GÉNÉRATEURS INDÉPENDANTS POUR LES SYSTÈMES D'ISOMÉTRIES DE DIMENSION UN

Damien Gaboriau

Abstract : A finite system of isometries of $\mathbf{R}$ is said to have independent generators if non trivial compositions fix at most one point. We describe a natural way to turn every system, not containing a homogeneous component, into a system with the same orbits and independent generators: just take the restriction of every generator to a particular sub-interval of its domain. A system containing a homogeneous component doesn't possess independent generators.

Résumé : Un système fini d'isométries partielles de $\mathbf{R}$ est dit à générateurs indépendants si les composés non triviaux fixent au plus un point. On décrit un procédé simple et naturel pour obtenir des générateurs indépendants, sans modifier les orbites, pour tout système sans composante minimale homogène : en prenant la restriction de chaque générateur à un certain sous-intervalle de son domaine. Un système avec une composante minimale homogène ne possède pas de générateurs indépendants.

Mots-clés : Pseudogroupes, Isométries, Dimension un, Action de groupe, Arbre réel.
Classification AMS : 20E08, 28D05, 58F03, 58H05.

Sur une réunion finie D d'intervalles compacts de $\mathbf{R}$, on se donne une famille finie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ d'isométries entre sous-intervalles fermés de D. Ces systèmes d'isométries sont des systèmes dynamiques très riches malgré la grande simplicité de leur définition.

De tels systèmes apparaissent comme générateurs de l'holonomie pour les feuilletages mesurés singuliers de codimension 1 sur les variétés compactes : on se donne une famille de courbes transverses et on considère les applications *premier retour* [Hae1], [Hae2], [Sal]. Lorsque la variété feuilletée est une surface, les systèmes qui apparaissent sont des échanges d'intervalles ; ils ont été largement étudiés (voir [Kea], [Vee], [Mas], [DN]) et donnent une idée de la fertilité de ces objets.

C'est essentiellement par des techniques introduites par E. Rips qu'ils ont fait leur entrée dans un autre domaine : celui des actions de groupes par isométries sur des *arbres réels* (cf. [Rip], [GLP1]).

Comme pour tout système dynamique, une notion essentielle est celle d'*orbite*. Deux points x et y de D sont dans la même orbite si et seulement s'il existe un mot m ès[1] $\varphi_i^{\pm 1}$, tel que l'isométrie associée soit définie en x et envoie x sur y.

[1] "**ÈS.** *prép.* (contraction de *en*, et de l'article pluriel *les*). Dans les ..., en matière de ... (avec un pluriel)" [Rob, p. 685].
"Dans la langue littéraire contemporaine, *en* est de mode. On a été jusqu'à l'employer avec *le* et *les* : en les poèmes. Cet affreux barbarisme, contraire à la fois à l'usage et à la tradition, se rencontre fréquemment" [Bru, p. 425].
"Verser de l'argent ès mains d'un percepteur ressemble terriblement à l'opération niaise qui consiste en le jet d'une pareille somme dans un abîme probablement sans fond" [All, p. 242].

On dispose d'une décomposition canonique du système (voir [AL,app.], [GLP1, th. 3.1], [MS1]) en un nombre fini de sous-systèmes invariants : ses *composantes*. Sur chacun d'eux, soit toute orbite est finie, soit toute orbite est dense (la composante est alors dite minimale). Les composantes minimales se répartissent en 3 types [GLP1] :
-*homogènes*, les orbites sont les mêmes que celles d'un groupe d'isométries (Déf. III.2),
-*échanges d'intervalles*,
-*exotiques*, dont l'existence a été mise en évidence par G. Levitt [Lev3].

Chaque orbite, peut être vue comme un *graphe de Cayley* : les sommets sont les points de l'orbite et il y a une arête d'appellation φ_i entre x et $\varphi_i(x)$. Si on remplace le système X par un système X' ayant les mêmes orbites, les graphes de Cayley restent quasi-isométriques [GLP2, Prop. 5.6]. Cela légitime l'étude des notions asymptotiques telles que *nombre de bouts* ou *type de croissance des orbites*.

Cela suscite aussi la recherche de systèmes "plus simples" ayant les mêmes orbites. Un système X' est dit *à générateurs indépendants* si l'on ne peut pas composer non trivialement des isométries de X' de manière à obtenir une isométrie qui aurait au moins 2 points fixes. En particulier, tous les graphes de Cayley de X' (sauf peut-être un nombre fini) sont des arbres. C'est un système "le plus économique" dans le sens où, à orbites fixées, il minimise la somme des mesures des domaines des générateurs.

Cette notion de générateurs indépendants est fort utile pour obtenir une réponse générique, au sens de Baire, au problème des bouts des orbites. On montre ainsi dans [Gab] que pour un système exotique, l'ensemble des orbites à un bout est un G_δ dense mais qu'il existe un ensemble non dénombrable d'orbites à deux bouts et seulement un nombre fini d'orbites à plus de deux bouts.

L'objet de ce travail est la preuve (voir Théorème VII.1) du :

Théorème. *Si $X = (D, \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})$ est un système sans composante minimale homogène, alors on peut obtenir un système $X' = (D, \Phi')$ à générateurs indépendants, ayant les mêmes orbites, en remplaçant chaque générateur φ_i par sa restriction à* **un** *sous-intervalle fermé de son domaine.*

En revanche,

Proposition III.4. *Si X possède une composante minimale homogène, il est alors impossible de trouver un système X' à générateurs indépendants ayant les mêmes orbites.*

Cette construction améliore sensiblement des résultats de G. Levitt [Lev2] ou de F. Rimlinger [Rim] qui avaient l'inconvénient d'obliger à changer d'espace (resp. de faire augmenter sans contrôle le nombre de générateurs).

Un *arbre réel* est un espace métrique où deux points quelconques sont toujours joints par un unique arc, lequel est de plus isométrique à un segment de $\mathbf{R}$ (On peut voir [Sha] pour des motivations, des remarques et des références). Par exemple le revêtement universel d'un graphe métrique (qui est un arbre, au sens usuel) est un arbre réel. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage défini par une 1-forme fermée sur une variété compacte M, alors l'espace des feuilles rendu séparé du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ relevé au revêtement universel de M est un arbre réel [GS]. Le groupe fondamental de la base agit par isométries sur ces arbres.

Considérons un groupe G de type fini qui agit par isométries sur un arbre réel T et soit $\{g_1, \ldots, g_n\}$ un système générateur de G. Pour un choix d'un sous-arbre fini K de T, chaque g_i fournit une isométrie partielle $\gamma_i : K \cap g_i^{-1}K \to g_i(K) \cap K$. Par une manipulation très simple, on transforme ce système $(K, \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\})$ en un système sur un multi-intervalle. C'est l'étude de ces systèmes qui a permis à E. Rips de démontrer la conjecture de Morgan-Shalen : Les groupes de type fini qui agissent par isométries et librement sur un arbre réel sont des produits libres de groupes abéliens libres et de groupes de surfaces (voir [Rip], [GLP1]).

Afin de distinguer les systèmes de type échange d'intervalles des systèmes exotiques, on est amené à rendre les générateurs indépendants ; cela a été la clé de la preuve du théorème de Rips [GLP1].

Inversement, partant d'un système $X = (D, \{\varphi_i\})$, on peut construire des actions de groupes sur des arbres réels (cf. [GL], [GLP2] et [LP]).

Si le système X a des générateurs indépendants, alors l'action obtenue est automatiquement à stabilisateurs de segment triviaux. C'est une raison de plus pour vouloir rendre les générateurs indépendants.

Stratégie de la preuve.

La plupart des techniques utilisées ici sont des généralisations de celles de [Lev3] (où les systèmes préservent l'orientation) ou bien reprennent celles de [GLP1] ou [Gus].

Dans les trois premières parties, on donne des définitions, quelques premières propriétés et on traite le cas des systèmes avec composante minimale homogène.

Ensuite, on considère $X = (D, \Phi)$ sans composante minimale homogène.

Dans la partie IV, on construit un 1-complexe $\Delta\langle\Phi\rangle$ qui code la non indépendance des générateurs en particulier grâce à l'un de ses invariants topologiques, disons $c\langle\Phi\rangle$.

On procède en quatre étapes : $X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_{-t} \longrightarrow X_3 \longrightarrow \tilde{X}$.

