels, que R contient des suites asymptotiquement invariantes (de mesure c).

Réciproquement supposons que R ne soit pas fortement ergodique et montrons que tout graphage u.l.f. K contient des suites de Følner évanescentes. (Nous nous inspirons ici d'un argument classique, cf. [63, 100, 98, 58].) Soit K un graphage u.l.f. de R. Pour tout nombre réel $0 < \delta < 1$ il existe un suite asymptotiquement invariante A_k^δ telle que $\mu(A_k^\delta) = \delta$ (cf. [62]). Soit n fixé et $\delta = 1/n$. K étant u.l.f., on peut le partionner en une famille finie F d'isomorphismes partiels. Soit $k = k(n)$ un entier suffisament grand pour que

$$\sum_{\varphi\in F} \mu(\varphi(A_k^\delta \cap D_\varphi)\backslash A_k^\delta) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

où D_φ est le domaine de φ. On pose $A'_n = A^\delta_{k(n)}$. Alors

$$\mu(A'_n) \to 0 \quad \text{et} \quad \mu(\partial_K A'_n) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A'_n).$$

■

Théorème 57. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Alors Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphe Q-périodique u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes (relativement à une mesure de probabilité dont la classe est déterminée par Q).*

Démonstration. Le fait que tout graphage u.l.f. contient des suites de Følner lorsque Q possède un quotient moyennable résulte sans changement de la démonstration ci-dessus. Ainsi, il reste seulement à montrer que, lorsque tout graphe Q-périodique symétrique u.l.f. contienne des suites de Følner évanescentes, il existe une désingularisation discrète de Q admettant des suites asymptotiquement invariantes non triviales. Considérons un graphage u.l.f. K d'une désingularisation discrète R de Q. Soit $\varepsilon > 0$. Reprenons la démonstration du théorème précédent. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des boréliens A de X tels que

$$\mu(\partial_K A) \leqslant \varepsilon\mu(A)$$

et

$$\mu(A) \leqslant c$$

où $c \in]0, 1[$. Avec la même relation d'ordre $\mathcal{E}$ est inductif. Soit $A \in \mathcal{E}$ un élément maximal. Supposons que $\delta = c - \mu(A) > 0$ et notons $K' = X\backslash A \times X\backslash A \cap K$. On peut compléter K' en un graphage u.l.f. $\overline{K}$ de $R_{|X\backslash A}$. Soit $A'_n \subset X$ une suite de Følner évanescentes pour $\overline{K}$ (relativement à la mesure $\mu/\mu(X\backslash A)$). Soit un entier n tel que que $0 < \mu(A'_n) < \delta$ et

$$\mu(\partial_{K'} A'_n) \leqslant \mu(\partial_{\overline{K}} A'_n) \leqslant \varepsilon\mu(A'_n).$$

Alors

$$\mu(\partial_K A'_n\backslash A) = \mu(\partial_{K'} A'_n) \leqslant \varepsilon\mu(A'_n)$$

donc $A < A\amalg A'_n \in \mathcal{E}$, d'où une contradiction. Ainsi on peut trouver une famille $A_n \subset X$ de borélien tels que $\mu(A_n) = c$ et $\mu(\partial_K A_n) \leqslant 1/n$; il en résulte, en partitionnant K en un nombre fini d'isomorphismes partiels, que R contient des suites asymptotiquement invariantes. ∎

Concluons par la variation suivante. On rappelle qu'un sous-graphage u.l.b. est un graphage u.l.f. d'une sous-relation de R dont les dérivées de Radon-Nikodỳm sont bornées.

Théorème 58. *Soit R une relation d'équivalence ergodique. Alors R possède un quotient moyennable si et seulement si chacun de ses sous-graphages symétriques u.l.b. possède des suites de Følner évanescentes.*

Démonstration. Le sens direct est là encore identique à celui du théorème 56. Réciproquement soit R une relation d'équivalence ergodique dont tout sous-graphage symétrique u.l.b. contient des suites de Følner évanescentes. Les démonstrations données ci-dessus impliquent que pour tout sous-graphage symétrique u.l.b. K de R, tout $c \in]0,1[$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie $A \subset X$ de mesure c tel que $\mu(\partial_K A) \leqslant \varepsilon$. Écrivons R comme réunion de graphes d'isomorphismes $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ de X et considérons un sous-graphage u.l.b. K_n tel que pour tout $i \leqslant n$,

$$\mu\{x \mid (x, \varphi_i x) \notin K_n\} + \mu\{x \mid (x, \varphi_i^{-1} x) \notin K_n\} \leqslant 1/n.$$

Soit (A_n) une suite de partie borélienne de X de mesure $c \in]0,1[$ telle que $\mu(\partial_{K_n} A_n) \leqslant 1/n$. Alors, pour tout $i \geqslant 1$, on a $\mu(\varphi_i A_n \Delta A_n) \leqslant 2/n$ pour tout $n \geqslant i$. Il en résulte immédiatement que pour tout $\varphi \in [R]$,

$$\mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

(découper φ le long de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ de la même façon que dans le lemme 51). ∎

Deuxième partie — Extension aux espaces métriques à géométrie essentiellement u.l.f.

21 Espaces métriques-mesurés quasi-périodiques

Soit (Y, d) un espace métrique quasi-périodique (voir le chap. II). On conserve les notations Q, R, X, Y^X,... habituelles.

Un *champ mesurable de mesures* sur Y^X est une famille $(\lambda^x)_{x\in X}$ de mesures sur (une sous-tribu de) la tribu borélienne sur Y^X telle que

– λ^x a pour support la tribu borélienne de la réalisation Y^x,
– il existe une suite croissante exhaustive de boréliens $U_n \subset Y^X$ tels que $\lambda^x(U_n) < \infty$ pour tout x (σ-finitude),
– pour toute fonction mesurable $f : Y^X \to [0, \infty]$, la fonction $x \mapsto \lambda^x(f)$ est mesurable.

Un champ mesurable de mesures $(\lambda^x)_x$ sur Y^X et une mesure μ sur X détermine une mesure λ_μ sur Y^X, définie par,

$$\int_{Y^X} f d\lambda_\mu = \int_X \int_{Y^X} f(u) d\lambda^x(u) d\mu(x),$$

pour toute fonction mesurable $f : Y^X \to [0, \infty]$. On dit que $(\lambda^x)_x$ est un *système de Haar* si $Y(x, y)_* \lambda^y = \lambda^x$ pour tout $(x, y) \in R$.

On appelle *tribu quasi-périodique de* Y est la tribu $\mathcal{B}_Q$ des boréliens Q-périodiques inclus dans Y^X, et tribu quasi-périodique d'une réalisation Y^x la tribu trace $\mathcal{B}_Q^x = \mathcal{B}_Q \cap Y^x$. La translatée f^φ d'une fonction mesurable $f : Y^X \to [0, \infty]$ par un automorphisme $\varphi \in [R]$ est la fonction qui à $u \in Y^X$ associe $f(Y(\varphi^{-1} p(u), p(u))u)$. On dit que f est *quasi-périodique* si $f^\varphi = f$ pour tout $\varphi \in [R]$. La classe des fonctions mesurables quasi-périodique coïncide avec celle des fonctions $\mathcal{B}_Q$-mesurables.

On dit qu'un champ mesurable $(\lambda^x)_{x\in X}$ de mesures sur Y^X est un *système covolumique sur* Y si pour presque tout $x \in X$, λ^x est une mesure borélienne (non triviale) sur la tribu quasi-périodique de Y^X (elle a pour support la tribu $\mathcal{B}_Q^x$ de Y^x). On appelle *covolume* sur Y la donnée d'une mesure borélienne σ-finie sur Y^X de la forme λ_μ, où μ est dans la classe de la mesure transverse Λ et $(\lambda^x)_{x\in X}$ est un système covolumique.

Définition. *On dit que le triplet* (Y, d, λ_μ) *formé d'un espace métrique quasi-périodique et d'un covolume est un* espace métrique-mesuré quasi-périodique.

(*Remarque.* On définit plus généralement la notion d'espace mesuré quasi-périodique (Y, λ_μ), consistant en la donnée d'un espace borélien standard quasi-périodique Y muni d'un covolume λ_μ au sens ci-dessus.)

On note $L^\infty_Q(Y)$ l'ensemble des fonctions quasi-périodiques essentiellement bornées pour λ_μ, et $L^p_Q(Y)$ l'ensemble des fonctions quasi-périodiques f telles que

$$\int_{Y^X} |f|^p d\lambda_\mu < \infty$$

(modulo égalité presque sûre). Par définition, le *covolume de* Y relativement à λ_μ est l'intégrale (éventuellement infinie) de la fonction constante égale à 1 sur Y^X.

22 Ergodicité forte et concentration

Soient A, B deux boréliens quasi-périodiques non négligeables de Y^X. On pose

$$d(A,B) = \sup_{A' \subset A,\ B' \subset B} \ \inf_{u \in A',\ v \in B'} d(u,v),$$

où A' et B' parcourent les parties boréliennes quasi-périodiques de complémentaires négligeables dans A et B.

Définition. *On dit qu'un espace métrique-mesuré quasi-périodique* (Y, d, λ_μ) *est* concentré *s'il existe une fonction* $c :]0,\infty]^2 \to \mathbf{R}_+$ *telle que pour toutes parties boréliennes quasi-périodiques non négligeables* $A, B \subset Y^X$*, on a*

$$d(A,B) \leqslant c(\lambda_\mu(A), \lambda_\mu(B)).$$

Si (Y, d, λ_μ) est un espace concentré, on note c_Y la fonction définie par

$$c_Y(\delta, \delta') = \sup_{A,B | \lambda_\mu(A)=\delta,\ \lambda_\mu(B)=\delta'} d(A,B).$$

Les deux fonctions $c_Y(\delta, \cdot)$ et $c_Y(\cdot, \delta')$ sont décroissantes.

Rappelons qu'un graphe quasi-périodique est un espace métrique quasi-périodique (Y, d) dont chaque réalisation Y^x est munie d'un structure de graphe, que nous supposerons *connexe*, pour laquelle les deux familles $Y^{(0)}$ et $Y^{(1)}$ de sommets et d'arêtes (ouvertes) forment une partition borélienne de Y^X. La métrique d est la métrique simpliciale.

Définition. *On dit qu'un graphe quasi-périodique* Y *est* uniformément localement fini *(u.l.f.) si pour chaque sommet* $u \in Y^x$ *de presque toute réalisation* Y^x*, le nombre d'arêtes attachées à ce sommet est uniformément fini.*

Pour un graphe quasi-périodique, le système covolumique naturel (de dimension 0), associé à un domaine fondamental F de sommets, est donné par les mesures

$$\lambda^x(A) = \#(F \cap A)^x$$

pour un borélien quasi-périodique $A \subset Y^{(0)}$ (ou plus généralement des mesures λ^x équivalentes à $\#(F \cap \cdot)^x$). On définit alors un covolume sur Y à l'aide de $(\lambda^x)_x$ et d'une mesure μ sur X équivalente à la mesure transverse Λ (ce covolume *dépend* du domaine fondamental F choisi si μ n'est pas invariante). On dit qu'un covolume de support $Y^{(0)}$ est un *0-covolume* sur Y .

Rappelons d'autre part (voir chap. II) qu'une relation d'équivalence mesurée R sur (X, μ) est *fortement ergodique* si pour tout automorphisme $\varphi \in R$, et toute suite $(A_n)_n$ de parties boréliennes de X telles que

$$\mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to_n 0$$

on a $\mu(A_n) \to_n 0$ ou 1 (où Δ est la différence symétrique). Cette propriété est invariante par équivalence orbitale stable de relations d'équivalence mesurée et constitue une propriété de l'espace $(Q, [\Lambda])$ des orbites de R (voir [ef] par exemple).

On dit qu'une relation d'équivalence mesurée est de type fini si elle peut être engendrée par un nombre fini de générateurs, et qu'un espace singulier est de type fini si toutes ses désingularisations discrètes sont de type fini.

Le théorème suivant est démontré dans la première partie de ce chapitre. Il identifie l'ergodicité forte à la concentration.

Théorème 59. *Soit* $(Q, [\Lambda])$ *un espace mesuré singulier ergodique de type fini. Alors est fortement ergodique si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée,*
– *il existe un graphe Q-périodique u.l.f. de 0-covolume fini concentré,*
– *tout graphe Q-périodique u.l.f. de 0-covolume fini est concentré.*

23 Quasi-isométries quasi-périodiques

L'objet de cette section est d'étendre le théorème ci-dessus (th. 59) à une classe plus large d'espaces métriques-mesurés que les graphes, incluant notamment de nombreuses variétés riemanniennes quasi-périodiques (voir la section suivante).

Définition. *Considérons deux espaces métriques quasi-périodiques* (Y, d) *et* (Y', d').
1) On dit qu'une application mesurable $\theta : Y^X \to {Y'}^{X'}$ *est un* plongement quasi-isométrique *si les deux conditions suivantes sont vérifiées,*

– *deux points u et v de Y^X sont dans une même réalisation si et seulement si $\theta(u)$ et $\theta(v)$ sont dans une même réalisation,*
– *il existe deux constantes α et β telles que*

$$\frac{1}{\alpha}d(u,v)-\beta \leqslant d'(\theta(u),\theta(v)) \leqslant \alpha d(u,v)+\beta.$$

2) Un plongement quasi-isométrique θ induit une application mesurable injective $X \to X'$ encore notée θ. On dit que θ est équivariant *si $x \sim_R y \Longleftrightarrow \theta(x) \sim_{R'} \theta(y)$ et $\theta(Y(x,y)v) = Y'(\theta(x),\theta(y))\theta(v)$.*

Définition. *On dit qu'un espace métrique-mesuré quasi-périodique (Y,d,λ_μ) est* à géométrie essentiellement u.l.f. *s'il est de covolume fini et s'il existe une application mesurable $r : V \to U$ de $V \subset Y^X$ sur $U \subset Y^X$ telle que*
– *V est une partie quasi-périodique de complémentaire λ_μ-négligeable et U est une partie dénombrable quasi-périodique incluse dans V,*
– *r est une rétraction, i.e. v et $r(v)$ sont dans la même réalisation et la restriction de r à U est l'identité,*
– *il existe une métrique simpliciale d_U u.l.f. sur U (i.e., donnée par une structure de graphe quasi-périodique) pour laquelle r est un plongement quasi-isométrique équivariant,*
– *$r_*(\lambda)_\mu$ est équivalente à la mesure transverse Λ sur la tribu quasi-périodique de U, où $r_*(\lambda)^x(A) = \lambda^x(r^{-1}A)$ toute partie borélienne quasi-périodique $A \in \mathcal{B}_Q^x(U)$.*

Lemme 60. *Avec les notations de la définition précédente, (Y,d,λ_μ) est concentré si et seulement si $(U,d_U,r_*(\lambda)_\mu)$ est concentré.*

Démonstration. Supposons que $(U,d_U,r_*(\lambda)_\mu)$ soit concentré et considérons deux parties boréliennes quasi-périodique non négligeables A et B de Y^X. Quitte à ôter un négligeable de A et de B, on peut supposer que $d(A,B) = \inf_{u\in A,\ v\in B} d(u,v)$. Soient $A' \subset r(A)$, et $B' \subset r(B)$ deux parties boréliennes quasi-périodiques de complémentaires négligeables telles que $d_U(r(A),r(B)) = \inf_{u\in A',\ v\in B'} d(u,v)$. On a

$$d(A,B) \leqslant \alpha \inf_{u\in A\cap r^{-1}(A'),\ v\in B\cap r^{-1}(B')} d_U(r(u),r(v))+\beta$$

car $A\cap r^{-1}(A')$ et $v \in B\cap r^{-1}(B')$ sont de complémentaire négligeable dans A et B. Par suite,

$$d(A,B) \leqslant \alpha d_U(r(A),r(B))+\beta \leqslant \alpha c_U(r_*(\lambda)_\mu(r(A)),r_*(\lambda)_\mu(r(B)))+\beta,$$

et en notant $\bar{A} = r^{-1}r(A)$,

$$d(A,B) \leqslant \alpha c_U(\lambda_\mu(\bar{A}),\lambda_\mu(\bar{B}))+\beta \leqslant \alpha c_U(\lambda_\mu(A),\lambda_\mu(B))+\beta.$$

Réciproquement supposons que (Y, d, λ_μ) soit concentré. Considérons deux parties boréliennes quasi-périodiques non négligeables A et B de U. Quitte à ôter un négligeable de A et de B, on peut supposer que $d(A, B) = \inf_{u \in A,\ v \in B} d_U(u, v)$. On a,

$$\begin{aligned}
d_U(A, B) &\leqslant \alpha \inf_{u \in r^{-1}(A),\ v \in r^{-1}(B)} d(u, v) + \beta \\
&\leqslant \alpha d(r^{-1}(A), r^{-1}(B)) + \beta \\
&\leqslant \alpha c_Y(\lambda_\mu(r^{-1}(A)), \lambda_\mu(r^{-1}(B))) + \beta \\
&= \alpha c_Y(r_*(\lambda)_\mu(A), r_*(\lambda)_\mu(B)) + \beta
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

(Plus généralement on montre ainsi l'invariance de la concentration sous quasi-isométrie équivariante préservant les covolumes.)

Le théorème suivant résulte alors du lemme précédent et du théorème 59.

Théorème 61. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. Alors Q est fortement ergodique si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée,*
- *il existe un espace métrique-mesuré Q-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. concentré,*
- *tout espace métrique-mesuré Q-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. est concentré.*

24 Variétés riemanniennes quasi-périodiques

Soit V un espace borélien standard quasi-périodique (voir [25], ou [ef]). Une *carte quasi-périodique de dimension* n sur V est un isomorphisme borélien

$$c : U \to T \times B$$

entre une partie borélienne quasi-périodique $U \subset V^X$ et le produit cartésien d'un espace borélien standard T et de la boule unité B de $\mathbf{R}^n$, telle que chaque *plaque*

$$U_t = c^{-1}(\{t\} \times B)$$

de c soit incluse dans une réalisation V^x, et qui soit quasi-périodique au sens où si U_t est une plaque de c dans V^y, l'image de U_t par l'automorphisme $V(x, y)$ associé à $(x, y) \in R$ est encore une plaque $U_{t'}$ de c dans V^x, telle que pour tout $u \in B$,

$$c^{-1}(t', u) = V(x, y)c^{-1}(t, u).$$

Notons que la famille $c^{-1}(T \times \{0\})$ des *centres* de chaque plaque constitue une partie dénombrable quasi-périodique de V^X.

Un *atlas quasi-périodique de dimension* n *et de classe* C^k sur V est un système dénombrable

$$(c_i : U_i \to T_i \times B_i)_i$$

de cartes quasi-périodiques de dimension n, dont les domaines recouvrent V^X, et qui sont C^k-compatibles au sens où si deux plaques P^i_t et P^j_s de c_i et c_j s'intersectent, l'application de changement de plaques

$$c_j c_i^{-1} : c_i(P^i_t \cap P^j_s) \to c_j(P^i_t \cap P^j_s)$$

est un difféomorphisme de classe C^k. Notant $\Omega_{ij} = c_i(U_i \cap U_j) \subset T_i \times B_i$ et $\Omega_{ji} = c_j(U_i \cap U_j) \subset T_j \times B_j$, on montre facilement que les différentielles Dc_{ij} des changements de cartes $c_{ij} = c_j c_i^{-1} : \Omega_{ij} \mapsto \Omega_{ji}$ sont des applications mesurables

$$Dc_{ij} : \Omega_{ij} *_{T_{ij}} T_{ij} \times \mathbf{R}^n \to \Omega_{ji} *_{T_{ji}} T_{ji} \times \mathbf{R}^n$$

où $T_{ij} = p_{T_i}(\Omega_{ij})$, i.e. sont des champs mesurables de matrices sur Ω_{ij} (de même pour les différentielles d'ordre supérieur).

Définition. *Une* structure différentielle quasi-périodique *sur* V *est la donnée une classe d'équivalence d'atlas quasi-périodique de* V*, où deux atlas sont dits équivalents si leur réunion est un atlas.*

On vérifie immédiatement que la réunion d'atlas est une relation d'équivalence. Une *variété quasi-périodique* est un espace borélien standard quasi-périodique V muni d'une structure différentielle quasi-périodique. Ceci détermine une structure de variété sur chaque réalisation V^x de V (dont la topologie engendre la structure borélienne standard de V^x). On supposera toujours que toutes les réalisations V^x de V sont connexes, séparées, et séparables (au sens où il existe une partie borélienne $U \subset V^X$ qui est dense et dénombrable en restriction à chaque réalisation). On définit alors les fibrés classiques, tangent, extérieur,..., et l'existence de sections lisses de ces fibrés à l'aide de partitions de l'unité subordonnées à un atlas (en particulier l'existence de métriques riemaniennes). En fait, les variétés quasi-périodiques sont des « cas particuliers » de variétés (non compactes) au sens usuel du terme. Dans les situations qui nous intéressent, V admet un atlas uniformément localement fini, i.e. un atlas dont chacune des plaques rencontre au plus une famille uniformément finie de plaques distinctes. Si $\mathcal{A}$ est un tel atlas, on construit facilement une partition de l'unité $(\alpha_i)_i$ sur V qui lui est subordonnée en définissant $\tilde{\alpha}_i : U_i \to [0,1]$ par $\tilde{\alpha}_i(c_i^{-1}(t,u)) = \alpha(u)$ où $\alpha : B \to [0,1]$ est une fonction plateau sur la boule de $\mathbf{R}^n$, et $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i / \sum_i \tilde{\alpha}_i$ (la somme est localement finie) ; si $u = V(x,y)v$, on a $\alpha_i(u) = \alpha_i(v)$ par construction (comme requis). Observons que si $\mathcal{A}^{(0)}$ désigne l'ensemble (dénombrable quasi-périodique) des centres des plaques de $\mathcal{A}$, la métrique simpliciale $d_{\mathcal{A}}$ associant à deux centres u et v le nombre minimal de plaques dont la réunion contient un chemin de u à v ($+\infty$ si u et v ne sont pas dans la même réalisation) définit un espace métrique quasi-périodique $(\mathcal{A}^{(0)}, d_{\mathcal{A}})$ qui est un graphe quasi-périodique u.l.f. (connexe).

Les feuilles de feuilletages sont des variétés riemanniennes quasi-périodiques au sens suivant. Soit M une variété compacte et F un feuilletage de classe C^k sur M, $k \geqslant 1$ (plus généralement une lamination de classe $C^{0,k}$). Considérons un atlas régulier $\mathcal{A} = \{(U_i, c_i)\}_i$ de M, i.e. un atlas vérifiant les conditions suivantes (cf. [18]),

- l'adhérence $\overline{U}_i$ de U_i est une partie compacte d'une carte feuilleté $(\tilde{U}_i, \tilde{c}_i)$ telle que $c_i = \tilde{c}_{i|U_i}$,
- le recouvrement $(U_i)_i$ de M est fini,
- chaque plaque de $\overline{U}_i$ rencontre au plus une plaque de $\overline{U}_j$.

