

Notes de mécanique classique

Guillaume Laibe
École Normale Supérieure de Lyon
guillaume.laibe@ens-lyon.fr

© Tous droits réservés - 16/11/2020

Préparation à l'agrégation de chimie

Table des matières

1	Lois de la mécanique classique	7
1.1	Cadre de la mécanique classique	7
1.1.1	Référentiel	7
1.1.2	Mécanique classique (newtonienne)	7
1.1.3	Unités	8
1.2	Dynamique du point	8
1.2.1	Interaction de systèmes	8
1.2.2	Référentiels galiléens	8
1.2.3	Masse et inertie	8
1.2.4	Principe fondamental de la dynamique (PDF)	9
1.2.5	Théorème du moment cinétique (TMC)	9
1.2.6	Énergie	10
1.3	Changement de référentiel	14
1.3.1	Taux de variation de vecteurs	15
1.3.2	Composition des vitesses et des accélérations	15
1.3.3	Étude des différents termes	16
1.4	Systèmes multiples	17
1.4.1	Actions réciproques	17
1.4.2	N points en interaction	18
1.4.3	Rotation autour d'un axe fixe d'un système indéformable	20
1.4.4	Lois de conservation	21
1.5	Validité de la mécanique classique	23
1.5.1	Limitations	23
1.5.2	Intérêts	23
2	Gravitation classique	25
2.1	Champ de gravitation d'une distribution de masse	25
2.1.1	Force gravitationnelle	25
2.1.2	Propriétés du champ de gravitation	25
2.1.3	Champ de gravitation de distributions de masses	26
2.2	Mouvement dans un champ en $1/r^2$	29
2.2.1	Quantités conservées	29
2.2.2	Trajectoire	30
2.2.3	Cas de l'ellipse	32
2.2.4	En pratique	33
2.3	Application à la Terre	34
2.3.1	PDF dans le référentiel du laboratoire	34
2.3.2	Modèle d'astres sphériques	35

2.3.3	Chute d'un corps	36
2.3.4	Effets de marée	36
2.3.5	Satellisation	37
3	Force sur une particule chargée	39
3.1	Force sur une particule chargée	39
3.2	Particule dans un champ E	39
3.2.1	Champ E uniforme stationnaire	39
3.2.2	Électron élastiquement lié	41
3.2.3	Champ E en $1/r^2$	44
3.2.4	Champs E quelconque	44
3.3	Particule dans un champ B	44
3.3.1	Champ B uniforme stationnaire	44
3.3.2	Champs B quelconque	46
3.4	Champs E et B	46
3.4.1	Champs E et B croisés	46
3.4.2	Loi d'Ohm dans un conducteur	47
3.5	Dipôle électromagnétique	47
3.5.1	Actions sur un dipôle dans un champ extérieur	47
3.5.2	Forces de Van der Waals	48
3.5.3	Ressorts et fils	48
4	Interactions d'un solide avec un fluide	51
4.1	Fluide et forces de surface	51
4.2	Solide dans un fluide	52
4.2.1	Termes inviscides	52
4.2.2	Termes dus à la viscosité	53
4.2.3	Terme aléatoire	55
4.2.4	En pratique	56
4.3	Chute libre avec frottements fluides	56
5	Le modèle du pendule simple	59
5.1	Le pendule simple	59
5.1.1	Définition	59
5.1.2	Équations du mouvement	59
5.1.3	Isochronisme des petites oscillations	61
5.2	Le pendule simple aux grands angles	61
5.2.1	Puit de potentiel et mouvement	61
5.2.2	Période des oscillations	62
5.2.3	Tension du fil	63
5.2.4	En résumé	64
5.3	Le pendule réel	64
5.3.1	Distribution de masse	64
5.3.2	Frottements et amortissement	66
5.3.3	Poussée d'Archimède	67
5.3.4	En résumé	68
A	Bibliographie	69
A.1	Bibliographie générale	69
A.1.1	Livres	69
A.1.2	Notes de cours	69
A.2	Cadre de la mécanique	69
A.3	Gravitation	69
A.4	Forces électromécaniques	69
A.5	Interactions avec un fluide	69

A.6 Contact entre deux solides	69
A.7 Le modèle du pendule simple	69

Préambule

Ces notes s'adressent à des lecteurs ayant des bases de mécanique classique de niveau L2. Différentes idées de la mécanique classique y sont exposées de manière synthétique, avec l'objectif de donner au lecteur une vision cohérente des concepts présentés. Les aspects techniques et les exercices sont développés de manière minimaliste. Ce document reprend le cours de mécanique classique dispensé à la préparation à l'agrégation de chimie de l'Ens de Lyon de 2016 à 2020.

Lois de la mécanique classique

1.1 Cadre de la mécanique classique

Mécanique : étude du mouvement des systèmes physiques. Implique les concepts d'espace et de temps.

1.1.1 Référentiel

Référentiel : horloge universelle et système d'axes (i.e. directions) associés à une origine (pour repérer les positions et le temps).

Par extension, ensemble des points immobiles du référentiel (ex : référentiel du laboratoire).

Observateur : Un point immobile particulier (en pratique, on parle de "référentiel lié à l'observateur").

Repère : éléments de référence (ex : base vectorielle) permettant de paramétrer l'espace par des nombres réels (les coordonnées) – cf. Table. 1.1.

Ex : cartésiennes, cylindriques, sphériques (à savoir), Fresnet, prolate, hyperboliques (plus rare).

1.1.2 Mécanique classique (newtonienne)

L'espace est continu (\neq gravitation quantique), euclidien ($\sum_{\text{angles}}(\Delta) = \pi$, \neq relativité générale), homogène et isotrope (ses propriétés sont invariantes par translation et rotation).

Le temps est le même dans tous les référentiels, i.e. absolu (\neq relativité restreinte). On note $\frac{d}{dt}$ la dérivé convective, i.e. le taux de variation d'une quantité en suivant une particule (cf hydrodynamique).

Il est possible d'associer à un objet physique, appelé système, une position et une vitesse $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ (\neq mécanique quantique).

Système	\mathbf{u}_i	$\dot{\mathbf{u}}_i$	\mathbf{r}	\mathbf{v}	\mathbf{a}
Cartésien	$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$	$(0, 0, 0)$	(x, y, z)	$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$,	$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$
Cylindrique	$(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$	$(\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta, -\dot{\theta}\mathbf{u}_r, 0)$	$(r, 0, 0)$	$(\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})$,	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, 2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}, \ddot{z})$
Sphérique	$(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi)$		$(r, 0, 0)$	$(\dot{r}, r\dot{\theta}, r \sin \theta \dot{\phi})$,	

TABLE 1.1 – Systèmes de coordonnées usuels. Les dérivées temporelles sont indiquées par des points.

1.1.3 Unités

D'après les hypothèse de la Sect. 1.1.2, seules les différences d'espace et de temps comptent. Il leur faut donc des références, appelées *unités*.

$[t] = \text{s}$. Seconde : durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental ${}^6\text{S}_{1/2}$ de l'atome de césium 133.

Le rayonnement électromagnétique se propage à la célérité c dans le vide (cf. relativité restreinte). Par définition, on définit cette vitesse et son unité par $c \equiv 299792458 \text{m.s}^{-1}$. Avec la définition précédente de la seconde, cela revient à définir un mètre, l'unité de longueur ($[L] = \text{m}$).

Remarques :

- Ces définitions sont guidées par la possibilité de reproduire précisément les mesures.
- Il existe des unités dérivés (ex : cm, h).
- Les lois de la physique doivent être indépendantes de l'unité choisie. Elles s'expriment donc par des lois de puissance dans ces unités, i.e. $X \propto \text{m}^\alpha \text{s}^\beta$ (théorème de Buckingham).

1.2 Dynamique du point

1.2.1 Interaction de systèmes

Deux systèmes sont en interaction si la présence de l'un entraîne la modification du mouvement ou la déformation de l'autre.

Dans la nature, les interaction s'additionnent vectoriellement (expérience de Stévin). Leurs intensités sont indépendantes du référentiel. On les représentent donc par un vecteur force \vec{F} , souvent imprimé en gras \mathbf{F} par souci de clareté. L'intensité d'interaction tend vers zéro aux grandes distances.

Cas limite : un système soumis à aucune interaction est dit isolé.

Contre-exemple : sur Terre, les systèmes ne sont pas isolés (pesanteur, frottements), ce qui explique la difficulté qu'il fut de conceptualiser les lois de la physique (cf Sect. 1.2.2).

1.2.2 Référentiels galiléens

Référentiel galiléen : référentiel dans lequel tout point isolé se déplace en mouvement rectiligne uniforme ($\mathbf{v} = \text{cste}$).

Premier principe : Il existe au moins un référentiel galiléen dans l'Univers newtonien (\neq premier principe "historique").

Corollaire : Il existe une infinité de référentiels galiléens. Pour les construire, on peut faire tourner les axes, changer leur origine spatiale $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, changer l'origine des temps $t \rightarrow t + t_0$ ou faire $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$, i.e. effectuer un mouvement de translation rectiligne uniforme à l'origine.

On remarque que $\mathbf{v} = \text{cste}$ implique que \mathbf{v} est indépendante de \mathbf{r} (espace homogène) et que $\|\mathbf{v}\|$ est constante (espace isotrope). Si il n'existait aucun référentiel galiléen, l'espace serait nécessairement non-euclidien (notions de relativité générale). En pratique, on soustrait les effets non-galiléens connus pour construire des référentiels galiléens.

1.2.3 Masse et inertie

Dans la nature, un système s'oppose à la modification de sa vitesse (inertie).

Ex : Dans l'ISS, deux boules flottent. Il est toujours plus dur de pousser la plus massive.

Mécanique de Newton : L'inertie du système est caractérisée par une grandeur scalaire, positive, extensive, conservative (hors réactions nucléaires) et invariante par changement de référentiel : la masse m .

Point matériel : Point $\mathbf{r}(t)$ auquel on associe une masse m .

$[m] = \text{kg}$. Actuellement, les valeurs de la constante de Planck h et la charge élémentaire e sont fixées par définition, similairement à la démarche adoptée pour c (ex : $e \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$), ce qui définit indirectement le kilogramme et l'ampère. En effet, on mesure maintenant très précisément les quantités $2e/h$ par effet Josephson et h/e^2 par effet Hall quantique.

Auparavant, un kilogramme était défini comme étant la masse d'un système particulier, le "kg-étalon", cylindre de platine et d'iridium conservé en France (à Sèvres). Cette définition permettait de définir indirectement l'Ampère comme étant le courant générant une force de $2 \cdot 10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$ entre deux fils infiniment longs séparés d'un mètre lorsqu'ils sont parcourus par celui-ci.

1.2.4 Principe fondamental de la dynamique (PDF)

Principe fondamental de la dynamique : Pour un point matériel dans un référentiel galiléen, on a l'égalité

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

où $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ est la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système.

Remarques :

- L'équation Eq. 1.1 est mathématiquement déterministe : si l'on connaît \mathbf{r} et \mathbf{v} à un instant t_1 , on connaît \mathbf{r} et \mathbf{v} à tout instant.
- L'équation Eq. 1.1 est invariante par la transformation $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ ($\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = 0$), ce qui est cohérent avec le fait que \mathbf{F} est indépendante du référentiel.
- L'équation Eq. 1.1 est invariante par renversement du temps : $t \rightarrow -t \Rightarrow \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{a} \rightarrow -(-\mathbf{a}) = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ (ex : la gravité est toujours vers le bas). La réversibilité temporelle est donc autorisée par les équations.
- Si $\mathbf{F} = 0$ (système isolé), $\mathbf{v} = \text{cste}$ (le référentiel est bien galiléen).
- On définit la quantité de mouvement par $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Eq. 1.1 devient $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$.

1.2.5 Théorème du moment cinétique (TMC)

On définit le moment cinétique par rapport à l'origine comme $\mathbf{L} \equiv m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, ainsi que \mathbf{M} , le moment de la force \mathbf{F} par rapport à l'origine comme $\mathbf{M} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

En prenant le produit vectoriel de Eq. 1.1 par \mathbf{r} , on obtient le **théorème du moment cinétique**

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (1.2)$$

Intérêt : $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ pour $\mathbf{F} = 0$ ou $\mathbf{F} // \mathbf{r}$ (cas d'une force centrale). Or $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{r}$. $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \text{cst}$, $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}_0$: le mouvement est dans un plan orthogonal à \mathbf{L}_0 .

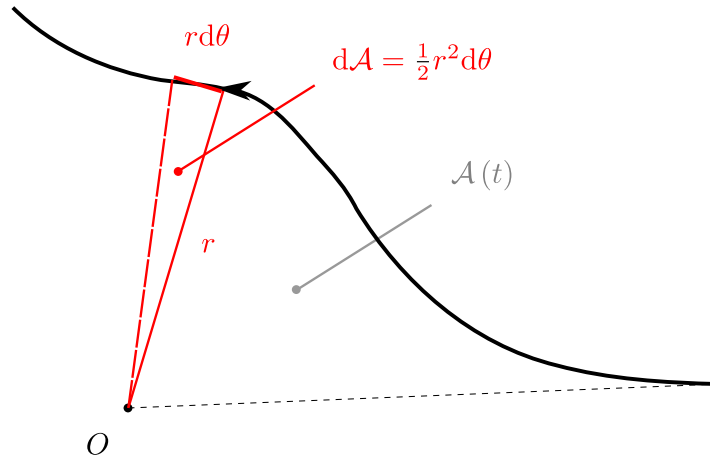


FIGURE 1.1 – Aire sous-tendant une trajectoire.

En coordonnées cylindriques, $\mathbf{L} \cdot \hat{z} = r.r\dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{dA}{dt}$, où A est l'aire du triangle élémentaire engendré par le mouvement du système pendant dt . Dans ce cas, le mouvement s'effectue à vitesse aérolaire constante. C'est la deuxième loi de Kepler, vérifiée pour tout champ de force central (e.g. $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$ ou $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}/r^3$).

Remarque : Pour appliquer le théorème à une origine différente, on fait $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

1.2.6 Énergie

Énergies cinétiques et potentielles

Si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, il existe un champ scalaire V , appelé potentiel, tel que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Le potentiel est défini à une constante près ($V' = V + C$ convient aussi). On appelle aussi $V \equiv E_p$ énergie potentielle.

Dans ce cas, le travail $W_{1 \rightarrow 2}$ fournit par \mathbf{F} pour aller d'un point (1) à un point (2) s'écrit :

$$W_{1 \rightarrow 2} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 dV = V(1) - V(2) = \text{cste.} \quad (1.3)$$

Eq. 1.3 montre que ce travail ne dépend pas du chemin suivi.

En décomposant une force quelconque sous la forme de la somme d'une force conservative et d'une forme non-conservative, i.e. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc}$ avec $\nabla \mathbf{F}_c = 0$ et $\nabla \mathbf{F}_{nc} \neq 0$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla V + \mathbf{F}_{nc}. \quad (1.4)$$

En multipliant scalairement Eq. 1.4 par $\cdot d\mathbf{l} = \cdot \mathbf{v} dt$, on obtient

$$m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = -\nabla V \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.5)$$

i.e.

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -dV + \delta W_{nc}. \quad (1.6)$$

On définit l'énergie cinétique comme $E_c \equiv \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$ (la dépendance en v^2 vient des propriétés d'invariance et d'isotropie de l'espace), ainsi que l'énergie mécanique comme $E_m \equiv E_c + V$. On obtient **le théorème de l'énergie mécanique** :

$$dE_m = \delta W_{nc}, \quad (1.7)$$

ou, sous sa forme intégrale en multipliant scalairement par $d\mathbf{l}$ et en intégrant entre les états (1) et (2) :

$$E_{m,2} - E_{m,1} = W_{nc,1 \rightarrow 2}. \quad (1.8)$$

Cas particulier : $\delta W_{nc} = 0$ si $\mathbf{F}_{nc} = 0$ ou $\mathbf{F}_{nc} \perp d\mathbf{l}$ (ex : force de Coriolis, de Lorentz, tension d'un fil d'un pendule simple). Dans ce cas, l'énergie mécanique est conservée, i.e. $E_m = \text{cste}$.

Remarques :

- En définissant la puissance \mathcal{P} de la force \mathbf{F} comme $\mathcal{P} \equiv \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$, on obtient en divisant Eq. 1.7 par dt le **théorème de la puissance mécanique** :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}. \quad (1.9)$$

- $[E_m, E_c, V] = \text{J}$. Le Joule J est une petite quantité dans la vie de tous les jours (ex : \sim l'énergie qu'il faut à un homme pour monter ~ 1 mm).
- Il existe d'autres formes d'énergie que E_c et V (ex : radioactive, forces nucléaires).
- Il existe d'autres quantités conservées en physique (ex : charge, nombres baryoniques et leptoniques).

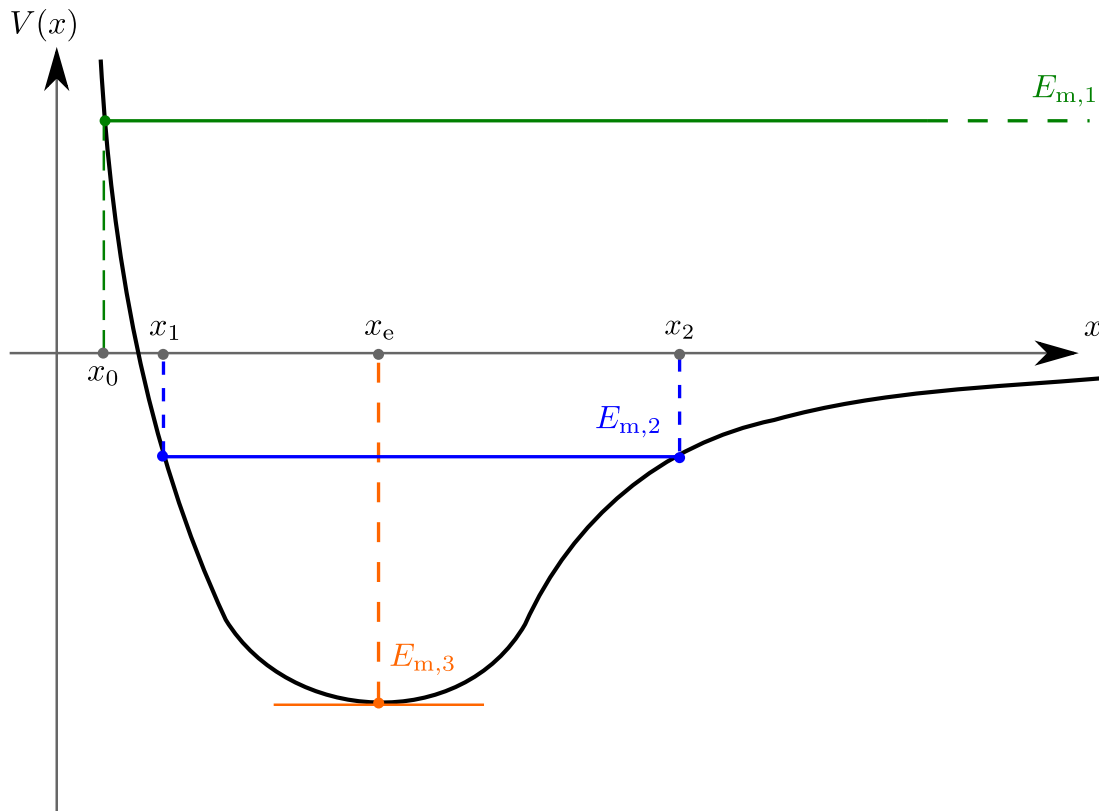


FIGURE 1.2 – Méthode graphique pour déterminer la nature du mouvement 1D d'une particule soumise à des interactions dérivant d'un potentiel.

Parabolisation du potentiel

On considère un problème à une dimension x (1D), où le potentiel se met sous la forme $V(x)$. Dans le cas d'un système conservatif, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E_m = \text{cste}. \quad (1.10)$$

Eq. 1.10 est une équation différentielle *non-linéaire* du premier ordre dont la solution générale s'obtient de manière implicite par une méthode de séparation des variables sous la forme

$$t(x) = \pm \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_m - V(x')]}}. \quad (1.11)$$

Sans expliciter la forme fonctionnelle de la solution, on déduit de l'équation Eq.1.10 que $\forall x, E_m \geq V(x)$ et que $E_m = V(x)$ pour $\dot{x} = 0$. Sur la Fig. 1.2, trois cas sont à distinguer selon la valeur de E_m donnée par les conditions initiales :

1. Cas (1) : $x \geq x_1$: le système peut explorer jusqu'à $x \rightarrow \infty$, on parle d'état libre
2. Cas (2) : $x_1 \leq x \leq x_2$: en l'absence de dissipation, le système ne relaxe *pas* vers $x = x_e$, mais reste confiné et oscille entre les deux valeurs limites x_1 et x_2 . On parle d'état lié.
3. Cas (3) : $x = x_e$: position d'équilibre ($\dot{x} = 0$).