Une propriété essentielle est l'instabilité des systèmes minimaux sans composante homogène : le système X_{-t} obtenu en rétrécissant uniformément de t les domaines de tous les générateurs n'a que des orbites finies [Lev1], [GLP1]. On fait transiter le passage de X à X_{-t} par un système X_1 qui a les mêmes orbites que X de sorte que l'on n'ait que $c\langle\Phi\rangle$ rétrécissements à effectuer de X_1 à X. Ce sont les deux premières étapes : $X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_{-t}$.

La borne inférieure des mesures des ouverts qui rencontrent toute orbite est appelée *mesure de l'espace des orbites* et notée $e(\Phi)$ (partie VI). Elle permet de donner un critère numérique d'indépendance des générateurs (Théorème VI.3) : il faut et il suffit que la somme des mesures des domaines des générateurs et de la mesure de l'espace des orbites soit égale à la mesure de D [GLP1,Prop. 6.1], [Lev4].

On connait par ailleurs la valeur de $e(\Phi_{-t})$, c'est $e(\Phi) + c\langle\Phi\rangle t$ (Proposition VI.2).

La partie V vise essentiellement à démontrer le théorème des générateurs indépendants pour X_{-t} (Théorème V.1). C'est la troisième étape : $X_{-t} \longrightarrow X_3 = (D, \Phi_3)$ où X_3 a les mêmes orbites que X_{-t} et des générateurs indépendants.

On obtient alors le système final $\tilde{X}$ par l'opération inverse de celle de X_1 à X_{-t}, en particulier en effectuant $c\langle\Phi\rangle$ augmentations de t ce qui permet de calculer la somme des mesures des domaines des générateurs de $\tilde{\Phi}$. On vérifie que $\tilde{X}$ et X ont les mêmes orbites et du coup, $e(\tilde{\Phi}) = e(\Phi)$. On peut alors appliquer le théorème VI.3 pour s'assurer de l'indépendance des générateurs de $\tilde{X}$.

Ce travail est issu d'une thèse [Gab0] soutenue en Juin 93, préparée au Laboratoire de Topologie et Géométrie de Toulouse (URA CNRS 1408) sous la direction de G. Levitt, que je remercie sincèrement. Je remercie également F. Laudenbach et F. Paulin pour leurs conseils et leurs lectures attentives.

I- Systèmes d'isométries, généralités.

Un *multi-intervalle* D est la réunion d'un nombre fini d'intervalles compacts disjoints inclus dans $\mathbf{R}$; il est orienté. On notera $|D|$ la mesure de Lebesgue d'un multi-intervalle D. Un multi-intervalle est dit *trivial* si sa mesure est nulle. Dans cet article, on supposera D non trivial.

Définition I.1 : systèmes d'isométries. *Un système d'isométries $X = (D, \Phi)$ est la donnée d'un multi-intervalle D et d'une famille Φ constituée de k bijections isométriques $\varphi_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i = 1, \ldots, k$ où A_i et B_i sont des sous-intervalles fermés (éventuellement triviaux) inclus dans D.*

Les isométries φ_i sont nommées *générateurs*, les intervalles A_i et B_i sont appelés *bases*. Un générateur φ_i est un *singleton* si A_i est réduit à un point. Si aucun générateur n'est un singleton, le système est dit *non dégénéré*.

Le système n'est pas supposé symétrique : φ_i^{-1} n'est peut-être pas un générateur.

Un Φ-mot est un mot $m = \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ ès[2] lettres φ_i et φ_i^{-1}. Il fournit une isométrie notée aussi m, dont le domaine (éventuellement vide) est l'intervalle fermé maximal défini de façon évidente.

Si m est un mot non réduit, son domaine $dom(m)$ peut être plus petit que le domaine du mot réduit associé (considérer par exemple $m = \varphi_1\varphi_1^{-1}$). On convient que le mot trivial 1 fournit l'isométrie identité qui est définie sur D tout entier.

Si le système est non dégénéré, on appelle *signe* de φ_i, noté $sgn(\varphi_i)$ le nombre $+1$ ou -1 selon que φ_i préserve l'orientation ou non. Le *signe* d'un Φ-mot $m = \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ est par définition $sgn(m) = \prod_{j=1}^{j=p} sgn(\varphi_{i_j})$.

Si l'isométrie m a un domaine non vide et si le signe de m est $+1$ (resp. -1), alors l'isométrie est *positive*, c'est la restriction d'une translation de $\mathbf{R}$ (resp. *négative*, c'est la restriction d'une symétrie de $\mathbf{R}$). Si $\delta \in \mathbf{R}$, si $x \in dom(m)$ et $x + \delta \in dom(m)$ alors $m(x + \delta) = m(x) + sgn(m)\delta$.

On note $A_i = [a_i, a_i']$, avec $a_i \leq a_i'$, et $B_i = [b_i, b_i']$, avec $b_i = \varphi_i(a_i)$ et $b_i' = \varphi_i(a_i')$. En particulier, si $sgn(\varphi_i) = -1$, alors $b_i \geq b_i'$.

Définition I.2 : orbites. *Les orbites de Φ sont les classes de la relation d'équivalence sur D engendrée par $x \sim \varphi_i(x)$ sitôt que $x \in A_i$. Le point y de D est dans la X-orbite de x (notée $X(x)$) s'il existe une isométrie $m = \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ contenant x dans son domaine telle que $m(x) = y$.*

Un *point singulier* du système est un point du bord de D ou du bord d'une base.

Une orbite est dite *singulière* si elle contient un point singulier et *régulière* sinon.

Notons que chaque orbite est dénombrable.

Définition I.3 : graphes de Cayley. *Chaque* **orbite** *$X(x)$ du système $X = (D, \Phi)$ peut être vue comme un* **graphe de Cayley** *noté $\Phi(x)$: les sommets sont les éléments de l'orbite et il y a une arête entre y et y' si $y \in A_i$ et $y' = \varphi_i(y)$. Elle est orientée de y vers y' et porte l'appellation φ_i. Lorsqu'on voudra considérer cette arête d'appellation φ_i, mais orientée dans le sens inverse, on lui donnera l'appellation φ_i^{-1}.*

Une arête de $\Phi(x)$ entre y et $\varphi_i(y)$ est dite *singulière* si $y \in \partial A_i$ et *régulière* sinon. Les arêtes singulières relient deux points singuliers, elles sont au nombre de $2k$.

On donne sur chacun de ces graphes une *métrique de Cayley* ; c'est une distance pour laquelle les arêtes sont isométriques au segment $[0, 1]$ et les distances entre sommets sont maximales pour cette condition. Elle est bien définie sur l'ensemble des sommets.

Remarque I.4. *Un point x étant fixé, il existe une correspondance bijective naturelle entre les Φ-mots réduits m dont le domaine contient x, d'une part, et les chemins dans $\Phi(x)$ reliant x à un sommet, sans aller-retour, modulo reparamétrage, d'autre part.*

Si γ est un chemin sans aller-retour de x à y qui parcourt successivement des arêtes d'appellations $\varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}, \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ (avec $\varepsilon_j = \pm 1$), on note $\omega[\gamma]$ le mot $\varphi_{i_p}^{\varepsilon_p} \ldots \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2} \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}$. Inversement, si

[2] Voir la note (1) en bas de page dans l'introduction

$m = \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p} \dots \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2} \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}$ et $x \in dom(m)$, alors (en remarquant que, de chaque sommet, il part au plus une arête d'appellation $\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}$) ce mot définit un unique chemin (modulo paramétrage) issu de x qui parcourt successivement les arêtes $\varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}, \varphi_{i_2}^{\varepsilon_2}, \dots, \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$. Ce chemin noté $chem(m)$ aboutit au sommet $m(x)$.

On remarque que les *lacets* sans aller-retour correspondent aux isométries qui fixent x.

Une isométrie qui fixe deux points est nécessairement positive et fixe alors tout son domaine.

Définition I.5. *Les générateurs du système Φ sont dits indépendants si tout mot réduit $m = \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ a un ensemble trivial de points fixes (i.e. vide ou réduit à un point).*

On appelle *relation* un Φ-mot réduit m dont l'isométrie associée fixe au moins 2 points.

Exemple : si A_{k+1} est un sous-intervalle fermé non trivial de A_1 et φ_{k+1} la restriction de φ_1 à A_{k+1}, alors le système Φ' obtenu en ajoutant φ_{k+1} au système Φ n'est pas à générateurs indépendants.

II-Restrictions.