Notons $X = \mathcal{A}^{(0)}$ la transversale des centres des plaques de $\mathcal{A}$, qui est munie d'une relation d'équivalence borélienne R (donnée par la partition en feuilles), et considérons le foncteur V qui à $x \in X$ associe la feuille L_x passant par X et à $(x, y) \in R$ le difféomorphisme canonique $L_x = L_y$. Il est facile de munir $V(X) = V^X = \amalg_{x \in X} L_x$ d'un structure borélienne compatible donnée par $\mathcal{A}$ qui s'étend en un atlas quasi-périodique $\tilde{\mathcal{A}}$, et le choix d'une mesure quasi-invariante ergodique μ sur X en fait une variété différentielle quasi-périodique au sens ci-dessus.

Considérons alors sur M une métrique riemannienne le long des feuilles de F. Cette métrique définit une métrique riemannienne g sur V. Notons que le diamètre des plaques de $\tilde{\mathcal{A}}$ est unifomément borné pour cette métrique, et il est facile de construire une rétraction mesurable équivariante de V^X sur $\tilde{\mathcal{A}}_0$ (le long des réalisations) telle que l'image réciproque d'un centre est uniformément borné. De plus le choix d'une forme volume associée à g (dans le cas orientable) détermine un système de Haar vol_g sur V, et sa restriction à un domaine fondamental définit un système covolumique covol_g sur V. Il est alors facile de s'assurer qu'on obtient ainsi une variété métrique-mesurée (V, g, covol_g) *à géométrie essentiellement u.l.f.*. Nous appelerons ces variétés les *variétés riemanniennes quasi-périodiques* du feuilletage F. Nous pouvons donc appliquer le théorème 61 qui donne le résultat suivant.

Théorème 62. *Soit M une variété compacte et F un feuilletage orientable de classe C^r sur M, $r \geqslant 1$. Pour toute mesure transverse fortement ergodique μ et toute métrique riemannienne g le long des feuilles de F, les variétés riemanniennes quasi-périodiques de F définies par g et μ sont concentrées.*

(Le cas non orientable se traite de la même façon en remplaçant la forme volume par le fibré canonique des 1-densités.)

25 Suites de Følner évanescentes et quotients moyennables

Définition. *On dit qu'un espace métrique-mesuré quasi-périodique (Y, d, λ_μ)* contient des suites de Følner évanescentes *si pour tout $\rho > 0$ il existe une suite $(A_n)_n$ de parties* *boréliennes quasi-périodiques non négligeables de Y^X et une une suite $(\varepsilon_n)_n$ de nombres réels strictement positifs tendant vers 0 telles que,*

$$\lambda_\mu(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_\mu(\partial_\rho A_n) \leqslant \varepsilon_n \lambda_\mu(A_n),$$

où $\partial_\rho A_n = \{u \notin A_n \mid d(u, A_n) \leqslant \rho\}$.

Le théorème suivant extrait de [ef], auquel nous renvoyons pour la démonstration.

Théorème 63. *Un espace singulier ergodique Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphe Q-périodique u.l.f. de 0-covolume fini contient des suites de Følner évanescentes.*

Notons que la démonstration donnée dans [ef] n'utilise l'existence de quotient moyennable que via l'absence d'ergodicité forte (cf. le théorème de Jones-Schmidt rappelé à la fin du chap. II). Ce théorème, également, se généralise à d'autres espaces métriques-mesurés que les graphes, de la façon suivante.

Théorème 64. *Un espace singulier ergodique Q possède un quotient moyennable si et seulement si tout espace métrique-mesuré Q-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes.*

Démonstration. Reprenons les notations du lemme 60. Il suffit évidemment de montrer que si $(U, d_U, r_*(\lambda)_\mu)$ contient des suites de Følner évanescentes, alors (Y, d, λ_μ) en contient également. Soit $\rho > 0$ et notons $\rho' = \alpha\rho + \beta$ où α et β sont les constantes de quasi-isométrie de r. Considérons une suite $(A_n)_n$ de boréliens non négligeables de U vérifiant

$$r_*(\lambda)_\mu(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad r_*(\lambda)_\mu(\partial_{\rho'} A_n) \leqslant \varepsilon_n r_*(\lambda)_\mu(A_n),$$

pour $\varepsilon_n \to 0$, et notons $\bar{A}_n = r^{-1}(A_n)$. Par définition de $\rho' > 0$ on a

$$r^{-1}(\partial_{\rho'} A_n) \supset \partial_\rho(\bar{A}_n),$$

donc,

$$\lambda_\mu(\partial_\rho \bar{A}_n) \leqslant \lambda_\mu(r^{-1}(\partial_{\rho'} A_n)) = r_*(\lambda)_\mu(\partial_{\rho'} A_n) \leqslant \varepsilon_n r_*(\lambda)_\mu(A_n) = \lambda_\mu(\bar{A}_n),$$

d'où le résultat. ∎

Théorème 65. *Soit Q un espace singulier ergodique de type fini. On a l'alternative suivante,*

- *soit tout espace métrique-mesuré Q-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. contient des suites de Følner évanescentes,*
- *soit tout espace métrique-mesuré Q-périodique à géométrie essentiellement u.l.f. est concentré.*

CHAPITRE IV. SUR LA THÉORIE SPECTRALE DES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE MESURÉE

—

—

Abstract

It is a well known theorem due to Kesten that amenability for discrete groups can be characterized in terms of the spectra of diffusion operators associated to random walks on the Cayley graph of these groups. In this paper we are interested in analogous results in the framework of discrete measured equivalence relations. Our main results concern characterizations of Kazhdan's property T, amenability, and the non existence of amenable quotients (strong ergodicity), in terms of the spectra of diffusion operators associated to random walks and hilbertian representations of the underlying equivalence relation. The spectral characterization of property T for discrete groups was proved recently in [49, 42]. Our proofs are based on the tools developed there, and further crucial technical steps from the study of amenable equivalence relations in [28]. It was also needed to develop some basic facts about Kazhdan's property T for measured equivalence relations. A part of the paper is devoted to this purpose. As an application we show how Żuk's "$\lambda_1 > 1/2$" criterion for property T can be adapted to measured equivalence relations.

26 Introduction

Cet article est consacré à l'étude du comportement des marches aléatoires sur les orbites d'une relation d'équivalence mesurée, et notamment à la sensibilité de ces marches aléatoires aux propriétés algébriques de la relation d'équivalence sous-jacente.

Plus précisément, nous voulons obtenir ici des caractérisations spectrales (i.e. des caractérisations portant sur le spectre d'opérateurs hilbertiens associés à ces marches aléatoires) de trois propriétés de relations d'équivalence : la propriété T de Kazhdan, la moyennabilité, et l'existence de quotients moyennables non triviaux.

Cette introduction est organisée de la façon suivante. Dans une première partie, nous énonçons les résultats spectraux que nous allons démontrer au cours de ce texte. Ces résultats ont, pour la moyennabilité et la propriété T de Kazhdan, des analogues dans le cadre des groupes dénombrables (notamment le théorème de Kesten caractérisant la moyennabilité) que nous présentons dans une deuxième partie. La troisième partie est déléguée à quelques commentaires sur les démonstrations. Nous avons dû également mener une étude préalable la propriété T de Kazhdan pour les relations d'équivalence mesurées. La quatrième partie expose les résultats de cette étude. Enfin, la cinquième et dernière partie illustre l'utilisation des outils spectraux sur un exemple concret, le « critère $\lambda_1 > 1/2$ » pour la propriété T de Kazhdan.

Marches aléatoires, Diffusions, Spectre des diffusions

Soit X un espace borélien standard. Fixons pour tout $x \in X$ une mesure de probabilité ν_x sur X à support fini ou dénombrable. On notera

$$\nu(x \to y)$$

la probabilité $\nu_x(y)$ de transition de x à y. Ainsi, pour chaque point de départ $x_0 \in X$, l'ensemble des trajectoires possibles des marches aléatoires lancées à partir de x_0 est une partie dénombrable $[x_0]$ de X. Nous supposons que $\nu(x \to y) > 0$ si et seulement si $\nu(y \to x) > 0$, de sorte que $[y] = [x_0]$ si $y \in [x_0]$. Faisant varier le point de départ x_0 dans X, nous définissons donc par ce procédé une partition de X en parties dénombrables, ou, en d'autres termes, une relation d'équivalence à classes dénombrables $R \subset X \times X$ sur X. Appelons support de ν la famille $K \subset R$ des couples $(x, y) \in X \times X$ tels que $\nu(x \to y) \neq 0$. La relation d'équivalence R est, par définition, engendrée par K. Nous supposerons dans toute la suite que K est une partie borélienne de $X \times X$, et que ν est une fonction borélienne sur K. Dans ce cas, R est aussi une partie borélienne de $X \times X$, et ν est dite *marche aléatoire borélienne sur* X.

Inversement, considérons une relation d'équivalence *borélienne* à classes dénombrables R sur X, au sens où R est une partie borélienne de $X \times X$. Soit $K \subset R$ une partie borélienne symétrique de R, i.e. vérifiant $K = K^{-1}$ où $(x, y)^{-1} = (y, x)$. Une fonction borélienne strictement positive $\nu : K \to]0, 1]$ telle que $\sum_{y|(x,y)\in K} \nu(x, y) = 1$ pour tout $x \in X$ définit une marche aléatoire borélienne sur X de support K. Cette marche engendre une sous-relation d'équivalence borélienne $R_\nu \subset R$. On dit que ν est une marche aléatoire sur R lorsque $R_\nu = R$. Une marche aléatoire ν de support K sera dite *bornée* s'il existe une constante $\eta > 0$ telle que $\nu(x \to y) \geqslant \eta$ pour tout $(x, y) \in K$.

Considérons maintenant un espace de probabilité (X, μ), i.e. un espace borélien standard X muni d'une mesure de probabilité sans atome μ. Une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables sur X est dite *mesurée* si elle préserve la classe de μ, i.e., si le saturé d'une partie borélienne négligeable de X est encore négligeable. L'ensemble de cette étude se situe dans le cadre des relations d'équivalence mesurées. Rappelons que le saturé d'un borélien est la réunion (nécessairement borélienne) des classes d'équivalence qui intersectent ce borélien. Une relation d'équivalence mesurée est dite *ergodique* si toute partie borélienne saturée est négligeable ou de complémentaire négligeable. (L'ergodicité de R_ν est une hypothèse naturelle d'irréductibilité de la famille des trajectoires de ν.)

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ). Les trois propriétés de R évoquées ci-dessus, moyennabilité, ergodicité forte, et propriété T de Kazhdan, sont liées au comportement du spectre d'opérateurs hilbertiens naturellement associés aux marches aléatoires sur R, et nous allons commencer par décrire la nature de ces opérateurs hilbertiens (dits opérateurs de diffusion). Soit H^X un champ mesurable d'espaces de Hilbert de base X. Ainsi, à tout $x \in X$, on attache un espace de Hilbert H^x et la dépendance $x \mapsto H^x$ est mesurable [32]. Une *représentation hilbertienne* π de R sur H^X est une famille $\{\pi(x,y)\}_{(x,y)}$, indexée par R, d'opérateurs unitaires

$$\pi(x,y) : H^y \to H^x$$

satisfaisant à des conditions naturelles de compositions (cocycle) et mesurabilité. Par exemple la *représentation régulière* λ de R,

$$\lambda(x,y) : \ell^2(R^y, \mathfrak{h}^y) \to \ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$$

où $R^x = \{(x,y) \in R\}$ et $\mathfrak{h}^x$ est la mesure de décompte sur R^x, est définie par

$$\lambda(x,y)f(x,z) = f(y,z)$$

pour toute fonction mesurable f sur R dont les fibres sont de carré intégrable. On associe à une marche aléatoire ν et une représentation π un *opérateur de diffusion* $D_{\nu,\pi}$ agissant sur l'espace $L^2(X, \mu, H)$ des sections de carré intégrable de H, défini par

$$(D_{\nu,\pi}\xi)^x = \sum_{y \sim x} \nu(x \to y)\pi(x,y)\xi^y$$

où $\xi \in L^2(X, \mu, H)$. Lorsque ν est une marche aléatoire *symétrique* relativement à μ (voir la section 31 pour une définition), cet opérateur est hermitien borné et son spectre est une partie compacte de $[-1, 1]$.

Définition. *On dit que $D_{\nu,\pi}$ a* un trou spectral au voisinage de 1 *si sa plus grande valeur spectrale distincte de 1 est strictement inférieure à 1.*

Soit ν une marche aléatoire sur R. On appelle *diffusions à coefficients unitaires* (resp. *à coefficients réguliers, à coefficients triviaux*) associées à ν les opérateurs $D_{\nu,\pi}$, lorsque π parcourt la famille des représentations hilbertiennes de R (resp. lorsque π est la représentation régulière, la représentation triviale).

La propriété T de Kazhdan, la moyennabilité, et l'existence de quotients moyennables non triviaux, sont trois propriétés classiques de relations d'équivalence mesurées, invariantes par isomorphisme. Rappelons que deux relations d'équivalence mesurées sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme des espaces échangeant les classes d'équivalence *à une partie négligeable saturée près*. (En fait ces propriétés sont invariantes par *isomorphisme stable*, i.e. ne dépendent que de la classe d'isomorphisme des restrictions/amplifications de la relation d'équivalence de départ.) La propriété T a été définie par Moore et Zimmer [81], la moyennabilité par Zimmer (voir [110]). Leurs définitions parallèlent leurs analogues bien connus pour les groupes dénombrables (définies respectivement par Kazhdan et von Neumann), mais les comportements qui en résultent peuvent être complètement différents. Contentons nous de rappeler, pour illustrer ce fait, le célèbre théorème de Connes-Feldman-Weiss [28] selon lequel les relations d'équivalence moyennables sont classifiables à isomorphisme près. Les relations possédant un quotient moyennable non trivial ont été caractérisées par Jones-Schmidt [62] comme celles qui sont non fortement ergodiques au sens de Connes-Weiss-Schmidt [99, 30]. Les définitions précises de ces propriétés sont rappelées ci-dessous.

Théorème 66 (Propriété T de Kazhdan). *Une relation d'équivalence ergodique R possède la propriété T de Kazhdan si, et seulement si, il existe une marche aléatoire symétrique ν sur une relation stablement isomorphe à R, dont les diffusions à coefficients unitaires possèdent un trou spectral au voisinage de 1.*

Théorème 67 (Ergodicité forte). *Une relation d'équivalence ergodique R possède un quotient moyennable si, et seulement si, pour toute marche aléatoire symétrique bornée sur toute sous-relation de R, l'opérateur de diffusion à coefficients triviaux associé n'a pas de trou spectral. Si de plus elle préserve une mesure de probabilité et elle est de type fini, alors elle possède un quotient moyennable si, et seulement si, pour toute marche aléatoire symétrique bornée sur R, l'opérateur de diffusion à coefficients trivaux associé n'a pas de trou spectral.*

Théorème 68 (Moyennabilité). *Une relation d'équivalence ergodique R est moyennable si, et seulement si, pour toute marche aléatoire symétrique bornée sur toute sous-relation de R, l'opérateur de diffusion à coefficients réguliers associés n'a pas de trou spectral.*

L'étude des propriétés spectrales de groupes dénombrables

L'étude des marches aléatoires en milieu géométrique (algébrique) reçoit une attention considérable depuis une cinquantaine d'années. Le premier résultat obtenu dans ce domaine est probablement le théorème de Pólya (1921) sur la récurrence/transcience des marches aléatoires dans $\mathbf{Z}^n$, voir [52] par exemple. Le comportement spectral proprement dit des marches aléatoires, notamment la sensibilité du spectre aux structures géométriques et algébriques sous-jacentes, a été étudié pour la première fois en 1959 par Kesten [70, 71]. Il démontrait alors le théorème suivant.

Théorème 69 (Kesten). *Soit* Γ *un groupe de type fini. On fixe une marche aléatoire invariante symétrique* $\tilde{\nu}$ *sur* Γ*, dont le support est un système générateur symétrique fini de* Γ*, et on note* $D_{\tilde{\nu}}$ *l'opérateur de convolution associé à* $\tilde{\nu}$*, agissant sur* $\ell^2(\Gamma)$*. Alors* $D_{\tilde{\nu}}$ *a un trou spectral au voisinage de 1 si et seulement si* Γ *est non moyennable.*

Ici l'opérateur $D_{\tilde{\nu}}$ est associé à la marche aléatoire $\tilde{\nu}$ et à la représentation régulière gauche λ de Γ agissant par translation sur $\ell^2(\Gamma)$.

Plus récemment, il a été observé par Gromov [49] (voir le séminaire Bourbaki [42]) que l'on dispose d'une caractérisation spectrale, analogue à celle de Kesten, de la propriété T de Kazhdan (il s'agit là d'une infime partie du contenu de [49]).

Caractérisation spectrale de la propriété T. *Soit* Γ *un groupe de type fini. Soit* $\tilde{\nu}$ *une marche aléatoire invariante symétrique sur* Γ *dont le support est un système générateur symétrique fini de* Γ*. Alors* Γ *possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si les diffusions* $D_{\tilde{\nu},\pi}$ *associées aux représentations unitaires* π *de* Γ *ont un trou spectral au voisinage de 1.*

Cette caractérisation, bien qu'élémentaire, est d'importance fondamentale. Elle permet par exemple de donner une preuve conceptuelle du « critère $\lambda_1 > 1/2$ » pour la propriété T (cf. [42, 85]). Nous nous proposons d'obtenir des théorèmes analogues pour les relations d'équivalence mesurées, ainsi qu'une caractérisation spectrale des relations sans quotient moyennable (obtenue en exploitant la caractérisation dynamique de cette propriété donnée par le théorème de Jones-Schmidt).

Observons également que cet énoncé est valide pour une marche aléatoire invariante (symétrique et génératrice) *quelconque* sur Γ. (En fait l'ensemble de ces marches aléatoire est essentiellement de dimension finie.) Pour les relations d'équivalence mesurée, il y a beaucoup plus de marches aléatoires admissibles, et le résultat ci-dessus *n'est plus vrai* pour une marche aléatoire quelconque. (Nous allons exhiber une famille de marches aléatoires convenable pour une telle caractérisation.)

Nous rappelons à la section 30 la courte preuve de la caractérisation ci-dessus, qui repose sur la formule évidente $||\pi(s)\xi - \xi||^2 = 2(1 - \mathrm{Re}\langle\pi(s)\xi \mid \xi\rangle)$, pour une représentation unitaire π de Γ, et un vecteur ξ de norme 1, et un élément $s \in \Gamma$. Dans le théorème 66, un sens de l'implication (la preuve de la propriété T pour R) repose aussi essentiellement sur cette formule.

Quelques précisions sur les démontrations des théorèmes

Les démonstrations des trois théorèmes font un usage important de techniques développées par Connes-Feldman-Weiss [28] dans le cadre moyennable. Pour un exposé détaillé des différents concepts de moyennabilité pour les relations d'équivalence, et plus généralement les groupoïdes, nous renvoyons à la monographie récente [3]. Le théorème 68 est bien sûr celui qui résulte le plus directement de [28]. Il est démontré à la section 33, qui se veut aussi indépendante que possible du reste.

Les premières parties de cet article sont consacrées au développement d'outils pour étudier les relations d'équivalence ayant la propriété T de Kazhdan. Nous décrivons ces outils dans la partie suivante de l'introduction. Les théorèmes 66 et 67 sont démontrés à la section 31. L'un des problèmes qui se pose est le suivant. Soit Γ un groupe de type fini. L'action de Γ lui-même a un caractère uniformisant et ramène essentiellement les possibilités de fluctuations de données invariantes cocompactes à un ensemble fini. Si $\tilde{\nu}$ est une marche aléatoire sur l'espace homogène Γ, comme dans le théorème de Kesten, les données relatives à $\tilde{\nu}$ (probabilités de transition) sont en nombre fini. On peut alors facilement, par exemple, déduire d'informations ponctuelles des contrôles uniformes sur ces données. Dans le cadre mesuré ce n'est plus le cas (bien qu'on fasse toujours une hypothèse de type cocompacité en requérant que ν soit symétrique bornée). Notamment, *des comportements non triviaux peuvent apparaître sur des parties arbitrairement petites de l'espace*; les contrôles uniformes ont lieu sur une majorité de l'espace seulement. Or ces « fluctuations infinitésimales » peuvent *a priori* avoir une influence sur les propriétés spectrales des opérateurs $D_{\nu,\pi}$. Rappelons que les opérateurs $D_{\nu,\pi}$ agissent sur l'espace de Hilbert des *sections de carré intégrable* $L^2(X, H)$ associées au champ d'espaces de Hilbert H, où la boule unité de $L^2(X, H)$ contient des sections à support arbitrairement petit. La situation est réminiscente de la construction des nombres de Betti L^2 pour les relations d'équivalence [38], où l'auteur introduit des paramètres de cut-off sur les homotopies pour en faire des opérateurs bornés. *A posteriori* il arrive effectivement que ces perturbations révélent une nature spectrale. L'existence de graphages de relations d'équivalence contenant des suites de Følner évanescentes (voir le chapitre III) en est un exemple significatif. La présence de telles suites de Følner dans le support de ν est détecté par l'absence de trou spectral pour la diffusion à coefficients triviaux associée à ν. Nous montrerons que les marches aléatoires dont le support ne contient pas de suites de Følner évanescentes permettent d'obtenir une caractérisation spectrale de la propriété T.

Résultats concernant la propriété T de Kazhdan

Par définition, une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ) possède la propriété T de Kazhdan si la condition suivante est vérifiée.

(T) Toute représentation hilbertienne possédant une suite presque invariante $(\xi_n)_n$ de champs de vecteurs unitaires, au sens où $||\xi_n^x||_x = 1$ pour presque tout $x \in X$, possède un champ de vecteurs invariant à support total.

Nous rappellerons en détail la terminologie utilisée ultérieurement. Nous voulons seulement pour l'instant attirer l'attention sur la signification de l'expression « champs de vecteurs unitaires » utilisée dans cette définition. Supposons pour simplifier la relation d'équivalence ergodique et fixons en une représentation hilbertienne π sur un champ H^X de base X. Si $\xi : X \to H^X$ est un champ de vecteurs invariant, l'application $x \mapsto ||\xi^x||_x$ est constante. Par suite, si ξ_n est une suite presque invariante de champs de vecteurs, on peut espérer obtenir un contrôle sur la variation en x des applications $x \mapsto ||\xi_n^x||_x$, du moins pour n grand, ce qui permettrait en particulier affaiblir l'hypothèse $||\xi_n^x||_x = 1$ presque sûrement tout en conservant une définition identique de propriété T de Kazhdan.

L'un des résultats techniques importants de cet article montre que si l'on suppose qu'il n'y a pas de perte de masse de la suite presque invariante $(\xi_n)_n$, alors la représentation π contient une autre suite presque invariante, unitaire au sens ci-dessus. Plus précisément nous démontrons l'équivalence de la définition précédente et de la définition suivante.

(T) Toute représentation hilbertienne possédant une suite presque invariante non triviale $(\xi_n)_n$ de champs de vecteurs dominés, au sens où $||\xi_n||_1 = 1$ et $||\xi_n^x|| \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^1(X)$, possède un champ de vecteurs invariant à support non trivial.

La démonstration de ce résultat fait l'objet de la section 28 (le cas non ergodique est traité à la section 29).