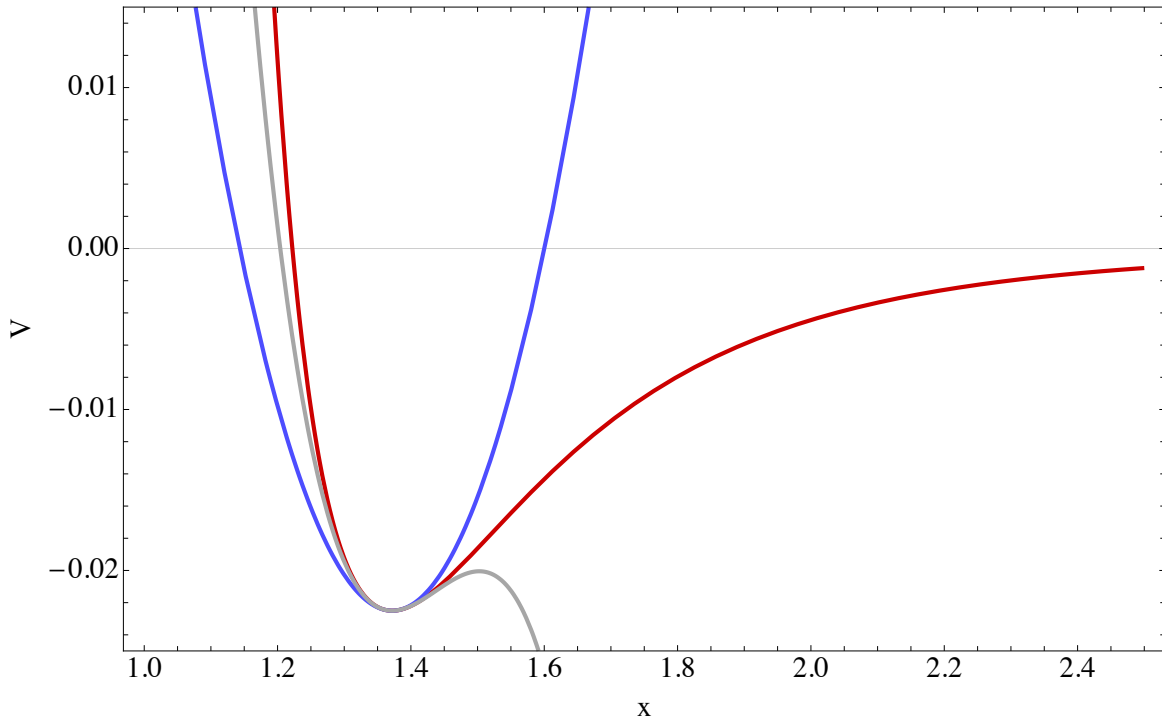


FIGURE 1.3 – Parabolisation (en bleu) d'un potentiel (en rouge) au voisinage de la position d'équilibre stable (la correction d'ordre supérieur est indiquée en gris).

En dérivant Eq. 1.10 par rapport au temps, on obtient

$$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x} \frac{dV}{dx} = 0. \quad (1.12)$$

On retrouve bien le PFD en simplifiant par \dot{x} . La stabilité du système au voisinage de l'équilibre $x = x_e$ s'obtient en faisant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de l'équilibre ($\epsilon = x - x_e \ll 1$) :

$$\ddot{\epsilon} + \frac{1}{m} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_e} \epsilon = 0, \quad (1.13)$$

La nature de la solution de l'équation différentielle Eq. 1.15 dépend du signe de la courbure du potentiel à l'équilibre :

- Si $\frac{1}{m} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_e} = -1/\tau^2 < 0$ (maximum local de potentiel), la solution s'écrit

$$\epsilon = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}. \quad (1.14)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation Eq. 1.14 diverge aux grands temps : l'équilibre est instable.

- Si $\frac{1}{m} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_e} = \omega_0^2 > 0$ (minimum local de potentiel), la solution s'écrit

$$\epsilon = A \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t. \quad (1.15)$$

L'équation Eq. 1.15 est celle d'un oscillateur harmonique : l'évolution d'une perturbation élémentaire se caractérise donc par des oscillations isochrones de pulsation ω_0 non-amorties. L'évolution du système est stable dans le temps car l'amplitude d'une perturbation ne diverge pas dans le temps. L'expression de la pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_e}}{m}} \quad (1.16)$$

s'écrit comme la racine du rapport d'une raideur à une inertie, une forme générale pour les petites oscillations en physique. On aurait pu obtenir l'équation Eq. 1.15 en remplaçant le potentiel $V(x)$ par son approximation parabolique locale

$$V(x) = V(x_e) + (x - x_e) \frac{dV}{dx} \Big|_{x_e} + \underbrace{\frac{(x - x_e)^2}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_e}}_{\text{parabolisation}} \left\{ + \frac{(x - x_e)^3}{6} \frac{d^3V}{dx^3} \Big|_{x_e} + \dots \right\}. \quad (1.17)$$

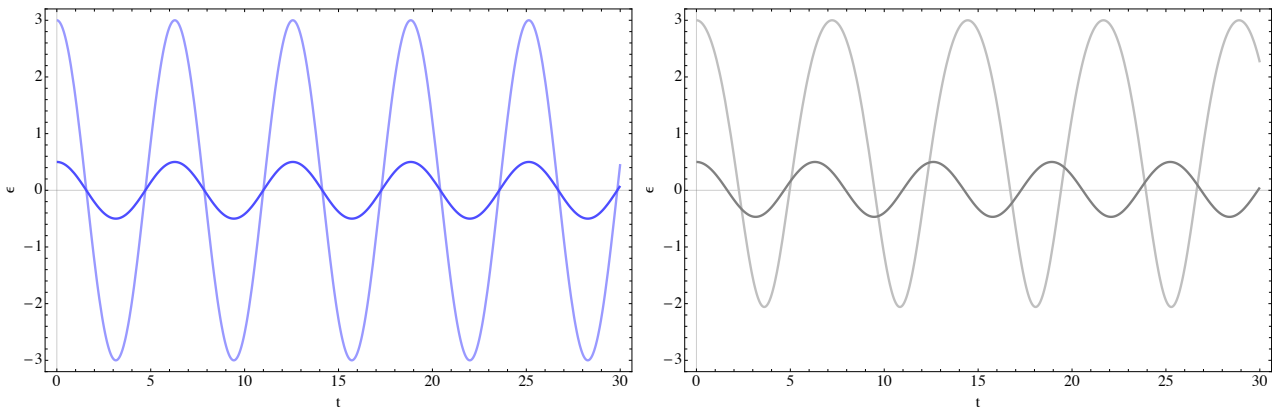


FIGURE 1.4 – Evolution d'un oscillateur harmonique $V(\epsilon) = \epsilon^2$, isochrone et symétrique (à gauche) et anharmonique $V(\epsilon) = \epsilon^2 - 0.6\epsilon^3$, non isochrone et asymétrique (à droite).

Remarques :

- La Fig. 1.2 représente une forme typique de potentiel effectif d'interaction pour la matière rencontrée dans la nature. Le minimum de potentiel permet l'existence d'un état lié et la divergence en zéro assure sa stabilité, en évitant un effondrement de la matière sur elle-même.
- la parabolisation du potentiel ne marche que si V est une fonction régulière de la coordonnée (contre-exemple : une pièce de monnaie qui oscille sur sa tranche).

Théorème du Viriel

Si l'on considère un mouvement *périodique*, l'identité $\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot m\dot{\mathbf{x}}) = \underbrace{\mathbf{x} \cdot m\ddot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}} + m\dot{\mathbf{x}}^2$ se moyenne sur une période en $\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{F} \rangle + \langle 2E_c \rangle = 0$. Dans le cas où la force dérive d'un potentiel de la forme $V(x) = kx^\alpha$, on obtient le théorème du Viriel

$$2\langle E_c \rangle = \alpha \langle V \rangle, \quad (1.18)$$

permettant d'obtenir efficacement des informations sur la répartition énergétique moyenne du système. Ainsi, pour l'oscillateur harmonique correspondant au potentiel parabolique $\alpha = 2$ de l'Eq. 1.17, les énergies cinétiques et potentielles sont équi-réparties sur une période ($\langle E_c \rangle = \langle V \rangle$).

1.3 Changement de référentiel

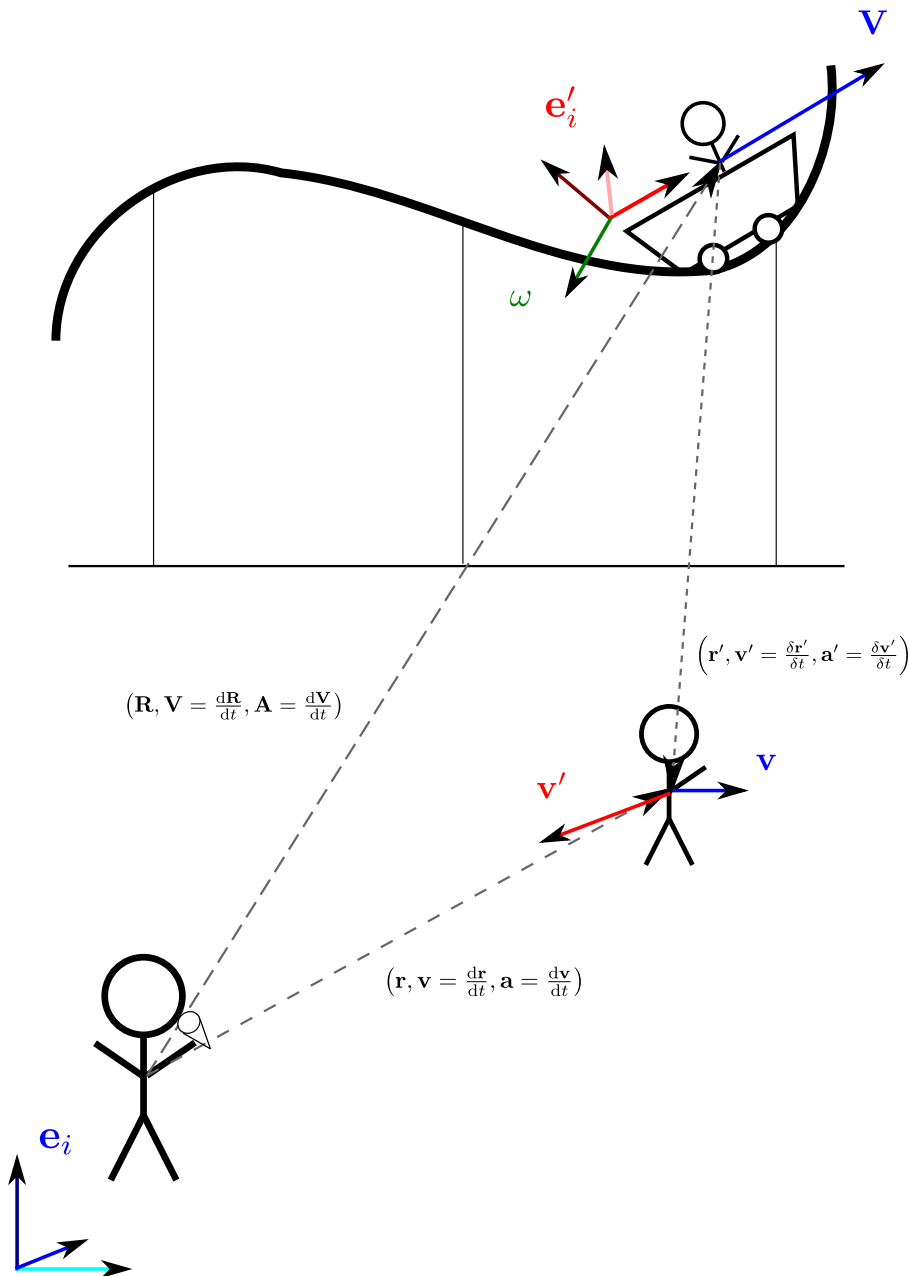


FIGURE 1.5 – La dynamique du marcheur peut être décrite d'un référentiel lié à un passant statique ou des montagnes russes.

Dans un référentiel *galiléen*, le PDF s'exprime comme $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Les interactions physiques sont décrites

par des vecteurs (\mathbf{F}), des quantités indépendantes du système de coordonnées. Pour décrire l'évolution d'un système dans un référentiel quelconque, on cherche à savoir comment \mathbf{a} se transforme d'un référentiel à un autre.

1.3.1 Taux de variation de vecteurs

On veut pouvoir appliquer le PDF dans n'importe quel référentiel. Pour cela, il est tout d'abord nécessaire de voir comment se transforme l'expression des taux de variations d'un référentiel à l'autre. On considère donc deux référentiels :

- \mathcal{R} , un référentiel *galiléen*, dans lequel les coordonnées sont repérées par rapport à un observateur situé en un point O dans un certain repère \mathbf{e}_i .
- \mathcal{R}' , un référentiel *quelconque*, dans lequel les coordonnées sont repérées par rapport à un autre observateur situé en un autre point O dans un autre repère \mathbf{e}'_i (ex : lié à un chariot sur des montagnes russes).

On note respectivement $\frac{d}{dt}$ et $\frac{\delta}{\delta t}$ les taux de variation des grandeurs physique dans les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Par définition, on a $\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = 0$, $\frac{\delta\mathbf{e}'_i}{\delta t} = 0$, mais *a priori*, $\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = 0$.

Théorème (admis) :

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i}_{\text{opérateur rotation}}, \quad (1.19)$$

où $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ donne le vecteur taux de rotation du référentiel \mathcal{R} par rapport au référentiel \mathcal{R}' (si les vecteurs \mathbf{e}'_i tournent dans \mathcal{R} , ses coordonnées changent). On note que si \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} (i.e. \mathcal{R}' est aussi galiléen), $\mathbf{w} = 0$ et $\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = 0$.

Cas général :

Soit \mathbf{B} un vecteur. $\mathbf{B} \equiv \sum_i B_i \mathbf{e}_i = \sum_i B'_i \mathbf{e}'_i$. Par définition, on a $\frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t} \equiv \sum_i \frac{dB'_i}{dt} \mathbf{e}'_i$. Ainsi, avec Eq. 1.19, on obtient

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{B}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}. \quad (1.20)$$

(cf. évolution du champ magnétique dans un référentiel tournant en RMN).

1.3.2 Composition des vitesses et des accélérations

On souhaite pouvoir exprimer le mouvement par rapport à :

- un observateur qui a un mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} . On note \mathbf{R} , $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$, $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ ses positions, vitesse et accélération respectives.
- un référentiel dont l'orientation du système d'axe a une évolution quelconque. On repère par \mathbf{r}' la position du système et on note $\mathbf{v}' = \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t}$, $\mathbf{a}' = \frac{\delta\mathbf{v}'}{\delta t}$ dans ce nouveau référentiel.

On a alors

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (1.21)$$

En utilisant Eq. 1.20 pour le dernier terme du membre de droite, on obtient la **loi de composition des vitesses**

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{V}}_{\text{vitesse de l'obs.}} + \underbrace{\mathbf{v}'}_{\text{vitesse locale}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'}_{\text{vitesse de rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}. \quad (1.22)$$

En prenant le taux de variation de Eq. 1.22 par rapport au temps dans \mathcal{R} , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{V} + \mathbf{v}' + \omega \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{A} + \frac{\delta\mathbf{v}'}{\delta t} + \omega \times \mathbf{v}' + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}' + \omega \times \left(\frac{\delta\mathbf{v}'}{\delta t} + \omega \times \mathbf{r}' \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

En combinant les différents termes, on obtient

$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{A}}_{\text{acc. de l'obs.}} + \underbrace{\mathbf{a}'}_{\text{acc. locale}} + \underbrace{\frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}'}_{\text{terme d'Euler}} + \underbrace{\omega \times (\omega \times \mathbf{r}')}_{\text{terme centrifuge}} + \underbrace{2(\omega \times \mathbf{v}')}_{\text{terme de Coriolis}}. \quad (1.24)$$

En substituant Eq. 1.24 dans le PFD, on obtient un **PFD généralisé en référentiel non-galiléen**

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') - 2m(\omega \times \mathbf{v}') - m\frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}'. \quad (1.25)$$

Si \mathcal{R}' est lui-même galiléen ($\omega = 0$), Eqs. 1.22 et 1.24 se réduisent à $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ (transformation de Galilée) et $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

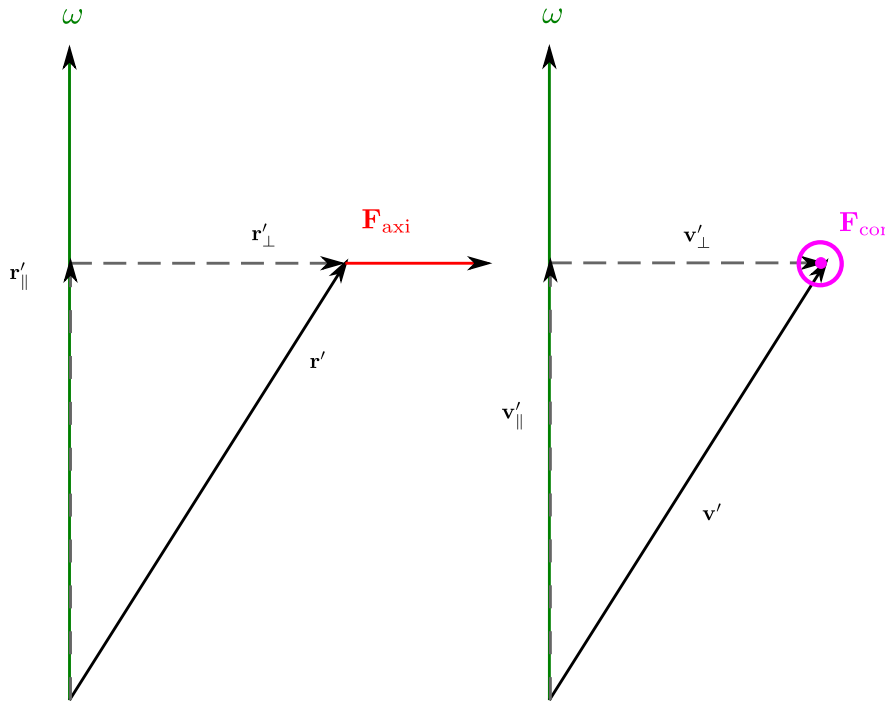


FIGURE 1.6 – Forces axifuge et de Coriolis.

1.3.3 Étude des différents termes

Terme axifuge : On décomposant \mathbf{r}' parallèlement et orthogonalement au vecteur rotation ω (i.e. $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$), on a

$$\mathbf{F}_{\text{axi}} \equiv -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') = -m\omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}. \quad (1.26)$$

Ce terme joue un rôle important dans l'étude des centrifugeuses, des fluides dans un récipient en rotation (surfaces paraboliques)...

\mathbf{F}_{axi} travaille. Dans le cas particulier $\mathbf{r}'_{\parallel} = 0$ (i.e. $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp}$), $\mathbf{F}_{\text{axi}} = -\nabla V_{\text{axi}}$, avec $V_{\text{axi}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

AN : pour estimer des ordres de grandeurs, on peut utiliser $\omega^2 r_{\perp} \simeq 4g \left(\frac{r'_{\perp}}{1\text{m}} \right) \left(\frac{\omega}{1\text{tour.s}^{-1}} \right)^2$, où $g \simeq 9.8\text{m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur sur Terre.

Terme de Coriolis : Ce terme vient de l'existence d'un mouvement (i.e. une vitesse non nulle) dans le nouveau référentiel non-galiléen. En décomposant de la même manière que précédemment $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}'_{\parallel}$, on a

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = -2m\omega v'_{\perp} \mathbf{e}_{\text{out}}, \quad (1.27)$$

où \mathbf{e}_{out} est le vecteur unitaire dans la direction azimutale par rapport à $\boldsymbol{\omega}$, dirigé dans le sens horaire. Ce terme joue un rôle important dans le problème de déviation d'une chute libre, des alizés, des courants marins, de l'érosion des berges et des rails des trains, de balistique à longue portée...

Tout comme la force magnétique, la force de Coriolis ne travaille pas ($\mathbf{F}_{\text{cor}} \cdot d\mathbf{l}' = 0$ car $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v} dt = 0$).

Exemple : On considère une pierre posé au sol. Si l'on décrit son mouvement dans un référentiel tournant à $\boldsymbol{\omega}$, elle orbite à une distance fixe de l'observateur l . Quelles forces maintiennent la pierre sur son orbite dans ce référentiel? Le PFD dans le référentiel tournant donne $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{axi}} + \mathbf{F}_{\text{corr}}$ ($\mathbf{A} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$). En projetant sur \mathbf{e}'_r et \mathbf{e}'_{θ} , on obtient

$$-m \frac{v_{\theta}'^2}{r} = -2m\omega^2 l + \omega^2 l = -m\omega^2 l, \quad (1.28)$$

$$r^2 \dot{\theta} = \text{cste}, \quad (1.29)$$

qui admet bien comme solution $r = l = \text{cste}$ et $v_{\theta} = l\omega = \text{cste}$. Ce sont donc les contributions axifuge et de Coriolis qui assurent l'accélération centrale requise pour maintenir la pierre sur son orbite dans le référentiel non-galiléen.