On est amené à considérer des *restrictions* $\tilde{X} = (D, \tilde{\Phi})$, avec $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_k\}$ où chaque $\tilde{\varphi}_i$ est la restriction à un sous-intervalle (ouvert ou fermé) de A_i. Un exemple crucial est celui de la *restriction ouverte* $\mathring{X} = (D, \mathring{\Phi})$, où $\mathring{\Phi} = \{\mathring{\varphi}_1, \dots, \mathring{\varphi}_k\}$ et $\mathring{\varphi}_i : \mathring{A}_i \longrightarrow \mathring{B}_i$ est la restriction de φ_i à l'intérieur (relativement à $\mathbf{R}$) de A_i.

Pour s'autoriser l'utilisation des mêmes lettres φ_i, pour toutes les restrictions du système Φ, on introduit la notation suivante.

Notation II.1. *Si $\tilde{\Phi} = \{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_k\}$ est une restriction de Φ, avec $\tilde{\varphi}_i : \tilde{A}_i \longrightarrow \tilde{B}_i$, on note $\varphi_i\langle\tilde{\Phi}\rangle$ pour $\tilde{\varphi}_i$, $A_i\langle\tilde{\Phi}\rangle$ pour $\tilde{A}_i$ et $B_i\langle\tilde{\Phi}\rangle$ pour $\tilde{B}_i$. De plus, on note $a_i\langle\tilde{\Phi}\rangle$ et $a_i'\langle\tilde{\Phi}\rangle$ (avec $a_i\langle\tilde{\Phi}\rangle \leq a_i'\langle\tilde{\Phi}\rangle$) les extrémités de l'intervalle $\tilde{A}_i$. Et enfin, on note $b_i\langle\tilde{\Phi}\rangle := \varphi_i\langle\tilde{\Phi}\rangle(a_i\langle\tilde{\Phi}\rangle)$ et $b_i'\langle\tilde{\Phi}\rangle := \varphi_i\langle\tilde{\Phi}\rangle(a_i'\langle\tilde{\Phi}\rangle)$.*

Lorsqu'une restriction $\tilde{\Phi}$ de Φ est fixée, un Φ-mot $m = \varphi_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}$ fournit une isométrie $m\langle\tilde{\Phi}\rangle = \varphi_{i_1}\langle\tilde{\Phi}\rangle^{\varepsilon_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_p}\langle\tilde{\Phi}\rangle^{\varepsilon_p}$ dont le domaine (éventuellement vide) est l'intervalle maximal défini de façon évidente. Ce domaine est noté $dom(m\langle\tilde{\Phi}\rangle)$, c'est un sous-intervalle du domaine $dom(m)$ de $m\langle\Phi\rangle$. Il est fermé si tous les $\tilde{A}_i$ sont fermés, ouvert si tous les $\tilde{A}_i$ sont ouverts.

On a, en particulier, $\varphi_i\langle\Phi\rangle = \varphi_i$, $\varphi_i\langle\mathring{\Phi}\rangle = \mathring{\varphi}_i$ et le domaine de $m\langle\mathring{\Phi}\rangle$ est égal à l'intérieur du domaine de $m\langle\Phi\rangle$.

Chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on se dispensera de cette notation.

Pour une restriction $\tilde{X}$ de X, on dispose bien sûr des notions d'orbite et de graphe de Cayley définies comme ci-dessus.

La $\mathring{\Phi}$-orbite d'un point du bord de D est réduite à 1 point.

De manière générale, l'orbite $\tilde{X}(x)$ est un sous-ensemble de l'orbite $X(x)$ et le graphe $\tilde{\Phi}(x)$ est un sous-graphe de $\Phi(x)$, où le plongement respecte l'orientation et l'appellation des arêtes.

En ce qui concerne la restriction ouverte, si $X(x)$ est une orbite régulière alors $X(x) = \mathring{X}(x)$ et, le graphe de Cayley $\Phi(x)$ ne contenant pas d'arête singulière, on a $\Phi(x) = \mathring{\Phi}(x)$. Si $X(x)$ est une orbite singulière, alors chaque composante connexe du graphe de Cayley $\Phi(x)$ privé des arêtes singulières devient le graphe de Cayley $\mathring{\Phi}(y)$ d'une orbite $\mathring{X}(y)$ de $\mathring{\Phi}$.

Proposition II.2. *Le système Φ est à générateurs indépendants si et seulement si tous les graphes de Cayley $\mathring{\Phi}(x)$ (pour la restriction ouverte) sont des arbres.*

Preuve. En effet, si γ est un lacet sans aller-retour issu de x dans $\mathring{\Phi}(x)$, l'isométrie $\omega[\gamma^2]\langle\mathring{\Phi}\rangle$ associée au lacet γ^2 fixe x et, puisqu'elle est positive, elle fixe tout son domaine (ouvert non vide). Ainsi, $\omega[\gamma^2]\langle\Phi\rangle$ fixe au moins deux points. Réciproquement, si m est un mot dont l'isométrie associée $m\langle\Phi\rangle$ fixe deux points, alors le milieu z de ces deux points est fixé par $m\langle\mathring{\Phi}\rangle$ et le chemin $chem(m)$ issu de z dans $\mathring{\Phi}(z)$ est un lacet non trivial. ♣

III-Restrictions uniformes, composantes minimales homogènes.

On définit une famille de restrictions du système non dégénéré Φ qui joueront dans la suite un grand rôle.

Définition III.1. *Pour $0 \leq t < \frac{1}{2}\inf\{|A_i|, i = 1, \ldots, k\}$, on appelle X_{-t} le système (D, Φ_{-t}), où chaque $\varphi_i\langle\Phi_{-t}\rangle$ est la restriction de φ_i au sous-intervalle de A_i fermé centré de longueur $|A_i| - 2t$, autrement dit $A_i\langle\Phi_{-t}\rangle := [a_i + t, a_i' - t]$, ou encore $a_i\langle\Phi_{-t}\rangle = a_i + t$, $a_i'\langle\Phi_{-t}\rangle = a_i' - t$, $b_i\langle\Phi_{-t}\rangle = b_i + sgn(\varphi_i)t$ et $b_i'\langle\Phi_{-t}\rangle = b_i' - sgn(\varphi_i)t$.*

Définition III.2. *On dit que le système X possède une composante minimale homogène s'il existe un intervalle ouvert non trivial I de D et un sous-groupe P de $Isom(\mathbf{R})$, à orbites denses, qui vérifient $\forall x, y \in I$: x et y sont dans la même $\mathring{\Phi}$-orbite si et seulement s'ils sont dans la même P-orbite.*

On sait [Lev1], [GLP1] que cette définition est équivalente à la caractérisation suivante (qui a l'inconvénient de faire référence explicitement à un système de générateurs et pas seulement à la partition de D en orbites -donnée plus faible qui ne donne pas de structure aux orbites-).

Théorème III.3, [Lev1,Lemme III.5]. *Le système X n'a pas de composante minimale homogène si et seulement si $\forall t$, $0 < t < \frac{1}{2}\inf\{|A_i|, i = 1, \ldots, k\}$, le système X_{-t} n'a que des orbites finies.*

Proposition III.4. *Si le système Φ possède une composante minimale homogène, alors ses générateurs ne sont pas indépendants.*

Preuve de la proposition III.4. Soit t tel que X_{-t} ait une orbite infinie : $X_{-t}(a)$. Appelons *orbite positive* et notons $X_{-t}^{+}(a)$ l'ensemble des $u \in D$ pour lesquels il existe un mot m de signe $+1$ tel que $m\langle\Phi_{-t}\rangle(a) = u$; on peut supposer que $X_{-t}^{+}(a)$ est infinie.

On peut alors trouver quatre points $\mathring{x}_1, x_2, x_3, x_4 \in X_{-t}^{+}(\mathring{a})$, deux à deux distants de moins de $\delta < t$ et deux mots g et h tels que $g\langle\mathring{\Phi}_{-t}\rangle(x_1) = x_2$ et $h\langle\mathring{\Phi}_{-t}\rangle(x_3) = x_4$, où g et h sont les restrictions de deux translations *rationnellement indépendantes* (on utilise le fait que le groupe d'isométries de $\mathbf{R}$ sous-jacent est non cyclique et de type fini– penser au contre-exemple du groupe engendré par les translations de distances 2^{-i}, $i \in \mathbf{N}$–).