Une élaboration des techniques utilisées pour obtenir cette caractérisation conduit alors au théorème suivant (cf. section 29), qui relie la notion d'ergodicité forte au phénomène de concentration de la mesure, en termes de fonctions 1-lipschitziennes (pour d'autres relations entre ergodicité forte et concentration, voir le chapitre III).

Définition. *Soient H un espace de Hilbert et $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilités sur H. On suppose les premiers moments*

$$m_1(\mu_n) = \int_H ||y|| d\mu_n(y) \leqslant C < \infty$$

unifomément bornés par une constante $C > 0$. Nous dirons que la suite d'espaces métriques-mesurés $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ forme une famille de Levy *si pour tout $\varepsilon > 0$ on a,*

$$\inf_f \mu_n\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1,$$

où l'infimum est pris sur les fonctions 1-lipschitziennes $f : H \to \mathbf{R}$ et $m = \int_H f d\mu_n$ est la valeur moyenne de f.

Théorème 70. *Soit H un espace de Hilbert. Soit R une relation d'équivalence ergodique sur un espace de probabilité (X, μ). Alors R est fortement ergodique si et seulement si pour toute suite presque invariante $\xi_n : X \to H$ pour la représentation triviale de R dans H, dominée par une fonction $g \in L^1$, la famille $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ est une famille de Levy, où $\mu_n = \xi_{n*}\mu$ est la poussée en avant de μ sur H par le champ ξ_n.*

Nous démontrons ensuite le théorème suivant, de 'proximité des champs invariants et presque invariants', dont l'analogue pour les groupes est bien connu, cf. [53]. Sa démonstration repose, notamment, sur le théorème 70.

Théorème 71. *Soit R une relation d'équivalence ergodique ayant la propriété T. Soit π une représentation de R possédant une suite ξ_n presque invariante telle que $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^1(X)$. Il existe quitte à extraire une suite ζ_n de champs invariants dominés par g tels que*

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

Ce théorème permet par exemple de donner une preuve directe du fait que, si $R = R_\alpha$ est une relation d'équivalence obtenue par action libre ergodique préservant une mesure de probabilité d'un groupe Γ, alors Γ possède la propriété T si et seulement si R la possède (voir la section 29 pour des références concernant ce dernier résultat).

Le critère $\lambda_1 > 1/2$

Nous avons à présent évoqué tous les ingrédients nécessaires pour étudier les aspects spectraux de la propriété T. La démonstration du théorème 66 utilise l'ergodicité forte comme outil essentiel, et nous renvoyons au chapitre III pour des rappels sur cette notion (et à l'article de Hjorth-Kechris [58]). Concluons cette introduction par une application des idées précédentes.

Rappelons tout d'abord un critère bien connu, extrait de [111], pour qu'un groupe discret ait la propriété de Kazhdan. On considère un groupe dénombrable de type fini Γ, et on note L le « link » en l'identité de son complexe de Cayley Y, de dimension 2, associé à un système générateur symétrique fini (L est le graphe fini donné par l'intersection de Y avec une sphère de rayon suffisamment petit centrée en l'identité). On suppose L connexe.

Critère $\lambda_1 > 1/2$. *Si $\lambda_1(L) > 1/2$, alors Γ possède la propriété T de Kazhdan.*

L'hypothèse $\lambda_1 > 1/2$ peut être considérée comme une hypothèse de « courbure positive » (cf. [40]), et signifie par définition que la première valeur propre non nulle du laplacien discret sur L est strictement supérieure à 1/2.

Ce critère tire ses origines dans les travaux de Garland [40] sur l'annulation de la cohomologie (en certains degrés) de groupes d'automorphismes d'immeubles de Bruhat-Tits cocompacts. Gromov en a donné une preuve nouvelle dans [49], basée sur l'étude des marches aléatoires sur les groupes discrets. Poursuivant ces idées, nous démontrons le résultat suivant au paragraphe 32.

Théorème 72. *Soit Σ une lamination par complexes simpliciaux de dimension 2, X la transversale des sommets et R la relation d'équivalence sur X donnée par la partition en feuilles. On suppose que le nombre de simplexe attaché à tout $x \in X$ est uniformément localement fini et on fixe une mesure quasi-invariante μ sur X. Soit $\delta_\mu \geqslant 1$ un nombre réel tel que*

$$\delta_\mu^{-1} \leqslant \delta(y,z) \leqslant \delta_\mu$$

pour presque toute arête (y,z) de Σ, où δ est le cocyle de Radon-Nikodỳm associé à μ. On suppose que presque tout link L de Σ est connexe et vérifie $\lambda_1(L) \geqslant \lambda$, où λ est un nombre réel vérifiant

$$\lambda > \delta_\mu^3/2.$$

Alors R possède la propriété T de Kazhdan.

L'objet de ma note aux comptes-rendus [90] était d'observer que le théorème ci-dessus est vrai pour les relations d'équivalence de type II_1, i.e. de traiter le cas $\delta_\mu = 1$ avec les notations du théorème.

—

Je remercie Damien Gaboriau pour son aide constante au cours de l'élaboration de ce travail.

Je dois également beaucoup à Étienne Ghys, ainsi qu'aux excellentes conditions de travail dont on bénéficie au sein de l'UMPA.

—

27 Notations

Nous rappelons brièvement dans cette section les notations standard de la théorie des relations d'équivalence mesurée. Pour plus de détails, on pourra consulter [33], par exemple, ou l'un des nombreux articles récents sur le sujet (e.g. [37]).

Soit X espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité sans atome μ. Une relation d'équivalence à classes dénombrables R sur (X,μ) est mesurée si son graphe $R \subset X \times X$ est borélien et si μ est une mesure quasi-invariante, au sens où le saturé d'un borélien négligeable est négligeable. On note $\mathfrak{h}$ la mesure sur R associée à μ et au système de Haar canonique $(\mathfrak{h}^x)_{x\in X}$ de décompte horizontal. Ainsi,

$$\mathfrak{h}(K) = \int_X \mathfrak{h}^x(K)d\mu(x) = \int_X \#K^x d\mu(x)$$

où $K \subset R$ est une partie borélienne et $K^x = \{(x,y) \in K\}$.

Exemple. Soit Γ un groupe dénombrable et α une action de Γ par automorphismes boréliens de (X,μ) préservant la classe de μ. Alors la partition en orbites $R_\alpha \subset X \times X$ associée à α est une relation d'équivalence mesurée.

L'inversion $^{-1}$ sur R est l'application $(x,y) \mapsto (x,y)^{-1} = (y,x)$. La mesure $\mathfrak{h}^{-1}$, de décompte vertical, est équivalente à $\mathfrak{h}$, et l'on note δ l'inverse de la dérivée de Radon-Nikodỳm de $^{-1}$. Ainsi,

$$d\mathfrak{h}(x,y) = \delta(x,y)d\mathfrak{h}^{-1}(x,y).$$

Une partie borélienne $K \subset R$ est dite symétrique si $K = K^{-1}$. Soit K une partie borélienne symétrique de R. On note $K^x = \{(x,y) \in K\}$ et $K_y = \{(x,y) \in K\}$. On dit que K est unifomément localement finie (u.l.f.) s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\#K \leqslant C$ et $\#K_y \leqslant C$. On dit que K est unifomément localement bornée (u.l.b.) si elle est u.l.f. et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\ln \delta(x,y)| \leqslant C$ pour tout $(x,y) \in K$. Un graphage de R est une partie borélienne $K \subset R$ symétrique telle que pour tout point $(x,y) \in R$, il existe une suite de points $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ de X tels que $(x_i, x_{i+1}) \in K$. Une relation d'équivalence mesurée est dite de type fini si elle possède un graphage u.l.f. ; il est équivalent de dire qu'elle peut être engendrée par un nombre fini d'isomorphismes partiels de l'espace. Le groupe plein $[R]$ de R est l'ensemble des automorphismes de X dont le graphe est inclus dans R. Le pseudo-groupe $[[R]]$ est l'ensemble des isomorphismes partiels entre deux parties boréliennes de X dont le graphe est inclus dans R.

Définition. *Deux relations d'équivalence mesurées R et R' sur (X,μ) et (X',μ') sont* isomorphes *(resp.* stablement isomorphes*) s'il existe deux boréliens $\Omega \subset X$ et $\Omega' \subset X'$ de mesure totale (resp. dont les saturés sont de mesure totale) et un isomorphisme borélien θ entre Ω et Ω' tel que $x \sim_R y \iff \theta(x) \sim_{R'} \theta(y)$ et qui est non singulier au sens où il envoie la classe de μ sur la classe de μ'.*

Soit H^X un champs mesurable d'espaces de Hilbert séparables de base X [32]. Rappelons qu'une représentation unitaire de R sur H consiste en la donnée d'une famille d'opérateurs unitaires

$$\pi(x,y) : H^y \to H^x,$$

$(x,y) \in R$, satisfaisant aux conditions de composition et de mesurabilité suivantes :

– $\pi(x,x) = \mathrm{Id}$ et $\pi(x,z) = \pi(x,y)\pi(y,z)$ pour tout $x \sim y \sim z$.
– les coefficients
$$(x,y) \mapsto \langle \pi(x,y)\xi^y | \eta^x \rangle_x$$
sont mesurables pour tous champs de vecteurs mesurables $\xi, \eta : X \to H$.

Exemple. La représentation régulière de R sur le champ d'espaces de Hilbert
$$H : x \mapsto \ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$$
qui à tout point $x \in X$ associe l'espace des fonctions de carré intégrable sur la classe d'équivalence de x (pour la mesure de décompte horizontal $\mathfrak{h}^x$),
$$\pi(x,y) : \ell^2(R^y) \to \ell^2(R^x)$$
est définie par $\pi(x,y)f(x,z) = f(y,z)$.

—

Nous utiliserons le résultat suivant, extrait du chapitre III. Rappelons qu'une relation d'équivalence mesurée est moyennable si et seulement si elle est hyperfinie, i.e. elle s'écrit comme réunion croissante de sous-relations finie [28]. Pour une relation ergodique R, l'existence de quotients moyennables non triviaux équivaut à l'ergodicité forte [62], i.e. le fait que pour toute suite de parties boréliennes $A_n \subset X$ telle que
$$\forall \varphi \in [R], \qquad \mu(\varphi A_n \Delta A_n) \to 0$$
on a $\mu(A_n) \to 0$ ou 1 (Δ est la différence symétrique). Étant donnée une partie borélienne K d'une relation d'équivalence mesurée et A une partie borélienne de X, on note $\partial_K A$ l'ensemble des points de $x \in X \setminus A$ pour lesquels il existe $y \in A$ tel que $(x,y) \in K$.

Définition. *Soit K une partie borélienne d'une relation d'équivalence mesurée. On dit que K possède des* suites de Følner évanescentes *relativement à μ s'il existe une suite (A_n) de boréliens non négligeables de X et une suite (ε_n) de nombres réels convergeant vers 0 telles que*
$$\mu(A_n) \to 0 \qquad \text{et} \qquad \mu(\partial_K A_n) \leqslant \varepsilon_n \mu(A_n).$$

Théorème 73. *Une relation d'équivalence ergodique R possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphage symétrique u.l.b. d'une sous-relation de R contient des suites de Følner évanescentes. Si de plus elle préserve une mesure de probabilité et elle est de type fini, alors elle possède un quotient moyennable si et seulement si tout graphage symétrique u.l.b. de R contient des suites de Følner évanescentes.*

28 Un lemme technique

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ) et π une représentation de R sur un champ mesurable d'espaces hilbertiens H^X de base X.

Dans ce paragraphe nous étudions le problème de dispersion de masse des champs presque invariants de π.

Définition. *Soient une partie borélienne $K \subset R$ et un nombre réel strictement positif ε. On dit qu'un champ de vecteurs $\xi : X \to H^X$ (i.e. une section mesurable de H^X) est* (K, ε)-invariant *si*

$$||\pi(x, y)\xi^y - \xi^x|| \leqslant \varepsilon,$$

pour $\mathfrak{h}$-presque tout $(x, y) \in K$.

Lemme 74. *Soit $\mathfrak{h}_1$ une mesure de probabilité sur R équivalente à $\mathfrak{h}$. Soit $(K_n)_n$ une suite de parties boréliennes de R. Si $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$, il existe une suite extraite $(K_{m_1}, K_{m_2}, \ldots)$ de $(K_n)_n$ telle que la suite $(K'_i)_{i \geqslant 1}$ définie par $K'_i = \cap_{m_j \geqslant m_i} K_{m_j}$ soit une approximation croissante de R (au sens où $R = \cup_i K'_i$ à un négligeable près). Si inversement $R = \cup K_n$ est une approximation croissante de R, alors $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$.*

Démonstration. Notons $A_n = R \backslash K_n$. Par hypothèse $\mathfrak{h}_1(A_n) \to 0$ et, quitte à extraire, on peut supposer $\sum \mathfrak{h}_1(A_n) < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli montre que $\mathfrak{h}_1(\overline{\lim}\, A_n) = 0$, où $\overline{\lim}\, A_n = \cap_i \cup_{n \geqslant i} A_n$. Ainsi, en notant $K'_i = \cap_{n \geqslant i} K_n$, on obtient $\mathfrak{h}_1(K'_i) \to 1$, d'où le résultat.

Réciproquement considérons la suite de fonctions indicatrices $\chi_{K_n} \in L^\infty(R)$. Par hypothèse elle converge presque sûrement vers la fonction constante égale à 1 sur R, et la convergence a lieu dans $L^1(R, \mathfrak{h}_1)$ également. ■

Définition. *On dit qu'une suite $\xi_n : X \to H^X$ de champs de vecteurs (K_n, ε_n)-invariants est* presque invariante *si ϵ_n converge vers 0 et si $K_n \subset R$ est croissante et exhaustive.*

Le lemme précédent montre qu'une suite de champs (K_n, ε_n)-invariants telle que $\varepsilon_n \to 0$ et $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$ pour une mesure de probabilité $\mathfrak{h}_1$ sur R équivalente à $\mathfrak{h}$, est, quitte à extraire, une suite presque invariante au sens ci-dessus.

Exemple. Il est facile de voir que toute représentation contient des suites presque invariantes $\xi_n : X \to H^X$ de carré intégrable et de norme $||\xi_n||_2 = 1$ (en choisissant par exemple $\xi_n = \chi_{A_n} \cdot \xi / \sqrt{\mu(A_n)}$ où $\mu(A_n) \to 0$ et ξ est un champ unitaire fixe).

Le résultat qui suit montre que toute représentation contenant des suites presque invariantes *dominées* de norme 1 contient des sections presque invariantes du fibré en sphères unités de H^X.

Lemme 75. *Soit R une relation d'équivalence mesurée ergodique sur un espace de probabilité (X,μ). On fixe une représentation π de R sur un champ hilbertien H^X de base X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. [110] Pour tout groupe dénombrable Γ et toute action α de Γ telle que $R = R_\alpha$, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie K de Γ, il existe $\xi \in L^\infty(X, H^X)$ tel que $||\xi||_\infty = 1$ et

$$\mu\{|\langle\pi(x,\alpha(\gamma)x)\xi^{\gamma x}|\xi^x\rangle - 1| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \varepsilon$$

pour tout $\gamma \in K$.

ii. [81] Il existe une suite presque invariante $\xi_n : X \to H^X$ de champs de vecteurs tels que $||\xi_n^x||_x = 1$ pour presque tout $x \in X$.

iii. [L^∞] Il existe une suite presque invariante $\xi_n \in L^\infty(X, H^X)$ de champs de vecteurs et deux constantes $\eta \geqslant 1$ et $\delta > 0$ telles que pour tout n

$$\mu\{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi_n^x||_x \leqslant \eta\} \geqslant \delta.$$

iv. [L^p, $1 \leqslant p < \infty$] Il existe une suite presque invariante $\xi_n \in L^p(X, H^X)$ de champs de vecteurs tels que $||\xi_n||_p = 1$ et une fonction positive $g \in L^p(X)$ telle que $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$.

La fin du paragraphe est consacrée à la démonstration de ce résultat.

Considérons une relation d'équivalence ergodique R sur un espace de probabilité (X,μ) et π une représentation de R sur un champ hilbertien H^X de base X.

Preuve de $i \Longrightarrow ii$. Soit Γ un groupe discret et $R = R_\alpha$ la relation d'équivalence associée à une action α de Γ sur (X,μ). Par hypothèse, étant donnée une exhaustion K_n de Γ par parties finies, il existe une suite $\xi_n \in L^\infty(X, H^X)$ telle que $||\xi_n||_\infty = 1$, et une suite A_n de boréliens telle que $\mu(A_n) \geqslant 1 - 1/n$, vérifiant,

$$|\langle\pi(x,\gamma x)\xi_n^{\gamma x}|\xi_n^x\rangle - 1| \leqslant 1/n$$

presque sûrement sur A_n pour tout $\gamma \in K_n$. En particulier $||\xi_n^x||^2 \geqslant 1 - 1/n$ sur A_n (pour n suffisamment grand, de sorte que $e \in K_n$). Soit $F_n = \mathrm{graph}(K_n) \cap A_n \times A_n$. On pose $\tilde{\xi}_n^x = \xi_n^x/||\xi_n^x||$ sur A_n et $\tilde{\xi}_n^x = \eta^x \in H^x$ quelconque de norme 1 ailleurs (mesurable). Alors $\mathfrak{h}_1(F_n) \to 1$ et, pour $(x,y) \in F_n$, on a

$$||\pi(x,y)\tilde{\xi}_n^y - \tilde{\xi}_n^x||^2 \leqslant 2|1 - \frac{\langle\pi(x,y)\xi_n^y|\xi_n^x\rangle}{||\xi_n^x||||\xi_n^y||}| \leqslant 2 \cdot \frac{1/n + 1/n}{1 - 1/n} \to 0.$$

Preuve de $ii \Longrightarrow i$. Soit Γ un groupe discret et $R = R_\alpha$ la relation d'équivalence associée à une action α de Γ sur (X,μ). Soit K une partie finie de Γ et $\varepsilon > 0$; comme $\mathfrak{h}_1(\mathrm{graph}(K)\backslash F_n) \to 0$, l'ensemble

$$A_n = \{x \in X,\ \exists\gamma \in K,\ (x,\gamma x) \notin F_n\} \to_\mu 0.$$

En effet $(pr_h)_*(\mathfrak{h}_{1|\mathrm{graph}(\gamma)})$ et μ sont équivalentes pour tout $\gamma \in \Gamma$, où $pr_h(x,y) = x$ est la projection horizontale. Par hypothèse sur $X \backslash A_n$, $||\pi(x,\gamma x)\xi_n^{\gamma x} - \xi_n^x|| \leqslant \varepsilon_n$ pour tout $\gamma \in K$. Notons $z_n(x,y) = \langle \pi(x,y)\xi_n^y | \xi_n^x \rangle \in \mathbf{C}$, de sorte que

$$\mu\{x \in X,\ 2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_n(x,\gamma x) \geqslant \varepsilon_n\} \leqslant \mu(A_n) \to 0,$$

pour tout $\gamma \in K$. Comme $|z_n(x,y)| \leqslant 1$ presque sûrement sur R, on a donc

$$\mu\{x \in X, |1 - z_n(x,\gamma x)| \geqslant \varepsilon/2\} \to 0,$$

d'où le résultat.

Preuve de iii $\Longrightarrow$ ii. Fixons deux constantes $\eta \geqslant 1$ et $\delta > 0$ et supposons qu'il existe une suite $\xi_n \in L^\infty(X, H^X)$ de champs de vecteurs mesurables presque invariants telle que

$$\mu\{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi_n^x||_x \leqslant \eta\} \geqslant \delta.$$

Considérons l'espace $\mathcal{E}$ des suites de couples $(\xi_n, \alpha_n)_n$ formés d'un champ de vecteurs et d'un nombre réel positif telles que :

- il existe une suite K_n de R et une suite décroissante ε_n de nombre réels positifs telles que ξ_n soit (K_n, ε_n)-invariante, avec $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$ et $\varepsilon_n \to 0$.
- α_n soit une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0.
- $\mu(A_n)$ soit une suite convergente, où

$$A_n = \{\frac{1}{\eta} - \alpha_n \leqslant ||\xi_n^x||_x \leqslant \eta + \alpha_n\}.$$

On considère l'application $\mathcal{E} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Psi : (\xi_n, \alpha_n)_n \mapsto \lim \mu(A_n),$$

et on note $\overline{\delta} = \sup \Psi(\mathcal{E}) \leqslant 1$. Par hypothèse $\overline{\delta} > 0$. Montrons que $\overline{\delta} = 1$.

Il existe par procédé diagonal un élément de $\mathcal{E}$, disons $(\xi_n, \alpha_n)_n$, tel que $\mu(A_n) \to \overline{\delta}$. Notons $C_n = ((A_n \times X \cup X \times A_n) \backslash A_n \times A_n) \cap R$.

Supposons qu'il existe une suite extraite $(\xi^{n_i}, \alpha_{n_i})$ telle que $\mathfrak{h}_1(C_{n_i}) \geqslant c$ pour un nombre réel $c > 0$. Alors il existe quitte à extraire un nombre $c' > 0$ tel que $\mu(pr_h(C_{n_i} \cap X \times A_{n_i})) \geqslant c'$ ou $\mu(pr_v(C_{n_i} \cap A_{n_i} \times X)) \geqslant c'$, où $pr_h : R \to X$ est la projection horizontale définie par $pr_h(x,y) = x$ et $pr_v(x,y) = y$ est la projection verticale. Notons que (quitte à extraire une seconde fois) la suite $\sigma = (\xi^{n_i}, \alpha_{n_i} + \varepsilon_{n_i})_{n_i}$ appartient à $\mathcal{E}$. Or

$$A_{n_i}^\sigma = \{\frac{1}{\eta} - \alpha_{n_i} - \varepsilon_{n_i} \leqslant ||\xi_x^{n_i}||_x \leqslant \eta + \alpha_{n_i} + \varepsilon_{n_i}\}$$

contient $pr_h((C_{n_i} \cap X \times A_{n_i}) \cap K_{n_i})$ et $pr_v((C_{n_i} \cap A_{n_i} \times X) \cap K_{n_i})$. Comme $\mathfrak{h}_1(K_{n_i}) \to 1$, on a $\mathfrak{h}_1(C_{n_i} \backslash K_{n_i}) \to 0$ donc $\mu(pr_h((C_{n_i} \cap X \times A_{n_i}) \cap K_{n_i})) \geqslant c'/2$ ou $\mu(pr_v((C_{n_i} \cap A_{n_i} \times$

$X) \cap K_{n_i})) \geqslant c'/2$ pour n_i grand. Ceci contredit la maximalité de $\overline{\delta}$.

Par suite $\mathfrak{h}_1(C_n) \to 0$.