AN : On peut mettre l'accélération de Coriolis sous la forme $2mv_{\perp} \simeq 4.10^{-3} \text{m.s}^{-2} \sin \lambda \left(\frac{v_{\perp}}{100 \text{km.h}^{-1}} \right)$, où $\sin \lambda$ est la latitude du référentiel terrestre considéré. Cette expression nous montre que le terme de Coriolis dû à la rotation de la Terre dans un référentiel terrestre est souvent perturbatif devant l'accélération de la pesanteur. Il requiert des grandes vitesses, des temps d'intégration longs ou l'absence d'autres effets pour être perçu.

Terme d'Euler : Se ressent dans des situations particulières. Par exemple, lorsque en voiture on appuie sur l'accélérateur dans un virage, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ augmente et on est collé au siège (effet similaire à \mathbf{A} , mais terme source différent). Pour le référentiel terrestre, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ vient de la précession des équinoxes : ce terme est négligeable.

1.4 Systèmes multiples

1.4.1 Actions réciproques

Principe : Pour deux points matériels en interaction, le **principe des actions réciproques** (cf. troisième principe de Newton) assure

$$\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{f}_{2 \rightarrow 1}, \quad (1.30)$$

où $\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{f}_{2 \rightarrow 1}$ sont des forces mesurées au même instant. Ainsi, on ne peut trouver un système accéléré que si il existe un autre système accéléré ailleurs. Exemple : la détection d'exo-planètes par la méthode des vitesses radiales (la planète fait tourner son étoile autour du centre de masse. La composante radiale de la vitesse décale les raies observées de l'étoile par effet Doppler).

Dans le cas du champ magnétique, \mathbf{f} est non instantanée, et la loi Eq. 1.30 ne marche pas. Il faut tenir compte de l'impulsion du champ (cf. relativité).

1.4.2 N points en interaction

On veut généraliser les théorèmes de la mécanique aux systèmes de N points en interaction. On se place dans un référentiel galiléen arbitraire.

- *Masse totale* : par additivité la masse totale M du système vaut $M = \sum_i m_i$.
- *Quantité de mouvement* : En sommant les PFD appliqués à chacune des particules, on obtient

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{f}_i. \quad (1.31)$$

La forme du membre de gauche de Eq. 1.31 suggère naturellement d'introduire le centre de masse, ou centre d'inertie du système, de coordonnée $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$ et de vitesse $\mathbf{V} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt}$. Ainsi :

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}. \quad (1.32)$$

On décompose les forces du membre de droite selon les forces externes $\mathbf{f}_{\text{ext},i}$ appliquées aux particules (ex : gravité) et les forces entre particules, appelées forces internes $\mathbf{f}_{\text{int},i}$. D'après le principe des actions réciproques,

$$\sum_i (\mathbf{f}_{\text{ext},i} + \mathbf{f}_{\text{int},i}) = \underbrace{\mathbf{F}_{\text{ext}}}_{\equiv \sum_i \mathbf{f}_{\text{ext},i}} + \underbrace{\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{f}_{2 \rightarrow 1}}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0}, \quad (1.33)$$

En utilisant les relations Eqs. 1.32 – 1.33 dans Eq. 1.31, on obtient

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (1.34)$$

Eq. 1.34 est un PFD pour le *centre de masse* du système.

Il est important de noter que Eq. 1.34 ne permet de connaître *qu'une partie* du mouvement du système. Il manque $N - 1$ équations pour décrire l'évolution par rapport au barycentre (cf. on réduit le lancer d'un bola au jet d'une pierre).

Il est naturel de décrire le mouvement par rapport à des coordonnées dont l'origine est au centre de masse du système $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i$. Par définition,

$$M\mathbf{R} = \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i), \quad (1.35)$$

ce qui donne les deux relations importantes

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad (1.36)$$

$$\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0. \quad (1.37)$$

- *Moment angulaire* : En multipliant vectoriellement les PFD individuels des particules par \mathbf{r}_i et en sommant les contributions, on obtient

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i. \quad (1.38)$$

On a

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{M}_{\text{ext}} + \underbrace{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{2 \rightarrow 1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{1 \rightarrow 2}}_{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{f}_{1 \rightarrow 2}} + \dots, \quad (1.39)$$

où l'on a défini le *moment des forces extérieures* $\mathbf{M}_{\text{ext}} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{\text{ext},i}$. On note qu'il existe un point A , appelé **point d'application de la force** \mathbf{F}_{ext} , tel que $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_{\text{ext}}$.

La notion de point d'application d'une force est importante lorsque l'on étudie le mouvement d'un système due à la résultante d'un champ de force, par exemple la pression sur un barrage, la poussée d'Archimède (centre de poussée),...

De manière importante, il est nécessaire que $\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, i.e. que $\mathbf{f}_{1 \rightarrow 2}$ soit dirigée selon la ligne qui relie les particules 1 et 2, pour que $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} = 0$. Dans ce cas, Eq. 1.39 devient

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{M}_{\text{ext}} + 0. \quad (1.40)$$

Enfin, en décomposant le membre de gauche de l'équation Eq. 1.38 par rapport aux quantités relatives au centre de masse, on obtient

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i}_{\equiv \mathbf{L}^*, \% \text{ au c.d.m.}} \quad (1.41)$$

où \mathbf{L}^* est le moment cinétique des particules par rapport au centre de masse. En utilisant substituant Eqs. 1.41 et 1.40 dans 1.38, on obtient une généralisation du TMC pour un système de particules

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{ext}} + 0, \quad (1.42)$$

avec $\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{L}^*$ et $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_{\text{ext}} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{i,\text{ext}}$.

- En intégrant les PFD individuels sur un petit déplacement élémentaire individuel $d\mathbf{l}_i$ et en sommant, on obtient

$$\sum_i \int m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot d\mathbf{l}_i = \int \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{l}_i. \quad (1.43)$$

On a tout d'abord

$$\int m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot d\mathbf{l}_i = d \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right). \quad (1.44)$$

En décomposant les vitesses par rapport à celle du centre de masse et en utilisant Eq. 1.37, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i)^2 = \underbrace{\frac{1}{2} M \mathbf{V}^2}_{\text{barycentrique}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i{}^2}_{\equiv E_{c^*}}. \quad (1.45)$$

En décomposant les forces en termes extérieurs et intérieurs au système, on a pour le terme interne

$$\sum_i \int \mathbf{f}_{i,\text{ext}} \cdot d\mathbf{l}_i = \sum_i \int \nabla V_{i,\text{ext}} \cdot d\mathbf{l}_i = d \left(- \sum_i V_{i,\text{ext}} \right). \quad (1.46)$$

En combinant les termes par paires de particules

$$\int \mathbf{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\mathbf{l}_2 + \dots = - \int \nabla V_{12} \cdot d\mathbf{l}_{12} + 0 = d(-V_{12}) + 0, \quad (1.47)$$

où $d\mathbf{l}_{12} \equiv d\mathbf{l}_1 - d\mathbf{l}_2$ (on a supposé que les interactions entre les différentes particules sont conservatives). Ainsi, en sommant sur toutes les paires

$$\sum_i \int \mathbf{f}_{i,\text{ext}} \cdot d\mathbf{l}_i = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} + 0. \quad (1.48)$$

Enfin, en regroupant les contributions cinétiques et potentielles, on obtient un **théorème de l'énergie mécanique généralisé** :

$$E_m = E_c + V = \text{cste} + 0, \quad (1.49)$$

avec $E_c \equiv \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + E_c^*$ et $V \equiv \sum_i V_{i,\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$.

Remarques :

- Dans le cas d'un référentiel non-galiléen, les termes axifuge, de Coriolis,... doivent être inclus.
- Le référentiel du centre de masse ($\mathbf{R} = 0, \mathbf{V} = 0$) est souvent un choix intéressant, car dans ce cas, le moment et l'énergie cinétiques du système se réduisent à $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i$ et $E_c = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i{}^2$. Toutefois, ce référentiel n'est pas galiléen a priori.
- Dans l'approximation du point matériel, on restreint un système à son centre de masse \mathbf{R} affecté de sa masse totale M (i.e. on néglige l'extension spatiale du système \mathbf{r}'_i). Dans ce cas, $\mathbf{L}^* = 0, E_c^* = 0$ et on retrouve les théorèmes de la mécanique d'un point.

1.4.3 Rotation autour d'un axe fixe d'un système indéformable

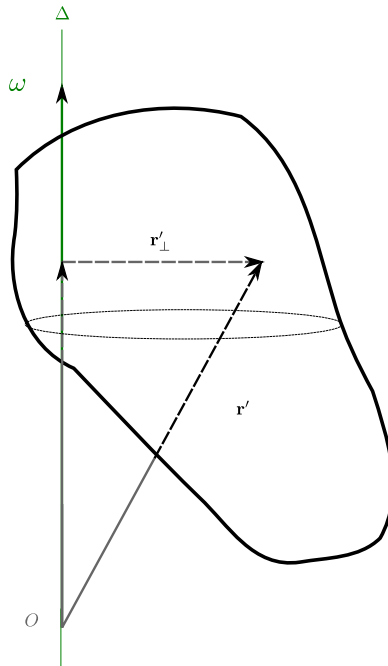


FIGURE 1.7 – Paramétrisation du solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe.

On considère maintenant le cas particulier, du **solide indéformable**, i.e. une distribution continue et rigide de matière. Ainsi, $M \rightarrow dm$ et $\forall i, j, \frac{d}{dt} (|\mathbf{r}_{ij}|) = 0$. L'hypothèse de rigidité permet de diminuer le nombre de variables nécessaires à la description du solide : un solide indéformable a 6 degrés de liberté (3 de translation et 3 de rotation).

On admet les propriétés suivantes :

- *Propriété 1* : Le PFD et le TMC permettent de décrire l'évolution complète du solide (6 équations pour 6 inconnues).

- *Propriété 2* : Dans le cas d'une **rotation autour d'un axe fixe**, les expressions de \mathbf{L}^* et E_c^* s'expriment simplement. Si l'on note ω le vecteur rotation instantané du solide, la vitesse en chaque point du solide s'exprime par

$$\mathbf{v}_{1 \text{ pt} \in \text{sol.}} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (1.50)$$

Eq. 1.50 est dérivée de l'expression du taux de variation pour une base Eq. 1.19. Avec Eq. 1.50 et en notant $\mathbf{r}_{\perp, \Delta}$, la projection L_{Δ}^* du moment cinétique sur l'axe *fixe* de rotation Δ s'écrit

$$L_{\Delta}^* \equiv \mathbf{L}^* \cdot \mathbf{e}_{\Delta} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_{\Delta} = \omega \underbrace{\int r_{\perp}^2 dm}_{\equiv I_{\Delta}}, \quad (1.51)$$

où $I_{\Delta} \equiv \omega \int r_{\perp}^2 dm$ est le **moment d'inertie par rapport à l'axe fixe Δ** .

De la même manière, on a

$$E_c^* = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_{\perp}^2 dm = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2. \quad (1.52)$$

En résumé, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe,

$$L_{\Delta}^* = \omega I_{\Delta}, \quad (1.53)$$

$$E_c^* = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2. \quad (1.54)$$

Remarques :

- La condition d'équilibre statique s'écrit par une absence de forces *et* de moment extérieurs au système (le solide n'est ni en translation, ni en rotation).
- Pour déterminer \mathbf{R} et I_{Δ} , on se sert des propriétés d'invariance et de symétrie du système.
- Dans le cas où l'axe de rotation n'est pas fixe, l'étude est plus compliquée (formalisme matriciel, cf. toupie).
- Pour une sphère pleine de densité uniforme : $I_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$ (% à son centre). Pour une barre de longueur l , $I_{\Delta} = \frac{1}{12} m l^2$ (% à son centre)

1.4.4 Lois de conservation

En appliquant le PFD et le TMC à un système isolé :

- $\mathbf{P} \equiv M \mathbf{v} = \text{cste}$ ($\mathbf{P} = 0$ dans le référentiel barycentrique).
- $\mathbf{L} = \text{cste}$. Cette condition est aussi un test pour savoir si un référentiel est galiléen (par exemple en étudiant le mouvement d'un gyroscope).

Dans le cas particulier d'un solide en rotation au tour d'un axe fixe, $L_{\Delta}^* = I_{\Delta} \omega = \text{cste}$. Une augmentation de la fréquence de rotation est associée à une diminution de moment d'inertie I_{Δ} (par exemple une étoile qui s'effondre tourne plus vite).

Exemple : le patineur. Un patineur qui resserre ses bras ($I_{\Delta} = \int r_{\perp}^2 dm$ diminue car r_{\perp} diminue) se met à tourner plus vite sur lui-même (ω augmente).

Remarques :

- Ce exemple est marche, car les frottements sont faibles sur la glace ($M_{\Delta, \text{frott}} \sim 0$).
- L_z^* est conservé, mais *pas* E_c : le patineur travaille contre la force axifuge pour serrer les bras (avec de gros poids au bout des bras, il ne pourrait pas les ramener contre lui). D'après ce qui précède, $E_c = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 = \frac{1}{2} L_z^* \omega$ augmente.

- Pour retrouver ce résultat à partir d'une interprétation en terme de forces, on introduit le référentiel qui tourne avec le patineur à la vitesse angulaire non constante $\dot{\theta}(t)$, et on se dote d'une base polaire $(\mathbf{e}'_r, \mathbf{e}'_\theta)$ orientée selon le sens de rotation du patineur. Par construction, dans ce référentiel, les bras du patineur ont un mouvement purement radial et les forces qui s'appliquent aux bras sont les forces axifuge (radiale), de Coriolis et d'Euler (azimutales). En projetant le PFD selon \mathbf{e}'_θ , on obtient

$$0 = \underbrace{-2m\omega v'_r}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{mr'\dot{\omega}}_{\text{Euler}} = \frac{d}{dt} (mr'^2\omega). \quad (1.55)$$

Cet exemple montre que les termes non-galiléens de Coriolis et d'Euler sont liés à la conservation du moment cinétique du système.

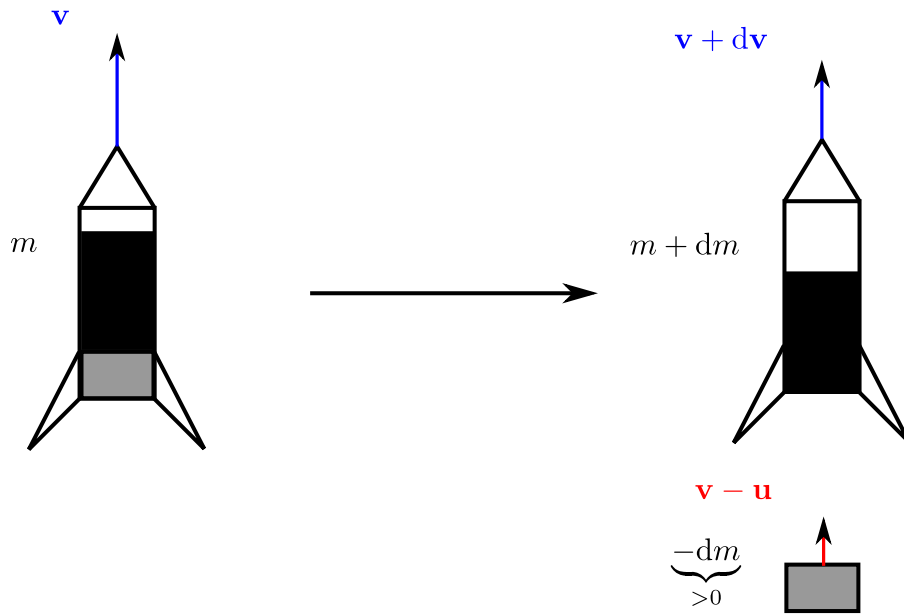


FIGURE 1.8 – Bilan de quantité de mouvement à la fusée et ses gaz pendant un interval de temps Δt .

Exemple : la fusée. On considère une fusée (i.e. le bâti + fluides liés à la combustion), qui éjecte ses gaz d'échappement à une vitesse relative $-\mathbf{u}$. On regarde le mouvement de la fusée du à la poussée des gaz dans un référentiel galiléen \mathcal{R} coïncidant avec la fusée à $t = 0$. Le système bâti+fluides étant isolé, la quantité de mouvement totale \mathbf{P} est constante. En projetant selon la direction du mouvement de la fusée, on a entre deux instants t et $t + dt$

$$P(t) = mv, \quad (1.56)$$

$$P(t + dt) = \underbrace{(m + dm)(v + dv)}_{P_{\text{fluide restant+bâti}}(t+dt)} + \underbrace{(-dm)}_{\text{masse sort.}} \times \underbrace{(v - u)}_{\text{vit. d'échap ds } \mathcal{R}}. \quad (1.57)$$

En égalant les deux termes de Eq. 1.57, on obtient

$$mdv = -udm. \quad (1.58)$$

En intégrant Eq. 1.58 entre deux états (1) et (2), on obtient l'incrément de vitesse du à la poussée des gaz :

$$\Delta v \equiv v_2 - v_1 = u \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right). \quad (1.59)$$

Remarques :

- Eq. 1.59 est indépendante du temps et u est fixée par la technologie ($u \sim 2500 - 4000 \text{ m.s}^{-1}$). Comme $\ln(m_1/m_2) \sim \mathcal{O}(1)$, Δv est trop faible pour que la fusée atteigne la vitesse de libération. On doit donc construire des fusées à plusieurs étages.
- En divisant Eq. 1.58 par dt , on peut mettre l'équation d'évolution sous la forme d'un PFD pour système ouvert

$$m(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{u} \frac{dm}{dt}. \quad (1.60)$$

1.5 Validité de la mécanique classique

1.5.1 Limitations

- $v \ll c$, sinon relativité restreinte.
- $r \gg \frac{Gm}{c^2}$ (rayon d'Einstein), sinon relativité générale.
- $d \gg h/p$, sinon mécanique quantique.
- $\Delta l \gg \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}$ et $\Delta t \gg \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$ (longueur et temps de Planck), sinon gravitation quantique relativiste.

1.5.2 Intérêts

La mécanique classique marche *très bien* aux échelles humaines (ex : fusées). Elle a amené des développements théoriques modernes : les problèmes d'analyse sont transformés en problèmes de géométrie dans le plan de phase (x, \dot{x}) (systèmes dynamiques et chaos, ex : Fig. 1.9). La mécanique classique permet d'appréhender des concepts en mécanique quantique ou en relativité.

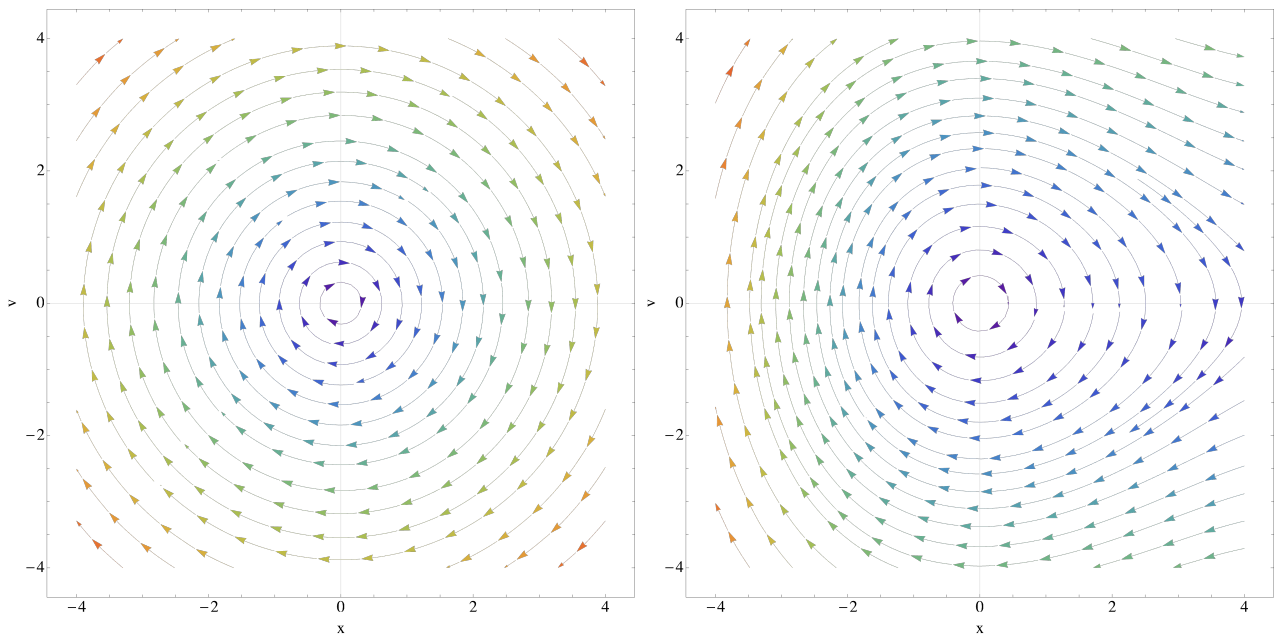


FIGURE 1.9 – Portraits de phase d'un oscillateur harmonique $V(x) = x^2$ (à gauche) et anharmonique $V(x) = x^2 - 0.6x^3$ (à droite).