Les isométries $g\langle\Phi\rangle$, $h\langle\Phi\rangle$, $g^{-1}\langle\Phi\rangle$ et $h^{-1}\langle\Phi\rangle$ sont définies au moins sur les boules de rayon t, de centres respectifs x_1, x_3, x_2 et x_4. Elles sont donc définies au moins sur les boules de rayon $t-\delta$, de centres respectifs x_1, $g\langle\Phi\rangle(x_1) = x_2$, $hg\langle\Phi\rangle(x_1) = x_2 + (x_4 - x_3)$ et $g^{-1}hg\langle\Phi\rangle(x_1) = x_1 + (x_4 - x_3)$. L'isométrie $h^{-1}g^{-1}hg\langle\Phi\rangle$ est alors définie sur la boule $B(x_1, t-\delta)$ et vaut l'identité sur son domaine (qui est non trivial). Si le mot $h^{-1}g^{-1}hg$ était trivial dans le groupe libre engendré par les lettres φ_i, alors g et h seraient puissances d'un même élément, en contradiction avec l'indépendance rationnelle. ♣

IV-Complexe des connexions de singularités.

Motivation. *Considérons une relation m et soit $I = [u, v]$ son domaine ($I \neq \emptyset$). Dans le graphe de Cayley $\Phi(u)$ de u, le lacet $chem(m)$ emprunte au moins une arête singulière. Supposons pour simplifier qu'il ne rencontre qu'une seule arête singulière et que c'est la première arête parcourue. Disons qu'elle porte l'appellation φ_1 et qu'elle joint $a_1\langle\Phi\rangle = u$ à $b_1\langle\Phi\rangle$. Le mot m s'écrit alors $m = m'\varphi_1$. L'isométrie $m'\langle\mathring{\Phi}\rangle$ (de domaine ouvert) est définie en $b_1\langle\Phi\rangle$ (le chemin $chem(()m')$ issu de $b_1\langle\Phi\rangle$ ne parcourt que des arêtes régulières du graphe de Cayley $\Phi(u)$), elle envoie $b_1\langle\Phi\rangle$ sur $a_1\langle\Phi\rangle$ et est de même signe que φ_1. Les 2 points a_1 et b_1 sont"connectés".*

Le complexe qu'on va introduire prend en compte ces connexions et mesure d'une certaine façon le défaut d'indépendance des générateurs (voir proposition IV.2).

Soit S un ensemble à $4k$ éléments, en correspondance bijective avec l'ensemble $S' = \{a_i, a_i', b_i, b_i'\}$ $i \in \{1, \ldots, k\}$. Par abus de notation, on confondra S et S'. On appelle Δ le 1-complexe à $2k$ composantes connexes dont les $4k$ sommets sont les points de l'ensemble S et dont deux arêtes orientées d'appellation φ_i vont, l'une de a_i vers b_i et l'autre de a_i' vers b_i'. Chaque arête singulière d'un graphe de Cayley $\Phi(x)$ est associée canoniquement à une arête de Δ et inversement, à toute arête de Δ correspond canoniquement un graphe de Cayley et une arête singulière de ce graphe.

Définition IV.1. *Si le système Φ est non dégénéré, on appelle $\Delta\langle\Phi\rangle$ le 1-complexe obtenu en identifiant entre eux les sommets de Δ qui sont dans la même classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$ définie ci-dessous.*

Les points s_1 et s_2 de S sont $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$-équivalents si et seulement s'il existe un Φ-mot m ès $\varphi_i^{\pm 1}$ tel que

(1) $m\langle\mathring{\Phi}\rangle(s_1\langle\Phi\rangle) = s_2\langle\Phi\rangle$ (l'isométrie $m\langle\mathring{\Phi}\rangle$ est supposée définie en $s_1\langle\Phi\rangle$)

(2) $sgn(m) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$

où $\varepsilon(a_i) = -1, \varepsilon(a_i') = +1, \varepsilon(b_i) = -sgn(\varphi_i)$ et $\varepsilon(b_i') = sgn(\varphi_i)$. La deuxième condition prend en compte les renversements d'orientation et $\varepsilon(s)$ représente la position (à droite ou à gauche) de s par rapport à la base qui lui est associée. Une petite difficulté provient du fait que $s_1\langle\Phi\rangle = s_2\langle\Phi\rangle$ n'entraîne pas que s_1 et s_2 sont dans la même classe (le bord droit $a_1'\langle\Phi\rangle$ d'une base peut coïncider dans D avec le bord gauche $a_2\langle\Phi\rangle$ d'une autre sans qu'il existe un mot de signe -1 qui fixe ce point).

La projection Π de Δ sur $\Delta\langle\Phi\rangle$ est une bijection sur l'ensemble des arêtes. Par *début* et *fin d'une arête orientée de* $\Delta\langle\Phi\rangle$, on désigne les points de S qui sont le début et la fin de sa préimage par Δ.

Notations. *Pour chaque couple (s_1, s_2) de sommets qui sont dans la même $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$-classe, on* **choisit** *une fois pour toutes un Φ-mot de longueur minimale qui vérifie les conditions de la définition ; on le note $m[s_2, s_1]$. On impose $m[s_1, s_2] = m[s_2, s_1]^{-1}$ et $m[s, s] = 1$.*

La proposition suivante prouve l'intérêt de l'introduction de ce complexe $\Delta\langle\Phi\rangle$:

Proposition IV.2. *Les générateurs du système Φ sont indépendants si et seulement si toutes les composantes connexes de $\Delta\langle\Phi\rangle$ sont des arbres.*

Proposition IV.3. *Le complexe $\Delta\langle\Phi\rangle$ est stable par petites restrictions uniformes, i.e. il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [0, t_0]$ les relations d'équivalence $\mathcal{R}\langle\Phi_{-t}\rangle$ et $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$ sur S sont les mêmes, donc $\Delta\langle\Phi_{-t}\rangle = \Delta\langle\Phi\rangle$.*

Preuve de la proposition IV.3. Soit $t_0 > 0$ tel que pour tout couple (s_1, s_2) de points $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$-équivalents, le domaine de $m[s_2, s_1]\langle\Phi\rangle$ contienne la boule fermée $B(s_1\langle\Phi\rangle, 3t_0)$ et tel qu'on ait $3t_0 < \inf\{|A_i\langle\Phi\rangle|,\ i = 1, \dots, k\}$. Le domaine de $m[s_2, s_1]\langle\Phi_{-t}\rangle$ pour $t \le t_0$ contient alors la boule fermée $B(s_1\langle\Phi\rangle, 2t_0)$. Or le point $s_1\langle\Phi_{-t}\rangle$ est à une distance $t \le t_0$ de $s_1\langle\Phi\rangle$ donc appartient à l'intérieur du domaine de $m[s_2, s_1]\langle\Phi_{-t}\rangle$. Par définition de $\varepsilon(s_1)$, $\varepsilon(s_2)$ et $sgn(m[s_2, s_1])$, $m[s_2, s_1]\langle\Phi_{-t}\rangle$ envoie bien $s_1\langle\Phi_{-t}\rangle$ sur $s_2\langle\Phi_{-t}\rangle$. La condition sur les signes est naturellement encore vraie. D'où l'implication $(s_1\mathcal{R}\langle\Phi\rangle s_2) \Longrightarrow (s_1\mathcal{R}\langle\Phi_{-t}\rangle s_2)$.

L'implication réciproque se traite pareillement. ♣

Preuve d'une implication de la proposition IV.2. (L'autre implication est démontrée après la proposition IV.5) Si les générateurs ne sont pas indépendants, considérons une relation m et $I = [u, u+\delta]$ $\delta > 0$, son domaine. Quitte à conjuguer m et à réduire le mot obtenu, on peut supposer que le lacet $chem(m)$ issu de u dans le graphe de Cayley $\Phi(u)$ se décompose en sous-chemins sous la forme : $chem(m) = \sigma_1\gamma_1\sigma_2\gamma_2\dots\sigma_p\gamma_p$ où chaque γ_j est un sous-chemin (éventuellement réduit à un point) ne parcourant que des arêtes régulières et σ_j est un chemin qui parcourt une arête unique, singulière, d'appellation $\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}$.