Soit $\varphi \in [R]$ un isomorphisme de R. Notons que $(pr_h)_*(\mathfrak{h}_{1|\mathrm{graph}(\varphi^{-1})}) \sim \mu$. Donc

$$\mu(\varphi A_n \backslash A_n) = \mu\{x \in \varphi A_n \mid x \notin A_n\} \sim \mathfrak{h}_1(\{(\varphi x, x),\, x \in A_n\} \cap C_n) \leqslant \mathfrak{h}_1(C_n) \to 0.$$

(On dit que (A_n) est asymptotiquement invariante.) Il en résulte que toute limite faible de la suite $\chi_{A_n} \in L^\infty(X)$ est constante (par ergodicité), et on a donc

$$\lim \mu(A_n \cap C) - \mu(A_n)\mu(C) = 0$$

pour tout borélien $C \subset X$ (voir [29, 62, page 95]). Par suite pour tout n on a

$$\lim_m \mu(A_n \cap A_m) = \mu(A_n)\overline{\delta} > 0.$$

Supposons $\overline{\delta} < 1$ et considérons, étant donné n, un entier $m = m(n) > n$ suffisament grand pour que

$$|\mu(A_n \cap A_m) - \mu(A_n)\overline{\delta}| \leqslant \frac{1}{n}$$

et

$$|\mathfrak{h}_1(K_n \cap K_m) - \mathfrak{h}_1(K_n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Construisons alors une suite $\sigma \in \mathcal{E}$ de la façon suivante. Pour tout n on pose $\xi_n^\sigma = \xi_n$ sur A_n et $\xi_n^\sigma = \xi^{m(n)}$ sur $A_{m(n)} \backslash A_n$ (et 0 ailleurs). Alors $\sigma = (\xi_n^\sigma, \alpha_n) \in \mathcal{E}$. En effet il suffit de choisir $\varepsilon_n^\sigma = \varepsilon_n$ et $K_n^\sigma = K_n \cap K_{m(n)} \backslash C_n \cup C_{m(n)}$. Par ailleurs $\lim \mu(A_n^\sigma) = 2\overline{\delta} - \overline{\delta}^2 > \overline{\delta}$, d'où une contradiction.

Finalement $\overline{\delta} = 1$. Considérons alors la suite $\tilde{\xi}_n$ définie par $\tilde{\xi}_n^x = \xi_n^x / ||\xi_n^x||$ sur A_n et $\tilde{\xi}^x \in H^x$ quelconque de norme 1 ailleurs (mesurable). Notons $\tilde{K}_n = K_n \cap (A_n \times A_n)$. Alors $\mathfrak{h}_1(\tilde{K}_n) \to 1$, et $\tilde{\xi}_n$ est $(\tilde{K}_n, \eta \cdot \varepsilon_n)$-invariant.

Preuve de iv $\Longrightarrow$ iii. Soit $p \in [1, \infty[$. Soit $\eta \geqslant 3$ suffisament grand pour que la norme de g^p restreinte à $A = \{g > \eta\}$ soit $\leqslant 1/2$. Alors, en notant $A_n = \{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi_n^x||_x \leqslant \eta\}$, on a

$$1 = ||\xi_n||_p^p = \int_{A_n} ||\xi_n||^p + \int_{X\backslash A_n} ||\xi_n||^p \leqslant \eta^p \mu(A_n) + 1/2 + \frac{1}{\eta^p}\mu(X\backslash A_n)$$

donc

$$\mu(A_n) \geqslant \frac{\eta^p - 2}{2\eta^{2p} - 2}.$$

Considérons alors une suite c_n de nombres réels $\geqslant \eta$ de sorte que $\mu(C_n) \to 1$ où $C_n = \{||\xi_n|| \leqslant c_n\}$. Soit $\tilde{\xi}_n = \xi_{n|C_n}$ et $\tilde{K}_n = K_n \cap C_n \times C_n$. Alors $\tilde{\xi}_n \in L^\infty$ est une suite $(\tilde{K}_n, \varepsilon_n)$-invariante satisfaisant aux hypothèses de *iii*.

Enfin $ii \Longrightarrow iv$ est trivial.

Remarque. Notons que si R n'est pas ergodique, ii et iii ne sont pas équivalentes, comme le montre l'exemple élémentaire d'une relation d'équivalence obtenue comme réunion disjointe de deux relations ergodiques, dont l'une est munie d'une représentation sans champ presque invariant et l'autre d'une représentation ayant des champs presque invariants unitaires au sens du lemme.

Le lemme suivant réunit quelques faits généraux utilisés au cours de la démonstration ci-dessus.

Lemme 76. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X,μ) et $\mathfrak{h}$ la mesure de décompte horizontal sur R associée à μ. Soit Γ un groupe dénombrable et α une action de Γ telle que $R = R_\alpha$.*

- *Si $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}'_1$ sont deux mesures de probabilité sur R équivalentes à $\mathfrak{h}$, alors*

$$\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}'_1(K_n) \to 1,$$

  où (K_n) est une suite de parties boréliennes de R.
- *Soit (F_n) une suite croissante de parties de Γ. Soit $K_n = \alpha(F_n) \subset R$ la réunion des graphes des éléments de F_n. Alors (F_n) est une suite exhaustive de Γ si et seulement si $\mathfrak{h}_1(K_n) \to 1$.*
- *Soient (A_n), (B_n) deux suites de parties boréliennes de X. Alors*

$$\mu(A_n) \to 1 \text{ et } \mu(B_n) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_1(A_n \times B_n \cap R) \to 1.$$

- *Soit $\mathfrak{h}_1$ une mesure de probabilité sur R équivalente à $\mathfrak{h}$. Soit $F \subset R$ une partie borélienne telle que $\mathfrak{h}(F) < \infty$. On considère une suite $F_n \subset R$ de parties boréliennes telle que $\mathfrak{h}_1(F_n) \to 1$. Alors $\mathfrak{h}(F \backslash F_n) \to 0$.*

Démonstration. Rappelons que si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont deux mesures finies telles que $\mathfrak{h} \ll \mathfrak{h}'$ sur un espace borélien standard, alors $\mathfrak{h}'(A_n) \to 0 \Longrightarrow \mathfrak{h}(A_n) \to 0$ pour toute suite de boréliens A_n. Ceci démontre la première affirmation. La seconde est triviale. Pour la troisième, notons que $(p_v)_*(\mathfrak{h}_1)$ et μ sont équivalentes, donc $\mu(A_n) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_1(A_n \times X \cap R) \to 1$. Or $\mathfrak{h}_1(A_n \times X \cap X \times B_n \cap R) \to 1 \Longleftrightarrow \mathfrak{h}_1(A_n \times X \cap R) \to 1$ et $\mathfrak{h}_1(X \times B_n \cap R) \to 1$. Pour la dernière affirmation on a $\mathfrak{h}_1(R \backslash F_n) \to 0$, donc $\mathfrak{h}_1(F \backslash F_n) \to 0$. Comme $\mathfrak{h}_{|F} \ll \mathfrak{h}_1$, on a également $\mathfrak{h}(F \backslash F_n) \to 0$. ■

Terminons enfin par une variation, pour références ultérieures, sur le début de l'implication $iii \Longrightarrow ii$ du lemme 75.

Lemme 77. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X,μ). On fixe une représentation π de R sur un champ hilbertien H^X de base X. Étant donnés un champ mesurable $C = (C^x)_{x \in X}$ de parties mesurables de H^X et un nombre* *réel positif α, on note C_α le champ mesurable qui à $x \in X$ associe le α-voisinage $(C^x)_\alpha$ de C^x dans H^x.*

Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ une suite presque invariante de champs de vecteurs et $(C^n)_{n\geqslant 0}$ une suite de champs mesurables et invariants (i.e. stable par π) de parties mesurables de H^X. Il existe une suite extraite $(\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \ldots)$ de (ξ_n) et une suite décroissante $(\alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}, \ldots)$ de nombres réels convergeant vers 0, de sorte que la suite (A_{m_i}) définie par

$$A_{m_i} = \{\xi^x_{m_i} \in (C^x_{m_i})_{\alpha_{m_i}}\}$$

soit asymptotiquement invariante.

Démonstration. Reprenons la demonstration du lemme 75. Considérons l'espace $\mathcal{E}$ des suites de couples $(\xi_m, \alpha_m)_m$ formés d'un champ de vecteurs et d'un nombre réel positif telles que :

- ξ_m est une suite extraite de la suite presque invariante ξ_n,
- α_m est une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0,
- $\mu(A_m)$ soit une suite convergente, où

$$A_m = \{\xi^m_x \in (C^x_m)_{\alpha_m}\}.$$

On considère encore l'application $\Psi : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ définie par $(\xi_m, \alpha_m)_m \mapsto \lim \mu(A_m)$, et on note $\overline{\delta} = \sup \Psi(\mathcal{E}) \leqslant 1$. Si $\overline{\delta} = 0$ ou $\overline{\delta} = 1$ le résultat est clair. Sinon il existe par procédé diagonal un élément de $\mathcal{E}$, disons $(\xi_m, \alpha_m)_m$, tel que $\mu(A_m) \to \overline{\delta} \in]0,1[$. Notons $E_n = ((A_n \times X \cup X \times A_n)\backslash A_n \times A_n) \cap R$. On montre de même que dans le lemme 75 en considérant la suite $\sigma = (\xi_m, \alpha_m + \varepsilon_m)_m$ que s'il existe une suite extraite $(\xi_{m_i}, \alpha_{m_i})$ de $(\xi_m, \alpha_m)_m$ telle que $\mathfrak{h}_1(E_{m_i}) \geqslant c$ pour un nombre réel $c > 0$ alors $\overline{\lim}\, \mu(A^\sigma_{m_i}) > \overline{\delta}$ où

$$A^\sigma_{m_i} = \{\xi^x_{m_i} \in (C^x_{m_i})_{\alpha_{m_i} + \varepsilon_{m_i}}\}.$$

Par suite $\mathfrak{h}_1(E_m) \to 0$ et il en résulte que A_m est asymptotiquement invariante. ■

29 La propriété de Kazhdan dans le cadre mesuré

La propriété T pour les groupes localement compacts a été introduite par Kazhdan [66] en 1967. Nous ne faisons ici qu'en rappeler la définition (voir [53, 105, 12] pour des détails), ainsi que son adaptation aux relations d'équivalence. En fait, la propriété T pour une relation d'équivalence mesurée est un invariant d'équivalence orbitale stable : elle ne dépend que de « l'espace des classes » de cette relation d'équivalence.

1. Le cas des groupes. Soit Γ un groupe localement compact.

On dit qu'une représentation unitaire π de Γ sur un espace de Hilbert H *possède presque des vecteurs invariants* s'il existe une suite ξ_n de vecteurs de norme 1, une suite exhaustive croissante S_n de parties compactes de Γ, et une suite ε_n de nombres réels tendant vers 0, telles que

$$||\pi(s)\xi_n - \xi_n|| \leqslant \varepsilon_n, \quad \forall s \in S_n.$$

On dit qu'un vecteur ξ est invariant si $\pi(s)\xi = \xi$ pour tout $s \in \Gamma$.

Définition ([66]). *On dit que* Γ a la propriété T de Kazhdan *si toute représentation fortement continue ayant presque des vecteurs invariants a des vecteurs invariants non nuls.*

Exemples de groupes de Kazhdan. Kazhdan [66] a montré que $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ possède la propriété T, de même que les réseaux d'un groupe de Lie simple de rang réel supérieur à 2. Les réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ ne l'ont pas alors que les réseaux de $\mathrm{Sp}(1,n)$ l'ont [53, 49].

De plus, la propriété T est générique dans « l'adhérence » de groupes hyperboliques, cf. [20], ainsi que pour certains modèles statistiques de groupes aléatoires, cf. [112, 49].

Enfin rappelons qu'il existe un critère géométrique local, portant sur la « courbure p-adique » [40] d'un polyèdre fini, qui permet d'en déduire la propriété T pour son groupe fondamental. Voici quelques références à ce propos : [40, 14, 111, 6, 19, 49, 42, 112] — dont l'article original de Garland et l'énoncé bien connu de Żuk concernant spécifiquement la propriété T (que nous avons rappelé en introduction). Notons que ce critère s'étend aux actions propres cocompactes [101], et s'applique ainsi à $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Q}_p)$ dont le classifiant propre, son immeuble de Bruhat-Tits, est l'exemple canonique de polyèdre satisfaisant à ce critère. (voir aussi la section 32)

2. Le cas des relations d'équivalence. La propriété T, pour les relations d'équivalence mesurée, a été introduite par Moore et Zimmer au début des années 1980 (cf. [110, 81], ainsi que la section 28).

Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X,μ). On dit qu'une représentation π de R sur un champ hilbertien H^X de base X *contient presque des champs invariants* s'il existe une suite ξ_n de champs de vecteurs tels que $||\xi_n^x|| = 1$ pour presque tout $x \in X$, une suite exhaustive croissante (K_n) de R, et une suite (ε_n) de nombres réels tendant vers 0, telles que

$$||\pi(x,y)\xi_n^y - \xi_n^x|| \leqslant \varepsilon_n, \quad \forall (x,y) \in K_n.$$

On dit qu'un champ de vecteurs ξ est invariant si $\pi(x,y)\xi^y = \xi^x$ pour presque tout $(x,y) \in R$.

Définition. *On dit que* R possède la propriété T de Kazhdan *si toute représentation unitaire ayant presque des champs invariants possède un champ invariant* ξ *tel que* $||\xi^x|| = 1$ *pour presque tout* $x \in X$.

Remarquons que cette propriété ne dépend que de la classe de μ.

Proposition 78. *La propriété T de Kazhdan est un invariant d'isomorphisme stable de relations d'équivalence mesurées.*

Démonstration. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur X et S la relation obtenue par restriction à un borélien Y de X rencontrant presque toutes les orbites de R.

Supposons que S possède la propriété T. Soit π une représentation de R sur H^X et ξ_n une suite de champs unitaires presque invariants. On note H^Y la restriction de H^X à Y et π_S la restriction de π à S (agissant sur H^Y). Alors $(\xi_n)_{|Y}$ est une suite de champs unitaires π_S-presque invariant. Comme S a la propriété T, il existe un champ $\xi : Y \to H^Y$ unitaire invariant par π_S. Définissons $\bar{\xi} : X \to H^X$ par

$$\bar{\xi}^x = \pi(x, y)\xi^y$$

pour $(x, y) \in R$ tel que $x \notin Y$ et $y \in Y$. Comme ξ est π_S-invariant, $\bar{\xi}$ est défini sans ambiguité. Il est π-invariant par définition.

Réciproquement soit π une représentation de S sur un champ H^Y de base Y. Fixons une partition borélienne $Y_1 = Y, Y_2, \ldots$ de X et une famille $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ d'isomorphismes partiels de R surjectifs $\varphi_i : Y \twoheadrightarrow Y_i$. Notons $\varphi_1 : Y \to Y$ l'identité de Y. On définit un champ hilbertien H^X de base X en associant à tout $y \in Y_i$ l'espace de Hilbert $H_{\varphi_i^{-1} y}$ et l'égalité

$$\bar{\pi}(x, y) = \pi(\varphi_i^{-1} x, \varphi_j^{-1} y),$$

où $x \in Y_i$ et $y \in Y_j$, définit une représentation de R sur H^X. Une section ξ de H^Y s'étend à H^X en posant $\bar{\xi}^y = \xi^{\varphi_i^{-1} y}$, $y \in Y_i$. Soit ξ_n une suite (K_n, ε_n)-invariante de champs unitaires sur Y, où (K_n) est une suite croissante exhaustive de S et $\varepsilon_n \to 0$. On obtient en notant

$$\overline{K}_n = \amalg_{i,j} \varphi_{i,j}(K_n),$$

où $\varphi_{i,j}(x, y) = (\varphi_i x, \varphi_j y)$, une suite croissante exhaustive de R. De plus $\bar{\xi}_n$ est une suite $(\overline{K}_n, \varepsilon_n)$-invariante pour $\bar{\pi}$. Si alors R possède la propriété T, il existe un champ invariant unitaire ξ, et sa restriction à Y est un champ unitaire π-invariant. ■

Le cadre naturel pour l'étude de la propriété T de Kazhdan est celui des espaces mesurés singuliers. Selon ce point de vue, la propriété T est considérée comme un « paramètre de quasi-périodicité » des espaces métriques associés aux relations d'équivalence. Rappelons que pour les groupes dénombrables, la propriété T n'est pas invariante par quasi-isométrie [12].

3. Une caractérisation de la propriété T. Les résultats de la section 28 (lemme 75) montrent qu'il est possible pour les relations ergodiques de caractériser la propriété T en termes de champs presque invariants dominés. Dans ce paragraphe nous énonçons explicitement ce résultat, en l'étendant aux relations d'équivalence non ergodiques (voir également la remarque suivant la démonstration du lemme 75).

Soit H un champ mesurable d'espace de Hilbert sur un espace de probabilité (X,μ). On dit qu'un champ de vecteurs ξ sur X est *à support total* si son support $\{\xi^x \neq 0\}$ est de mesure 1, et qu'il est *non trivial* si son support est de mesure non nulle.

Théorème 79. *Une relation d'équivalence mesurée possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si chacune de ses représentations hilbertiennes qui possède une suite presque invariante de champs de vecteurs, non triviale au sens du lemme 75, iii ou iv, contient des champs invariants non triviaux.*

Démonstration. Supposons d'abord que la conclusion soit vraie et montrons que R possède la propriété T. Soit π une représentation contenant une suite ξ_n presque invariante, et non triviale au sens *ii*, donc au sens *iii*, ou *iv*. Par suite elle contient un champ invariant non trivial ξ, dont le support, disons Ω, est également invariant (et non négligeable). En considérant la représentation coincidant avec π sur $X\backslash\Omega$ et indentiquement nulle sur Ω, on obtient une nouvelle représentation de R contenant presque des champs invariants au sens *iii*, ou *iv*. Il existe donc un champ invariant qui prolonge ξ à un borélien non négligeable de $X\backslash\Omega$. On construit alors facilement à l'aide du lemme de Zorn un champ invariant pour π à support total.

Réciproquement supposons que R ait la propriété T. Reprenons la démonstration *iii* $\Longrightarrow$ *ii* du lemme 75. Avec des notations identiques, on obtient pour $\eta \geqslant 1$ une suite asymptotiquement invariante

$$A_n = \{\frac{1}{\eta} - \alpha_n \leqslant ||\xi_n|| \leqslant \eta + \alpha_n\}$$

associée à une suite ξ_n presque invariante non triviale au sens *iii*, telle que

$$\mu(A_n) \to_n \overline{\delta} > 0.$$

Soit

$$(R,\mu,\mathfrak{h}) = \int_Z (R_z,\mu_z,\mathfrak{h}_z) d\mu_Z(z)$$

la désintégration de R en composante ergodique [33]. Ainsi pour μ_Z-presque tout $z \in Z$, R_z est une relation d'équivalence μ_z-ergodique sur un espace borélien standard Y, et R est isomorphe à la relation $(z,y) \sim (z',y')$ si et seulement si $z = z'$ et yR_zy' sur $Z \times Y$. Par ergodicité, toute limite faible de la suite $\chi_{A_n} \in L^\infty(X)$ est une fonction ne dépendant que de $z \in Z$. Considérons une telle fonction, disons $\tilde{\delta} : X \to [0,1]$, et supposons quitte à extraire que χ_{A_n} converge faiblement vers $\tilde{\delta}$. Notons $\Omega = \{z \in Z,\, \tilde{\delta}_z \neq 0\}$ (qui est une partie non négligeable de Z) et $\tilde{A}_n = A_n \cap \Omega \times Y$ (ainsi $\mu(A_n \backslash \tilde{A}_n) \to 0$). On a, pour tout n fixé,

$$\lim_m \mu(\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m) = \int_{\tilde{A}_n} \tilde{\delta}_z d\mu_Z(z).$$

Supposons qu'il existe un borélien $\Omega' \subset \Omega$ non trivial sur lequel $\tilde{\delta}_z < 1$ et considérons, étant donné n, un entier $m = m(n) > n$ suffisament grand pour que

$$|\mu(\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m) - \int_{\tilde{A}_n} \tilde{\delta}_z d\mu_Z(z)| \leqslant \frac{1}{n}$$

et

$$|\mathfrak{h}_1(K_n \cap K_m) - \mathfrak{h}_1(K_n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Construisons alors une suite $\sigma \in \mathcal{E}$ de la façon suivante. Étant donné n on pose, pour tout $z \notin \Omega$, $\xi_n^\sigma(z,y) = 0$, pour tout $z \in \Omega \backslash \Omega'$, $\xi_n^\sigma(z) = \xi_n^z$, et pour tout $z \in \Omega'$, $\xi_n^\sigma(z) = \xi_n^z$ sur $\tilde{A}_n^z$ et $\xi_n^\sigma(z) = \xi_{m(n)}^z$ sur $\tilde{A}_{m(n)}^z \backslash \tilde{A}_n^z$ (et 0 sur $Y \backslash \tilde{A}_n^z \cup \tilde{A}_{m(n)}^z$). Alors $\sigma = (\xi_n^\sigma, \alpha_n) \in \mathcal{E}$. En effet il suffit de choisir $\varepsilon_n^\sigma = \varepsilon_n$ et $K_n^\sigma = K_n \cap K_{m(n)} \backslash C_n \cup C_{m(n)}$. Par ailleurs

$$\lim \mu(A_n^\sigma) = 2\overline{\delta} - \int_\Omega \tilde{\delta}_z^2 d\mu_Z(z) > \overline{\delta}$$

d'où une contradiction. Par suite $\tilde{\delta} = 1$ presque surement sur Ω.

Considérons alors la représentation $\tilde{\pi}$ de R coincidant avec π sur $\Omega \times Y$ et égale à la représentation trivial sur le champ constant $\mathbf{C}$ de base $Z \backslash \Omega \times Y \subset X$. Soit $\tilde{\xi}_n$ la suite définie par $\tilde{\xi}_n^x = 1$ si $x \in Z \backslash \Omega \times Y$, $\tilde{\xi}_n^x = \xi_n^x / ||\xi_n^x||$ sur $\tilde{A}_n \subset \Omega \times Y$ et $\tilde{\xi}_n^x = \eta_x \in H^x$ quelconque de norme 1 ailleurs (mesurable). Notons $\tilde{K}_n = (K_n \cap (\tilde{A}_n \times \tilde{A}_n)) \amalg R_{|X \backslash \Omega}$. Alors $\mathfrak{h}_1(\tilde{K}_n) \to 1$, et $\tilde{\xi}_n$ est un champ $(\tilde{K}_n, \eta \cdot \varepsilon_n)$-invariant au sens *ii* pour $\tilde{\pi}$. Par suite $\tilde{\pi}$ admet un champ invariant à support total, et ce champ restreint à $\Omega \times Y$ est invariant non trivial pour π. ■

4. Existence d'une mesure invariante. Zimmer a montré que les relations d'équivalence mesurée ayant la propriété T de Kazhdan sont de type II [110]. Plus généralement, le premier groupe de cohomologie $H^1(R, \mathbf{R})$ à coefficients réels d'une relation d'équivalence ayant la propriété T est trivial [81]. Nous renvoyons également, à ce propos, aux articles récents [61] et [2].

Proposition 80 (Zimmer). *Soit R une relation d'équivalence sur un espace de probabilité (X, μ) ayant la propriété T de Kazhdan. Il existe une mesure σ-finie sur X équivalente à μ et invariante par R.*

5. Approximations. L'un des résultats important de l'article de Kazhdan [66] est le fait que tout groupe dénombrable ayant la propriété T est de type fini. Cet énoncé a été adapté par Moore [81] aux relations d'équivalence mesurées (modulo de légères imperfections que nous rectifions ci-dessous).