Gravitation classique

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la dynamique d'un point était donnée par le principe fondamental de la dynamique $m_i \mathbf{a} = \mathbf{F}$ sans avoir détaillé la nature de la force \mathbf{F} . Dans la nature, il existe quatre interactions fondamentales : les interactions électro-faibles (transmise par les boson W^+ , W^- et Z) et électro-fortes (transmise par les gluons), électromagnétiques (transmise par les photons) et la gravitation (existe-il un graviton?). La portée d d'une interaction fondamentale est $d = \mathcal{O}(\hbar/m_{\text{boson}}c)$, ce qui explique que les interactions faibles et fortes sont de faibles portées alors que les interactions électromagnétiques et gravitationnelles sont de portée infinie. Finalement, les trois premières interactions ont été intégrées à un modèle théorique unique, la gravitation étant étudiée séparément. C'est cette dernière que nous allons aborder dans ce chapitre, sous l'angle de la mécanique classique.

2.1 Champ de gravitation d'une distribution de masse

2.1.1 Force gravitationnelle

La force gravitationnelle écrit

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

où m_g est la masse gravitationnelle et \mathbf{g} est le champ de gravitation. Le **principe d'équivalence** stipule que

$$m_g = m_i = m, \quad (2.2)$$

c'est à dire que la résistance à la mise en mouvement d'un corps et sa propension à être soumis à l'interaction gravitationnelle sont déterminées par une seule et même constante, la masse du corps. Au XIX^es, ce principe a été validé expérimentalement, par Cavendish ou encore Etvös. Les tests consistent généralement à mettre en compétition un effet inertiel (type Coriolis ou axifuge) et la force de gravité. La théorie moderne de la relativité générale relie directement m_g à la structure non-euclidienne de l'espace-temps, i.e. à l'accélération et donc à m_i .

2.1.2 Propriétés du champ de gravitation

Le champ de gravitation est caractérisé par les valeurs de son rotationnel et de sa divergence. On a

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0, \quad (2.3)$$

D'après le chapitre précédent, il existe donc scalaire ϕ appelé potentiel gravitationnel, défini à une constante près, tel que

$$\mathcal{G} \equiv -\nabla \phi. \quad (2.4)$$

En particulier, $\mathbf{F} = -\nabla V = -\nabla(m\phi)$ est une force conservative. Par ailleurs,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi\mathcal{G}\rho, \quad (2.5)$$

où ρ est la densité volumique de matière et \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation. $\mathcal{G} = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est une constante *mesurée* (valeur donnée par le CODATA). En intégrant l'équation locale Eq. 2.5 sur un volume élémentaire dV d'élément de surface $d\mathbf{S}$, on obtient

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{g} dV = -4\pi\mathcal{G} \iiint \rho dV. \quad (2.6)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky sur le membre de gauche de l'équation Eq. 2.6 et en définissant $M_{\text{int}} \equiv \iiint \rho dV$ la masse contenue dans le volume dV , on obtient une équation intégrale appelée **théorème de Gauss pour la gravitation**. En prenant le gradient de Eq. 2.6 et en utilisant Eq. 2.4, on obtient l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G}\rho. \quad (2.7)$$

Remarques :

- Les équations Eqs. 2.3 – 2.5 sont linéaires. Les solutions sont donc additives et l'on peut appliquer le principe de superposition.
- En mécanique classique, \mathbf{F} est une force instantanée : un corps placé dans le champ gravitationnel d'une distribution de masse qui évolue ressent instantanément les modifications du champ gravitationnel. En relativité générale, l'interaction gravitationnelle se propage à la vitesse c par ondes gravitationnelles.
- Il est possible de faire l'analogie électrostatique suivante : $\mathbf{g} \leftrightarrow \mathbf{E}$, $-4\pi\mathcal{G}\rho \leftrightarrow \rho_c/\epsilon_0$, $\phi \leftrightarrow V$, mais contrairement à la charge qui peut être positive ou négative, la masse est uniquement positive.
- Le point d'application de \mathbf{F} , appelé centre de gravité, est à priori différent du centre de masse si le champ \mathbf{g} est non-uniforme.

2.1.3 Champ de gravitation de distributions de masses

Point matériel

On cherche le champ de gravitation exercé par la distribution ponctuelle de masse $\rho = M\delta(\mathbf{r})$, où δ désigne la distribution de Dirac (on a placé l'origine du repère sur la masse - si ce n'est pas le cas, on effectue la transformation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$). L'équation de Poisson associée à cette distribution ponctuelle est

$$\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G}M\delta(\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

dont on admet que la solution, obtenue par transformation de Fourier, est

$$\phi = -\frac{\mathcal{G}M}{r}, \quad (2.9)$$

où l'on a choisit la constante du potentiel pour avoir $\phi(\infty) = 0$. D'après Eq. 2.9, on a

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.10)$$

où \mathbf{e}_r est le vecteur unitaire dans la direction radiale. Un autre point matériel de masse m placé dans un tel champ de force subit une force

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.11)$$

Il subit donc une force centrale attractive.

En particulier, le PFD appliqué à la masse m s'écrit

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\mathbf{e}_r. \quad (2.12)$$

Orbite circulaire :

- Parmi les solutions de l'équation Eq. 2.12 (cf. Sect. 2.2.2) se trouve une orbite évidente, l'orbite circulaire de rayon r_0 ($\mathbf{r} = r_0\mathbf{e}_r$, $\mathbf{v} = v_0\mathbf{e}_\theta$) telle que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{v_0^2}{r_0}\mathbf{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M}{r_0^2}\mathbf{e}_r, \quad (2.13)$$

i.e. satisfaisant $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_0}}$. En utilisant $T = 2\pi/\omega_0$ où $\omega_0 = v_0/r_0$, on obtient la relation

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}, \quad (2.14)$$

appelée relation de Kepler pour l'orbite circulaire (il suffit de faire $r \leftrightarrow a$ pour avoir la relation dans le cas de l'orbite elliptique, cf. Sect. 2.2.3).

- Par ailleurs, le moment angulaire par unité de masse $l \equiv r_0v_0$ est pour l'orbite Keplerienne circulaire $l = \sqrt{\mathcal{G}Mr_0}$, qui est une fonction croissante de la distance à l'objet central. Cette relation est à mettre en perspective avec le fait que le Soleil contient l'essentiel de la masse du Système Solaire, mais que Jupiter contient l'essentiel de son moment angulaire.
- En appliquant le théorème du Viriel à ce potentiel en $1/r$ pour la trajectoire circulaire, on obtient $0 = -V + 2E_c$, i.e. $E_m = V/2 < 0$ (la trajectoire circulaire est bien liée).

Invariances et symétries :

- Par invariance par rotation, le potentiel gravitationnel d'une distribution à symétrie sphérique de masse se met sous la forme $\phi = \phi(r)$. Ainsi, $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$. Le théorème du moment cinétique assure alors que le moment cinétique \mathbf{L} est une quantité conservée (en particulier, le mouvement s'effectue dans un plan et la loi des aires est vérifiée).
- Avancé : cet exemple constitue un cas particulier du *théorème de Noether*, qui associe à toute invariance par transformation continue une quantité conservée.
- Le théorème de superposition assure que le champ de gravitation résultant de deux masses symétriques par rapport à un plan est la somme vectorielle des champs individuels des masses et par conséquent, est dans le plan de symétrie des masses.
- Par extension, si la distribution de masse possède un plan de symétrie \mathcal{S} , alors pour tout point M de \mathcal{S} , $\mathbf{g}(M) \in \mathcal{S}$.

Sphère

On considère maintenant le champ de gravitation créé à l'extérieur d'une sphère homogène isotrope de densité quelconque (Fig. 2.1).

Invariances et symétries :

- Par invariance par rotation, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(r)$.
- Par symétrie, $\mathbf{g}(P) \in$ tout plan contenant \mathbf{SP} , ce qui implique $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_r$.

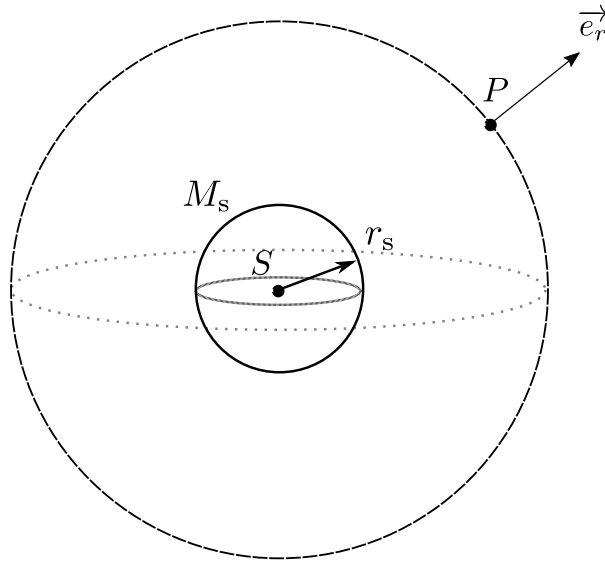


FIGURE 2.1 – Théorème de Gauss sur une sphère homogène isotrope.

- En combinant les deux résultats précédents, on obtient $\mathbf{g} = g(r)\mathbf{e}_r$.

En appliquant le théorème de Gauss sur la sphère de centre S et de rayon SP , on obtient

$$\iint g(r)\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}. \quad (2.15)$$

Cas important : $r \geq r_s$. Dans le cas, le membre de gauche de l'équation Eq. 2.15 s'écrit $g(r)4\pi r^2$. Ainsi, à l'extérieur de la sphère,

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M_{\text{int}}}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (2.16)$$

qui est aussi de manière remarquable le champ créé par une masse ponctuelle M_{int} située en S .

Remarques :

- Il est à retenir que la loi en $1/r^2$ est valable pour un point matériel où à l'extérieur d'une sphère, ce qui constitue un excellent modèle pour une étoile ou une planète.
- Le théorème de Gauss (Eq. 2.15) ne contient que l'information sur la divergence de g . L'information sur le rotationnel est cachée dans les symétries et les invariances ($\nabla \times [g(r)\mathbf{e}_r] = 0$).
- L'expression donnée par Eq. 2.16 peut aussi se retrouver par superposition de champs créés par des points matériels.
- Pour $r < r_s$, g dépend de la distribution de masse $\rho(r)$. Le théorème de Gauss assure une dépendance linéaire $g \propto r$ uniquement dans le cas d'une densité uniforme $\rho = \rho_0$ (ce qui n'est par exemple pas le cas dans une étoile).

Autres géométries

Il est à noter qu'il existe d'autres potentiels que les potentiels en $1/r$ caractéristiques des distributions sphériques. Par exemple, le potentiel typique d'une galaxie est donné par

$$\phi(r, z) = \frac{v_0^2}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 + \left(\frac{z}{qr_c} \right)^2 \right], \quad (2.17)$$

avec $0 < q < 1$. Ainsi, la vitesse v_c de l'orbite circulaire en $z = 0$ s'écrit $v_c = \frac{rv_0}{\sqrt{r_c^2 + r^2}}$. En particulier, si $r \gg r_c$, $v \sim v_0$ (courbe de rotation plate, i.e. indépendantes de r , interprétée comme résultant de la

contribution d'une source de matière invisible au potentiel galactique appelée *matière noire*).

Le cas d'une distribution de masse quelconque est généralement compliquée (Fig. 2.2). Toutefois,

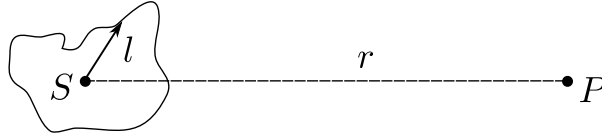


FIGURE 2.2 – Distribution quelconque de masse : on effectue un développement multipolaire pour $r \gg l$.

en se plaçant à une distance r très supérieur à la taille caractéristique de la distribution l , on peut approximer \mathbf{g} par la méthode du développement multipolaire, i.e.

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}}{r^2}\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{A}(r, \theta)}{r^4}l^2 + \dots \quad (2.18)$$

Réduire le membre de droite de l'équation Eq. 2.18 à son premier terme (terme monopolaire) revient à traiter la distribution comme une masse ponctuelle. En incluant la correction d'ordre supérieur (terme quadrupolaire) permet par exemple d'inclure des déviations aux lois de Kepler (la force n'est plus centrale). Note : il n'y a pas de terme dipolaire, car il n'existe pas de masse négative.

2.2 Mouvement dans un champ en $1/r^2$

2.2.1 Quantités conservées

On étudie le mouvement d'une masse ponctuelle de masse m soumise à la force $\mathbf{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\mathbf{e}_r$. On note premièrement que $\mathbf{F} \parallel \mathbf{e}_r$: le TMC assure que le moment cinétique \mathbf{L} est une constante. En particulier, le mouvement se fait dans le plan $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ que l'on paramétrise par des coordonnées polaires (r, θ) , et la composante du moment angulaire orthogonale à la trajectoire L_z est une constante. Ainsi

$$l = \frac{L_z}{m} = r^2\dot{\theta} = \text{cste.} \quad (2.19)$$

Par ailleurs, $\mathbf{F} = -\nabla V$: \mathbf{F} est conservative. Ainsi, l'énergie mécanique est une constante du mouvement, i.e.

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}, \quad (2.20)$$

que l'on peut réécrire en utilisant Eq. 2.19

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{l^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}. \quad (2.21)$$

Les équations Eqs. 2.20 et Eq. 2.19 sont respectivement équivalentes aux projections des composantes radiales et azimutales du PDF. Ainsi, Eq. 2.21 contient bien toute l'information physique sur le mouvement du corps.

Le problème d'un corps dans un champ en $1/r^2$ est un problème 2D comme vu ci-dessus, et non 1D. Toutefois, la structure mathématique de l'équation Eq. 2.21 est la même que celle obtenue dans le problème du mouvement d'une particule dans un potentiel en 1D. On peut donc réutiliser la méthode graphique vue pour caractériser les trajectoires admissibles, en comparant E_{m} au potentiel effectif

$$V_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{2}m\frac{l^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}. \quad (2.22)$$

On étudie la signification physique de chacun des deux termes du membre de droite de l'équation Eq. 2.22 :

- Le terme $\frac{1}{2}m\frac{l^2}{r^2}$ correspond au potentiel effectif d'une particule libre en translation rectiligne uniforme. La trajectoire ne passe pas nécessairement par l'origine. Elle se rapproche au plus près d'une distance r_{\min} telle que $l = r_{\min}v_0$, où l et v_0 sont les normes respectives du moment angulaire et de la vitesse du corps (Fig. 2.4).

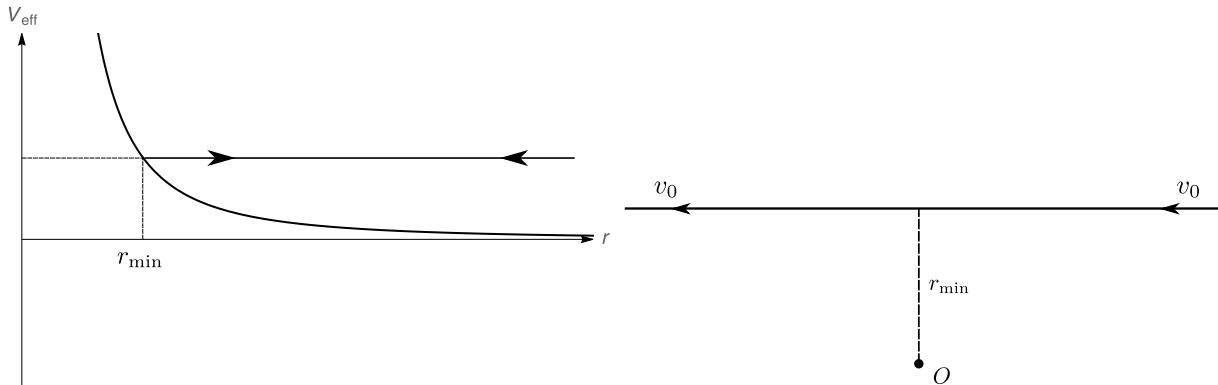


FIGURE 2.3 – Potentiel effectif et trajectoire d'une particule libre. La particule est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0 . La distance minimale d'approche par rapport à l'origine du repère dépend du moment angulaire l (constant).

- La contribution du potentiel gravitationnel $-\frac{GMm}{r}$ implique l'existence de deux types de trajectoires possibles : des trajectoires libres à $E_m \geq 0$ et des trajectoires liées à $E_m < 0$ (Fig. 2.4). Il est à noter qu'à ce stade, il n'est pas possible de savoir si la trajectoire est fermée (e.g. ellipse) ou non (e.g. courbe en trèfle...).

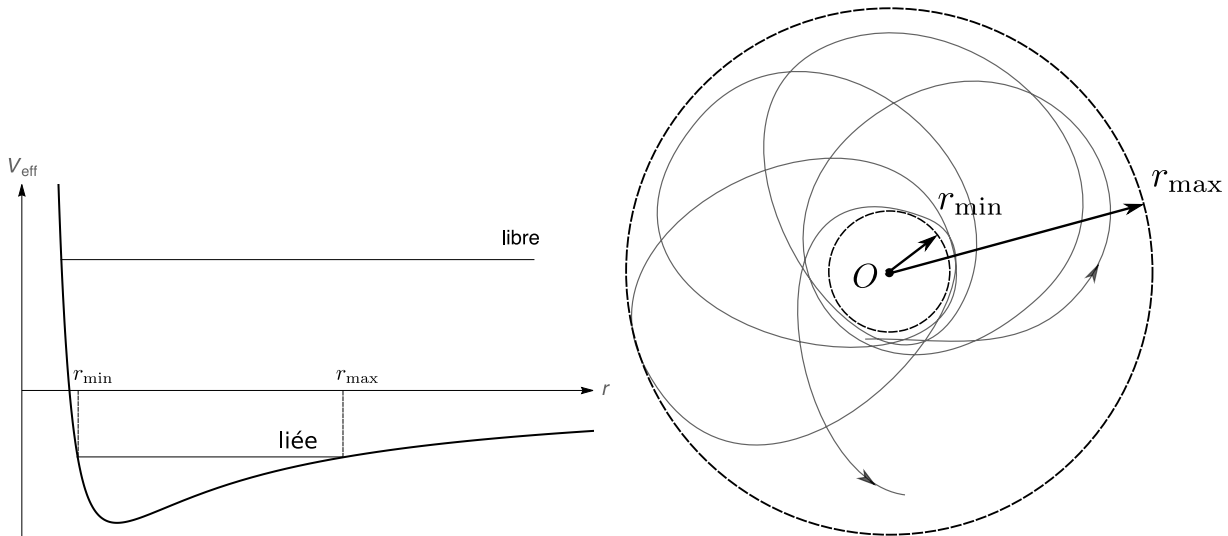


FIGURE 2.4 – Potentiel effectif et trajectoire possible d'une particule en orbite liée. À ce stade, il n'est pas possible de déterminer si l'orbite est fermée ou non.

- La conservation du moment angulaire caractérise l'évolution d'une particule dans un champ de force central. L'existence d'états libres et liés vient de la décroissance suffisamment lente du potentiel en $1/r$. *A priori*, d'autres formes fonctionnelles de la force attractive pourraient conduire à l'existence de tels états.
- Il existe des quantités conservées spécifiques au champ de force en $1/r^2$, voir ci-dessous.