Appelons σ_j' l'arête de Δ canoniquement associée à σ_j et (s_j^d, s_j^f) le début et la fin de σ_j' (on a $u = s_1^d\langle\Phi\rangle$). Schématiquement, on écrit :

$$u = s_1^d \xrightarrow[(singul.)]{\varphi_{i_1}^{\varepsilon_1}} s_1^f \xrightarrow[(régul.)]{\gamma_1} s_2^d \dots \xrightarrow[(singul.)]{\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}} s_j^f \xrightarrow[(régul.)]{\gamma_j} s_{j+1}^d \dots$$

$$\dots\ s_p^d \xrightarrow[(singul.)]{\varphi_{i_p}^{\varepsilon_1}} s_p^f \xrightarrow[(régul.)]{\gamma_p} s_{p+1}^d = s_1^d$$

Figure 1

Le mot $w(\gamma_j)$ lu en suivant γ_j à partir de $s_j^f\langle\Phi\rangle$ permet de montrer que pour $j \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, les points s_j^f et s_{j+1}^d sont dans la même $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$-classe d'équivalence . Il suffit de vérifier la condition (2) sur les signes et pour cela de remarquer que $m\langle\Phi\rangle$ ayant pour domaine l'intervalle non trivial $[u, u+\delta]$, chaque isométrie $\omega(\gamma_j)$ doit être définie au moins sur un intervalle $J_j = [s_j^f, s_j^f - \varepsilon(s_j^f)\delta]$, $\delta > 0$, qu'elle envoie sur $J'_j = [s_{j+1}^d, s_{j+1}^d - \varepsilon(s_{j+1}^d)\delta]$. Il est alors clair que le chemin $\Pi(\sigma'_1)\Pi(\sigma'_2)\ldots\Pi(\sigma'_p)$ est un lacet non trivial dans $\Delta\langle\Phi\rangle$. ♣

Définition IV.4. *Une restriction fermée $\tilde{\Phi}$ de Φ est caractérisée par $a_i\langle\tilde{\Phi}\rangle = a_i\langle\Phi\rangle + t_{a_i}$, $a'_i\langle\tilde{\Phi}\rangle = a'_i\langle\Phi\rangle - t_{a'_i}$, avec $t_{a_i}, t_{a'_i} \geq 0$. Soit $\{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ un sous-ensemble de $\{a_i, a'_i,\ i = 1, \ldots, k\}$ qui contient tous les s avec $t_s > 0$, soit σ_j l'arête de Δ dont s_j est le début. On dit que $\tilde{\Phi}$ est obtenu en raccourcissant Φ de t_{s_1} du côté de σ_1, de t_{s_2} du côté de σ_2, ... , de t_{s_p} du côté de σ_p. Il arrive aussi qu'on énonce la dernière phrase en remplacant σ_j par son image $\Pi(\sigma_j)$ dans $\Delta\langle\Phi\rangle$.*

Par exemple la restriction uniforme Φ_{-t} est obtenue en raccourcissant Φ de t du côté de chaque arête de Δ.

Choisissons une forêt maximale $\mathcal{T}$ dans $\Delta\langle\Phi\rangle$ et soit $\mathcal{T}'$ sa préimage par Π dans Δ. Voyons qu'on peut *impunément* raccourcir Φ du côté des arêtes de $\Delta \setminus \mathcal{T}'$.

Proposition IV.5. *Il existe t_0 (le même que celui de la proposition IV.3) tel que pour tout $t \in [0, t_0]$, le système $\tilde{\Phi}$ obtenu en raccourcissant Φ de t du côté de $\Delta \setminus \mathcal{T}'$ a les mêmes orbites que Φ.*

Remarque : cette proposition reste vraie si on remplace $\Delta \setminus \mathcal{T}'$ par une famille quelconque d'arêtes contenue dans $\Delta \setminus \mathcal{T}'$ et même si on ne choisit pas le même $t \in [0, t_0]$ pour chaque arête. Cependant, on ne l'utilisera que sous sa version faible.

Propriété IV.6. *Soit σ une arête de la forêt maximale $\mathcal{T}$, d'appellation φ, de début s^d, de fin s^f et soit s un point $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle$-équivalent à s^f. L'isométrie $w\langle\tilde{\Phi}\rangle$, avec $w = m[s, s^f]\varphi$ est définie au moins sur l'intervalle $I = [s^d\langle\Phi\rangle, s^d\langle\Phi\rangle - 2\varepsilon(s^d)t_0]$ (avec le même $t_0 > 0$ que ci-dessus) qu'elle transforme en $J = [s\langle\Phi\rangle, s\langle\Phi\rangle - 2\varepsilon(s)t_0]$.*

Preuve de la propriété IV.6. Puisque $\sigma \in \mathcal{T}$, l'isométrie $\varphi\langle\tilde{\Phi}\rangle$ est définie au moins sur I qu'elle transforme en $K = [s^f\langle\Phi\rangle, s^f\langle\Phi\rangle - 2\varepsilon(s^f)t_0]$. Puisque $m[s, s^f]\langle\Phi\rangle$ est définie au moins sur la boule fermée $B(s^f\langle\Phi\rangle, 3t_0)$, alors $m[s, s^f]\langle\tilde{\Phi}\rangle$ est définie au moins sur la boule fermée $B(s^f\langle\Phi\rangle, 2t_0)$. Elle transforme donc K en $[s\langle\Phi\rangle, s\langle\Phi\rangle - 2.\underbrace{\varepsilon(s^f)sgn(m[s, s^f])}_{=\varepsilon(s)}t_0]$. ♣

Preuve de la proposition IV.5. Soit σ une arête de $\Delta\langle\Phi\rangle$ prise *en dehors* de $\mathcal{T}$, d'appellation φ, de début s^d, de fin s^f. Soit $\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_p$ *le* chemin d'arêtes (sans aller-retour) dans $\mathcal{T}$ qui mène de $\Pi(s^s)$ à $\Pi(s^f)$, soit $\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}$ l'appellation de σ_j et $(s_j^d, s_j^f) \in S \times S$ son début et sa fin. On pose encore $s_{p+1} := s^f$ et on obtient schématiquement :

$$s^d \xrightarrow[\sim]{m[s_2^d, s^d]} s_2^d \xrightarrow[\sigma_2]{\varphi_{i_2}^{\varepsilon_2}} s_2^f \xrightarrow[\sim]{m[s_3^d, s_2^f]} s_3^d \ \ldots\ s_j^d \xrightarrow[\sigma_j]{\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}} s_j^f \xrightarrow[\sim]{m[s_{j+1}^d, s_j^f]} s_{j+1}^d \ \ldots$$

$$\ldots\ s_p^d \xrightarrow[\sigma_p]{\varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}} s_p^f \xrightarrow[\sim]{m[s_{p+1}^d, s_p^f]} s_{p+1}^d$$

Figure 2

Le mot $w = m[s_{p+1}^d, s_p^f]\varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}\ldots m[s_3^d, s_2^f]\varphi_{i_2}^{\varepsilon_2}m[s_2^d, s^d]$ obtenu en écrivant de gauche à droite les mots relevés de droite à gauche au-dessus des flèches de la figure 2 fournit une isométrie $w\langle\tilde{\Phi}\rangle$ dont le domaine contient $I = [s^d\langle\Phi\rangle, s^d\langle\Phi\rangle - 2\varepsilon(s^d)t_0]$ et sur lequel elle agit comme $\varphi\langle\Phi\rangle$. Il suffit de voir que $m[s_2^d, s^d]\langle\tilde{\Phi}\rangle$ transforme I en $[s_2^d\langle\Phi\rangle, s_2^d\langle\Phi\rangle - 2\varepsilon(s_2^d)t_0]$ puis d'appliquer successivement la propriété IV.6 aux groupements $m[s_{j+1}^d, s_j^f]\varphi^{\varepsilon_j}$, ($j$ croissant) pour constater que $w\langle\tilde{\Phi}\rangle$ transforme I en $J = [s^f\langle\Phi\rangle, s^f\langle\Phi\rangle - 2\varepsilon(s^f)t_0]$. En particulier, $sgn(w) = \varepsilon(s^d)\varepsilon(s^f) = sgn(\varphi)$. Donc $\forall x \in I$, on a $w\langle\tilde{\Phi}\rangle(x) = \varphi\langle\Phi\rangle(x)$. Les points x et $\varphi\langle\Phi\rangle(x)$ sont dans la même orbite pour Φ comme pour $\tilde{\Phi}$. ♣

Fin de la preuve de la proposition IV.2. Le mot $\varphi^{-1}w$ fournit une relation de Φ. Si une composante connexe de $\Delta\langle\Phi\rangle$ n'est pas un arbre, les générateurs ne sont pas indépendants. ♣

Le nombre défini ci-dessous mesure le défaut d'indépendance des générateurs.