Proposition 81. *Toute approximation croissante d'une relation d'équivalence R ayant la propriété T est, à isomorphisme stable près, constante à partir d'un certain rang.*

Plus précisément, si $R_n \subset R$ est une suite croissante et exhaustive de sous-relations de R, alors *il existe un entier N et un borélien R_N-invariant non négligeable sur lequel R et R_N coïncident.*

Démonstration. Soient R une relation d'équivalence ayant la propriété T et R_n une approximation de R au sens ci-dessus. Considérons pour tout $x \in X$ l'espace de Hilbert H_n^x des fonctions de carré sommable définies sur les R_n-classes de l'orbite $R.x$ (i.e. les fonctions $\xi : R^x \to \mathbf{C}$ telles que $\xi(x,y) = \xi(x,z)$ si $(y,z) \in R_n$ et $\sum_{\overline{(y,z)} \in R^x/R_n^x} |\xi(y,z)|^2 < \infty$) et notons H_n le champ mesurable associé aux espaces H_n^x. L'action régulière de R sur elle-même qui permute les fibres horizontales $(y,x)(x,z) = (y,z)$ induit une représentation π_n de R sur H_n. Le champ $\chi_n : x \mapsto \mathbf{1}_{R_n^x} \in H_n$ est invariant par $\pi_n(R_n)$.

Comme $\mathfrak{h}_1(R_n) \to 1$, la représentation $\pi = \oplus \pi_n$ possède une suite presque invariante de champs de vecteurs unitaires. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ un champ invariant non trivial. L'une des composantes ξ_N est non nulle et comme π est diagonale, ξ_N est un champ non trivial invariant par $\pi_N(R)$, i.e. ξ_N définit mesurablement une fonction $f_{[x]}$ par R-orbite. Par construction cette fonction est constante sur les R_n-classes et, étant de carré intégrable, elle atteint son maximum sur un nombre fini de ces classes. De plus, (R_n) étant croissante, il existe un entier $k \geqslant N$ et un borélien R-invariant $\Omega \subset X$ non trivial sur lequel $f_{[x]}$ atteint son maximum sur exactement une R_k-classe de chaque R-classe de Ω. Alors R et R_k coïncident sur le borélien (non négligeable) constitué par ces R_k-classes. ∎

Corollaire 82. *Toute approximation croissante de R par des relations ergodiques est constante à partir d'un certain rang.*

Ce corollaire avait également été obtenu par Sorin Popa [91].

De même qu'un groupe de Kazhdan est de type fini, on a le résultat suivant.

Corollaire 83. *Une relation d'équivalence mesurée ergodique ayant la propriété T de Kazhdan est de type fini, i.e. peut être engendrée par un nombre fini d'isomorphismes de l'espace.*

Démonstration. Soit R une relation d'équivalence mesurée ergodique ayant la propriété T de Kazhdan. Il est bien connu qu'il existe un isomorphisme ergodique $\varphi \in [R]$. Numérotons une partition de R en isomorphisme partiel et considérons l'ensemble borélien $K_n \subset R$ constituée de φ et des n premiers isomorphismes partiels de cette partition. Soit R_n la relation engendrée par K_n. Alors (R_n) exhauste R donc $R_n = R$ à négligeable près pour n suffisamment grand. ∎

Remarques. 1. – Notons que tous les exemples connus de relations d'équivalence de type II_1 ayant la propriété T de Kazhdan ont coût 1, où le coût d'une relation d'équivalence de type II_1 est, par définition, l'infimum sur les graphages symétriques K de cette relation du volume $\frac{1}{2}\mathfrak{h}(K)$ des arêtes non orientées de ces graphages (cf. [37]).

2. – Les relations arborables admettent des approximations non triviales. Par exemple, étant donné un arborage K d'une relation R, toute suite croissante $K_n \subset K$ non essentiellement constante et exhaustant K détermine une approximation non triviale de R. On peut aussi l'approximer une telle relation par des sous-relations (arborables) ergodiques (cf. [38, 39] pour le cas non moyennable). Notons que, la propriété T étant évidemment stable par quotient, une relation d'équivalence de Kazhdan ne possède donc pas de quotients arborables (cf. également [1]). Étant donnée une relation arborable, il pourrait être intéressant d'étudier le nombre maximum d'isomorphismes ergodiques appartenant à un arborage de cette relation.

6. Ergodicité forte et familles de Levy. Nous avons déjà constaté dans le chapitre III des liens étroits entre l'ergodicité forte et le phénomène de concentration de la mesure. Dans ce paragraphe nous caractérisons les espaces fortement ergodiques à l'aide de familles de Levy qui leurs sont naturellement associées.

Notre référence pour la concentration de la mesure au sens classique est la monographie récente de Ledoux [73].

Considérons d'abord la notion de famille de Levy en termes de fonctions 1-lipschitziennes. Soit (Y, d, μ) un espace métrique-mesuré, i.e. un espace métrique (Y, d) muni d'une mesure borélienne de probabilité μ. Étant donnée une fonction

$$f : Y \to \mathbf{R}$$

à valeurs réelles, on sera plus particulièrement intéressé par les *inégalités de concentration* de f autour d'une valeur $m \in \mathbf{R}$, de la forme

$$\mu\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \geqslant \delta(\varepsilon)$$

(où $\delta(\varepsilon) \to 1$ quand $\varepsilon \to \infty$).

Définition. *Soit* $((Y_n, y_n), d_n, \mu_n)_n$ *une suite d'espaces métriques-mesurés pointés, où* $y_n \in Y_n$ *est le point base de* Y_n*. On suppose que les premiers moments*

$$m_1((Y_n, y_n), d_n, \mu_n) = \int_{Y_n} d_n(y, y_n) d\mu_n(y) \leqslant C < \infty$$

sont unifomément finis ($C > 0$ fixé). Nous dirons que $((Y_n, y_n), d_n, \mu_n)$ *forme une* famille de Levy *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a,*

$$\inf_f \mu_n\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1,$$

où l'infimum est pris sur les fonctions 1-lipschitziennes $f : Y_n \to \mathbf{R}$ *et* $m = \int_{Y_n} f d\mu_n$ *est la valeur moyenne de* f*.*

Dans la suite nous étudierons seulement le cas où $(Y_n, d_n) = (H, ||\cdot||)$ est un espace de Hilbert fixe, avec l'origine pour point base. On dira dans ce cas qu'une fonction $f : H \to \mathbf{R}$ *se concentre au voisinage d'une valeur* m lorsque

$$\mu_n\{|f - m| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1.$$

Théorème 84. *Soit* H *un espace de Hilbert. Soit* R *une relation d'équivalence ergodique sur un espace de probabilité* (X, μ)*. Alors* R *est fortement ergodique si et seulement si pour toute suite presque invariante* $\xi_n : X \to H$ *pour la représentation triviale de* R *dans* H*, dominée par une fonction* $g \in L^1$*, la famille* $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ *est une famille de Levy, où* $\mu_n = (\xi_n)_*\mu$ *est la poussée en avant de* μ *sur* H*.*

Démonstration. Supposons d'abord que R soit fortement ergodique et considérons une suite presque invariante dominée

$$\xi_n : X \to H.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Étant donné un entier n considérons une fonction 1-lipschitzienne $f_n : H \to \mathbf{R}$ telle que

$$\mu_n\{f_n - m_n > \varepsilon\} \geqslant \sup_f \mu_n\{f - \int f d\mu_n > \varepsilon\} - 1/n,$$

où $m_n = \int_H f_n d\mu_n$ (et $\mu_n = (\xi_n)_*\mu$) et montrons que $\mu_n\{f_n - m_n > \varepsilon\} \to 0$. Supposons qu'il existe une suite extraite de (f_n), encore notée (f_n), telle que

$$\mu_n\{f_n - m_n > \varepsilon\} \to \delta > 0.$$

Notons $C^n = \{f_n - m_n > \varepsilon\} \subset H$ et $A_n = \{\xi_n^x \in C^n\} \subset X$. Les champs constants $x \mapsto C^n$ sont bien sûr invariant pour la représentation triviale. D'après le lemme 77 il existe quitte à extraire une seconde fois une suite $\alpha = (\alpha_n)$ de nombres réels positifs convergeant vers 0, de sorte que

$$A_n^\alpha = \{\xi_n^x \in C_{\alpha_n}^n\}$$

soit asymptotiquement invariante, où $C_{\alpha_n}^n$ est le α_n-voisinage de C^n dans H. Comme R est fortement ergodique, cette suite est triviale, i.e.

$$\mu(A_n^\alpha) \to_n 0 \ \text{ ou } \ 1,$$

et donc

$$\mu(A_n^\alpha) \to_n 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
m_n = \int_H f_n d\mu_n &= \int_{A_n^\alpha} f_n \xi_n d\mu + \int_{X\backslash A_n^\alpha} f_n \xi_n d\mu \\
&> \mu(A_n^\alpha)(m_n + \varepsilon - \alpha_n) - |\int_{X\backslash A_n^\alpha} f_n \xi_n d\mu| \\
&\geqslant \mu(A_n^\alpha)(m_n + \varepsilon - \alpha_n) - \int_{X\backslash A_n^\alpha} g d\mu - \mu(X\backslash A_n^\alpha)|f_n(0)|, \\
&\geqslant \mu(A_n^\alpha)(m_n + \varepsilon - \alpha_n) - \int_{X\backslash A_n^\alpha} g d\mu - \mu(X\backslash A_n^\alpha)(|m_n| + ||g||_1),
\end{aligned}$$

où les inégalités utilisent le fait que f_n est 1-lipschitz et la définition de A_n^α. Or $|m_n|$ est par définition borné par $||g||_1$, d'où une contradiction pour n grand. En remplaçant f_n par $-f_n$ on a finalement,

$$\sup_f \mu_n\{|f - \int f d\mu_n| > \varepsilon\} \to 0,$$

d'où le résultat.

Réciproquement supposons que R ne soit pas fortement ergodique et construisons une suite asymptotiquement invariante ξ_n telle que la famille $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ associée ne soit pas une famille de Levy. Soit (A_n) une suite asymptotiquement invariante non triviale pour R. Soit (e_n) une suite dense de la sphère unité de H. (Rappelons que par convention H est séparable.) Posons

$$\xi_n = \chi_{A_n} \cdot e_n - \mu(A_n) e_n,$$

où χ_{A_n} est la fonction caractéristique de A_n. On vérifie immédiatement que (ξ_n) est une suite presque invariante et dominée (par la fonction constante 1). Soit $\eta \in H$ un vecteur unité. Considérons la fonction (1-lipschitz)

$$\xi \mapsto |\langle \xi \mid \eta \rangle|.$$

Si $(H, ||\cdot||, \mu_n)$ était une famille de Levy on aurait en particulier pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\{|\langle \xi_n^x \mid \eta\rangle| \leqslant \varepsilon\} \to 1.$$

Considérons une suite extraite de (ξ_n) (toujours notée (ξ_n)) telle que pour la suite (e_n) associée on ait,

$$|\langle e_n \mid \eta\rangle| \to 1.$$

On a

$$|\langle \xi_n^x \mid \eta\rangle| = |\chi_{A_n} - \mu(A_n)| \cdot |\langle e_n \mid \eta\rangle|$$

et donc

$$\int_X |\langle \xi_n^x \mid \eta\rangle| d\mu = 2 \cdot \mu(A_n)(1 - \mu(A_n))|\langle e_n \mid \eta\rangle|,$$

d'où une contradiction pour n grand si ε est suffisamment petit ($\varepsilon \leqslant \delta^2/3$ où A_n est δ-non triviale). ∎

7. Proximité des champs invariants et presque invariants. L'un des corollaires importants des résultats techniques développées à la section 28 est le théorème suivant. Son analogue pour les groupes discrets est bien connu, cf. [53]. La démonstration de ce théorème comporte 3 étapes (théorème 85, lemme 86, lemme 92).

Théorème 85. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type* II_1 *ayant la propriété T. Soit π une représentation de R possédant une suite ξ_n presque invariante telle que $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^1(X)$. Il existe quitte à extraire une suite ζ_n de champs invariants dominés par g tels que*

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit π une représentation de R sur un champ hilbertien H^X de base X. Décomposons $H^X = H^t + \tilde{H}^X$ en somme orthogonale, où H^t est le champ mesurable et stable par π engendré par les champs invariants. Considérons la famille

$$P^x : H^x \to H^x$$

$x \in X$, de projecteurs orthogonaux sur $\tilde{H}^X$. Pout tout $(x, y) \in R$ on a

$$P^x \pi(x, y) = \pi(x, y) P^y.$$

Soit ξ_n une suite presque invariante de champs de vecteurs tels que $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$ avec $g \in L^1$, et $\xi_n = \zeta_n + \tilde{\xi}_n$ la décomposition de ξ_n dans $H = H^t + \tilde{H}$. On a

$$||\pi(x, y)\tilde{\xi}_n^y - \tilde{\xi}_n^x|| = ||P^x(\pi(x, y)\xi_n^y - \xi_n^x)|| \leqslant ||\pi(x, y)\xi_n^y - \xi_n^x||,$$

donc $\tilde{\xi}_n$ (et de même ζ_n) est une suite presque invariante. Par construction, $\pi_{|\tilde{H}}$ ne contenant pas de champs presque invariants non triviaux, et puisque $||\tilde{\xi}_n^x||_x \leqslant g(x)$, on a, d'après le théorème 79, $||\tilde{\xi}_n||_1 \to_n 0$, i.e. $||\tilde{\xi}_n^x||_x \to_n 0$ presque sûrement quitte à extraire. Par suite

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$. Soit T un champ d'isomorphismes entrelaçant la restriction $\pi_{|H^t}$ de π à H^t et la représentation triviale de R, agissant sur un champ constant $X \times H^{\mathbf{1}}$ de base X. Considérons le champ défini par

$$\tilde{\zeta}_n^x = T_x(\zeta_n^x) \in H^{\mathbf{1}}.$$

Alors $\tilde{\zeta}_n : X \to H^{\mathbf{1}}$ est une suite presque invariante dominée. Soit η_n le champ défini par

$$\eta_n^x = \tilde{\zeta}_n^x - \int_X \tilde{\zeta}_n^x d\mu.$$

Le lemme suivant (lemme 86) montre que $\eta_n^x \to 0$ presque sûrement quitte à extraire. Il en résulte que

$$||\xi_n^x - T_x^{-1} \int_X \tilde{\zeta}_n^x d\mu||_x \leqslant ||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x + ||\tilde{\zeta}_n^x - \int_X \tilde{\zeta}_n^x d\mu||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$, d'où le résultat. ■

Lemme 86. *Soit R une relation d'équivalence fortement ergodique sur un espace de probabilité (X, μ). On considère une suite $(\xi_n : X \to H)_n$ presque invariante pour la représentation triviale de R sur un espace de Hilbert H, dominée par une fonction $g \in L^1(X)$, et telle que*

$$|| \int_X \xi_n d\mu|| \to_n 0.$$

Si H est de dimension finie, ou si R est de type fini et préserve la mesure μ, alors il existe une suite extraite de (ξ_n) qui converge presque surement vers 0.

Démonstration. Si H est de dimension fini, il s'agit d'un corollaire immédiat du théorème 84 de concentration. En effet choisissons pour fonctions lipschitziennes les fonctions coordonnées de H (considéré comme espace de Hilbert réel), qui se concentrent au voisinage de 0 du fait que leurs valeurs moyennes tendent vers 0. Plus précisément on a

$$\inf_\eta \mu\{|\langle \xi_n^x \mid \eta\rangle| \leqslant \varepsilon\} \to_n 1.$$

où η parcourt les vecteurs unités de H. Par suite étant donné $\varepsilon > 0$, on en déduit (si H est de dimension finie) que

$$\mu(O_\varepsilon^n) \to_n 1,$$

où O_ε^n est l'ensemble des x tels que ξ_n^x est dans la boule de centre 0 et de rayon ε de H,

$$\begin{aligned} ||\xi_n|| &= \int_{O_\varepsilon^n} ||\xi_n^x|| d\mu(x) + \int_{X \setminus O_\varepsilon^n} ||\xi_n^x|| d\mu(x) \\ &\leqslant \varepsilon + \int_{X \setminus O_\varepsilon^n} g d\mu \end{aligned}$$

donc $||\xi_n|| \leqslant 2\varepsilon$ pour n grand (il en résulte quitte à extraire que ξ_n converge vers 0 presque sûrement). Le phénomène concentration, *a priori*, concerne naturellement seulement les « observables » $f : H \to Y$ où Y est un « écran » de basse dimension [48, page 141]. Pour étudier le cas où Y est (hilbertien) de dimension infinie, nous utiliserons des arguments spectraux (lemme 92). Ceci permettra d'achever la preuve de ce lemme. ■

Nous avons donc montré, modulo le lemme 92, le théorème suivant.

Théorème 87. *Soit R une relation d'équivalence ergodique de type* II_1 *sur un espace de probabilité (X, μ). Alors R possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si pour toute représentation π de R sur un champ hilbertien H^X de base X et toute suite presque invariante ξ_n de H^X dominé par une fonction $g \in L^1(X)$, il existe quitte à extraire une suite ζ_n de champs invariants dominés par g tels que*

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

8. Groupes discrets et relations d'équivalence. Nous montrons dans ce paragraphe qu'un groupe discret agissant librement en préservant une mesure de probabilité possède la propriété T si et seulement si la relation d'équivalence engendrée la possède. Ce résultat a été obtenu par Zimmer, dans le cas des actions faiblement mélangeantes [110], et a été étendu très récemment par Anantharaman-Delaroche au cas ergodique, par des techniques cohomologiques [2]. La preuve directe ci-dessous, également dans le cadre ergodique, repose sur l'étude qui précède.

Théorème 88. *Soit $R = R_\alpha$ une relation obtenue par action d'un groupe discret Γ préservant une mesure de probabilité. Si Γ a la propriété T, alors R l'a également. Réciproquement si R a la propriété T, et si l'action α est essentiellement libre et ergodique, alors Γ l'a également.*

Démonstration. Soit Γ un groupe de Kazhdan, $R = R_\alpha$ une relation obtenue par action de Γ préservant une mesure de probabilité μ, et π une représentation de R possédant presque des champs invariants ; alors la représentation $\bar{\pi}$ de Γ sur $L^2(X, H^X)$ obtenue en intégrant π possède presque des vecteurs invariants. En effet, soit $F \subset \Gamma$ une partie finie, $\varepsilon > 0$, $K = \{\mathrm{graph}(\gamma^{-1})\}_{\gamma \in F} \subset R$, et une suite $\xi_n \in L^2$ de champs (ε_n, K_n)-invariants (où $\varepsilon_n \to 0$ et K_n est exhaustive croissante) tels que $||\xi_n||_{L^2} = 1$ et $||\xi_n^x|| \leqslant g(x)$ pour une fonction positive $g \in L^2$. Soit un entier N tel que

$$\int_{K \setminus K_N} (g(x) + g(y))^2 d\mathfrak{h}(x, y) \leqslant \varepsilon^2/2$$

et $\varepsilon_N^2 \leqslant \varepsilon^2/2$. On a pour tout $\gamma \in F$

$$\begin{aligned} ||\bar{\pi}(\gamma)\xi^N - \xi^N||_2^2 &= \int_X ||\pi(x, \gamma^{-1}x)\xi_N^{\gamma^{-1}x} - \xi_N^x||^2 d\mu(x) \\ &\leqslant \varepsilon^2/2 + \int_{\mathrm{graph}(\gamma^{-1}) \cap K_N} ||\pi(x, y)\xi_N^y - \xi_N^x||^2 d\mathfrak{h}(x, y) \\ &\leqslant \varepsilon^2/2 + \varepsilon_N^2 \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Il existe donc une fonction non triviale $\xi \in L^2(X, H^X)$ invariante par Γ (i.e. vérifiant $\pi(x, \gamma^{-1}x)\xi_{\gamma^{-1}x} = \xi^x$ pour presque tout $x \in X$). Comme Γ engendre R, cette fonction est invariante pour π et R a la propriété T.

Réciproquement soit $\pi : \Gamma \to U(H)$ une représentation de Γ dans H ayant presque des vecteurs invariants. Soit $\tilde{\pi}$ la représentation de R sur le champ constant d'espaces $H^x = H$ et de base X, définie par l'expression

$$(x, y) \mapsto (h \in H^y \mapsto \pi(\gamma^{-1})h \in H^x),$$

où γ est l'unique élément de Γ vérifiant l'équation $\alpha(\gamma)(x) = y$ (α étant supposée libre). Tout vecteur (F, ε)-invariant pour π, disons ξ, définit un champ constant (K, ε)-invariant pour $\tilde{\pi}$,

$$x \mapsto \xi$$

où $K = \{\mathrm{graph}(\gamma^{-1})\}_{\gamma \in F}$. Considérons une suite presque invariante pour π et notons $\xi_n : X \to H$ la suite de champs constants associés. R ayant la propriété T, il existe une suite (ζ_n) de champs invariants dominés tels que $\zeta_n^x - \xi_n^x \to 0$ presque sûrement (cf. th. 85). Soit

$$\bar{\zeta}_n = \int_X \zeta_n^x d\mu(x) = \sum_i \int_X \langle \zeta_n^x \mid e_i \rangle d\mu(x) e_i$$

la valeur moyenne de ζ_n, où (e_i) est une base hilbertienne de H. Alors

$$\pi(\gamma)\bar{\zeta}_n = \pi(\gamma) \int_X \zeta_n d\mu = \int_X \pi(\gamma)\zeta_n^x d\mu(x) = \int_X \zeta_n^{\alpha(\gamma)x} d\mu(x) = \bar{\zeta}_n$$

(la deuxième inégalité résulte de la continuité de $\pi(\gamma)$ et la dernière d'un changement de variable, μ étant invariante). Or

$$||\bar{\zeta}_n - \xi_n|| = || \int_X \zeta_n - \xi_n d\mu|| \leqslant \int_X ||\zeta_n - \xi_n|| d\mu \to 0$$

donc $\bar{\zeta}_n$ est non trivial pour n grand. Ainsi Γ a la propriété T. ■

Le résultat suivant a été démontré par Furman [36]. Il résulte aussi immédiatement du théorème ci-dessus et de l'invariance par isomorphisme stable de la propriété T pour les relations d'équivalence.

Corollaire 89. *La propriété T est un invariant d'équivalence mesurable de groupes discrets.*

Rappelons que deux groupes discrets Γ et Λ sont dit *mesurablement équivalents* s'il existe un espace borélien standard Ω muni d'une mesure σ-finie $\mathfrak{h}$, et des actions de Γ et Λ sur Ω qui soient libres et commutantes, qui préservent la mesure $\mathfrak{h}$, et qui admettent chacune un domaine fondamental de mesure finie (cette définition est dûe à M. Gromov). Par exemple, deux réseaux de covolume fini d'un même groupe de Lie sont mesurablement équivalent (agissant par multiplication à gauche et à droite).

Deux groupes discrets sont mesurablement équivalents si et seulement s'ils admettent deux actions libres de type II_1 stablement isomorphes ([36, §2] et [38, §6]).