2.2.2 Trajectoire

La méthode pédestre pour déterminer la trajectoire $r(\theta)$ d'une particule dans un champ de $1/r^2$ revient à déterminer l'équation horaire $r(t)$ en utilisant la conservation de l'énergie et la méthode de

séparation des variables. Mathématiquement,

$$t = \pm \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - V - \text{eff}(r'))}}. \quad (2.23)$$

On obtient $\theta(t)$ à partir de $r(t)$ en utilisant la relation $l = r^2\dot{\theta}$. On obtient la trajectoire en utilisant l'identité

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (2.24)$$

La démonstration complète est laissée en exercice - on notera l'identité $\int \frac{dz'}{\sqrt{B^2 - z'^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{z}{B}\right)$. Une démonstration plus physique consiste à utiliser la structure spécifique de champ de force en $1/r^2$, i.e. en $\dot{\theta}/l$. D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M}{l} \dot{\theta} \mathbf{e}_r = \frac{\mathcal{G}M}{l} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}. \quad (2.25)$$

qui s'intègre directement par rapport au temps en

$$\mathbf{v} = \frac{\mathcal{G}M}{l} (\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}). \quad (2.26)$$

Eq. 2.26 fait apparaître l'existence d'une constant du mouvement, le vecteur \mathbf{e} , que l'on appellera **vecteur excentricité**. En notant $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\mathbf{e}_r$ et en multipliant Eq. 2.25 scalairement par \mathbf{e}_θ , on obtient

$$\frac{l}{r} = \frac{\mathcal{G}M}{l} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \quad (2.27)$$

On peut remarquer que la direction de \mathbf{e} donne une direction privilégiée au plan de la trajectoire et aligner la base polaire de manière que $\theta_0 = 0$ (Fig.XX). On obtient ainsi

$$r = \frac{l^2/\mathcal{G}M}{1 + e \cos \theta}, \quad (2.28)$$

La trajectoire donnée par Eq. 2.28 est une conique dont la masse centrale est située sur l'un des foyers, de paramètre $p \equiv l^2/\mathcal{G}M$ et d'excentricité e . Trois cas sont possibles :

- si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole,
- si $e = 1$, la trajectoire est une parabole,
- si $0 \leq e < 1$, la trajectoire est une ellipse. Le cas $e = 0$ correspond au cas limite d'un cercle.

Remarques :

- La constante p paramétrise la taille de la conique. Physiquement, p traduit la compétition entre la conservation du moment cinétique qui tend à maintenir la particule loin de la masse centrale, et la gravité qui tend à faire tomber cette particule.
- L'équation de la trajectoire est symétrique par rapport à la transformation $\theta \rightarrow -\theta$. Cette invariance est lié au choix de l'orientation de l'axe z (la trajectoire peut être vue par dessus ou par dessous).
- C'est la dépendance en $1/r^2$ qui assure que l'orbite est fermée et ne précesse pas. La seule autre force centrale qui admet des trajectoires fermées est $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$ (théorème de Bertrand). Dans ce cas, la trajectoire est aussi une ellipse, mais dont la masse centrale occupe de centre et non un foyer.
- Le vecteur excentricité \mathbf{e} est une fonction de E_m et l et ne constitue donc pas une quantité conservée supplémentaire. L'intérêt de \mathbf{e} réside dans le fait qu'il est dans le plan de la trajectoire.

- Si $e < 1$, on interprète e comme la déviation à la circularité. On a $e \ll 1$ pour les planètes du Système Solaire ($e_{\oplus} \sim 0,017$), mais on peut avoir $0 \leq e < 1$ pour les planètes extra solaires.
- Dans le cas où le potentiel du système n'est pas en $1/r$, les trajectoires ne sont pas des coniques (dans une galaxie, les trajectoires peuvent être en forme de papillon).

D'après Eq. 2.28, on voit que la distance à l'objet central passe par un minimum pour $\theta = 0 [2\pi]$. Ce point s'appelle le *périastre* de la trajectoire. D'après Eq. 2.24, la vitesse radiale au périastre est aussi nulle :

$$\dot{r}|_{\theta=0} = \frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = 0. \quad (2.29)$$

La deuxième loi de Kepler assure que la vitesse de la particule est maximale au périastre de l'orbite, ce qui est utile pour lancer des satellites efficacement (Fig. 2.5). On exprime alors l'énergie totale de

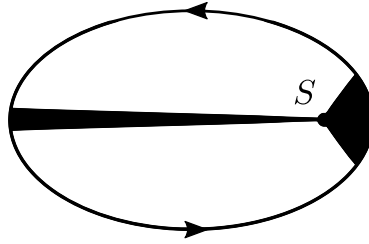


FIGURE 2.5 – Représentation schématique d'une vitesse aréolaire constante sur une orbite elliptique.

système en fonction des paramètres de la conique en estimant sa valeur au périastre. En notant que $r(\theta = 0) = \frac{p}{1+e}$ d'après Eq. 2.28 et $\dot{r}|_{\theta=0} = 0$,

$$E_m = E_m(\theta = 0) = \frac{1}{2}m \frac{l^2 (\mathcal{G}M)^2}{l^4} (1 + e^2) - m \frac{(\mathcal{G}M)^2}{l^2} (1 + e). \quad (2.30)$$

En notant que $p = \mathcal{G}M/l^2$ (Eq. 2.28), on obtient

$$E_m = -\frac{m\mathcal{G}M}{2} \frac{(1 - e^2)}{p}. \quad (2.31)$$

D'après l'équation Eq. 2.31, on retrouve simplement le fait que la trajectoire est libre si $e \geq 1 \Leftrightarrow E_m \geq 0$ et que la trajectoire est liée si $e < 1 \Leftrightarrow E_m < 0$

2.2.3 Cas de l'ellipse

Dans le cas où $E_m < 0$, la trajectoire est une ellipse. On introduit deux paramètres géométriques, le *demi grand-axe* a et le *demi petit-axe* b (cf. Fig. 2.6). En notant que $2a = r(0) + r(\pi)$, on a $a = \frac{p}{1-e^2}$. Eq. 2.31 se réduit alors simplement à

$$E_m = -\frac{m\mathcal{G}M}{2a}. \quad (2.32)$$

Par ailleurs, la conservation du moment angulaire assure que la vitesse aréolaire sur l'orbite est constante avec $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = l/2$. En intégrant cette relation sur une période orbitale T , on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{l}{2}T. \quad (2.33)$$

Or, l'aire d'une ellipse s'exprime géométriquement par $\mathcal{A} = \pi ab$. En appliquant le théorème de Pythagore, on a $b = a\sqrt{1-e^2}$ et donc $p = b^2/a$. De $\pi ab = lT/2$, on obtient la **troisième loi de Kepler**

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}. \quad (2.34)$$

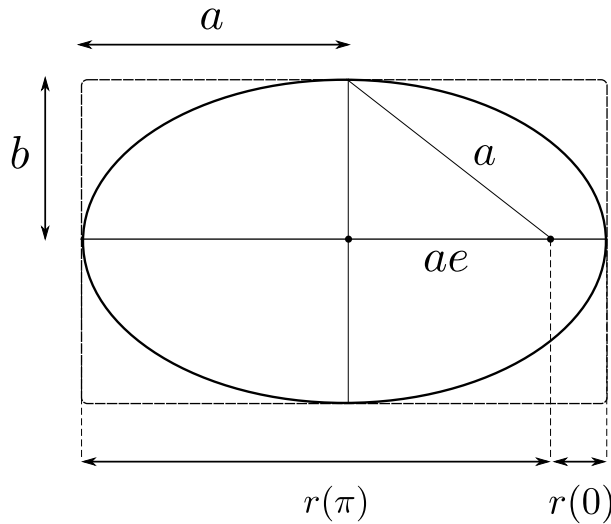


FIGURE 2.6 – Lien entre les demi grand-axe a , petit-axe b et l'équation polaire d'une ellipse.

On remarque que les équations Eqs. 2.34, assez techniques à obtenir mathématiquement, se retrouvent en utilisant les relations obtenues pour l'orbite circulaire et en faisant la substitution $r \leftrightarrow a$. Pour le Système Solaire, Eq. 2.34 se met sous la forme pratique

$$T \simeq 1 \text{ an} \left(\frac{a}{1 \text{ UA}} \right)^{3/2}, \quad (2.35)$$

où 1 UA (unité astronomique) correspond à une fois la distance Soleil-Terre (1.5×10^8 km). Par exemple, Eq. 2.35 permet d'estimer simplement la période orbitale de Jupiter située à 5UA du Soleil ($T \sim 12$ ans) ou encore la période de l'hypothétique planète 9 située à 500UA ($T \sim 10000$ ans).

2.2.4 En pratique

Dans la nature, il n'existe pas de source de champ indépendante. Les corps sont soumis au principe des actions réciproques et s'attirent mutuellement. Il est toutefois possible de réduire le problème physique de deux corps en interaction au problème du mouvement d'une seule particule dans un champ de force externe. Par exemple, traiter le mouvement de deux corps en interaction gravitationnelle revient à résoudre l'évolution de leurs positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 ou alternativement l'évolution de la position de leur barycentre $\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ et de leur position différentielle $\mathbf{r}_{21} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Le système étant isolé, le barycentre est en translation uniforme dans n'importe quel référentiel galiléen. De plus, les PFD pour les corps (1) et (2) donnent

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = + \frac{\mathcal{G} m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}, \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G} m_1}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (2.37)$$

En soustrayant Eq. 2.36 et Eq. 2.37, on obtient

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{21}}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G} (m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (2.38)$$

L'équation Eq. 2.38 est la même que celle du mouvement d'une particule dans un champ de force en $1/r^2$, moyennant la transformation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{21}$ et $m \rightarrow m_1 + m_2$. On peut alternativement réduire le problème à celui d'une particule fictive de masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

À trois corps ou plus, le problème n'est pas soluble analytiquement en général. De petites perturbations peuvent se retrouver fortement amplifiées par l'action combinée de plusieurs corps : le système peut être chaotique.

Remarques :

- Il existe des solutions analytiques dans le cas limite du problème à trois corps réduit, i.e. $m_1 \ll m_2, m_3$. Dans ce cas, il existe 5 positions d'équilibre possible pour la masse m_1 , appelés points de Lagrange. Les points L_1 et L_2 sont instables, tandis que les points L_3, L_4 et L_5 sont stables (on y envoie des instruments astronomiques).
- On peut approximer les trajectoires par des théories de perturbation. C'est ainsi que l'existence et la position de Neptune ont été prédites par le calcul à partir des données observationnelles obtenues sur Uranus.
- Comment un être humain peut-il savoir si c'est le Soleil qui orbite autour de la terre ou l'inverse ? En regardant le mouvement des autres planètes, qui orbitent aussi autour de l'astre central (ex : mouvement rétrograde de Mars).
- Parfois, des corrections de relativité générale sont nécessaires, même au sein du Système Solaire (ex : précession du périhélie de Mercure, GPS).

2.3 Application à la Terre

2.3.1 PFD dans le référentiel du laboratoire

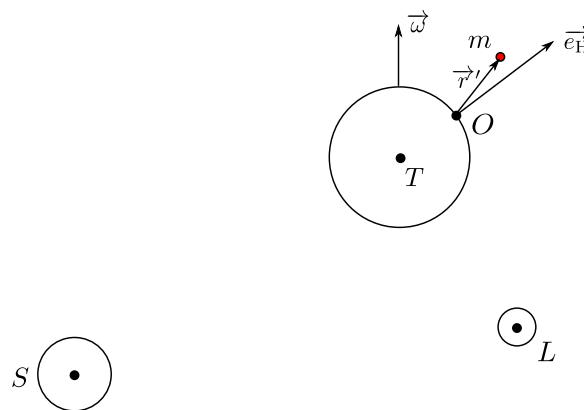


FIGURE 2.7 – Schéma de principe (pas à l'échelle) pour écrire le PFD dans le référentiel terrestre non-galiléen.

But : Écrire le PFD appliqué une masse m dans un référentiel terrestre (dit « du laboratoire »), sachant que celui-ci est non-galiléen (Fig. 2.7).

Hypothèses :

- Les objets astrophysique proche de la masse m sont la Terre, la Lune et le Soleil, de masses respectives M_T, M_L et M_S . Les autres autres objets ont une contribution négligeable sur le mouvement de m . Ces 4 corps forment un système hiérarchique de masses, i.e. $m \ll M_L \ll M_T \ll M_S$. En particulier, on fera l'hypothèse que le barycentre du système Soleil-Terre-Lune-masse au centre du Soleil et le barycentre du système Terre - Lune - masse au centre de la Terre.
- La période de rotation du Soleil autour du centre de la galaxie est $T_{S,gal} \sim 66$ Myr, ce qui est beaucoup plus grand que le temps Δt de n'importe quelle expérience faite dans le laboratoire. On pourra assimiler la trajectoire du Soleil autour du centre galactique à un mouvement rectiligne uniforme pendant Δt . On supposera donc qu'un référentiel héliocentrique (3 axes pointant vers des étoiles lointaines fixes dans lequel le Soleil est immobile) est galiléen.
- On modélise la Terre par un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe. La précession de la Terre est très lente devant sa rotation propre, i.e. $|\dot{\omega}| \ll \omega^2$, où ω est le spin terrestre.

Le PFD au centre de masse de la Terre dans un référentiel héliocentrique galiléen avec origine des coordonnées en S donne :

$$\frac{d^2\mathbf{ST}}{dt^2} = \mathbf{g}_{S \rightarrow T} + \mathbf{g}_{L \rightarrow T} + \cancel{\mathbf{g}_{m \rightarrow T}}, \quad (2.39)$$

où $\mathbf{g}_{S \rightarrow T}$ et $\mathbf{g}_{L \rightarrow T}$ sont les champs de gravitations du Soleil et de la Lune sur la Terre respectivement.

Le PFD à la masse m dans un référentiel terrestre non-galiléen avec origine des coordonnées dans un point fixe du référentiel O donne :

$$m\mathbf{a}' = m(\mathbf{g}_{S \rightarrow m} + \mathbf{g}_{L \rightarrow m} + \mathbf{g}_{T \rightarrow m}) - m\mathbf{A}_{O/S} - \underbrace{m\dot{\omega} \times \mathbf{r}'}_{\dot{\omega} \ll \omega^2} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') - 2m\omega \times \mathbf{v}' + \mathbf{F}_{\text{autres}}, \quad (2.40)$$

où $\mathbf{A}_{O/S}$ désigne l'accélération du point O dans le référentiel héliocentrique. Or

$$\mathbf{A}_{O/S} = \frac{d^2\mathbf{ST}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{TO}}{dt^2}. \quad (2.41)$$

La Terre étant considéré comme un solide indéformable en rotation autour de son axe,

$$\frac{d^2\mathbf{TO}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\omega \times \mathbf{TO}) = \omega \times (\omega \times \mathbf{TO}) + \underbrace{\dot{\omega} \times \mathbf{TO}}_{\dot{\omega} \ll \omega^2}. \quad (2.42)$$

En combinants Eqs. 2.39 et 2.42 avec Eqs. 2.41 et 2.40 et en supposant $r' \ll TO$, on obtient

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{autres}} + \underbrace{m[\mathbf{g}_{T \rightarrow m} - \omega \times (\omega \times \mathbf{TO})]}_{\text{pesanteur}} - \underbrace{2m\omega \times \mathbf{v}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{[m(\mathbf{g}_{S \rightarrow m} - \mathbf{g}_{S \rightarrow T}) + m(\mathbf{g}_{L \rightarrow m} - \mathbf{g}_{L \rightarrow T})]}_{\text{marées}}. \quad (2.43)$$

On définit le **champ de pesanteur terrestre** \mathbf{g} comme la somme du champ gravitationnel terrestre et la correction de la force axifuge s'exerçant sur le laboratoire due à la rotation terrestre :

$$\mathbf{g} \equiv \underbrace{\mathbf{g}_{T \rightarrow m}}_{\text{chp d'un ellipsoïde}} - \underbrace{\omega \times (\omega \times \mathbf{TO})}_{\Delta g/g \simeq 0.3\%}. \quad (2.44)$$

Remarques :

- \mathbf{g} définit la *verticale* d'un lieu, de vecteur unitaire \mathbf{e}_H , par $\mathbf{e}_H \parallel \mathbf{g}$
- par défaut, on donne \mathbf{g} et non $\mathbf{g}_{T \rightarrow m}$.
- on différentie le *jour sidéral* $j_{\text{sid}} = 86164$ s (i.e. le temps mis par la Terre pour faire une orbite autour du Soleil) du *jour solaire* $j_{\text{sol}} = 86400$ s (i.e. l'intervalle de temps entre deux passage du Soleil par la verticale d'un lieu).

2.3.2 Modèle d'astres sphériques

Si l'on suppose que la Terre est sphérique, on a pour $r \geq r_T$

$$\mathbf{g}_{T \rightarrow m} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.45)$$

On notera qu'en général, $\mathbf{g}_{T \rightarrow m} \neq \mathbf{g}_{T \rightarrow m}(r_T)$. En particulier, à une hauteur h de la surface de la Terre, telle que $h \ll r_T$,

$$\mathbf{g}_{T \rightarrow m} \simeq \underbrace{-\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T^2}}_{\text{cste}=9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} \mathbf{e}_r + 2\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T^2} \left(\frac{h}{r_T}\right) \mathbf{e}_r + \dots \quad (2.46)$$

Au premier ordre en h/r_T , l'accélération de la pesanteur est une constante

$$\mathbf{g} \equiv g\mathbf{e}_H \simeq -\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T^2} \mathbf{e}_r + \omega \times (\omega \times \mathbf{TO}). \quad (2.47)$$

Sous cette approximation, l'énergie potentielle de pesanteur est linéaire, $E_p = mgz + \text{cste}$. Il est à noter qu'il existe des modèles plus raffinés où l'aplatissement de la Terre du à sa rotation apporte des faibles corrections quadrupolaires.

2.3.3 Chute d'un corps

On étudie qualitativement la chute d'un corps de masse m dans un référentiel terrestre (non-galiléen, car la Terre est en rotation propre autour de son axe). En plus de son poids, la masse subit la force de Coriolis. On fixe $t = 0$ au moment où le corps est lâché d'une hauteur h sans vitesse initiale, i.e. $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = 0$. Dans une base Est-Nord, Haut, le PDF se projette sous la forme

$$\ddot{x}' = -2\dot{z}'\omega_c - 2\dot{y}'\omega_s, \quad (2.48)$$

$$\ddot{y}' = -2\dot{x}'\omega_s, \quad (2.49)$$

$$\ddot{z}' = -2\dot{x}'\omega_c - g, \quad (2.50)$$

où $\omega_c \equiv \omega \cos \lambda$ et $\omega_s \equiv \omega \sin \lambda$, avec λ la latitude du laboratoire.

Méthode : on va procéder ici par ordres de grandeur. Le mouvement associé au poids est la chute libre. En l'absence de Coriolis, la conservation de l'énergie mécanique donne les temps et vitesse caractéristiques associées au poids $t_{cl} \equiv \sqrt{2h/g} = \mathcal{O}(\sqrt{h/g})$ et $v_{cl} \equiv \sqrt{2gh} = \mathcal{O}(\sqrt{gh})$.

On a $\frac{|\omega v'|}{g} \sim \omega t_{cl} \ll 1$. Les corrections du au terme de Coriolis sont donc perturbatives pour des hauteurs de chute usuelles. À l'ordre 1 en $\omega t_{cl} \ll 1$, Eq. 2.48 se simplifie en

$$\ddot{x}' \simeq -2\dot{z}'\omega_c. \quad (2.51)$$

Ainsi, $\ddot{x}' \sim \mathcal{O}(-\omega_c \sqrt{gh})$, d'où $\dot{x}' \sim \mathcal{O}(\ddot{x}') t_{cl} = \mathcal{O}(\omega_c h)$ et $x' \sim \mathcal{O}(\dot{x}') t_{cl} = \mathcal{O}(\omega_c h \sqrt{h/g})$. Ainsi, au premier ordre, l'effet de la rotation terrestre se traduit par une déviation vers l'Est de la chute des corps (AN : pour $h \sim 150$ m, on trouve $x \sim 4$ cm).

L'équation Eq. 2.49 est donc un terme d'ordre 2, dont l'ordre de grandeur fournit $\ddot{y}' \sim \mathcal{O}(-\omega_s \omega_c h)$ et donc $\dot{y}' \sim \mathcal{O}(-\omega_s \omega_c h \sqrt{h/g})$ et $y' \sim \mathcal{O}(-\omega_s \omega_c h^2/g)$. Ainsi, au deuxième ordre, la chute est déviée vers le sud dans l'hémisphère nord (AN : pour $h \sim 150$ m, on trouve $y \sim 10 \mu\text{m}$).

Remarques :

- La déviation vers l'Est de la chute d'un corps est indépendante de l'hémisphère, car le mouvement s'effectue principalement selon la verticale. Ce n'est pas le cas pour le Pendule de Foucault, dont le mouvement est dans un plan horizontal : le sens de précession des oscillations dépend de l'hémisphère.
- En pratique, il existe des effets de frottements et de pesanteur dépendant de l'altitude : la déviation vers le sud est très difficile à observer.
- L'expérience de la balance d'Etvös, qui a permis de vérifier $m_i = m_g$ se base de la même manière sur une compétition gravité vs. Coriolis : d'un bateau, on observe la déviation d'un pendule vers le nord.