Définition IV.7 : l'invariant $c\langle\Phi\rangle$. *On appelle $c\langle\Phi\rangle$ le nombre d'arêtes d'une forêt maximale de $\Delta\langle\Phi\rangle$. C'est aussi le nombre de sommets moins le nombre de composantes connexes de $\Delta\langle\Phi\rangle$ ou encore $2k - b_1$, où b_1 est la somme des premiers nombres de Betti des composantes connexes de $\Delta\langle\Phi\rangle$.*

Remarque IV.8. *Pour $t \in [0, t_0]$ (avec le même t_0 que celui de la proposition IV.3), le nombre $c\langle\Phi_{-t}\rangle$ est constant.*

Généralisation IV.9. *Pour un système dégénéré $\Psi = \Psi' \cup \{\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots, \varphi_{p+l}\}$, où $\Psi' = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p\}$ est un système non dégénéré et $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots, \varphi_{p+l}$ sont des singletons, on définit un complexe des connexions singulières en définissant la relation $\mathcal{R}\langle\Psi\rangle$ comme $\mathcal{R}\langle\Psi'\rangle$ sur $\{a_i, a_i', b_i, b_i',\ i = 1, \dots, p\}$ et $\forall s \in \{a_i, a_i', b_i, b_i',\ i = p+1, \dots, p+l\}$, la $\mathcal{R}\langle\Psi\rangle$-orbite de s est réduite à s. Le complexe des connexions singulières $\Delta\langle\Psi\rangle$ est, en conséquence, la réunion disjointe de $2l$ segments avec le complexe des connexions singulières de Ψ'. En particulier, une arête d'appellation φ_{p+1} appartient à toute forêt maximale de $\Delta\langle\Psi\rangle$.*

V-Sytèmes à orbites finies.

On traite le cas d'un système à orbites finies.

Soit $X = (D, \Phi)$ un système non dégénéré, à orbites finies et supposons donnée une forêt maximale $\mathcal{T}$ dans $\Delta\langle\Phi\rangle$, de relevé $\mathcal{T}'$ dans Δ. (On doit penser au système X comme à un système X^1_{-t} obtenu par restriction uniforme d'un système X^1 sans composante minimale homogène (théorème III.3) et qui a le même complexe de connexions de singularités (proposition IV.3).)

On montre que le théorème de générateurs indépendants est vrai pour X, précisément :

Théorème V.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ des arêtes de $\Delta \setminus \mathcal{T}'$ et des nombres $t_1, t_2, \dots, t_p \geq 0$ tels que le système $\tilde{\Phi}$ obtenu en raccourcissant Φ de t_j du côté de σ_j, pour $j = 1, \dots, p$, a les mêmes orbites que Φ et des générateurs indépendants.*

Pour un système à orbites finies Ψ, on appelle $E'\langle\Psi\rangle$ la réunion des Ψ-orbites singulières de Ψ. Toute isométrie m définie en un point $x \in D \setminus E'$ est définie sur toute la composante connexe de x dans $D \setminus E'$ et si $x \in D \setminus E'$ est le centre d'une réflexion (i.e. $\forall\delta > 0$ petit, $x - \delta$ et $x + \delta$ sont dans la même Ψ-orbite) alors x est le milieu de sa composante connexe. L'ensemble $E\langle\Psi\rangle$, réunion des orbites des centres de réflexion et de $E'\langle\Psi\rangle$, est donc fini.

Lemme V.2. *Soit Ψ un système à orbites finies, soit T la borne inférieure des distances entre deux points de $E\langle\Psi\rangle$, soit Θ' le relevé à Δ d'une forêt maximale Θ de $\Delta\langle\Psi\rangle$ et σ une arête de $\Delta \setminus \Theta'$.*

Il existe $t \geq T$ tel que le système $\tilde{\Psi}$ obtenu en raccourcissant Ψ de t du côté de σ a les mêmes orbites que Ψ. De plus,

(1) *$E\langle\tilde{\Psi}\rangle \subset E\langle\Psi\rangle$,*

(2) *il existe une forêt de $\Delta\langle\tilde{\Psi}\rangle$ dont le relevé $\widetilde{\Theta}'$ dans Δ contient Θ'.*

Preuve du théorème V.1. Si $\Delta\langle\tilde{\Psi}\rangle$ n'est pas une forêt, on peut réappliquer le lemme à $\tilde{\Psi}$.

Si on est parti de Φ, on constate, vu (1), que la longueur dont on raccourcit le système à chaque étape est uniformément minorée. Le processus s'arrête donc après un nombre fini d'étapes (le système alors obtenu a un complexe de connexions de singularités dont toutes les composantes connexes sont des arbres). Vu (2), on constate qu'on peut appliquer ce processus en raccourcissant seulement du côté d'arêtes en dehors de $\mathcal{T}'$. ♣

Preuve du lemme V.2. Disons que σ est d'appellation φ, de début s^d, de fin s^f. Soit I la composante connexe de $D \setminus E\langle\Psi\rangle$ qui contient $s^d\langle\Psi\rangle - \varepsilon(s)\delta$, pour $\delta > 0$ petit. On prend t égal à sa longueur :

$I =]s^d\langle\Psi\rangle, s^d\langle\Psi\rangle - \varepsilon(s^d)t[$. Les seules orbites éventuellement modifiées sont celles qui passent par l'intervalle $K = [s^d\langle\Psi\rangle, s^d\langle\Psi\rangle - \varepsilon(s)t[$ qu'on ôte du domaine de $\varphi\langle\Psi\rangle$.

On reprend les notations de la preuve de la proposition IV.5. Soit $\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_p$ *le* chemin d'arêtes dans Θ qui mène de $\Pi(s^s)$ à $\Pi(s^f)$, soit $\varphi_{i_j}^{\varepsilon_j}$ l'appellation de σ_j et $(s_j^d, s_j^f) \in S \times S$ son début et sa fin. On pose encore $s_{p+1} := s^f$ et on appelle w le mot $w = m[s_{p+1}^d, s_p^f]\varphi_{i_p}^{\varepsilon_p}\ldots m[s_3^d, s_2^f]\varphi_{i_2}^{\varepsilon_2}m[s_2^d, s^d]$. L'isométrie $w\langle\Psi\rangle$ est définie au moins sur un intervalle $[s^d\langle\Psi\rangle, s^d\langle\Psi\rangle - 2\varepsilon(s^d)t_0]$, $t_0 > 0$ (voir la preuve de la proposition IV.5).

L'intervalle I ne contenant pas de point d'une orbite singulière, l'isométrie $w\langle\Psi\rangle$ est donc définie sur K tout entier. Il est facile de voir que, puisque $I \cap E\langle\Psi\rangle$ est vide, la Ψ-orbite de x, $\forall x \in K$, ne rencontre K qu'en x.

Alors le chemin $chem(w)$ issu de x dans le graphe de Cayley $\Psi(x)$ mène de x à $\varphi\langle\Psi\rangle(x)$ sans emprunter d'arête d'origine $y \in K$ et d'appellation φ : Sinon, il existe $x_0 \in K$ tel qu'on peut décomposer l'écriture réduite de w en $w = w''\varphi w'$ de sorte que $w'\langle\Psi\rangle(x_0) = y_0 \in K$, donc $y_0 = x_0$. Puisque $w'\langle\Psi\rangle$ est définie sur K et que $w'\langle\Psi\rangle(K) \subset dom(\varphi)\langle\Psi\rangle$, on en déduit que $w'\langle\Psi\rangle(K) \subset K$ et donc que l'égalité $w'\langle\Psi\rangle(x) = x$ est vraie pour tout $x \in K$, en particulier pour $s^d\langle\Psi\rangle$. Cela montre que le chemin $\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_p$ dans Θ emprunte l'arête σ, ce qui est absurde.

L'isométrie $w\langle\tilde{\Psi}\rangle$ est donc définie sur K tout entier et, $\forall x \in K$ le sous-graphe $\tilde{\Psi}(x)$ de $\Psi(x)$ (obtenu en effaçant l'arête d'origine x et d'appellation φ) a les mêmes sommets que $\Psi(x)$.

On n'a pas ajouté d'orbites singulières puisque par définition de t, le point $s\langle\Psi\rangle - \varepsilon(s)t$ est dans une orbite singulière de Ψ d'où (1).