30 Diffusions hilbertiennes et inégalités de Poincaré

Soit H un espace de Hilbert. Étant donné un opérateur hermitien borné D sur H de norme $\leqslant 1$ (contraction), on considère l'opérateur positif

$$\Delta_p = \mathrm{Id} - D^p$$

où Id est l'identité et $p \geqslant 1$. On note

$$E_p(\xi) = \langle \Delta_p \xi \mid \xi \rangle$$

l'energie (de Dirichlet) de $\xi \in H$ relative à la diffusion $\xi \mapsto D^p\xi$. Les points fixes de la diffusion D, i.e. les vecteurs ξ vérifiant $D\xi = \xi$, sont les vecteurs dont l'énergie $E = E_1$ est nulle.

Exemple (Marche aléatoire sur la sphère hilbertienne $\mathbf{S}^\infty \subset H$*).* Soit Γ un groupe de type fini. On fixe une marche aléatoire invariante ν sur Γ, de support un système générateur fini *symétrique* S de Γ. Ainsi ν consiste en la donnée de $\#S$ nombres réels strictement positifs

$$\nu(e \to s)$$

de somme 1, qui déterminent par invariance la probabilité $\nu(\gamma \to s\gamma)$ d'aller de γ à $s\gamma$ en 1 pas. On suppose que ν est symétrique, au sens où $\nu(e \to s) = \nu(e \to s^{-1})$. Soit π une représentation unitaire de Γ sur un espace de Hilbert H. L'opérateur

$$D_{\nu,\pi} = \sum_S \nu(e \to s)\pi(s)$$

de diffusion associé à la marche aléatoire sur la sphère unité de H est alors hermitien de norme $\leqslant 1$, sans point fixe si et seulement si π est sans point fixe (en effet le barycentre $D_{\nu,\pi}(\xi)$ des vecteurs unitaires pondérés $(\pi(s)\xi, \nu(e \to s))$ est de norme 1 si et seulement si $\pi(s)\xi = \xi$ pour tout s). Partant d'un vecteur unitaire ξ de H, on se déplace en $\pi(s)\xi$ avec probabilité $\nu(e \to s)$. On note

$$\nu^2(\gamma \to \gamma') = \nu * \nu(\gamma \to \gamma') = \sum_{\tau \in \Gamma} \nu(\gamma \to \tau)\nu(\tau \to \gamma')$$

la probabilité d'aller de γ à γ' en 2 pas sur Γ, et de même $\nu^n = \nu^{n-1} * \nu$. On a $D_{\nu^n,\pi} = D^n_{\nu,\pi}$ pour les diffusions hilbertiennes associées à ν.

Soit D une contraction de H. Rappelons que $\mathrm{Sp}(D) \subset [-1, 1]$, où $\mathrm{Sp}(D)$ est le spectre de D. On note

$$\kappa = \kappa_D = \sup\{y \in \mathrm{Sp}(D), y \neq 1\}.$$

La présence d'un « trou »

$$\lambda = 1 - \kappa > 0$$

dans $\mathrm{Sp}(D)$ équivaut à la présence d'un trou (de même taille) dans le spectre des énergies, i.e.

$$E(\xi) = E_1(\xi) \geqslant \lambda > 0,$$

pour tout $\xi \in \mathbf{S}^\infty$ orthogonal aux vecteurs fixes.

Inégalité de Dirichlet. *Soit D une contraction. Alors $\kappa < 1$ si et seulement s'il existe une constante $c_\infty < \infty$ telle que*

$$||\xi - \bar{\xi}||^2 \leqslant c_\infty E(\xi)$$

pour tout $\xi \in H$ (où $\bar{\xi}$ est la projection orthogonale de ξ sur les points fixes de D). La valeur optimale de cette constante est $c_\infty = 1/(1-\kappa) = 1/\lambda$.

Définition. *Les constantes c_∞ et λ sont appelés* constantes de relaxation *de la diffusion D.*

Inégalités de Poincaré. *Soit D une contraction. Alors $\kappa < 1$ si et seulement s'il existe $n \geqslant 2$ et une constante $c_n < n$ tels que*

$$E_n(\xi) \leqslant c_n E(\xi)$$

pour tout $\xi \in H$. L'inégalité $c_n < n$ est alors vraie pour tout $n \geqslant 2$. La valeur optimale de la constante c_n est $c_n = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{n-1}$.

Démonstration. On peut supposer, quitte à considérer l'orthogonal des points fixes, que D est sans point fixe. L'inégalité revient à dire que l'opérateur ΔT est positif, où

$$\Delta = \Delta_1 = \mathrm{Id} - D \text{ et } T = c_n - (\mathrm{Id} + D + \ldots + D^{n-1}).$$

Or ceci est équivalent à la positivité de T. En effet Δ est positif et injectif donc d'image dense, et en écrivant $\xi = \lim \sqrt{\Delta}\xi_n$, on obtient

$$\langle T\xi \mid \xi\rangle = \lim_n \langle T\sqrt{\Delta}\xi_n \mid \sqrt{\Delta}\xi_n\rangle = \lim_n \langle \Delta T\xi_n \mid \xi_n\rangle \geqslant 0.$$

La réciproque est évidente. On a pour $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$,

$$D \leqslant \kappa \Longleftrightarrow \mathrm{Id} + D + \ldots + D^{n-1} \leqslant 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{n-1}$$

et $\kappa < 1 \Longleftrightarrow 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^{n-1} < n$. ■

Définition. *Les constantes c_n appelées* constantes de Poincaré *de la diffusion D.*

Soit Γ un groupe de type fini. Fixons comme dans l'exemple ci-dessus un système générateur S symétrique fini de Γ et ν une marche aléatoire invariante symétrique de support S. Étant donnée une représentation π de Γ sur un espace de Hilbert H, on note $D_{\nu,\pi}$ l'opérateur de diffusion associé sur $\mathbf{S}^\infty \subset H$, et $\kappa(\nu,\pi)$, $c_n(\nu,\pi)$ les constantes correspondantes.

Notons que Γ a la propriété T si et seulement si pour toute représentation π, on a

$$\kappa(\nu,\pi) < 1.$$

(Ceci résulte de considérations barycentriques évidentes. On peut aussi s'assurer de la correspondance entre les vecteurs presque invariants et les valeurs spectrales proches de 1 en utilisant la convexité hilbertienne sous la forme $||\pi(s)\xi - \xi||^2 = 2(1 - \mathrm{Re}\langle\pi(s)\xi \mid \xi\rangle)$, pour ξ de norme 1 ; on a alors $||\pi(s)\xi^n - \xi^n|| \to_n 1$ pour tout $s \in S$ si et seulement si $\langle D_{\nu,\pi}\xi^n \mid \xi^n\rangle \to_n 1$.) Les inégalités de Poincaré et Dirichlet s'écrivent

$$c_n(\nu,\pi) < n.$$

On voit alors facilement du fait qu'elles sont atteintes que les constantes $\kappa(\nu,\pi)$ et $c_n(\nu,\pi)$ sont alors uniformes en π (considérer une suite π_n de représentations pour lesquelles la constante tend vers la valeur maximale et faire la somme directe de ces représentations). En d'autres termes si l'on note

$$\kappa(\Gamma,\nu) = \sup_\pi \kappa(\nu,\pi) \quad \text{et} \quad c_n(\Gamma,\nu) = \sup_\pi c_n(\nu,\pi),$$

alors Γ *possède la propriété T de Kazhdan si et seulement si l'une des inégalités équivalentes $\kappa(\Gamma,\nu) < 1$ ou $c_n(\Gamma,\nu) < n$ est vérifiée ($n \geqslant 2$).*

Nous renvoyons à [49, 42] pour ce qui précède.

31 Une étude spectrale de l'ergodicité forte et de la propriété T

Le but de cette section est la démonstration des théorèmes 66 et 67.

1. Marches aléatoires sur les relations d'équivalences mesurées. Soit R une relation d'équi-valence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ).

Une *marche aléatoire sur (les orbites de) R* est la donnée d'une famille mesurable de mesures de probabilité $(\nu^x)_{x \in X}$ telle que ν^x soit supportée sur l'orbite de x. Plus précisément, $\nu : R \to [0, 1]$ est une fonction mesurable définie sur R telle que la somme de chaque fibre horizontale R^x soit 1. On notera $\nu(x \to y) = \nu(x, y)$.

Définition. *Une marche aléatoire ν est dite* symétrique relativement à μ *si*

$$\nu(x \to y)\sqrt{\delta(x, y)} = \nu(y \to x)\sqrt{\delta(y, x)}.$$

où δ est la fonction modulaire de μ.

Rappelons que δ vérifie l'équation

$$d\mathfrak{h}(x, y) = \delta(x, y) d\mathfrak{h}^{-1}(x, y),$$

où $(y, x) = (x, y)^{-1}$ est l'inversion (ainsi $\mathfrak{h}^{-1}$ est la mesure de décompte vertical).

Exemple. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace borélien standard (X, μ). Soit K un graphage symétrique u.l.b. de R. La *marche aléatoire régulière sur K* est définie par

$$\nu_K(x \to y) = \frac{\sqrt{\delta(y, x)}}{\sum_{(x,y) \in K^x} \sqrt{\delta(y, x)}}$$

si $(x, y) \in K$ et 0 sinon. Elle est symétrique relativement à la mesure $\tilde{\mu}$ définie par

$$d\tilde{\mu}(x) = \delta(x) d\mu(x)$$

(équivalente à μ) où $\delta(x) = \sum_{(x,y) \in K^x} \sqrt{\delta(y, x)}$. En effet on a

$$\tilde{\delta}(x, y) = \delta(x, y) \frac{\delta(x)}{\delta(y)}.$$

Définition. *On dit qu'une marche aléatoire ν sur les orbites de R est* symétrique bornée *si ν est symétrique relativement à μ, si son support*

$$K = \operatorname{supp}(\nu) = \{(x, y) \in R \mid \nu(x \to y) > 0\}$$

est un graphage *symétrique de R, et s'il existe un nombre réel $\eta > 0$ vérifiant $\nu(x \to y) \geqslant \eta$ pour presque tout $(x, y) \in K$.*

Pour tout graphage symétrique u.l.b. K de R, la marche aléatoire régulière ν_K associée est symétrique bornée. Réciproquement, si ν est symétrique bornée, son support est un graphage symétrique u.l.b. de R.

Intégration d'une marche aléatoire à coefficients dans une représentation. Fixons une marche aléatoire ν sur les orbites de R symétrique relativement à μ, de support un graphage symétrique K de R. Étant donnée une représentation π de R sur un champ d'espaces de Hilbert H^X de base X, on construit une famille mesurable de diffusions opérant sur les sections mesurables de H^X en posant

$$(D_{\nu,\pi}\xi)^x = \sum_{y \sim x} \nu(x \to y)\pi(x,y)\xi^y.$$

Cette matrice définit un opérateur hermitien $D_{\nu,\pi}$ sur l'espace $L^2(X, H^X)$ des sections de carré intégrable sur X ; en effet

$$\langle D_{\nu,\pi}\xi \mid \eta\rangle = \int_K \langle \nu(x \to y)\pi(x,y)\xi^y \mid \eta^x\rangle d\mathfrak{h}(x,y) = \langle \xi \mid D_{\nu,\pi}\eta\rangle.$$

De plus $D_{\nu,\pi}$ est borné de norme $\leqslant 1$ du fait que, pour presque tout x,

$$||(D_{\nu,\pi}\xi)^x||_x^2 \leqslant \sum_{y \sim x} \nu(x \to y)||\xi^y||_y^2.$$

On obtient ainsi une diffusion hilbertienne, dont on note κ_π la plus grande valeur spectrale non triviale. (voir la section 30)

Définition. *On dira que $D_{\nu,\pi}$ est la* diffusion à coefficient dans π *associée à ν.*

Constantes de Poincaré. Si alors $\xi \in L^2(X, H^X)$ est un champ de carré intégrable sur X on note

$$E_\pi(\xi) = E_{D_{\nu,\pi}}(\xi) = ||\xi||^2 - \langle D_{\nu,\pi}\xi \mid \xi\rangle$$

et

$$E_{\pi,2}(\xi) = E_{D_{\nu,\pi^2}}(\xi) = ||\xi||^2 - ||D_{\nu,\pi}\xi||^2,$$

et on appelle (seconde) constante de Poincaré de π associée à ν la plus petite constante $c_2(\pi)$ vérifiant

$$E_{\pi,2}(\xi) \leqslant c_2(\pi)E_\pi(\xi).$$

Remarque terminologique. Une *diffusion* sur un espace X est, au sens de [49], une application $x \mapsto \nu^x = \nu(x \to \cdot)$ de X vers les mesures de probabilité sur X, e.g. une marche aléatoire. Une *codiffusion* sur un espace H est une application c des mesures de probabilité sur H vers H, telle que l'image d'une mesure de Dirac δ_ξ soit ξ et telle que $c^{-1}(\xi)$ soit *convexe* pour tout ξ (cf. [49]). Lorsque H est un espace de Hilbert, la codiffusion naturelle est l'application (affine) de centre de masse

$$c(\nu) = \int_H \xi d\nu(\xi).$$

Étant donnée une représentation de R sur un champ hilbertien H^X, on obtient un opérateur linéaire qui à un champ de vecteurs ξ associe

$$x \mapsto c_x((\bar{\xi}^x)_*(\nu^x))$$

où $\bar{\xi}$ est l'extension équivariante de ξ à (l'ensemble dénombrable quasi-périodique) R définie par $\bar{\xi}^x(y) = \pi(x,y)\xi^y$ pour $x \sim y$, et c_x est la codiffusion naturelle sur H^x. C'est cet opérateur, restreint aux champs de carré intégrable, que nous avons appelé diffusion.

Gradient d'un champ de vecteurs. Étant donné un champ de vecteurs

$$\xi : X \to H^X$$

on définit son gradient

$$d\xi : R \to H^X$$

par l'expression

$$d\xi(x,y) = \pi(x,y)\xi^y - \xi^x.$$

Une marche aléatoire ν sur R définit une mesure de probabilité $\mathfrak{h}_\nu$ sur R,

$$\mathfrak{h}_\nu(K) = \int_X \sum_{y \in K^x} \nu(x \to y) d\mu(x)$$

où K est une partie borélienne de R. Si $f : R \to H^X$ est une fonction de carré intégrable pour $\mathfrak{h}_\nu$ on pose

$$||f||_\nu^2 = \int_R ||f(x,y)||^2 d\mathfrak{h}_\nu(x,y) = \int_X \sum_{(x,y)\in R} ||f(x,y)||^2 \nu(x \to y) d\mu(x).$$

Alors pour tout champ $\xi \in L^2(X, H^X)$ de carré intégrable, $d\xi \in L^2(R, H^X, \mathfrak{h}_\nu)$ et on a

$$E_\pi(\xi) = \frac{1}{2}||d\xi||_\nu^2 = \frac{1}{2}\int_X \sum_{(x,y)\in R} ||\pi(x,y)\xi^y - \xi^x||^2 \nu(x \to y) d\mu(x)$$

qui coincide donc avec l'énergie locale moyenne

$$E_\pi(\xi) = \int_X E_\pi(\xi, x) d\mu(x)$$

où

$$E_\pi(\xi, x) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in R} ||\pi(x,y)\xi^y - \xi^x||^2 \nu(x \to y).$$

2. Démonstrations des théorèmes 66 et 67. Commençons le lemme suivant.

Lemme 90. *Soit R une relation d'équivalence ergodique. On fixe une marche aléatoire ν symétrique relativement à une mesure de probabilité μ, dont le support K engendre R. Soit π une représentation de R.*

i. π contient des champs invariants non triviaux si et seulement si $D_{\nu,\pi}$ a des points fixes non triviaux.

ii. Si $\kappa_\pi < 1$, alors pour toute suite presque invariante ξ_n telle que $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^2(X)$, il existe (à extraction près) une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$.

iii. Réciproquement, si ν est bornée, si K ne contient pas de suites de Følner évanescentes (cf. chap. III), et si pour toute suite presque invariante ξ_n telle que $||\xi_n||_2 = 1$ et $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^2(X)$, il existe (à extraction près) une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$, alors $\kappa_\pi < 1$.

Démonstration. *i.* Soit ξ un champ fixe par $D_{\nu,\pi}$. Alors $E_\pi(\xi) = 0$, donc $\pi(x,y)\xi^y = \xi^x$ pour presque tout (x,y) dans $K = \mathrm{supp}(\nu)$. Comme K engendre R, ξ est un champ invariant.

ii. Montrons que si la conclusion est fausse, alors $\kappa_\pi = 1$. Notons $V \subset L^2(X, H^X)$ l'orthogonal dans $L^2(X, H^X)$ du sous-espace engendré par les vecteurs invariants. Par hypothèse il existe, quitte à extraire, une suite $\xi_n \in V$ de champs de vecteurs (ε_n, F_n)-invariants (où $\varepsilon_n \to 0$ et $\mathfrak{h}_1(F_n) \to 0$) qui soit uniformément bornée par une fonction $g \in L^2$ et telle que $||\xi_n||_2 = 1$. Alors $\mathfrak{h}_\nu(F_n) \to 1$ et

$$E_\pi(\xi_n) \leqslant \varepsilon_n \int_{F_n} \nu(x \to y) d\mathfrak{h}(x,y) + \int_{K \setminus F_n} (g(x) + g(y))^2 d\mathfrak{h}_\nu(x,y).$$

Donc $E_\pi(\xi_n) \to 0$. Ceci entraîne que $\kappa_\pi = 1$.

iii. Réciproquement supposons par l'absurde que $\kappa_\pi = 1$ et obtenons une contradiction. Considérons donc une suite $\xi_n \in V$ de champs de vecteurs $X \to H^X$, de norme $||\xi_n||_2 = 1$, et dont l'énergie tend vers 0. Quitte à extraire on peut supposer cette suite presque invariante. En effet pour tout k l'énergie de ξ_n relativement à la marche aléatoire en k pas (de support K^k) converge vers 0 avec n, et cette marche étant bornée pour tout k, on conclut par extraction diagonale.

Fixons $\eta \geqslant 1$. D'après le lemme 77, il existe quitte à extraire une suite (η_n) de nombres réels convergant vers η (en décroissant), telle que la suite (A_n) définie par

$$A_n = \{\frac{1}{\eta_n} \leqslant ||\xi_n|| \leqslant \eta_n\}.$$

soit asymptotiquement invariante, et de mesure convergeant vers $\delta \in [0,1]$. Comme K ne contient pas de suites de Følner évanescentes, R est fortement ergodique, donc cette suite est triviale, i.e. $\delta = 0$ ou 1.

Si $\delta = 1$ on peut modifier la valeur de ξ_n sur le complémentaire de A_n par un champ unitaire $\eta_n^x \in H^x$ quelconque, et obtenir ainsi une suite $\tilde{\xi}_n$ presque invariante et dominée (par la fonction constante $\eta + 1$), dont la norme ne tend pas vers 0, et est à distance uniformément < 1 (pour la norme L^2) de $\xi_n \in V$, où $||\xi_n|| = 1$. Ceci contredisant les hypothèses, on a $\delta = 0$.

En particulier pour tout $\eta \geqslant 1$ on obtient $\mu(A_n^\eta) \to 0$, où

$$A_n^\eta = \{\frac{1}{\eta} \leqslant ||\xi_n|| \leqslant \eta\}$$

(quitte à extraire). Par procédé diagonal, on peut donc trouver une suite extraite de (ξ_n), encore notée (ξ_n), de sorte que $\mu(A_n) \to 0$, où

$$A_n = \{\frac{1}{n} \leqslant ||\xi_n|| \leqslant n\}.$$

Considérons la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 0 \text{ si } ||\xi_n^x|| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } f_n(x) = ||\xi_n^x||^2 \text{ sinon.}$$

Ainsi $f_n \in L^1(X)$ et $||f_n||_1 \to 1$. (Nous nous ramenons ici à un argument similaire à celui de Connes-Feldman-Weiss [28, page 441]). Notons que

$$L^1E(f_n) = \int_X \sum_{(x,y)\in R} |f_n(y) - f_n(x)|\nu(x \to y)d\mu(x) \to 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} L^1E(f_n) &\leqslant \frac{2}{n} + \int_R (||\pi(x,y)\xi_n^y - \xi_n^x||)(||\xi_n^y|| + ||\xi_n^x||)d\mathfrak{h}_\nu(x,y) \\ &\leqslant \frac{2}{n} + 2 \cdot \sqrt{E(\xi_n)}||\xi_n||_2 \to 0 \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Déduisons en l'existence de suites de Følner évanescentes dans K. Soit $\mathbf{1}_a$ la fonction caractéristique de $[a, \infty[\subset \mathbf{R}$. Pour $t, t' \geqslant 0$ on a

$$t = \int_0^\infty \mathbf{1}_a(t)da \quad \text{et} \quad |t - t'| = \int_0^\infty |\mathbf{1}_a(t) - \mathbf{1}_a(t')|da.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et n suffisament grand pour que

$$L^1 E(f_n) < \eta\varepsilon ||f_n||_1$$

et $\mu\{f_n = 0\} \geqslant 1 - \varepsilon$, où $\eta > 0$ est une constante telle que $\nu(x \to y) \geqslant \eta$ sur K. Posons $f = f_n$. D'après le théorème de Fubini on a, en notant $f_a = \mathbf{1}_a \cdot f$,

$$\int_0^\infty \int_R |f_a(y) - f_a(x)| \nu(x \to y) d\mathfrak{h}(x,y) da < \eta\varepsilon \iint f_a d\mathfrak{h}_\nu da.$$

Considérons donc $a > 0$ tel que

$$\int_R |f_a(y) - f_a(x)| \nu(x \to y) d\mathfrak{h}(x,y) < \eta\varepsilon \int_R f_a d\mathfrak{h}_\nu$$

et notons $\Omega = \{f_a = 1\}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_R |f_a(y) - f_a(x)| d\mathfrak{h}_\nu(x,y) &\geqslant \int_\Omega \sum_{y \sim x} |f_a(y) - f_a(x)| \nu(x \to y) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\sum_{x \sim y} \chi_\Omega(x) \nu(y \to x) \right) |f_a(y) - 1| d\mu(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{x \sim y} \chi_\Omega(x) \nu(y \to x) \right) |f_a(y) - 1| d\mu(y) \\
&\geqslant \eta \int_{\partial\Omega} |f_a(y) - 1| d\mu(y) \\
&= \eta \mu(\partial_K \Omega)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mu(\partial_K \Omega) < \varepsilon \mu(\Omega) \quad \text{et} \quad 0 < \mu(\Omega) \leqslant \varepsilon.$$

Donc K contient des suites de Følner évanescentes, ce qui contredit les hypothèses. ∎

Définition. *Soit R une relation d'équivalence mesurée sur un espace de probabilité (X, μ), et ν une marche aléatoire sur cette relation. La* diffusion à coefficients triviaux *associée ν est l'opérateur de diffusion $D_\nu = D_{\nu,\mathbf{1}}$, agissant sur $L^2(X)$, associé à la représentation triviale de R.*

Théorème 67. *Une relation d'équivalence ergodique R possède un quotient moyennable si, et seulement si, pour toute marche aléatoire symétrique bornée sur toute sous-relation de R, l'opérateur de diffusion à coefficients triviaux associé n'a pas de trou spectral. Si de plus elle préserve une mesure de probabilité et elle est de type fini, alors elle possède un quotient moyennable si, et seulement si, pour toute marche aléatoire* *symétrique bornée sur R, l'opérateur de diffusion à coefficients trivaux associé n'a pas de trou spectral.*

Ce théorème résulte immédiatement des résultats du chapitre III (cf. th. 73) et du théorème suivant, qui est à rapprocher des résultats obtenus par K. Schmidt dans [100] pour des actions II_1 de groupes dénombrables (cf. prop. 2.3). Nous renvoyons également ici à [58].