2.3.4 Effets de marée

Le dernier terme de l'Eq. 2.43 est un terme de marée, qui traduit l'effet ressenti par un corps non-ponctuel *en orbite* dans un champ *inhomogène* de gravité. Au voisinage l d'un point situé à une distance r_0 d'une source,

$$r = \left(r_0^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \Delta\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}^2 \right)^{1/2} \simeq r_0 \left(1 + \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \cdot \Delta\mathbf{r} \right) + \dots = r_0 + \underbrace{\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{r_0}}_{\equiv l}. \quad (2.52)$$

Au premier ordre, l'inhomogénéité du champ source s'écrit

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M\mathbf{r}}{r^3} \simeq -\frac{\mathcal{G}M}{r_0^3} \left(1 - 3\frac{\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{r_0}}{r_0} \right) \mathbf{r}. \quad (2.53)$$

Eq. 2.53 est générale et ne dépend pas du référentiel d'étude. D'après Eq. 2.43, les forces de marées générées par un astre A ressenties dans le référentiel terrestre sont de la forme

$$\mathbf{F}_{\text{marées}} = m(\mathbf{g}_{A \rightarrow m} - \mathbf{g}_{A \rightarrow T}). \quad (2.54)$$

On note qu'au centre de la Terre, ce terme est nul. Au premier ordre en l/r_0 ,

$$\mathbf{F}_{\text{marées}} = -\frac{mM\mathcal{G}}{r_0^3}(\Delta\mathbf{r} - 3(\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{r0}) \cdot \mathbf{e}_{r0}), \quad (2.55)$$

$$= \frac{mM\mathcal{G}}{r_0^2} \left(\frac{\Delta r}{r_0} \right) (2 \cos \theta \mathbf{e}_{r0} - \sin \theta \mathbf{e}_{\theta0}), \quad (2.56)$$

où $(\mathbf{e}_{r0}, \mathbf{e}_{\theta0})$ est la base polaire centrée sur la Terre (cf. Fig XXX).

Remarques :

- Le terme de marée est correctif, d'ordre de grandeur $\mathcal{O}(g\Delta r/r_0)$.
- En regardant les contributions radiales des deux termes, $\theta = 0$, $f_{\text{axi}} > f_{\text{grav}}$, si $\theta = \pi$, $f_{\text{axi}} < f_{\text{grav}}$ et si $\theta = \pm\pi/2$, $f_{\text{axi}} = f_{\text{grav}}$, ce qui explique la forme de bulbe allongé.
- Sur Terre, on a de plus $\omega \neq 0$, ce qui explique que l'on ait 2 marées par jour.
- Les contribution du Soleil et de la Lune s'ajoutent, avec $|f_{L \rightarrow m} \sim 2f_{S \rightarrow m}|$, ce qui explique des marées de grandes amplitudes (de vives eaux) lorsque les trois astres sont alignés (nouvelle et pleine Lune) et des marées de faibles amplitudes (de mortes eaux) lorsque les trois astres forment un triangle rectangle (quartiers).
- si $|f_{\text{marées}} > f_{\text{internes}}|$, les marées peuvent détruire l'astre (cf. les astéroïdes près de Jupiter).
- Pour un satellite en orbite, le centre de gravité et le centre de masse ne *sont pas* confondus. Les marées font osciller le satellite, qui doit être stabilisé par corrections magnétiques.

2.3.5 Satellisation

Pour étudier la mise en orbite d'un satellite, on se place dans un référentiel *héliocentrique* galiléen. Un satellite P est soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre et du Soleil. Le PFD appliqué à la Terre donne

$$\frac{d^2\mathbf{ST}}{dt^2} = \mathbf{g}_{S \rightarrow T} + \underbrace{\mathbf{g}_{P \rightarrow T}}_{m_P \ll m_T}, \quad (2.57)$$

et le PFD appliqué au satellite donne

$$\frac{d^2\mathbf{SP}}{dt^2} = \mathbf{g}_{S \rightarrow P} + \mathbf{g}_{T \rightarrow P}. \quad (2.58)$$

En soustrayant Eqs. 2.57 et 2.58, on obtient

$$\underbrace{\frac{d^2\mathbf{TM}}{dt^2}}_{\text{pb. de Kepler}} = \mathbf{g}_{T \rightarrow M} + \underbrace{(\mathbf{g}_{S \rightarrow M} - \mathbf{g}_{S \rightarrow T})}_{\text{au vois. de la Terre : marées}}. \quad (2.59)$$

Au voisinage de la Terre, le terme de marée est négligeable et l'évolution du satellite se réduit à un problème de Kepler. Ceci n'est plus vrai loin de la Terre. Dans ce cas, $g_{T \rightarrow P} \ll g_{S \rightarrow P}$ et Eq. 2.58 montre que le mouvement du satellite s'approxime par un autre problème de Kepler, autour du Soleil.

Si $\frac{d^2\mathbf{TM}}{dt^2} \simeq \mathbf{g}_{T \rightarrow M}$, on connaît les vitesses et fréquences des orbites circulaires $v_c = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r}$ et $\omega_c = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r^3}$, où $r = TP$. La vitesse requise pour maintenir une orbite circulaire à r_T , dite *vitesse de première libération* s'obtient en faisant $r = r_T$ (AN : $v_1 \simeq 7.9 \text{ km.s}^{-1}$).

Pour qu'un satellite (ou une particule) sorte du potentiel gravitationnel terrestre, il suffit que l'énergie mécanique du mouvement du satellite par rapport à la Terre vérifie $E_m \geq 0$ (condition de trajectoire libre, potentiel nul à l'infini). Pour cela $v \geq v_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{GM_T}{r_T}} \sim 11.2 \text{ km.s}^{-1}$.

Remarques :

- Sur Terre, la vitesse thermique des molécules est inférieure à v_2 (sauf cas extrêmes de la distribution de Boltzmann) : l'atmosphère ne s'évapore pratiquement pas.
- La marge fine entre v_1 et v_2 rend la mise en orbite d'un satellite difficile.
- Dans le référentiel héliocentrique, le satellite a une vitesse initiale non-nulle, due à la rotation propre de la Terre, qui aide à sa satellisation (il est plus facile de lancer une fusée de Kourou que de Baïkonour).

On définit une orbite géostationnaire circulaire comme une orbite où un satellite suit exactement la rotation terrestre, de telle sorte qu'il reste à la verticale d'un lieu. L'altitude d'une telle orbite se détermine par

$$\omega_c = \sqrt{\frac{GM}{r_T + h}} = \omega_T, \quad (2.60)$$

ce qui donne $h \simeq 35784 \text{ km}$.

Remarques :

- L'orbite géostationnaire appartient au plan équatorial terrestre (le centre de masse terrestre est à l'un des foyers de l'orbite de la trajectoire, cf Kepler).
- Pour une inclinaison faible par rapport au plan équatorial, le satellite est à la verticale d'une courbe appelée analeme.
- Il existe des satellites sur des orbites *non* géostationnaires (ex : pour la station spatiale internationale, $h \sim 350 \text{ km}$).
- Il existe d'autres orbites géosynchrones, très elliptiques.
- Il existe d'autres orbites intéressantes, comme les orbites de Molnia qui forment des couvertures à très hautes latitudes.

Force sur une particule chargée

3.1 Force sur une particule chargée

La force électromagnétique – ou force de Lorentz – s'exerçant sur une particule chargée s'exprime en mécanique classique par

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.1)$$

où q est la charge électrique de la particule s'exprimant en Coulomb (C). Le quantum de charge est la charge élémentaire de l'électron, définit depuis 2018 par $e \equiv \sqrt{2h\alpha\varepsilon_0 c} = 1,6021766208(98) \times 10^{-19}$ C où α est la constante de structure fine ($\alpha \simeq 1/137$). Il existe des particules chargées négativement (électron, anion...), positivement (proton, $\alpha \equiv \text{He}^{2+}$, positron) ou neutres (neutron, photon).

La vitesse \mathbf{v} de la particule ainsi qu'aux champs électriques et magnétiques locaux \mathbf{E} , \mathbf{B} s'exerçant sur elle sont exprimés *dans le référentiel d'étude*. La mécanique permet l'étude du mouvement d'une particule chargée dans de tels champs, mais ne dit rien sur leur origine (les équations de Maxwell sont nécessaires pour cela). La force de Lorentz est indépendante du référentiel, ce qui permet de retrouver les lois de transformation entre les champs $(\mathbf{E}, \mathbf{B})_{\mathcal{R}}$ et $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')_{\mathcal{R}'}$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \times \mathbf{B}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (3.3)$$

Ces lois de composition ne sont valables qu'en mécanique classique.

La puissance de la force de Lorentz est $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + 0$. Ainsi, seule la force électrique peut fournir un travail (un champ \mathbf{B} variable peut toutefois induire un champ \mathbf{E} qui lui travaille).

Les densités volumiques de charges et de courants sont définies par $\bar{\rho} \equiv nq$ et $\mathbf{j} \equiv nq\mathbf{v}$, où n est la densité numérique de particule chargée ($\bar{\rho} \equiv \sum n_i q_i$ et $\mathbf{j} \equiv \sum n_i q_i \mathbf{v}_i$ à plusieurs espèces chargées). Ainsi, l'expression de la force volumique de Lorentz est $\mathbf{f}_L = \bar{\rho}\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, à laquelle correspond une puissance volumique $p_L = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$.

Remarque : En général, pour des particules élémentaires chargés, les interactions gravitationnelles sont négligeables devant les interactions électromagnétiques (cf. atome de Bohr).

3.2 Particule dans un champ \mathbf{E}

3.2.1 Champ \mathbf{E} uniforme stationnaire

On étudie le mouvement d'une particule de charge q soumise à l'action d'un champ électrique uniforme stationnaire dans le référentiel du laboratoire. Le principe fondamental de la dynamique

s'écrit donc

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}, \quad (3.4)$$

qui s'intègre successivement en

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}}{m} (t - t_0), \quad (3.5)$$

puis en

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 (t - t_0) + \frac{q\mathbf{E}}{2m} (t - t_0)^2. \quad (3.6)$$

La particule a un mouvement uniformément accéléré. Son mouvement balistique est donc parabolique (il n'est rectiligne que si $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{E}$). L'équation Eq. 3.5 montre que la dynamique de la particule chargée est pilotée par le rapport charge sur masse q/m .

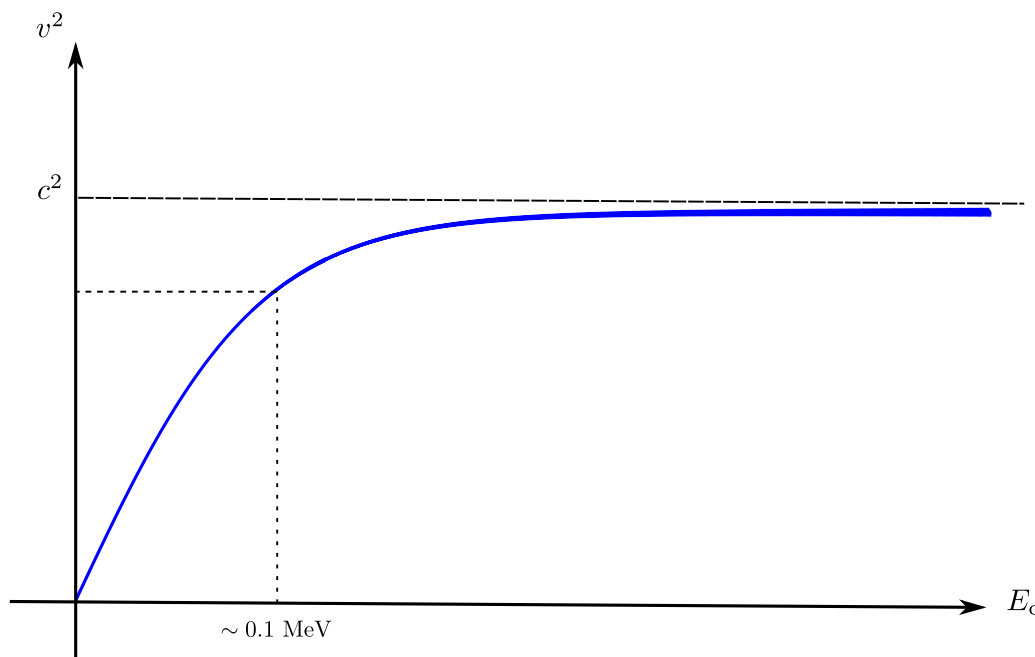


FIGURE 3.1 – Au delà de ~ 0.1 MeV, un électron adopte un comportement relativiste.

Remarques :

- \mathbf{E} augmente la vitesse de la particule. Cela n'est pas équivalent à « accélère la particule chargée » : une particule peut être accélérée et maintenir $v = \text{cste}$ sur une trajectoire courbe.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \infty > c$. La mécanique classique n'est rapidement plus suffisante pour décrire le mouvement d'une telle particule. Pour l'électron, la transition classique/relativiste se fait pour une énergie cinétique typique de $E_c \simeq 0.1$ MeV, une valeur seuil pour les expériences (Fig. 3.1).
- Un champ \mathbf{E} constant se réalise entre deux plaques conductrices infinies séparées par une distance d et soumises à une différence de potentiel ΔV ($E = -\Delta V/d$, cours ÉLECTROMAGNÉTISME). En pratique, les effets de bords doivent être pris en compte.
- Dans les anciens oscilloscopes cathodiques, des électrons libres émis par un fil chauffé sont placés entre deux champs uniformes orthogonaux et vont créer un point lumineux rémanent sur l'écran par fluorescence. Le champ horizontal varie par rampes successives pour amener périodiquement des électrons de la gauche vers la droite de l'écran (la période de ces rampes est appelée *base de temps*). La différence de potentiel verticale, et donc la déviation verticale du faisceau, est donnée par le signal en entrée. Les variations temporelles du champ sont suffisamment lentes pour traiter le problème par un champ \mathbf{E} constant.

3.2.2 Électron élastiquement lié

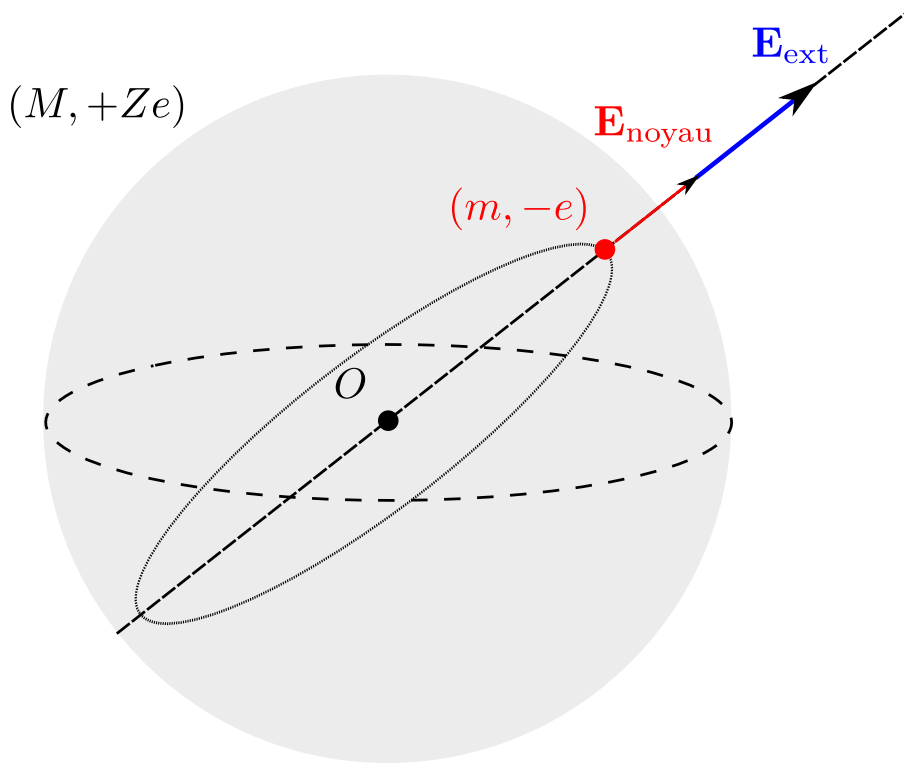


FIGURE 3.2 – Modèle classique de l'électron élastiquement lié dans un nuage de charges positives de densité uniforme.

Modèle de Thomson

On étudie le modèle d'atome dit du *plum pudding* proposé par Thomson en 1897 (Fig. 3.2). L'atome y est modélisé par une sphère de rayon R , de charge $+Ze$ uniformément répartie dans laquelle se balade un électron (le noyau n'était pas alors connu à l'époque). La densité de charge est donc $\rho_c = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Le théorème de Gauss en électrostatique (cf. cours ÉLECTROMAGNÉTISME) montre que le champ électrique $\mathbf{E}_{\text{atome}}$ à l'intérieur de la sphère s'exprime par

$$\mathbf{E}_{\text{atome}} = \frac{Ze \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (3.7)$$

Ainsi, $\mathbf{E}_{\text{atome}}$ a une dépendance linéaire en \mathbf{r} . La force électrique s'exerçant sur le noyau est donc

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}_{\text{atome}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}, \quad (3.8)$$

où $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$ a la dimension d'une pulsation. La longueur d'onde associée à ω_0 est $\lambda = 1225 \text{ \AA}$ pour $R = 1 \text{ \AA}$. On retrouve la longueur d'onde de la raie Lyman alpha de l'hydrogène car à ce rayon, $\mathbf{E}_{\text{atome}}$ prend la même valeur que celui créé par une charge ponctuelle Ze par continuité (cours d'ÉLECTROMAGNÉTISME). En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans un référentiel galiléen, on obtient

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0. \quad (3.9)$$

Eq. 3.9 est l'équation d'un oscillateur harmonique libre, dont on donne la solution en 1D

$$z_1(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (3.10)$$

En 3D, le mouvement résulte de la superposition des 3 oscillateurs selon chacune des coordonnées et est donc une ellipse. Le fait d'avoir négligé le terme magnétique induit \mathbf{B}_{ind} par les variations de \mathbf{E} dans la force de Lorentz se justifie en estimant le rapport des contributions des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . D'après le cours d'ÉLECTROMAGNÉTISME, on a

$$\frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ind}}|}{|\mathbf{E}|} \sim \frac{v}{c} \sim \frac{\omega_0 z_0}{c} \ll 1. \quad (3.11)$$

Émission spontanée

L'électron étudié précédemment est une particule chargée accélérée, qui par conséquent rayonne et dissipe de l'énergie. Le modèle de la Sect 3.2.2 peut être étendu pour inclure cette dissipation. Larmor a montré que la contribution du rayonnement de l'électron à la dynamique pouvait se modéliser par une force \mathbf{F}_{ray} de même forme fonctionnelle qu'un frottement fluide

$$\mathbf{F}_{\text{ray}} = -\frac{m\mathbf{v}}{\tau}, \quad (3.12)$$

où le temps caractéristique d'amortissement τ est donné par

$$\tau = \frac{3}{2\omega_0^2} \frac{c}{r_0}, \quad (3.13)$$

avec $r_0 \simeq 2$ fm est la distance caractéristique appelée *portée classique de l'électron* définie par

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}. \quad (3.14)$$

En effet, cette expression de τ assure que la puissance dissipée est bien la puissance du rayonnement électromagnétique émis à $\omega_0 \ll c/r_0$. La dépendance en c^2 de l'équation Eq. 3.14 traduit son origine relativiste. Sous ces hypothèses, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron devient

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0. \quad (3.15)$$

L'équation 3.15 est celle d'un oscillateur harmonique amorti. Le facteur de qualité $Q \equiv \omega_0\tau$ de cet oscillateur valant $Q \equiv \omega_0\tau \simeq 10^7$. Comme $Q \gg Q_{\text{crit}} \equiv 1/\sqrt{2}$, sa solution 1D se met sous la forme

$$z_1(t) = z_0 e^{-t/2\tau} \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{2Q}}_{\ll 1}} + \phi \right). \quad (3.16)$$

Le mouvement est pseudo-périodique (période $2\pi/\omega_0$), très faiblement amorti (temps caractéristique d'amortissement τ qui correspond au temps de vie classique d'un atome).