Si deux points de $s_1, s_2 \in S\backslash\{s^d, s^f\}$ sont $\mathcal{R}\langle\tilde{\Psi}\rangle$-équivalents, alors ils sont aussi $\mathcal{R}\langle\Psi\rangle$-équivalents (en effet, $s_j\langle\Psi\rangle = s_j\langle\tilde{\Psi}\rangle$ et $\tilde{\Psi}$ est une restriction de Ψ) d'où (2). ♣

Remarque V.3. *Si le système Ψ est non dégénéré, qu'on lui applique le lemme V.2 et que le générateur $\varphi\langle\tilde{\Psi}\rangle$ se trouve être un singleton, alors on peut supprimer ce générateur sans modifier les orbites.*

Preuve de la remarque V.3. Si $\varphi\langle\tilde{\Psi}\rangle$ est un singleton, son domaine est égal à $\{s\langle\tilde{\Psi}\rangle\}$. Le domaine de $w\langle\tilde{\Psi}\rangle$ contient l'intervalle non trivial K et contient le point $s\langle\tilde{\Psi}\rangle$. Le mot w ne contient donc pas la lettre φ et supprimer l'arête d'appellation φ du graphe de Cayley de $s\langle\tilde{\Psi}\rangle$ ne disconnecte pas ce graphe. ♣

VI-Mesure de l'espace des orbites.

Définition VI.1. *On appelle mesure de l'espace des orbites du système Φ et on note $e(\Phi)$ la borne inférieure des mesures des ouverts rencontrant toutes les orbites.*

Proposition VI.2. *La fonction $t \longmapsto e(\Phi_{-t})$ est continue, linéaire par morceaux, de dérivée à droite $c\langle\Phi\rangle$ en 0.*

Cette proposition généralise de façon naturelle un résultat de G. Levitt aux systèmes d'isométries ne préservant pas nécessairement l'orientation (voir [Lev3, lemme II.1]).

On la prouve dans le cas à orbites finies et le résultat s'étend, par continuité et grâce au théorème III.3, aux systèmes sans composante minimale homogène. Bien que vraie dans le cas général, elle ne sera démontrée (et utilisée) que dans ce cas.

Preuve de la proposition VI.2. Lorsqu'on passe de Φ à Φ_{-t}, on modifie au plus les orbites qui passent dans $4k$ intervalles de longueur t. La continuité s'en déduit. Soit Φ à orbites finies. Soit $t > 0$ tel que la distance minimale entre deux points de $E\langle\Phi\rangle$ soit supérieure à $4t$, alors la distance minimale entre deux points de $E\langle\Phi_{-t}\rangle$ est supérieure à $2t$. En particulier, t est assez petit pour que $\mathcal{R}\langle\Phi\rangle = \mathcal{R}\langle\Phi_{-t}\rangle$.

Pour $s \in S$, on appelle $I_s =]s\langle\Phi\rangle - \varepsilon(s)t, s\langle\Phi\rangle[$ et V_s (resp. V_s^t) l'ensemble des $x \in D$ dont la Φ-orbite (resp. Φ_{-t}-orbite) rencontre I_s. L'intervalle I_s ne rencontre pas d'orbite singulière (ni pour Φ ni pour Φ_{-t}) donc, si $m\langle\Phi\rangle$ (resp. $m\langle\Phi_{-t}\rangle$) est définie en $x \in I_s$, elle est aussi définie pour tout $y \in \overline{I_s}$. En conséquence,

(1) les V_s (resp. les V_s^t) sont deux à deux disjoints ou égaux,

(2) chaque orbite pour Φ (resp. pour Φ_{-t}) qui rencontre V_s (resp. V_s^t) rencontre alors exactement une fois chaque composante connexe de V_s (resp. de V_s^t)
(3) $(V_s = V_{s'}) \Leftrightarrow (\Pi(s)$ et $\Pi(s')$ sont dans la même composante connexe de $\Delta\langle\Phi\rangle)$
(4) $(V_s^t = V_{s'}^t) \Leftrightarrow (s\mathcal{R}\langle\Phi_{-t}\rangle s')$.

Ces assertions se démontrent assez simplement. Par exemple pour la première implication de (3) : si $V_s = V_{s'}$ alors il existe un mot m et $y \in I_s$ tels que $m\langle\Phi\rangle(y) \in I_{s'}$. Vu le choix de t, on a l'égalité $m\langle\Phi\rangle(I_s) = I_{s'}$, l'isométrie $m\langle\Phi\rangle$ envoie $s\langle\Phi\rangle$ sur $s'\langle\Phi\rangle$ et donc $sgn(m) = \varepsilon(s)\varepsilon(s')$. On conclut, à la façon de la preuve de la proposition IV.2 en considérant le chemin $chem(m)$ dans le graphe de Cayley $\Phi(s\langle\Phi\rangle)$.

Seules les orbites qui passent dans I_s sont modifiées lorsqu'on change Φ en Φ_{-t}. De plus, l'orbite $X(x)$ de $x \in I_s$ se partitionne en autant d'orbites pour X_{-t} qu'il y a de sommets dans la composante connexe de $\Pi(s)$ dans $\Delta\langle\Phi\rangle$. On obtient donc l'égalité $e\langle\Phi_{-t}\rangle = e\langle\Phi\rangle + c\langle\Phi\rangle t$ dont la proposition découle. ♣

Le théorème suivant se trouve dans [Lev3] dans un cadre un petit peu restreint, il est essentiellement démontré dans [GLP1, prop. 6.1] sous les mêmes hypothèses que celle de la preuve de la proposition VI.2 ci-dessus et est, en fait, un cas particulier d'un résultat général [Lev4]. Cependant, on donnera une preuve restreinte à ce qu'on utilisera par la suite (cas des systèmes sans composante minimale homogène).

Théorème VI.3 [Lev3], [GLP1, prop. 6.1]. *En appelant $l(\Phi) = \sum_{i=1}^{k}(a_i'\langle\Phi\rangle - a_i\langle\Phi\rangle)$ la somme des mesure des domaines des générateurs de Φ, les générateurs sont indépendants si et seulement si $e(\Phi) + l(\Phi) = |D|$.*

Preuve. La preuve est claire pour les systèmes à orbites finies. Vu la stabilité par petites restrictions uniformes de la propriété de générateurs indépendants (Prop. IV.2 et IV.3), vu le Th. III.3 et grâce à la continuité, elle s'étend au cas des systèmes sans composante minimale homogène. ♣

VII-Cas général.

Théorème VII.1. *Soit Φ sans composante minimale homogène, il existe* **un** *sous-intervalle fermé $\tilde{A}_i$ de chaque base A_i de Φ tel que le système $\tilde{\Phi}$ obtenu en prenant la restriction de φ_i à $\tilde{A}_i$ soit à générateurs indépendants et ait les mêmes orbites que Φ. De plus, si Φ est non dégénéré, alors on peut supprimer les singletons de $\tilde{\Phi}$ sans changer les orbites.*

Preuve du théorème VII.1. On a déjà traité le cas d'un système à orbites finies (Théorème V.1), la condition de non dégénérescence pouvant être obtenue grâce à la remarque V.3.

Si le système $X = (D, \Phi)$ possède des composantes minimales non homogènes, quitte à supprimer ses singletons, on le suppose non dégénéré.

On choisit un arbre maximal $\mathcal{T}$ dans $\Delta\langle\Phi\rangle$. Sa préimage $\mathcal{T}'$ dans Δ a pour cardinal $c\langle\Phi\rangle$. On choisit $t > 0$ assez petit pour que $\Delta\langle\Phi\rangle = \Delta\langle\Phi_{-t}\rangle$ (proposition IV.3). La preuve s'articule alors en 4 étapes $X \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_{-t} \longrightarrow X_3 \longrightarrow \tilde{X}$, comme annoncé dans l'introduction :

(1) On définit Φ_1 en raccourcissant Φ de t du côté des arêtes de $\Delta \setminus \mathcal{T}'$. On pourra ainsi obtenir un système à orbites finies en ne raccourcissant Φ_1 de t que du côté des arêtes de $\mathcal{T}'$ (étape (2)). Le système Φ_1 vérifie les deux propriétés suivantes :
-i- Φ_1 a les mêmes orbites que Φ (proposition IV.5), donc
-ii- $e(\Phi_1) = e(\Phi)$.
(2) Pour la deuxième étape, on passe à Φ_{-t}, qui est ainsi obtenu en ne raccourcissant Φ_1 de t que du côté des arêtes de $\mathcal{T}'$ et qui vérifie les propriétés :
-i- Φ_{-t} n'a que des orbites finies (théorème III.3),
-ii- $\Delta\langle\Phi_{-t}\rangle = \Delta\langle\Phi\rangle$ (proposition VI.2 et choix de t) donc $\mathcal{T}$ est une forêt maximale de $\Delta\langle\Phi_{-t}\rangle$,
-iii- $e(\Phi_{-t}) = e(\Phi) + c\langle\Phi\rangle t$ (proposition IV.3 et remarque IV.8).
(3) On prend ensuite pour Φ_3 le système produit par le théorème V.1 à partir de Φ_{-t} avec la forêt $\mathcal{T}$. On rappelle qu'on ne raccourcit que du côté d'arêtes hors de $\mathcal{T}'$. On a :

-i- Φ_3 et Φ_{-t} ont les mêmes orbites, donc $e(\Phi_3) = e(\Phi_{-t})$
-ii- $e(\Phi_3) + l(\Phi_3) = |D|$ car les générateurs de Φ_3 sont indépendants (théorème VI.3).