Théorème 91. *Soit K un graphage symétrique borné d'une relation d'équivalence ergodique sur un espace de probabilité (X, μ). On note $\nu = \nu_K$ la marche aléatoire associée à K. Alors K contient des suites de Følner évanescentes (cf. la section 27 et le chapitre III) si et seulement si $\kappa_\nu = 1$.*

Démonstration. Montrons d'abord que si K contient des suites de Følner évanescentes, alors $\kappa_\nu = 1$. Soit A_n une suite de Følner dans K et $\overline{A}_n = A_n \amalg \partial_K A_n$. Considérons l'espace H des fonctions orthogonales aux constantes. Alors $f_n = \chi_{\overline{A}_n} - \mu(\overline{A}_n)$ de $\chi_{\overline{A}_n}$ sur H est une suite non triviale de points presque fixes pour D_ν, cf [100, 98, 58]. Explicitement,

$$\langle D_K f_n \mid f_n \rangle = \int_X \sum_y \chi_{\overline{A}_n}(x)\chi_{\overline{A}_n}(y)\nu(x \to y)d\mu(x) - \mu(\overline{A}_n)^2 \geqslant \mu(A_n) - \mu(\overline{A}_n)^2$$

et $||f_n||^2 = \mu(\overline{A}_n) - \mu(\overline{A}_n)^2$.

Réciproquement supposons que K ne contienne pas de suites de Følner évanescentes, et montrons que la marche aléatoire ν associée à K vérifie $\kappa_\nu < 1$. Vérifions les hypothèses du lemme 90 (*iii.*). Soit ξ_n une suite presque invariante dominée et ζ_n le champ défini par

$$\zeta_n^x = \xi_n^x - \int_X \xi_n^x d\mu.$$

Alors $\zeta_n \to 0$ presque sûrement quitte à extraire (cf. lemme 86), et le théorème en résulte. ■

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme 86.

Lemme 92. *Soit R une relation d'équivalence fortement ergodique de type fini sur un espace de probabilité (X, μ). On suppose que μ est une mesure de probabilité invariante et on considère une suite $(\xi_n : X \to H)_n$ presque invariante pour la représentation triviale de R sur un espace de Hilbert H, dominée par une fonction $g \in L^1(X)$, et telle que*

$$|| \int_X \xi_n d\mu|| \to_n 0.$$

Il existe une suite extraite de (ξ_n) qui converge presque surement vers 0.

Démonstration. Soit ξ_n une suite presque invariante dominée. R étant une relation d'équivalence de type II_1 fortement ergodique de type fini, elle possède un graphage K symétrique borné ne contenant pas de suites de Følner évanescentes (cf. le chapitre III). La marche aléatoire $\nu = \nu_K$ associée à K définit une diffusion $D = D_\nu$ agissant sur $L^2(X)$ et possédant un trou spectral. Soit H un espace de Hilbert et $D^H = D^H_\nu$ la diffusion associée à la marche aléatoire ν et la représentation triviale de R sur $X \times H$. Alors D possède un trou spectral si et seulement si D^H en possède un (comme on le voit par exemple à l'aide des inégalités de Poincaré). Ainsi le lemme 90 *ii.* montre qu'il existe (quitte à extraire) une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$. Les champs invariants étant essentiellement constants, notons $\zeta_n \in H$ la valeur essentielle de ζ_n. Alors l'hypothèse

$$|| \int_X \xi_n d\mu|| \to_n 0$$

entraîne que $||\zeta_n||_H \to 0$ et le lemme en résulte. ■

Concluons ce paragraphe par la preuve du théorème 66. Rappelons que les diffusions à coefficients unitaires associées à une marche aléatoire ν sur les orbites d'une relation d'équivalence mesurée sont les opérateurs $D_{\nu,\pi}$ définis au paragraphe précédent (associés à chaque représentation hilbertienne π de cette relation d'équivalence).

Théorème 66. *Une relation d'équivalence ergodique R possède la propriété T de Kazhdan si, et seulement si, il existe une marche aléatoire symétrique ν sur une relation stablement isomorphe à R, dont les diffusions à coefficients unitaires possèdent un trou spectral au voisinage de 1.*

Démonstration. Soit R une relation d'équivalence mesurée ayant la propriété T de Kazhdan. Quitte à éventuellement restreindre R à un borélien de mesure finie, on peut supposer qu'elle préserve une mesure de probabilité μ (invariance de la propriété T par isomorphisme stable). De plus, ayant la propriété T, cette relation est de type fini, et possède un graphage K symétrique u.l.b. ne contenant pas de suites de Følner évanescentes. Soit $\nu = \nu_K$ la marche aléatoire régulière associée à K, qui est symétrique bornée relativement à μ. Soit π une représentation de R. Le théorème 85 montre que pour toute suite presque invariante ξ_n telle que $||\xi_n^x||_x \leqslant g(x)$ pour une fonction $g \in L^2(X)$, il existe (à extraction près) une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi_n^x - \zeta_n^x||_x \to 0$$

pour presque tout $x \in X$, et d'après le lemme 90 *iii.*, on a $\kappa_\pi < 1$.

Réciproquement supposons qu'il existe une marche aléatoire symétrique sur R dont les diffusions à coefficients unitaires possèdent un trou spectral. Considérons une représentation π de R contenant une suite ξ_n presque invariante dominée telle que $||\xi_n||_2 = 1$. Le lemme 90 *ii.* entraîne qu'il existe une suite ζ_n de champs invariants tels que

$$||\xi_n - \zeta_n||_2 \to 0.$$

Comme $||\xi_n||_2 = 1$, on obtient $||\zeta_n||_2 \neq 0$ pour n grand, donc π contient des champs invariants non triviaux. Par suite R a la propriété T (et toute relation stablement isomorphe l'a également). ∎

Remarque. Soient R une relation d'équivalence mesurée et ν une marche aléatoire sur ses orbites. On définit

$$\kappa(R, \nu) = \sup_{\pi} \kappa_{\nu,\pi},$$

et de même $c_n(R, \nu)$. Il résulte ainsi du théorème ci-dessus que s'il existe une marche aléatoire ν symétrique (relativement à une mesure de probabilité μ) telle que $c_2(R, \nu) < 2$, alors R a la propriété T de Kazhdan (l'hypothèse d'ergodicité n'ayant pas été utilisée pour cette implication). Ce résultat sera utilisé sous cette forme à la section 32 qui suit. Notons également que, de même que dans le cas des groupes, les constantes $\kappa_{\nu,\pi}$ et $c_n(R, \pi)$ sont uniformes en π lorsque R posséde la propriété T.

32 Le critère $\lambda_1 > 1/2$

Soit Σ une 'lamination' par complexes simpliciaux dimension 2, quotient d'un complexe simplicial quasi-périodique par la relation de quasi-périodicité. Ainsi l'espace $X = \Sigma^{(0)}$ des sommets de Σ est borélien standard et muni d'une relation d'équivalence mesurée R dont les classes sont données par la partition en 'feuilles'. Dans ce paragraphe nous donnons un critère, portant sur la structure locale de Σ, qui entraîne s'il est satisfait que la relation d'équivalence R possède la propriété T de Kazhdan. L'origine de ce critère se situe dans les travaux de Garland sur la cohomologie de groupes d'automorphismes d'immeubles de Bruhat-Tits cocompacts [40, 14]. Nous reprenons ici la démonstration de ce résultat donnée par Gromov [49].

Suivant Garland, cette démonstration s'effectue en deux étapes,

1) l'étude spectrale de la géométrie locale (des « links ») du complexe simplicial.

2) « l'intégration » des données spectrales locales en une inégalité de Poincaré globale entraînant la propriété T (étape dite de « géométrie intégrale » dans [49]).

Le concept d'énergie introduit par Gromov [49] dans ce contexte est essentiel pour l'étape 2 : il est linéaire relativement à l'opération d'addition (moyennisation) des diffusions (i.e. des marches aléatoires) et, par suite, les inégalités de Poincaré s'intègrent. La première étape est classique. Une source importante de polyèdre satisfaisant au critère local est donnée par certains immeubles de Bruhat-Tits (de rang 2). Les propriétés spectrales de leurs links (des immeubles sphériques) ont été étudiées par Feit-Higman [34].

Passons maintenant à la démonstration du théorème annoncé (dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous). La procédure décrite ci-dessus nécessite d'étudier le comportement de la marche aléatoire, sur le complexe simplicial, et sur ses links ; nous commençons par les links.

1. La condition $\lambda_1 > 1/2$. Soit L un graphe fini non orienté. On note $\tau(y)$ la valence d'un sommet y dans L. La marche aléatoire uniforme sur L est donnée par

$$\nu(y \to z) = 1/\tau(y)$$

si $(y, z) \in L^{(1)}$ est une arête de L et $\nu(y \to z) = 0$ sinon. Elle est symétrique relativement à la mesure stationnaire $\mu(y) = \tau(y)/2\tau$, où τ est le nombre d'arêtes de L. En d'autres termes on a

$$\mu(y)\nu(y \to z) = \mu(z)\nu(z \to y)$$

pour tout $y, z \in X$.

On note $D_L : \ell^2(L^{(0)}, \mu) \to \ell^2(L^{(0)}, \mu)$ la diffusion associée, agissant sur les fonctions complexes définies sur les sommets de L, selon la formule

$$D_L f(y) = \frac{1}{\tau(y)} \sum_{z \sim y} f(z).$$

Le produit scalaire sur $\ell^2(L^{(0)}, \mu)$ est donné par

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{y \in L} f(y)\overline{g(y)}\mu(y).$$

D_L est un opérateur hermitien et le laplacien associé $\Delta_L = \mathrm{Id} - D_L$ est positif, de noyau les fonctions constantes (on suppose L connexe).

Le *spectre de* L est par définition l'ensemble des valeurs propres Δ_L. Le *trou spectral* de L est la plus petite valeur propre non nulle et se note $\lambda_1(L)$.

Soit H un espace de Hilbert. On étend D_L en un opérateur borné encore noté D_L agissant sur $\ell^2(L^{(0)}, H, \mu)$. Il est hermitien pour la norme hilbertienne et sans point fixe sur l'orthogonal des constantes ; sa plus grande valeur propre est encore $\kappa = 1 - \lambda_1(L)$.

Soit $\nu_\infty(y \to z) = \mu(z)$ la marche aléatoire stationnaire associée à ν. L'inégalité de Dirichlet-Poincaré correspondante s'écrit

$$E_\infty(\xi) \leqslant c_\infty E(\xi)$$

où

$$c_\infty = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots = \frac{1}{\lambda_1(L)}.$$

En d'autres termes on a,

$$\frac{1}{2\tau}\sum_{y,z\in L^{(0)}} ||\xi^z - \xi^y||^2\tau(y)\tau(z) \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\sum_{(y,z)\in L^{(1)}} ||\xi^z - \xi^y||^2,$$

pour toute fonction $\xi \in \ell^2(L^{(0)}, H, \mu)$.

2. Géométrie locale et intégrale. Soit Σ une lamination par complexe simpliciaux de dimension 2, de transversale des sommets $X = \Sigma^{(0)}$ munie d'une relation d'équivalence borélienne R obtenue par restriction de Σ à X. On fixe une mesure de probabilité quasi-invariante μ sur X et on note δ le cocycle de Radon-Nikodỳm associé.

Définition. *Le* link *en un sommet s de Σ est le graphe fini dont les sommets sont les arêtes de Σ issues de s et les arêtes les triangles de Σ issues de s.*

Théorème 93. *Avec les notations ci-dessus, considèrons un nombre réel $\delta_\mu \geqslant 1$ tel que*

$$\delta_\mu^{-1} \leqslant \delta(y,z) \leqslant \delta_\mu$$

pour presque toute arête (y,z) de $\Sigma^{(1)}$. On suppose que presque tout link L de Σ est connexe et vérifie $\lambda_1(L) \geqslant \lambda$, où λ est un nombre réel vérifiant

$$\lambda > \delta_\mu^3/2.$$

Alors R possède la propriété T de Kazhdan.

Démonstration. On note $K \subset R$ le graphage de R associé au 1-squelette $\Sigma^{(1)}$ de Σ. Si $x \in X$ est un sommet de Σ, on note L_x son link dans Σ, et $\lambda_1(x)$ la plus petite valeur propre non nulle de L_x. Enfin, on note $\tau(y,z)$ le nombre de triangles de Σ contenant l'arête $(y,z) \in \Sigma^{(1)}$, et $\tau(x)$ le nombre de triangles attachés au sommet $x \in X$ dans Σ.

Supposons $\lambda_1(x) \geqslant \lambda$ et considérons une représentation π de R. Soit $\xi : X \to H$ un champ de carré intégrable. Par hypothèse on a, en notant $\bar{\xi}$ l'extension équivariante de ξ à R (définie par $\bar{\xi}^x(y) = \pi(x,y)\xi^y$ pour $x \sim_R y$),

$$E_{\underline{\nu}_x}(\bar{\xi}^x) \leqslant \frac{1}{\lambda} E_{\nu_x}(\bar{\xi}^x)$$

où $\nu_x(y \to z) = 1/\tau(x,y)$ est la marche aléatoire uniforme sur le graphe fini L_x, symétrique relativement à la mesure stationnaire $\mu_x(y) = \tau(x,y)/2\tau(x)$, et $\underline{\nu}_x(y \to$

$z) = \tau(x,z)/2\tau(x)$ est la marche aléatoire stationnaire correspondante. Explicitement, cette inégalité s'écrit

$$\frac{1}{2\tau(x)} \sum_{y,z \in L_x^{(0)}} ||d\xi(y,z)||^2 \tau(x,y)\tau(x,z) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{(y,z)\in L_x^{(1)}} ||d\xi(y,z)||^2.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\int_X \sum_{(y,z)\in L_x^{(1)}} ||d\xi(y,z)||^2 d\mu(x) &= \int_X \sum_{(y,z)\in K} \sum_{(x,y,z)\in\Sigma} ||d\xi(y,z)||^2 \delta(x,y) d\mu(y) \\
&= \int_X \sum_{(y,z)\in K} ||d\xi(y,z)||^2 \tau_\delta(y,z) d\mu(y)
\end{aligned}$$

où

$$\tau_\delta(y,z) = \sum_{(x,y,z)\in\Sigma} \delta(x,y)$$

(la somme porte sur les triangles contenant (y,z)), et

$$\begin{aligned}
&\int_X \frac{1}{2\tau(x)} \sum_{y,z\in L_x^{(0)}} ||d\xi(y,z)||^2 \tau(x,y)\tau(x,z) d\mu(x) \\
&\qquad = \int_X \sum_{z\sim y} ||d\xi(y,z)||^2 \sum_{L_x^{(0)}\ni y,z} \frac{1}{2\tau(x)} \tau(x,y)\tau(x,z)\delta(x,y) d\mu(y) \\
&\qquad = \int_X \sum_{z\sim y} ||d\xi(y,z)||^2 \underline{\tau}_\delta(y,z) d\mu(y)
\end{aligned}$$

où $\underline{\tau}_\delta(y,z) = \sum_{L_x^{(0)}\ni y,z} \frac{1}{2\tau(x)} \tau(x,y)\tau(x,z)\delta(x,y)$. Posons

$$\tau_\delta(y) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in K} \delta(x,y)\tau(x,y).$$

On a

$$\sum_{z\sim y} \tau_\delta(y,z) = \sum_{z\sim y} \underline{\tau}_\delta(y,z) = 2\tau_\delta(y),$$

de sorte que, en définissant

$$\nu(y\to z) = \frac{\tau_\delta(y,z)}{2\tau_\delta(y)}$$

et

$$\underline{\nu}(y\to z) = \frac{\underline{\tau}_\delta(y,z)}{2\tau_\delta(y)}$$

on obtient une inégalité de Poincaré,

$$\int_X \sum_{(y,z)\in R} ||d\xi(y,z)||^2 \underline{\nu}(y\to z)d\tilde{\mu}(y) \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_X \sum_{(y,z)\in R} ||d\xi(y,z)||^2 \nu(y\to z)d\tilde{\mu}(y)$$

où $d\tilde{\mu}(y) = 2\tau_\delta(y)d\mu(y)$. Remarquons que $\tilde{\mu}$ est symétrique relativement à ν et $\underline{\nu}$.

Il est facile de voir que si μ est invariante, alors $\underline{\nu} = \nu^2$ est la marche aléatoire en deux pas associée à ν (ainsi R possède la propriété T si $\lambda > 1/2$, à comparer à [111]). Sinon on a

$$\nu^2(y\to z) = \sum_{L_x^{(0)}\ni y,z} \frac{\tau_\delta(y,x)}{2\tau_\delta(y)}\frac{\tau_\delta(x,z)}{2\tau_\delta(x)}.$$

Par hypothèse $\tau_\delta(x,y) \leqslant \delta_\mu\tau(x,y)$, $\tau_\delta(x,z) \leqslant \delta_\mu\tau(x,z)$ et $\tau_\delta(x) \geqslant \tau(x)/\delta_\mu$; donc

$$\nu^2(y\to z) \leqslant \delta_\mu^3\underline{\nu}(y\to z)$$

et on obtient l'inégalité de Poincaré

$$E_{\nu^2}(\xi) \leqslant \frac{\delta_\mu^3}{\lambda}E_\nu(\xi).$$

Donc R a la propriété T si $\lambda > \delta_\mu^3/2$. ∎

Corollaire 94. *Le 1-squelette d'un complexe simplicial Q-périodique satisfaisant aux hypothèses du théorème ne contient pas de suites de Følner évanescentes.*

En effet la diffusion simple associée à la marche aléatoire sur le 1-squelette de ce complexe possède un trou spectral.

33 Une étude spectrale de la moyennabilité

1. Introduction. On montre dans cette section l'analogue du théorème de Kesten [71] pour les relations d'équivalence mesurées. Rappelons que ce théorème exprime l'équivalence, pour un groupe dénombrable Γ, entre la moyennabilité, i.e. l'existence d'une application linéaire positive *invariante à gauche*

$$P : \ell^\infty(\Gamma) \to \mathbf{C}$$

telle que $P(\gamma\mapsto 1) = 1$, et l'absence de trou spectral au voisinage de 1 pour les opérateurs de diffusion associés aux marches aléatoires à support fini sur Γ et à la représentation régulière gauche λ_Γ.

Soit R une relation d'équivalence ergodique. Nous avons obtenu à la section 31 un critère suffisant sur les marches aléatoires ν sur R permettant, pour une représentation hilbertienne *arbitraire* π de R, de relier le comportement spectral des diffusions $D_{\nu,\pi}$ à l'existence de champs presque invariants non triviaux dans la représentation π. Ce critère, qui s'exprime par l'absence de suites de Følner évanescentes dans le support de ν, ne peut pas être appliquer à la présente situation car il nécessite que R soit fortement ergodique. En contrepartie nous pouvons exploiter ici la spécificité de la représentation régulière gauche $\pi = \lambda$ agissant sur $\amalg_{x\in X}\ell^2(R^x, \mathfrak{h}^x)$.

2. Diffusions associées à la représentation régulière. Les notations utilisées sont celles de la section 31. Soit R une relation d'équivalence mesurée sur (X, μ). Fixons une marche aléatoire symétrique bornée ν sur R. Rappelons que ν vérifie l'équation

$$\nu(x \to y)\sqrt{\delta(x, y)} = \nu(y \to x)\sqrt{\delta(y, x)}.$$

où δ est le cocycle de Radon-Nikodỳm. Comme pour le théorème 67, on ne suppose pas que son support

$$K = \{(x, y) \in R \mid \nu(x \to y) \neq 0\}$$

engendre R, mais seulement qu'il s'agit d'une partie non $\mathfrak{h}$-négligeable, symétrique, et (nécessairement) bornée de R.

La représentation régulière gauche de R associe à l'élément $(x, y) \in R$ l'opérateur

$$\lambda(x, y) : \ell^2(R^y) \to \ell^2(R^x)$$

défini par

$$\lambda(x, y)f(x, z) = f(y, z),$$

pour une fonction mesurable $f : R \to \mathbf{C}$ à fibres horizontales de carré intégrable.

Étant donnée une partie symétrique $U \subset R$ on note $X_U = \{x \in X, \exists y \in X \mid (x, y) \in U\}$ la projection de U sur le premier facteur. L'opérateur $D_\nu = D_{\nu,\lambda}$ de diffusion associé à ν et à la représentation régulière gauche de R est un opérateur borné de norme $\leqslant 1$,

$$D_\nu : L^2(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h}) \to L^2(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h}),$$

explicitement

$$D_\nu f(x, z) = \sum_{y\sim x} \nu(x \to y)f(y, z).$$

On désigne par κ_ν la plus grande valeur spectrale de D_ν. Les fonctionnelles d'énergie sont données par

$$E^{(2)}_\nu(f) = \frac{1}{2}\int_{X_K} \sum_{y\sim x}\sum_{z\sim x} |f(y, z) - f(x, z)|^2 \nu(x \to y)d\mu(x)$$

et

$$E^{(1)}_\nu(g) = \frac{1}{2}\int_{X_K} \sum_{y\sim x}\sum_{z\sim x} |g(y, z) - g(x, z)|\nu(x \to y)d\mu(x)$$

pour $f \in L^2(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$ et $g \in L^1(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$.

3. Démonstration du théorème 68.

Théorème 95. *Soit R une relation d'équivalence mesurée. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

i. **Critère de Kesten.** *Pour toute marche aléatoire ν symétrique bornée sur une sous-relation de R, on a $\kappa_\nu = 1$.*

ii. **Inégalité de Dirichlet.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute marche aléatoire ν symétrique bornée de support K sur une sous-relation de R, il existe une fonction $f \in L^2(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$ telle que*

$$E_\nu^{(2)}(f) \leqslant \varepsilon ||f||_2^2.$$

iii. **Inégalité de Sobolev ℓ^1.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute marche aléatoire ν symétrique bornée de support K sur une sous-relation de R, il existe une fonction $g \in L^1(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$ telle que*

$$E_\nu^{(1)}(g) \leqslant \varepsilon ||g||_1.$$

iv. **Inégalité isopérimétrique de Følner.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie symétrique bornée K de R, il existe une sous relation* finie *$S \subset R$ telle que $X_S \subset X_K$ et*

$$\mathfrak{h}\{(x, y) \in K \backslash S \mid x \in X_S \text{ ou } y \in X_S\} < \varepsilon \mu(X_S).$$

v. **Hyperfinitude.** *Il existe une suite croissante et exhaustive de sous-relations finies de R.*

vi. **Moyennabilité.** *Il existe une application linéaire positive (moyenne)*

$$P : L^\infty(R) \to L^\infty(X)$$

telle que $P(1) = 1$ et qui est invariante à gauche, au sens où $P(\varphi f) = \varphi P(f)$ pour toute fonction bornée f et tout isomophisme partiel $\varphi \in [[R]]$, cf. [28] pour les actions de φ sur $L^\infty(R)$ et $L^\infty(X)$, et [3] pour une discussion détaillé de cette propriété.