Rayonnement incident sinusoïdal

On regarde maintenant le comportement d'un électron dans un tel atome lorsque que sa dynamique est forcée par un champ électrique extérieur sinusoïdal $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t)$. On a pour cela supposé des variation spatiale lentes $\mathbf{E}_0 \simeq \mathbf{E}(r)$ du champ au niveau de l'atome. La linéarité des équations de Maxwell assure que $\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_{\text{atome}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron devient

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m} \sin(\omega_0 t). \quad (3.17)$$

L'équation Eq. 3.17 est celle d'un oscillateur harmonique amorti forcé. Cette équation étant linéaire, sa solution est $\mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r}_1(t)}_{\rightarrow 0} + \mathbf{r}_p(t)$, la superposition du transitoire libre et de la solution forcée qui

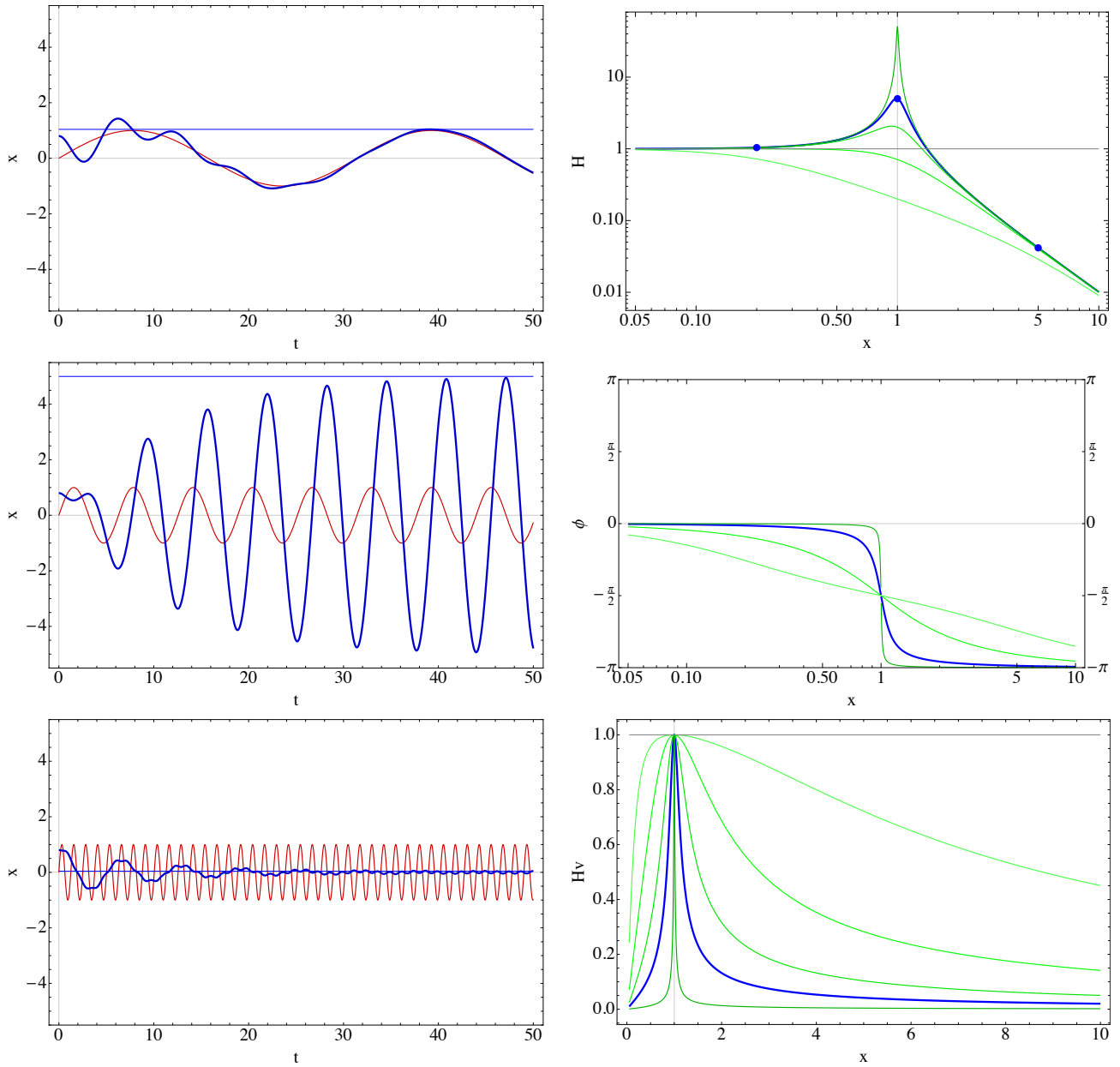


FIGURE 3.3 – À gauche : évolution d'un oscillateur harmonique amorti à $Q = 5$, forcé à $\omega/\omega_0 = 0.2, 1, 5$. Le régime transitoire pseudo-périodique de fréquence unité s'amortit au bout de $\sim Q = 5$ périodes, ne laissant que le régime permanent dont les caractéristiques sont données dans la colonne de droite.

contribue seule au mouvement à grands temps (Fig. 3.3). On cherche alors une solution sous la forme $\mathbf{r} = \Re(\underline{\mathbf{r}}_0 e^{i\omega t})$. Par simplicité, on considère le problème à 1D avec $\underline{z} = \underline{z}_0 e^{i\omega t} = z_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}$. On obtient

$$\underline{z}_0 = \frac{-eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}. \quad (3.18)$$

Avec $x = \omega/\omega_0$ et $Q = \omega_0\tau$, les amplitudes et phase de la solution complexe se mettent sous la forme

$$z_0 = |z_0| = \frac{-eE_0/\omega_0^2 m}{\sqrt{(1-x^2)^2 - x^2/Q^2}}, \quad (3.19)$$

et en inversant l'argument principal (\tan^{-1} donnée par la fonction ATAN2)

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right). \quad (3.20)$$

Un tel oscillateur admet une résonance en vitesse, indépendamment de la valeur de Q (Fig. 3.3). De plus, comme $Q \gg Q_{\text{crit}}$, le mouvement admet aussi une résonance en amplitude de largeur $\Delta\omega \sim \omega_0/Q$.

Sous l'action du champ électrique extérieur, les charges négatives et positives se séparent. \mathbf{E}_{ext} crée donc un dipôle électrique \mathbf{p} donné par (cours d'ÉLECTROMAGNÉTISME)

$$\mathbf{p} = e(-\mathbf{r}) = \underline{\alpha}(\omega)\varepsilon_0\mathbf{E}_0. \quad (3.21)$$

Le coefficient $\alpha(\omega)$ mesure l'intensité du moments dipolaires induits par l'action d'un champ électrique extérieur sur le cortège électronique d'un atome et s'appelle *polarisabilité électronique*. Dans le modèle précédent,

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{e^2/m\varepsilon_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega/\tau}. \quad (3.22)$$

À la fréquence de résonance ω_0 , appelée *fréquence plasma*, l'électron se sépare de façon optimale des charges positives du noyau. On peut modéliser un matériau diélectrique par un assemblage d'atomes où les électrons sont liés élastiquement à leur noyau porteur. Sous l'action d'un champ électrique de basse fréquence $\omega \ll \omega_0$, les électrons ont le temps de se déplacer dans une configuration d'équilibre qui empêche la perturbation de se propager. Au contraire, si $\omega \gg \omega_0$, une onde se propage dans le milieu.

3.2.3 Champ \mathbf{E} en $1/r^2$

Le champ électrique créé par une charge ponctuelle q vaut $\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (cours d'ÉLECTROMAGNÉTISME). Dans un tel champ, une particule chargée subit une force électrique en $1/r^2$. Le problème se traite de manière similaire à celui étudié en gravité classique (Sect. 2.2).

3.2.4 Champs \mathbf{E} quelconque

Le cas général est très compliqué. Lorsque le champ \mathbf{E} n'est plus stationnaire ni uniforme, d'autres effets apparaissent :

- \mathbf{E} non stationnaire : dérive supplémentaire par rapport à $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$.
- \mathbf{E} non uniforme : termes supplémentaires en $\nabla\mathbf{E}$.

3.3 Particule dans un champ \mathbf{B}

3.3.1 Champ \mathbf{B} uniforme stationnaire

On considère le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire repéré par $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. La force de Lorentz est donc $\mathbf{F} = qB\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z$ et d'après le principe fondamental de la dynamique,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\frac{qB}{m}}_{\omega_c} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z, \quad (3.23)$$

On remarque à partir de la forme fonctionnelle de l'équation Eq. 3.23 que $[\omega_c] = s^{-1}$ (plus rapide que d'évaluer $\frac{\text{AsA}^{-1}\text{s}^{-2}\text{kg}}{\text{kg}}$). La pulsation caractéristique ω_c est appelée *pulsation cyclotron*. La puissance fournie par la force de Lorentz est $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ainsi, $\frac{1}{2}mv^2 = \text{cste}$ et donc $|\mathbf{v}| = \text{cste}$, bien que la particule soit accélérée.

En projetant Eq. 3.23 selon \mathbf{e}_z , on obtient $\frac{dv_z}{dt} = 0$, i.e. $v_z = v_{z0}$ et $z = v_{z0}t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. Ainsi le mouvement n'est pas confiné dans le plan orthogonal ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) a priori. En projetant Eq. 3.23 selon \mathbf{e}_x et

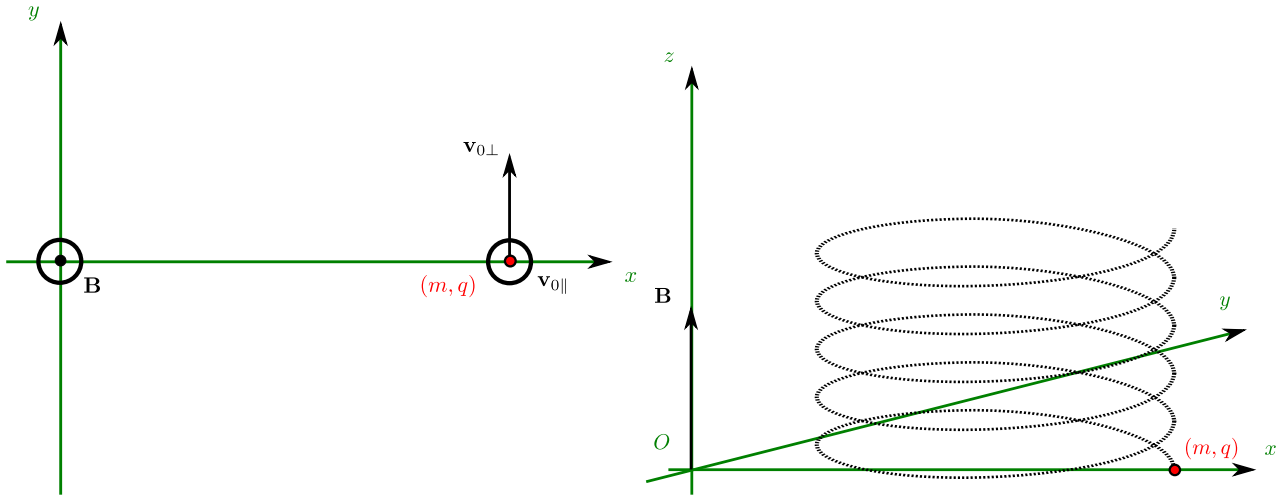


FIGURE 3.4 – Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique constant stationnaire.

\mathbf{e}_y , on obtient le système d'équations différentielles linéaires suivant

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y, \quad (3.24)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x. \quad (3.25)$$

On résout efficacement ce système linéaire en introduisant $\underline{V} = v_x + iv_y$ pour le transformer en une équation linéaire du premier ordre complexe

$$\frac{d\underline{V}}{dt} + i\omega_c \underline{V} = 0, \quad (3.26)$$

$$\underline{V}_0 = \underbrace{v_{x0}}_{=0} + i \underbrace{v_{y0}}_{v_{0\perp}}, \quad (3.27)$$

par la combinaison linéaire (Eq. 3.24) + i (Eq. 3.24). Eq. 3.26 se résout en

$$\underline{V} = iv_{0\perp} e^{-i\omega_c t}. \quad (3.28)$$

Les parties réelles et imaginaires de \underline{V} redonnent v_x et v_y

$$v_x(t) = \Re(\underline{V}) = v_{0\perp} \sin(\omega_c t), \quad (3.29)$$

$$v_y(t) = \Im(\underline{V}) = v_{0\perp} \cos(\omega_c t). \quad (3.30)$$

En intégrant Eqs. 3.29 – 3.30 par rapport au temps

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)), \quad (3.31)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t). \quad (3.32)$$

La trajectoire de la particule projetée dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ s'obtient en combinant les équations Eqs. 3.31 et 3.32 selon

$$\left[x(t) - \left(x_0 + \frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \right) \right]^2 + [y(t) - y_0]^2 = \left(\frac{v_{0\perp}}{\omega_c} \right)^2. \quad (3.33)$$

Eq. 3.33 correspond à l'équation d'un cercle de rayon

$$R_c \equiv \frac{mv_{0\perp}}{qB}, \quad (3.34)$$

appelé *rayon de Larmor* de la particule. Ce rayon augmente lorsque l'inertie de la particule (au numérateur) augmente et diminue lorsque la force radiale magnétique augmente (au dénominateur).

La trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant est donc **une hélice** de rayon R_c parcourue à la fréquence $2\pi/\omega_c$ et de pas constant. Le mouvement est circulaire uniforme si $v_{z0} = 0$.

Remarques :

- Si $q \rightarrow -q$, la particule tourne dans l'autre sens.
- Le moment magnétique d'une telle particule vaut $m = q \frac{v}{2\pi R_c} \pi R_c^2 = \frac{mv^2}{2B}$.
- L'effet Zeeman classique peut se traiter en rajoutant une force en $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ dans le modèle de l'atome de Thomson de la Sect. 3.2.2.
- Au passage, nous avons démontré qu'un vecteur \mathbf{X} vérifiant $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$ précesse autour du cône d'axe $\boldsymbol{\Omega}$ à une vitesse angulaire constante Ω .

3.3.2 Champs \mathbf{B} quelconque

Lorsque le champ \mathbf{B} n'est plus stationnaire ni uniforme :

- \mathbf{B} non stationnaire : si \mathbf{B} varie lentement (sur des temps $\gg \omega_c^{-1}$), on s'en sort par des approximations. Sinon, le traitement est très compliqué.
- \mathbf{B} non uniforme : on a des effets de dérive (par rapport au gradient ou à la courbure du champ magnétique) et des effets miroirs (la force magnétique tend à repousser les particules hors des étranglements de lignes de champ, comme dans la ceinture d'Alfvén).

3.4 Champs \mathbf{E} et \mathbf{B}

3.4.1 Champs \mathbf{E} et \mathbf{B} croisés

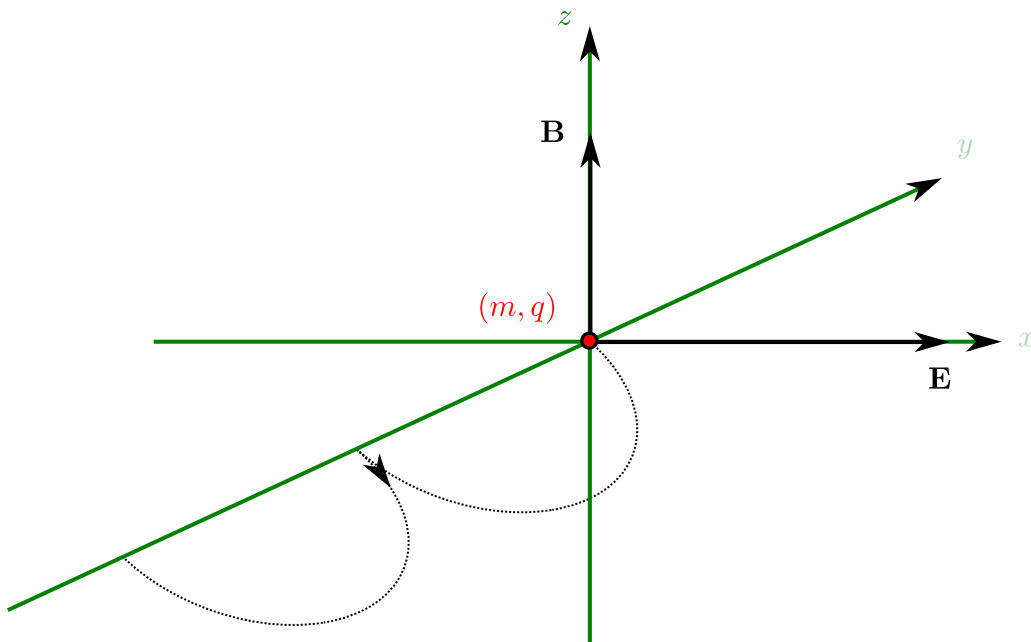


FIGURE 3.5 – Le mouvement d'une particule chargée dans deux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} stationnaires et constants orthogonaux est la superposition du mouvement cyclotron à une dérive qui dépend des champs extérieurs.

On considère maintenant deux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} constants, uniformes et orthogonaux. On note $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$. On suppose qu'à $t = 0$, $v_z = v_{z0} = 0$. La projection du PFD selon les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y donne

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y + \frac{qE}{m}, \quad (3.35)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x. \quad (3.36)$$

La partie libre de la solution de ce système d'équations différentielles linéaire a été déterminé à la Sect. 3.3.1. Une solution particulière est simplement $v_x^{(p)} = 0$ et $v_y^{(p)} = -E/B$, qui correspond à une vitesse de dérive constante selon \mathbf{e}_y . La particule a un mouvement circulaire dans un référentiel qui se déplace à $v_y = -E/B$ par rapport au laboratoire : sa trajectoire est donc une cycloïde dans le référentiel du laboratoire. Seules les particules ayant pour vitesse initiale $v_x = 0$ et $v_y = -E/B$ (que l'on peut choisir) vont en ligne droite : le dispositif agit comme sélecteur de vitesse.

3.4.2 Loi d'Ohm dans un conducteur

Voir le cours d'ÉLECTROMAGNÉTISME.

3.5 Dipôle électromagnétique

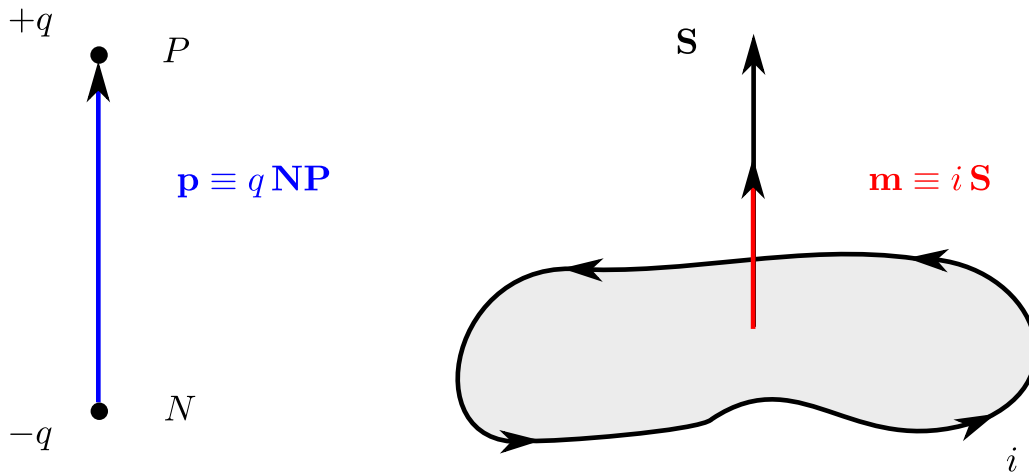


FIGURE 3.6 – Modélisation des dipôles électrostatique (à gauche) et magnétostatique (à droite).

Un premier problème consiste à déterminer quel est le champ électrique rayonné par des dipôles électrique ou magnétique *statiques*. D'après le cours d'ÉLECTROMAGNÉTISME, ce champ varie en $1/r^3$ loin du dipôle et n'est pas axisymétrique.

3.5.1 Actions sur un dipôle dans un champ extérieur

Un second problème consiste à placer un dipôle \mathbf{p} dans un champ \mathbf{E}_{ext} – où un dipôle \mathbf{m} dans un champ \mathbf{B}_{ext} , et étudier la dynamique du dipôle.

Dipôle électrostatique On note O le centre du dipôle. En supposant que le champ extérieur \mathbf{E}_{ext} varie sur une longueur caractéristique $l \gg d$, la taille du dipôle, on peut faire un développement limité sous la forme

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{E}_{\text{ext}}(O)}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{(O)} \mathbf{E}_{\text{ext}}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\dots}_{\text{ordre sup.}} \quad (3.37)$$

Les termes d'ordre 0 et 1 contribuent à la force \mathbf{F} et au moment M par rapport à O qui s'appliquent sur le dipôle ainsi qu'à un terme d'énergie potentielle V à différents ordres.

Exemple : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 = \text{cst}$. La résultante des forces électriques qui s'exercent sur le dipôle est $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{ext}} - q\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$. Le moment des forces électrique vaut $\mathbf{M} = \mathbf{AP} \times q\mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{AN} \times (-q\mathbf{E}_{\text{ext}}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$.

Tous calculs faits, les différentes actions exercées sur le dipôle par un champ électrique (non nécessairement uniforme) aux différents ordres en d/l sont résumées dans la Table 3.1. Ainsi, à l'ordre 0, le champ extérieur fait s'aligner le dipôle selon sa direction (l'énergie potentielle est minimale quand $\mathbf{p} // \mathbf{E}$). À l'ordre 1, le dipôle se déplace vers les champs forts.

quantité	ordre 0	ordre 1
\mathbf{E}_{ext}	$\mathbf{E}_{\text{ext}} (O)$	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{(O)} \mathbf{E}_{\text{ext}}$
\mathbf{F}	0	$(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}$
\mathbf{M}	$\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$	" + corr. $(\nabla \mathbf{E}_{\text{ext}})$
V	$-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$	" + corr. $(\nabla \mathbf{E}_{\text{ext}})$

TABLE 3.1 – Actions sur le dipôle électrique aux différents ordres.