(4) Pour finir, on construit $\tilde{\Phi}$ par l'opération inverse du passage de Φ_1 à Φ_{-t}, c'est à dire que $\tilde{\Phi}$ est obtenu en rallongeant Φ_3 de t du côté des arêtes de $\mathcal{T}'$. Puisque $\mathcal{T}'$ est de cardinal $c\langle\Phi\rangle$, on a $l(\tilde{\Phi}) = \sum_{i=1}^{k}(a_i'\langle\tilde{\Phi}\rangle - a_i\langle\tilde{\Phi}\rangle) = l(\Phi_3) + c\langle\Phi\rangle t$. Il ne reste qu'à vérifier deux choses :
-i- $\tilde{\Phi}$ a les mêmes orbites que Φ,
-ii- les générateurs du système $\tilde{\Phi}$ sont indépendants.

Pour prouver (i), on considère un point $x \in D$ et on s'intéresse aux aventures du graphe $\Phi(x)$ (son graphe de Cayley) au cours des quatre étapes : il se transforme en plusieurs 1-complexes $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_{-t}, \mathcal{G}_3, \tilde{\mathcal{G}}$ qui sont tous des sous-complexes (éventuellement non connexes) de $\Phi(x)$, mais dont chaque composante connexe est le graphe de Cayley d'une certaine orbite pour le système correspondant ($\Phi_1, \Phi_{-t}, \Phi_3$ ou $\tilde{\Phi}$).

(1) On efface certaines arêtes de $\Phi(x)$ et on obtient le complexe $\mathcal{G}_1$. Il est connexe puisque Φ et Φ_1 ont les mêmes orbites.
(2) On efface de nouvelles arêtes, le système Φ_{-t} est à orbites finies et le complexe $\mathcal{G}_{-t}$ est la réunion disjointe d'une famille $\mathcal{G}_{-t}^i$, $i \in H$ de sous-graphes finis (chacun représentant une orbite de Φ_{-t}).
(3) Au cours de la troisième étape, où l'on rend les générateurs indépendants pour le système à orbites finies, chaque $\mathcal{G}_{-t}^i$ perd un certain nombre de ses arêtes, mais reste connexe (par 3.i) : on obtient une famille $\mathcal{G}_3^i$, $i \in H$ où chaque $\mathcal{G}_3^i$ a les mêmes sommets que $\mathcal{G}_{-t}^i$.
(4) Pour finir, on replace toutes les arêtes effacées à l'étape (2) ; donc on reconnecte entre eux tous les $\mathcal{G}_3^i$, $i \in H$ et on obtient un complexe $\tilde{\mathcal{G}}$ qui est connexe. Ce qui montre que $\tilde{\Phi}$ et Φ ont mêmes orbites.

On déduit de ce premier résultat que $e(\tilde{\Phi}) = e(\Phi)$. Alors, on peut montrer (ii) :

$$\begin{aligned} e(\tilde{\Phi}) + l(\tilde{\Phi}) &= e(\Phi) + [l(\Phi_3) + c\langle\Phi\rangle t] \\ &= [e(\Phi_3) - c\langle\Phi\rangle t] + [l(\Phi_3) + c\langle\Phi\rangle t] \\ &= e(\Phi_3) + l(\Phi_3) = |D|. \end{aligned}$$

Donc les générateurs de $\tilde{\Phi}$ sont indépendants (théorème VI.3).

L'éventuelle apparition d'un singleton ne peut survenir que lors du passage de Φ_{-t} à Φ_3 et c'est donc, à nouveau, la remarque V.3 qui nous permet de conclure. ♣

REFERENCES

[AL] P. Arnoux, G. Levitt, *Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières*, Inv. Math. **84** (1986), 141–156.

[All] A. Allais, *Contes et chroniques* (1948), Rouen : Éd. Henri Defontaine.

[Bru] F. Brunot, *La pensée et la langue* (1926), Éd. Masson.

[DN] C. Danthony, A. Nogueira, *Measured foliations on nonorientable surfaces*, Ann. Scient. Eco. Nor. Sup. **23** (1990), 469–494.

[Gab0] D. Gaboriau, *Dynamique des systèmes d'isométries et actions de groupes sur les arbres réels*, Thèse de l'université de Toulouse III (1993).

[Gab] D. Gaboriau, *Dynamique des systèmes d'isométries : sur les bouts des orbites*, à paraître Invent. Math..

[GL] D. Gaboriau, G. Levitt, *The rank of actions on* **R***-trees*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup **28** (1995), 549–570.

[GLP1] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin, *Pseudogroups of isometries of* **R** *and Rips' theorem on free actions on* **R***-trees*, Israel Jour. of Math **87** (1994), 403–428.

[GLP2] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin, *Pseudogroups of isometries of* **R** *and reconstruction of free actions on* **R***-trees*, Erg. Th. Dyn. Syst **15** (1994), 1–20.

[GS] H. Gillet, P.B. Shalen, *Dendrology of groups in low* **Q***-ranks*, Jour. Diff. Geom. **32** (1990), 605–712.

[Gus] P. Gusmão, *Groupes et feuilletages de codimension un*, Thèse de l'université de Toulouse III (1993).

[Hae1] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et Classifiants,* dans "Structures transverses des feuilletages", Astérisque **116** (1984), 70–97.

[Hae2] A. Haefliger, *Pseudogroups of local isometries* dans "Proc. V^{th} Coll. in Differential Geometry", ed. L. A. Cordero, Research Notes in Math. **131** (Pitman 1985), 174–197.

[Ima] H. Imanishi, *On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 285–291.

[Kea] M. Keane, *Interval exchange transformations*, Math. Zeit. **141** (1975), 25–31.

[Lev1] G. Levitt, 1-*formes fermées singulières et groupe fondamental*, Invent. Math. **88** (1987), 635–667.

[Lev2] G. Levitt, *Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie*, Jour. Diff. Geom **31** (1990), 711–761.

[Lev3] G. Levitt, *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math. **113** (1993), 633–670.

[Lev4] G. Levitt, *The cost in generating an equivalence relation*, Erg. Th. Dyn. Syst. **15** (1995), 1173–1181.

[LP] G. Levitt, F. Paulin, *Geometric group actions on trees*, prépublication Université Toulouse III (1994).

[Mas] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math. **115** (1982), 169–200.

[MS1] J.W. Morgan, P.B. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*, Ann. Math. **126** (1988), 403–519.

[Pau] F. Paulin, *A dynamical system approach to free actions on* $\mathbf{R}$*-trees: a survey with complements* Collect. Geometric Topology (Haifa 1992), Contemp. Math **164**, Amer. Math. Soc., 187–217.

[Rim] F. Rimlinger, $\mathbf{R}$*-trees and normalization of pseudogroups*, prépublication Fairfield Univ.

[Rip] E. Rips, *Group actions on* $\mathbf{R}$*-trees*, en préparation.

[Rob] P. Robert, *Petit ROBERT 1, dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française* (1989), Les Dictionnaires LE ROBERT.

[Sal] E. Salem, *Riemannian foliations and pseudogroups of isometries* appendix D dans "Riemannian foliations", P. Molino, Progress in Math. **73** (1988), Birkhäuser.

[Sha] P. Shalen, *Dendrology and its applications*, Group Theory from a Geometrical viewpoint (E. Ghys, A. Verjovsky eds.), World Scientific (1991).

[Vee] W.A. Veech, *Interval exchange transformations*, Jour. Anal. Math. **33** (1978), 222–272.

Laboratoire Émile Picard, UMR CNRS 5580, Université Toulouse III, 31062 Toulouse cedex, France
Adresse actuelle :
ENS-Lyon UMR 128, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
adresse électronique : gaboriau@umpa.ens-lyon.fr