Démonstration. L'équivalence entre *iv.*, *v.*, et *vi.* est démontrée dans [28], de même que l'implication *iii.* $\Longrightarrow$ *iv.* (page 441). L'équivalence entre *i.* et *ii.* est un calcul élémentaire, voir la section 31 par exemple. L'implication *ii.* $\Longrightarrow$ *iii.* s'obtient en choisissant $g = |f|^2$. Plus précisément si $f \in L^2(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$ vérifie

$$E_\nu^{(2)}(f) \leqslant \varepsilon ||f||_2^2,$$

alors $g \in L^1(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$ vérifie

$$E_\nu^{(1)}(g) \leqslant 2\sqrt{\varepsilon} ||g||_1,$$

comme on le voit à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(R^{*1})$ muni de la norme

$$||c||^2 = \int_R \sum_{z\sim x} |c(x,y,z)|^2 \nu(x \to y) d\mathfrak{h}(x,y)$$

(où R^{*1} est le produit fibré $R * R$). Montrons que $iv. \Longrightarrow i.$ Soit ν une marche aléatoire symétrique bornée de support K. Pour une sous-relation d'équivalence $S \subset R$, on note $\partial_K X_S$ l'ensemble des couples $(x,y) \in K \backslash S$ tels que $x \in X_S$. L'hypothèse entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-relation finie S de R telle que

$$\mathfrak{h}(\partial_K X_S) < \varepsilon \mu(X_S).$$

Notons X_S^n l'ensemble des classes de S de cardinal n. On a $X_S = \amalg_{n\geqslant 1} X_S^n$ et $\partial_K X_S = \amalg_{n\geqslant 1} \partial_K X_S^n$. Par suite il existe un entier n tel que $\mathfrak{h}(\partial_K X_S^n) < \varepsilon \mu(X_S^n)$, et on peut donc supposer que S a toutes ses classes de même cardinal n fini. On note $\partial_K S$ l'ensemble des couples $(y,z) \in R$ tels qu'il existe $(x,z) \in S$ pour lequel $(x,y) \in K \backslash S$. On a clairement $\mathfrak{h}(S) = n\mu(X_S)$ et $\mathfrak{h}(\partial_K S) = n\mathfrak{h}(\partial_K X_S)$ de sorte que,

$$\mathfrak{h}(\partial_K S) < \varepsilon \mathfrak{h}(S).$$

Soit $\overline{S} = S \amalg \partial_K S$ et $\chi_{\overline{S}} \in L^2(R \cap X_K \times X, \mathfrak{h})$ la fonction indicatrice de $\overline{S}$. Alors,

$$||\chi_{\overline{S}}||^2 = \mathfrak{h}(\overline{S})$$

et

$$\langle D_\nu \chi_{\overline{S}} \mid \chi_{\overline{S}} \rangle = \int_{X_K} \sum_{y\sim x} \nu(x \to y) \sum_{z\sim x} \chi_{\overline{S}}(y,z) \chi_{\overline{S}}(x,z) d\mu(x).$$

Or

$$\sum_{z\sim x} \chi_{\overline{S}}(y,z)\chi_{\overline{S}}(x,z) \geqslant \sum_{z\sim x} \chi_{\overline{S}}(y,z)\chi_S(x,z) = \#S^x$$

car $(x,y) \in K$. Ainsi $\langle D_\nu \chi_{\overline{S}} \mid \chi_{\overline{S}} \rangle \geqslant \mathfrak{h}(S)$ et les six assertions sont équivalentes. ■

Remerciements

De nombreuses rencontres et discussions ont rythmé l'évolution de mes propos au cours de ma thèse. Je tiens ici à en remercier tous les acteurs, qu'ils aient eût une influence directe, ou plus délicate, sur mes travaux. (Ne suivent que ceux dont l'influence a été la plus directe.)

Mon directeur de thèse, Damien Gaboriau, n'a pas compté son temps pour guider mes pas à travers le paysage mathématique. Je me souviendrai de ces longues discussions que nous avons eu durant trois ans, à raison de plusieurs heures par semaines, qui à chaque fois permettaient de tirer au clair le sens — ou le non sens — de mes spéculations. Qu'il me laissât toute liberté préalable pour élaborer sur la plus modeste des idées, ou qu'il m'encourageât à développer des pistes plus avancées. De plus, ses qualités humaines et son enthousiasme communicatif sont exceptionnels ; c'est un grand plaisir d'avoir effectué une thèse dans cet état d'esprit, profondément amical et sincère.

Pierre Pansu et Georges Skandalis m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche pesante de rapporteurs. J'ai rencontré Pierre Pansu à de nombreuses reprises au cours de ma thèse. Il n'a pas hésité à chaque fois à me consacrer de son temps. Cela pouvait aller de la discussion culturelle (y compris mathématique) où j'avais le rôle d'auditeur (très appliqué) aux lectures détaillées de mes textes, et autres brouillons, parfois juste qu'à des heures avancées de la nuit. Également, j'ai eu la chance de rencontrer Georges Skandalis à plusieurs reprises. J'ai très rapidement pris conscience de l'immense recul qu'il possède sur les thèmes abordés dans ma thèse, et c'est un grand honneur qu'il ait montré un intérêt aussi prononcé pour mes travaux. Il eut en outre une influence considérable sur l'écriture même de ce texte, faisant pour moi modèle de rigueur et de lucidité.

Mes conversations avec Étienne Ghys furent toujours enrichissantes. Il sait donner aux questions des réponses aux perspectives prometteuses. C'est lui par exemple qui est à l'origine de mon étude de la concentration de la mesure, c'est également lui qui est à l'origine de mon étude des immeubles de Tits (et donc de ma collaboration avec Sylvain). Et bien d'autres encore. Jean Renault a lui, montré un intérêt constant pour mes travaux depuis le début de ma thèse, il m'a toujours accueilli avec la plus grande gentillesse lors de mes visites à Orléans (de même que Claire Anantharaman), qui m'ont beaucoup appris. Je les remercie également d'avoir accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Un grand merci à Sylvain Barré et Stéphane Vassout. Avec chacun d'eux je collabore depuis plus de deux ans maintenant. Ils sont devenus des amis très proches, et nos échanges constants, nos rencontres (y compris leurs invitations à séjours de travail),... furent extrêmement enrichissants. L'écriture de notre premier article avec Sylvain fût un plaisir ! Merci également à David Kerr, pour notre collaboration plus récente. Elle aussi est très stimulante.

Je tiens à remercier Bertrand Deroin, Étienne Ghys, et Takashi Tsuboi, d'avoir chacun réalisé une étape cruciale rendant finalement possible mon séjour à Tokyo. Je remercie également tout ceux qui m'ont invité au cours de ma thèse, parfois à plusieurs reprises, en particulier Dietmar Bisch, Sorin Popa, Alain Valette, et au Japon, Masaki

Izumi, Yasuyuki Kawahigashi, Yoshimichi Ueda.

Je remercie Virginia Goncalves, Florence Koch, Hélène Schoch, (et Damien !) pour leur aide administrative, toujours avec le sourire, et bien sûr Gérard Lasseur à qui mes nombreux problèmes informatiques ne se sont révélés que broutilles se diluant comme par enchantement sous la force de la voix.

Je vais conclure moi-aussi, comme mes prédecesseurs, en soulignant l'ambiance conviviale qui règne à l'UMPA. Elle compta comme l'un des facteurs principaux de l'élaboration de ma thèse, et je ne pourrais jamais remercier assez tous les membres de l'unité. En particulier, merci à Alexey, Andrés, Aurélien, Bertrand, Cédric, Charlie, Emmanuel, Fanny, François, Jean-Paul, Jean-Yves, Mylène, Patrick, Pierre, Tomasz, Victor, Vincent. Les orateurs et participants du SIPIC. Un merci spécial à Cyril, un à Yann Ollivier pour ses relectures très instructives de mes textes, et un à Bruno Sévennec pour m'avoir fait découvrir quelques pages relevées de la littérature mathématique. Aussi, je ne saurais ici oublier Andrzej Żuk, qui a dirigé mon mémoire de DEA avec talent. Merci enfin à mes amies et amis, celles et ceux qui m'ont accompagné, qui ont également dû supporter mes humeurs — qui (parfois) pourraient être déconcertantes. Merci à Remus pour m'avoir, entre autres choses, conduit aux portes de Tepes (une expédition historico-C^*-algébrique). Et merci à toutes, et tous, à Tokyo et au Japon. J'y ai passé une année exceptionnelle au cours de laquelle j'ai énormément appris, à bien des niveaux.

Je dédie cette thèse à ma famille.

Mikaël

Références

[1] Adams S., Spatzier R., « Kazhdan groups, cocycles, and trees », Amer. J. Math., 112 (2), 271-287, *1990.*

[2] Anantharaman-Delaroche C., « Cohomology of property T groupoids and applications », prépublication, *2003.*

[3] Anantharaman-Delaroche C., Renault J., « Amenable groupoids », Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999), 35–46, Contemp. Math., 282, Amer. Math. Soc., Providence, RI, *2001.*

[4] Artin E., « Geometric algebra », Interscience Publishers, Inc., New York-London, *1957.*

[5] Atiyah M. F., « Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras », Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974), pp. 43–72. Asterisque, No. 32-33, Soc. Math. France, Paris, *1976.*

[6] Ballmann W., Świątkowski J., « On L^2-cohomology and property T for automorphism groups of polyhedral cell complexes », Geom. Funct. Anal., 7 (4), 615-645, *1997.*

[7] Barré S., « Polyèdres finis de dimension 2 à courbure négative ou nulle et de rang 2 »Ann. de l'Inst. Fourier, T45, *1995.*

[8] Barré S., « Polyèdres de rang deux », Thèse, ENS Lyon, *1996.*

[9] Barré S., « Sur les polyèdres de rang 2 », Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 15, Année 1996–1997, 99–104, Sémin. Théor. Spectr. Géom., 15, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, *1997.*

[10] Barré S., « Immeubles de Tits triangulaires exotiques », Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 9, no. 4, 575–603, *2000.*

[11] Bellissard J., « The noncommutative geometry of aperiodic solids », Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Villa de Leyva, 2001, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 86-156, *2003.*

[12] Bekka B., de la Harpe P., Valette A., « Kazhdan's Property (T) », en préparation.

[13] Bekka M. E. B., Valette A, "Group cohomology, harmonic functions and the first L^2-Betti number", Potential Anal. 6, no. 4, 313–326, *1997.*

[14] Borel A., « Cohomologie de certains groupes discretes et laplacien p-adique (d'après H. Garland) », Séminaire Bourbaki, 26e année, Exp. No. 437, pp. 12–35, *1973/1974.* Lecture Notes in Math., Vol. 431, Springer, Berlin, *1975.*

[15] Brown K. S., « Buildings », Springer-Verlag, New York, *1989.*

[16] Brown K.S., « Five lectures on buildings », Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 254–295, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, *1991.*

[17] Cantwell J., Conlon L., « Generic leaves », Comment. Math. Helv., 73, 306–336, *1998.*

[18] Candel A., Conlon L., « Foliations I, II », Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, *2000–2003*.

[19] Cartwright D. I., Młotkowski W., Steger T., « Property (T) and $\tilde{A}_2$ groups », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 , no. 1, 213–248, *1994*.

[20] Champetier C., « L'espace des groupes de type fini », Topology 39, no. 4, 657–680, *2000*.

[21] Champetier C., Guirardel V., « Limit groups as limit of free groups : compactifying the set of free groups », prepublication.

[22] Cheeger J., Gromov M., « L_2-cohomology and group cohomology », Topology 25, no. 2, 189–215, *1986*.

[23] Cherix P.A., Cowling M., Jolissaint P., Julg P., Valette A., « Groups with the Haagerup property. Gromov's a-T-menability », Progress in Mathematics, 197. Birkhäuser Verlag, Basel, *2001*.

[24] Connes A., « Une classification des facteurs de type III », Ann. Sci. École Normale Sup. 4ème Série, 6 fasc 2, 133-252, *1973*.

[25] Connes A., « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs, Lecture Notes in Math., 725, 19-143, *1979*.

[26] Connes A., « Noncommutative geometry », Academic Press, Inc., San Diego, CA, *1994*.

[27] Connes A., « On the foundation of noncommutative geometry », NCGOA, Nashville, *2004*.

[28] Connes A., Feldman J., Weiss B., « An amenable equivalence relation is generated by a single transformation », Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1, 431-450, *1981*.

[29] Connes A., Krieger W., « Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness », J. Functional Analysis, 24, 336-352, *1977*.

[30] Connes A., Weiss B., « Property T and asymptotically invariant sequences », Israel J. Math. 37, no. 3, 209–210, *1980*.

[31] Dodziuk J., "de Rham-Hodge theory for L^2-cohomology of infinite coverings", Topology 16, no. 2, 157–165, *1977*.

[32] Dixmier J., « Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann) », Gauthier-Villars Éditeurs, Paris, *1969*. Deuxième édition, revue et augmentée, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXV.

[33] Feldman J., Moore C., « Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I, II. », Trans. Amer. Math. Soc., 234(2), 289-359, *1977*.

[34] Feit W., Higman G., « The nonexistence of certain generalized polygons », J. of Algebra, 1, 114-131, *1964*.

[35] Feldman J., Hahn P., Moore C.C., « Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups », Adv. in Math., 28, 186-230, *1978*.

[36] Furman A., « Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices », Ann. of Math. (2) 150, no. 3, 1059–1081, *1999*.

[37] Gaboriau D., « Coût des relations d'équivalence et des groupes », Invent. Math. 139, no. 1, 41–98, *2000*.

[38] Gaboriau D., « Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes », Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 95, 93–150, *2002*.

[39] Gaboriau D., Popa S., « An uncountable family of non orbit equivalent actions of F_n », prépublication, *2004*.

[40] Garland H., « p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups », Ann. of Math. (2), 97, 375-423, *1973*.

[41] Ghys É., « Topologie des feuilles génériques », Ann. of Math., 141, 387-422, *1995*.

[42] Ghys É., « Groupes aléatoires [d'après Misha Gromov,...] », Séminaire Bourbaki, Exp. No. 916, *2003*.

[43] Ghys É., de la Harpe P., « Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov », Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988. Edited by É. Ghys and P. de la Harpe. Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, *1990*.

[44] Grigorchuk R. I., Linnell P., Schick T., Żuk A., "On a question of Atiyah", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 33, no. 9, 663–668, *2000*.

[45] Gromov M., « Hyperbolic groups », Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, *1987*.

[46] Gromov M., « Asymptotic invariants of infinite groups », Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, *1993*.

[47] Gromov M., « Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces », Birkhaüser Boston Inc., *1999*.

[48] Gromov M., « Spaces and questions », Geom. Funct. Anal., Special Volume (Tel Aviv, 1999), Part I, 118-161, *2000*.

[49] Gromov M., « Random walk in random groups », Geom. Funct. Anal. 13, no. 1, 73–146, *2003*.

[50] Haglund F., « Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques. », Math. Z. 242, no. 1, 97–148, *2002*

[51] Hanssens G., van Maldeghem H., « On projective Hjelmslev planes of level n », Glasgow Math. J. 31, no. 3, 257–261, *1989*.

[52] de la Harpe P., « Topics in geometric group theory », Chicago Lectures in Math. Series, *2000*.

[53] de la Harpe P., Valette A., « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts », Astérisque 175, Société Mathématique de France, *1989*.

[54] Haefliger A., « Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes », Comment. Math. Helv., 32, 248-329, *1958*.

[55] Haefliger A., « Naissance des feuilletages, d'Ehresmann-Reeb à Novikov », prépublication.

[56] Hector G., Hirsch U., « Introduction to the geometry of foliations », Part A. Foliations on compact surfaces, fundamentals for arbitrary codimension, and holonomy, Part B. Foliations of codimension one. Aspects of Mathematics, *1981*.

[57] Heitsch J. L., Lazarov C., « Homotopy invariance of foliation Betti numbers », Invent. Math. 104, no. 2, 321–347, *1991*.

[58] Hjorth G., Kechris A.S., « Rigidity theorems for actions of product groups and countable Borel equivalence relations », prépublication, *2002*.

[59] Jackson S., Kechris A.S., Louveau, A. « Countable borel equivalence relations », J. Math. Log., 2, no. 1, 1–80, *2002*.

[60] Jolissaint P., « Property T for discrete groups in terms of their regular representation », Math. Ann. 297, no. 3, 539–551, *1993*.

[61] Jolissaint P., « Borel cocycles, approximation properties and relative property T », Erg. Th. and Dynam. Syst., 20, 483–499, *2000*.

[62] Jones V.F.R., Schmidt K., « Asymptotically invariant sequences and approximate finiteness », Amer. J. Math., 109, 91-114, *1987*.

[63] del Junco A., Rosenblatt J., « Conterexample in ergodic theory and number theory », Math. Ann., 245, 185-197, *1979*.

[64] Kaimanovich V.A., « Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities », C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., 325, 999-1004, *1997*.

[65] Kakutani S., « Induced measure preserving transformations », Proc. Imp. Acad. Tokyo 19, 635–641, *1943*.

[66] Kazhdan D., « Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups », Func. Anal. and its Appl. 1, *1967*.

[67] Kechris A., « Classical descriptive set theory », Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, *1995*.

[68] Kechris A., Miller B., « Corollaries to a theorem of Hjorth », communication personnelle, *2001*.

[69] Kechris A., Miller B., « Topics in orbit equivalence », Lecture Notes in Mathematics, 1852, Springer-Verlag, Berlin, *2004*.

[70] Kesten H., « Symmetric random walk on groups », Trans. Amer. Math. Soc., 92, 336-354, *1959*.

[71] Kesten H., « Full banach mean values on countable groups », Math. Scand., 7, 146-156, *1959*.

[72] Kadison R. V., Ringrose J. R., "Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II. Advanced theory", Pure and Applied Mathematics, 100. Academic Press, Inc., Orlando, FL, *1986*.

[73] Ledoux M., « The concentration of measure phenomenon », Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, *2001*.

[74] Lyndon R. C., Schupp P. E., « Combinatorial group theory », Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89. Springer-Verlag, Berlin-New York, *1977*.

[75] Losert V., Rindler H., « Almost invariant sets », Bull. London Math. Soc. 13, no. 2, 145–148 *1981*.

[76] Lück W., « L^2-invariants : theory and applications to geometry and K-theory », Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 44. Springer-Verlag, Berlin, *2002*.

[77] Mackey G.W., « Ergodic theory and virtual groups », Math. Ann., 166, 187-207, *1966*.

[78] Matsushima Y., « On the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds », Osaka Math. J., 14, 1-20, *1962*.

[79] Monod N., Shalom Y., « Cocycle superrigidity and bounded cohomology for negatively curved spaces », J. Diff. Geom., 67 , 1–61, *2004*.

[80] Monod N., Shalom Y., « Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology », à paraître dans Ann. of Math.

[81] Moore C.C., « Ergodic theory and von Neumann algebras », In Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980), 179-226, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., *1982*.

[82] Murray F. J., von Neumann J., « On rings of operators », Ann. of Math. (2) 37, no. 1, 116–229, *1936*.

[83] Murray F. J., von Neumann J., « On rings of operators. II. », Trans. Amer. Math. Soc. 41, no. 2, 208–248, *1937*.

[84] Murray F. J., von Neumann J., « On rings of operators. IV. », Ann. of Math. (2) 44, 716–808, *1943*.

[85] Ollivier Y., « Spectral interpretations of property (T) », manuscrit.

[86] Ornstein D., Weiss B., « Ergodic theory of amenable group action I. The Rohlin lemma », Bull. Amer. Math. Soc., 2(1), 161–164, *1980*.

[87] Pansu P., « Introduction to L^2 Betti numbers », Riemannian geometry (Waterloo, ON, 1993), 53–86, Fields Inst. Monogr., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, *1996*.

[88] Pansu P., « Formule de Matsushima, de Garland, et propriété T pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles », Bull. Soc. Math. France, 126 (1), 107-139, *1998*.

[89] Pestov V. G., « Amenable representations and dynamics of the unit sphere in an infinite-dimensional Hilbert space », Geom. Funct. Anal., 10, no. 5, 1171–1201, *2000*.

[90] Pichot M., « Conditions simpliciales de rigidité pour les relations d'équivalence de type II_1 », C.R. Acad. Sci., Paris Ser I, 337, *2003*.

[91] Popa S., « Correspondences », prépublication, *1986*.

[92] Popa S., « On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants », à paraître dans Ann. of Math.

[93] Popa S., « On the fundamental group of type II_1 factors », Proc. Natl. Acad. Sci. USA 101, no. 3, 723–726, *2004*.

[94] Ramsay A., « Topologies on measured groupoids », J. Funct. Anal., 47, 314-343, *1982*.

[95] Ronan M., « Lectures on buildings », Perspectives in Mathematics, 7., Academic Press, Inc., Boston, MA, *1989*.

[96] Ronan, M. A., « A construction of buildings with no rank 3 residues of spherical type », Buildings and the geometry of diagrams (Como, 1984), 242-248, Lectures Notes in Math., 1181, Springer, Berlin, 1986.

[97] Ronan, M. A.,Tits J., « Building Buildings », Math. Ann. 278, 291-306 *1987*.

[98] Rosenblatt J., « Uniqueness of invariant means for measure preserving transformations », Trans. Amer. Math. Soc., 265, 623-636, *1981*.

[99] Schmidt K., « Asymptotically invariant sequences and an action of $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ on the 2-sphere », Israel J. Math., 37, 193-208, *1980*

[100] Schmidt K., « Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group action », Erg. Th. and Dyn Systems, 1, 233-236, *1981*.

[101] Skandalis G., Communication personnelle, *2003*.

[102] Tits J., Lecture Notes in mathematics 386, Springer Verlag, *1974*.

[103] Tits J., « Sphere of Radius 2 in Triangle Buildings, I. », Finite Geometries buildings and related Topics. Pingrie Park Conference *1988*.

[104] Tits J., Weiss R.M. « Moufang Polygons », Springer 2002.

[105] Valette A., « Nouvelles approches de la propriété T de Kazhdan », Séminaire Bourbaki, Exp. No. 913, *2002/2003*.

[106] van Maldeghem, H. « Automorphisms of noncalssical triangle buildings », Bull. Soc. Math. Belg. Sér.B 42 *1990* no.2, 201-237 .

[107] van Maldeghem, H. « Noncassical triangle buildings », Geom. Dedicata 24 *1987* no.2, 123-206.

[108] van Steen K., « Characterizations by automorphism groups of some rank 3 buildings. III. Moufang-like conditions. », Geom. Dedicata 74, no. 3, 225–240, *1999*.

[109] von Neumann J.,« On rings of operators. III », Ann. of Math. (2) 41, 94–161, *1940*.

[110] Zimmer R., « Ergodic theory and semi-simple groups », Birkhäuser Verlag, Basel,*1984*.

[111] Żuk A., « La propriété T de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres », C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., 323 (5), 453-458, *1996*.

[112] Żuk A., « Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups », Geom. Funct. Anal. 13 , no. 3, 643–670, *2003*.