Dipôle magnétostatique On procède par analogie : $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{m}$ et $\mathbf{E}_{\text{ext}} \leftrightarrow \mathbf{B}_{\text{ext}}$. On obtient des actions résumées dans la Table 3.2. L'expression de M explique le mouvement de la boussole dans le champ magnétique terrestre et permet l'étude classique de la résonance magnétique nucléaire.

quantité	ordre 0	ordre 1
\mathbf{M}_{ext}	$\mathbf{M}_{\text{ext}} (O)$	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{(O)} \mathbf{B}_{\text{ext}}$
\mathbf{F}	0	$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}}$
\mathbf{M}	$\mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$	" + corr. $(\nabla \mathbf{B}_{\text{ext}})$
V	$-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$	" + corr. $(\nabla \mathbf{B}_{\text{ext}})$

TABLE 3.2 – Actions sur le dipôle magnétique aux différents ordres.

3.5.2 Forces de Van der Waals

En pratique, les interactions se font souvent entre un dipôle et ses dipôles voisins, comme par exemple dans des solutions. On traite ici l'exemple intéressant dipôle permanent - dipôle induit (interaction de Debye). Le dipôle \mathbf{p}_1 crée un champ $\mathbf{E}_1 \propto 1/r^3$. Le modèle de l'atome de Thomson de la Sect. 3.2.2 permet de justifier l'existence d'un dipôle induit $\mathbf{p}_{2,\text{ind}} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}_1$ au niveau de la molécule voisine. L'énergie potentielle d'interaction entre \mathbf{p}_1 et \mathbf{E}_2 est $V = -\mathbf{p}_{2,\text{ind}} \cdot \mathbf{E}_1 \propto 1/r^6$.

Il faut d'autres outils pour étudier l'interaction dipôle permanent - dipôle permanent (physique statistique - interaction de Keesom) et l'interaction dipôle induit - dipôle induit (mécanique quantique - interaction de London), mais les potentiels d'interaction restent en $1/r^6$.

3.5.3 Ressorts et fils

Les interactions électromagnétiques microscopique se traduisent au niveau macroscopique par des forces modélisées. Ainsi, l'expression de la force exercée par un ressort faiblement étiré (en dehors du régime plastique) dépend de son élongation selon

$$\mathbf{F} = \underbrace{-k(x - x_0)}_{\text{terme linéaire}} \left\{ \underbrace{+c|x - x_0|^2(x - x_0) + \dots}_{\text{terme NL}} \right\}. \quad (3.38)$$

Pour un ressort à anneaux faiblement inclinés, la constante de raideur du ressort k s'exprime selon

$$k = \frac{Gd^4}{8ND^3}, \quad (3.39)$$

où d est le diamètre du fil, D est le diamètre du ressort, N est le nombre de spires du ressort et G est le module de cisaillement du matériau (qui lui-même est donné par les interactions électrostatiques au niveau microscopique).

Remarques :

- Dans une étude pratique d'un système masse-ressort (on note la masse M), le ressort a une masse propre m telle que $m \ll M$. En toute rigueur, on doit procéder dans ce cas à la substitution $M \rightarrow M + m/3$ pour avoir la dynamique réelle de la masse.
- Si l'on modélise les muscles par des ressorts, on a $k \propto S$, où S est la section du muscle.
- Un fil inextensible est un ressort d'extension nulle telle que la force transmise reste finie.

Interactions d'un solide avec un fluide

Ce chapitre fait l'inventaire des différentes forces qui s'exercent sur un solide placé dans un fluide (hors tension de surface). Bien qu'ayant des expressions analytiques simples, ces forces modélisées n'ont un sens que dans des régimes et sous des approximations précises qu'il convient de connaître.

4.1 Fluide et forces de surface

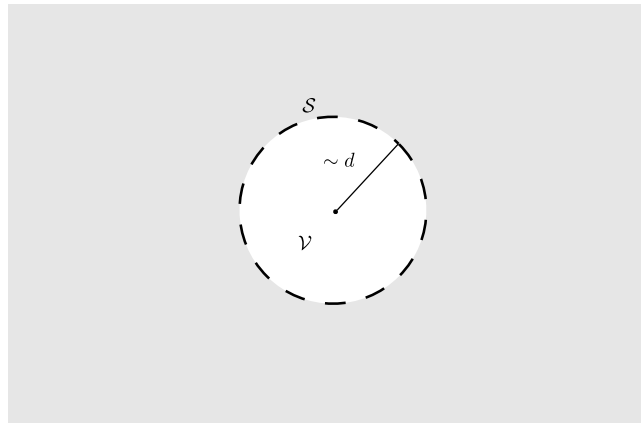


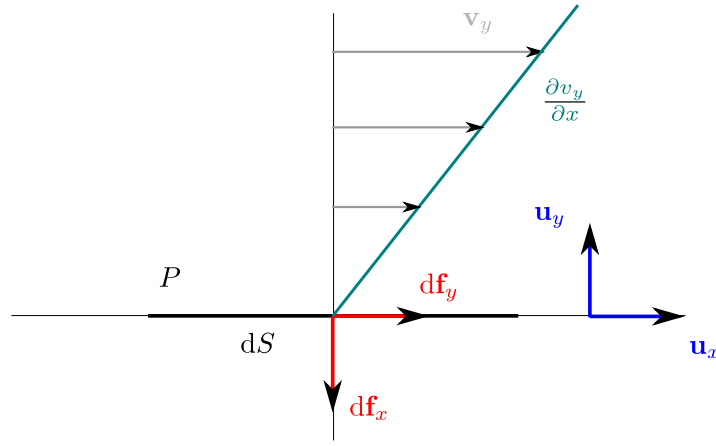
FIGURE 4.1 – Solide de taille $\sim d$ plongé dans un milieu continu.

On considère en tout premier lieu un solide entouré d'un milieu continu (Fig. 4.1). Le libre parcours moyen l_{pm} des constituants élémentaires de ce milieu est négligeable devant la taille d caractéristique du solide ($l_{\text{pm}} \ll d$). Le milieu exerce des forces de surfaces $d\mathbf{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\mathbf{S}$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ a la forme d'une matrice et ne dépend pas du référentiel d'étude ($\underline{\underline{\sigma}}$ est un tenseur).

On se restreint à l'étude d'un solide dans un fluide, c'est à dire un milieu continu pour lequel $\underline{\underline{\sigma}} = f(\nabla\mathbf{u}, \rho, T)$, où \mathbf{u} , ρ et T sont respectivement les vitesses, densités et températures du milieu (la pression P du fluide est liée à ρ et T par l'équation d'état du fluide).

On suppose de plus que le fluide est newtonien, c'est à dire que $\underline{\underline{\sigma}}$ est linéaire en $\nabla\mathbf{u}$. Par exemple, pour un fluide homogène isotrope en écoulement incompressible (Fig. 4.2), les forces exercées par le fluide sur un élément de surface élémentaire s'écrivent en coordonnées cartésiennes $df_x = -PdS$ et $df_y = \eta \frac{\partial u_y}{\partial x} dS$, où η est la viscosité cinématique du fluide.

Dans le cas général, la résultante des forces \mathbf{F} qui s'exercent sur le solide s'exprime par $\mathbf{F} = \iint \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\mathbf{S}$, où $\underline{\underline{\sigma}}$ est calculé à partir des champs $P(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ déterminés à partir des équations constitutives de la mécanique des fluides.

FIGURE 4.2 – Cisaillement au niveau d'un élément de surface dS .

4.2 Solide dans un fluide

De la manière la plus générale, la résultante des forces $\mathbf{F}_{\text{hydro}}$ exercées par le fluide sur le solide se décompose en trois contributions – identifiés par la suite par des couleurs spécifique :

$$\mathbf{F}_{\text{hydro}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\text{inv}}}_{\text{inviscide } \nu=0} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{visc}}}_{\text{du à } \nu \neq 0} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{b}}}_{\text{fluctuations browniennes}}. \quad (4.1)$$

\mathbf{F}_{inv} est un terme qui provient de la résultante de pression du fluide (on le retrouve même à $\nu = 0$), contrairement à \mathbf{F}_{visc} , qui somme les contraintes visqueuses qui s'appliquent sur la surface du solide. \mathbf{F}_{b} est un terme aléatoire microscopique issu des collisions des constituants élémentaires du fluide sur le solide. Ces termes regroupent eux-mêmes plusieurs contributions, détaillées dans ce qui suit.

4.2.1 Termes inviscides

Si l'on note $\Delta \mathbf{v} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u}$ la différence de vitesse entre le solide et le fluide (qui est un invariant galiléen) et $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ la vorticité du fluide (qui représente son moment angulaire local), \mathbf{F}_{inv} se décompose en

$$\mathbf{F}_{\text{inv}} = \rho_f V \left[\underbrace{-\mathbf{g} - \mathbf{f}_{\text{vol}} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}}_{=-\iint \nabla P \cdot d\mathbf{S}} \left\{ \underbrace{-c_M \frac{d\Delta \mathbf{v}}{dt}}_{\text{cons. qté de mvt}} - \underbrace{c_L \Delta \mathbf{v} \times \omega}_{\text{cons. mt. cinétique}} \right\} \right]. \quad (4.2)$$

Les trois premiers termes de l'équation Eq. 4.2 viennent de la résultante des forces de pression sur le solide, calculée à partir de l'équation d'Euler du fluide. Les deux derniers termes assurent la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique lorsque le fluide est accéléré. Pour un écoulement stationnaire, irrotationnel en référentiel galiléen placé dans un champ de gravité \mathbf{g} (cf. en statique des fluides)

$$\mathbf{F}_{\text{inv}} = \rho_f V [-\mathbf{g} - \cancel{\mathbf{f}_{\text{vol}}} + \cancel{\frac{d\mathbf{u}}{dt}} - \cancel{c_M \frac{d\Delta \mathbf{v}}{dt}} - \cancel{c_L \Delta \mathbf{v} \times \omega}]. \quad (4.3)$$

En notant $\mathbf{\Pi} \equiv -\rho_f V \mathbf{g}$ la poussée d'Archimède, on obtient

$$\mathbf{F}_{\text{inv}} = \mathbf{\Pi}. \quad (4.4)$$

Dans ce cas, la résultante des forces de pression est la poussée d'Archimède (les 4 autres termes de l'équation Eq. 4.2 n'ont aucune contribution).

Si le solide et le fluides sont placés dans d'autres champs de force volumiques (par exemple un champ

axifuge dans le cas d'un référentiel non-galiléen), l'expression de la poussée d'Archimède doit être généralisée :

$$\mathbf{F}_{\text{inv}} = \mathbf{\Pi}_{\text{gén}} \equiv -\rho_f V (\mathbf{g} + \mathbf{f}_{\text{vol}}). \quad (4.5)$$

On peut ainsi expliquer qu'un ballon d'hélium dans une voiture se déplace vers l'intérieur des virages.

4.2.2 Termes dus à la viscosité

De manière générale, la résultante des contraintes visqueuses se met sous la forme

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\text{T}}}_{\text{traînée} // \Delta \mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{P}}}_{\text{portance} \perp \Delta \mathbf{v}} \left\{ + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{H}}}_{\text{terme d'histoire}} \right\}, \quad (4.6)$$

où \mathbf{F}_{T} est une force de traînée qui s'oppose au mouvement, \mathbf{F}_{P} est une force de portance qui pousse le solide orthogonalement à sa trajectoire (elle-même se décomposant en 3 termes, voir Sect. 4.2.2) et \mathbf{F}_{H} est un terme qui dépend de l'histoire du fluide. De manière générale, \mathbf{F}_{visc} dépend de l'écoulement du fluide ainsi que de la géométrie du corps, et il n'en existe pas d'expression analytique simple. \mathbf{F}_{visc} étant un invariant galiléen, elle dépend de la vitesse *relative* entre le solide et le fluide.

Une exception est le problème de la sphère dans un fluide en régime stationnaire aux petits nombres de Reynolds $R_e \ll 1$, dans une boîte avec des bords à l'infini et $d \ll L$, où L est la longueur caractéristique où se développent les gradients dans le fluide. Dans ce cas, le calcul donne

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = \underbrace{-6\pi\eta R \Delta \mathbf{v} \left\{ 1 + \frac{3}{8} R_e + o(R_e) \right\}}_{\mathbf{F}_{\text{T}}} \underbrace{-\pi R^3 \rho \boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{v} \{1 + o(d/l)\}}_{\mathbf{F}_{\text{P}} = \mathbf{F}_{\text{M}}}, \quad (4.7)$$

où

$$R_e \equiv \frac{2R |\Delta \mathbf{v}|}{\nu}, \quad (4.8)$$

est le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement autour du solide, $\nu \equiv \eta/\rho$ étant la viscosité dynamique du fluide. La correction d'Oseen en $3R_e/8$ est souvent négligeable. Cette expression (souvent utilisée en TP) va changer lorsque :

- le régime hydrodynamique change : différents R_e (voir ci-dessous), mais aussi Mach (e.g. un astéroïde) ou rapport d/L ,
- l'on considère l'inertie du fluide et des particules,
- en présence de bords,
- des particules voisines sont présentes en suspension,
- le solide n'est pas sphérique.

Traînée

La force de traînée résultant des contraintes visqueuses exercées par un fluide sur une sphère de rayon R dans les conditions détaillées dans la Sect. 4.2.2 est donnée par

$$\mathbf{F}_{\text{T}} = -6\pi\eta R \Delta \mathbf{v}. \quad (4.9)$$

Ce terme est appelé *force de Stokes*. L'écoulement, laminaire aux petits nombres de Reynolds, devient turbulent pour $R_e \gtrsim 800$. On détermine alors expérimentalement ou numériquement \mathbf{F}_{T} en fonction des paramètres du problème. On obtient l'expression

$$\mathbf{F}_{\text{T}} = -\frac{1}{2} C_D \pi R^2 \rho |\Delta \mathbf{v}| \Delta \mathbf{v}. \quad (4.10)$$

avec

$$C_D = \begin{cases} 24/R_e, & R_e \leq 1; \\ 24R_e^{-0.6}, & 1 \leq R_e \leq 800; \\ 0.44, & R_e > 800. \end{cases} \quad (4.11)$$

Le régime $R_e \leq 1$ redonne Eq. 4.9. Dans le cas général, \mathbf{F}_T dépend de la géométrie du corps (par exemple, dans le cas du pendule simple, la contribution du fil à \mathbf{F}_T est un terme linéaire, alors que celle de la masse est quadratique), et d'autres paramètres sans dimension (comme le nombre de Mach si le solide atteint des vitesses proches de la vitesse du son du fluide).

La puissance dissipée par les frottements est de la forme $\mathcal{P}_{\text{diss}} \propto \frac{m\Delta v^2}{\tau} > 0$. D'après le premier principe de la thermodynamique, l'énergie cinétique du solide est transférée en énergie interne dans le fluide et le solide. La force de traînée tend à faire aller un système mécanique vers le minimum de potentiel local. Cet état final est indépendant du processus dissipatif, mais le temps qu'il met pour y relaxer en dépend.

Remarque : Il existe des situations dans lesquelles on peut rencontrer des forces dont la forme fonctionnelle est linéaire en Δv , mais qui ne sont pas dues à des frottements visqueux :

- La résultante mécanique du rayonnement d'ondes sonores par un corps peut se modéliser par un terme de frottement linéaire car $\delta F \propto \delta p = \underline{Z} \delta v$ à l'interface (cf un haut-parleur). Ce n'est pas un frottement visqueux : la dissipation vient du transport de l'énergie par les ondes.
- Le modèle de Drude traite la dissipation d'énergie des électrons libres par un terme de frottement linéaire. Ce frottement n'est pas d'origine visqueuse, mais résulte du transfert de quantité de mouvement par des interactions brèves avec l'environnement.
- La dissipation dans le modèle de l'électron élastiquement lié vient de l'énergie perdue dans les photons rayonnés par la particule chargée accélérée.

Portance

Le terme de portance se décompose lui-même en trois contributions : la force de Magnus \mathbf{F}_M , la portance aéronautique $\mathbf{F}_{\text{aéro}}$ et un terme \mathbf{F}_∇ du aux inhomogénéités locales de l'écoulement autour du fluide (négligeable lorsque $d \ll L$)

$$\mathbf{F}_P = \underbrace{\mathbf{F}_M}_{\text{effet Magnus}} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{aéro}}}_{\text{portance d'aile}} \left\{ + \underbrace{\mathbf{F}_\nabla}_{\text{inhomog. locales}} \right\}. \quad (4.12)$$

\mathbf{F}_M est appelé *force de Magnus* et dépend du taux de rotation propre $\boldsymbol{\Omega}$ du solide par rapport au fluide. Ce terme est important pour les sports de ballons, car il est responsable des effets de lift. Aux petits nombres de Reynolds, la force de Magnus se met sous la forme

$$\mathbf{F}_M = -\pi R^3 \rho_f \boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{v}. \quad (4.13)$$

L'expression de l'équation Eq. 4.13 permet d'expliquer la trajectoire des coup-francs tirés à petite vitesse au football (coup-francs « à la Juninho »). De la même manière que pour la traînée, la force de Magnus n'est plus analytique aux grands nombres de Reynolds (typiquement $R_e \gtrsim 800$). L'expression de \mathbf{F}_M est déterminée expérimentalement :

$$\mathbf{F}_M = \mathcal{S} (|\Delta \mathbf{v}|) \boldsymbol{\Omega} \times \Delta \mathbf{v}. \quad (4.14)$$

Lorsque l'écoulement du solide autour du fluide devient turbulent, $\mathcal{S} < 0$. Ainsi, un ballon de football tiré à très grande vitesse peut avoir un lift dans le sens opposé au sens usuel (coup-francs « à la Roberto Carlos »).

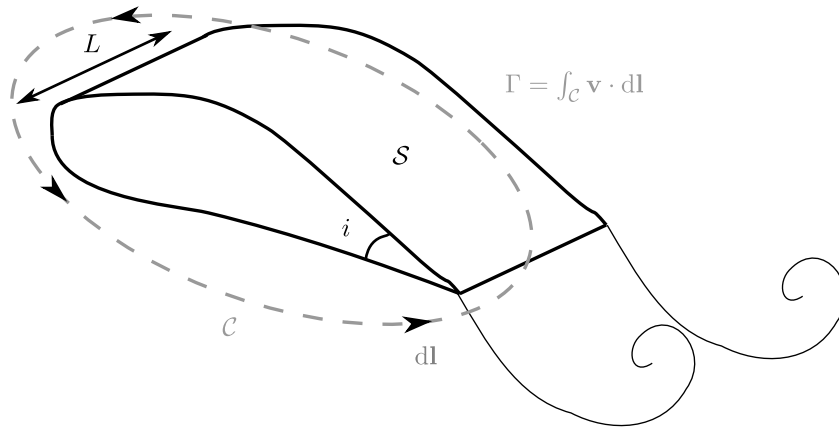


FIGURE 4.3 – Portance aérodynamique, schéma de principe pour une aile d’avion.

Une autre contribution à la portance est la portance aérodynamique $\mathbf{F}_{\text{aéro}}$ (Fig. 4.3), qui maintient les avions dans le ciel contre la gravité terrestre. Son expression analytique est relativement simple :

$$\mathbf{F}_{\text{aéro}} = -\rho |\Delta \mathbf{v}| (\Gamma e) \mathbf{e}_y, \quad (4.15)$$

où S est la surface latérale de l’aile, e son épaisseur $\Gamma \equiv \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ est la circulation de la vitesse qui s’établit autour de l’aile en régime permanent. On peut montrer que le facteur Γl se met sous la forme

$$\Gamma e = -\frac{C_z}{2} |\Delta \mathbf{v}| S. \quad (4.16)$$

où C_z est un coefficient qui dépend de la géométrie de l’aile. Ainsi, l’expression de $\mathbf{F}_{\text{aéro}}$ devient

$$\mathbf{F}_{\text{aéro}} = -\frac{C_z}{2} \rho S |\Delta \mathbf{v}|^2 \mathbf{e}_z. \quad (4.17)$$

Bien que la formule donnée par l’équation Eq. 4.17 soit simple, elle cache des difficultés liées au fait que l’établissement même d’une circulation du fluide autour du solide n’est pas du tout triviale. Si le solide a une forme anguleuse non symétrique, un vortex initiateur de vorticité ω est créé par la viscosité dans une petite couche limite visqueuse proche de l’aile et se détache de l’aile. Ainsi

- $\mathbf{F}_{\text{aéro}}$ est indépendante de la viscosité (tout comme pour l’effet Magnus), bien que la viscosité joue un rôle critique dans l’établissement de cette force.
- On a alors $\Gamma \neq 0$ par conservation du moment angulaire (d’après le théorème de Stokes, $\Gamma = \iint \omega \cdot d\mathbf{S}$).
- C_z dépend de l’inclinaison de l’aile et de sa géométrie (cf. les dispositifs hyper-sustentateurs ou ailes secondaires qui augmentent la portance de l’avion). Si $i \gtrsim 25^\circ$, $\mathbf{F}_{\text{aéro}} \rightarrow 0$ car $\Gamma \rightarrow 0$. En effet, dans ces conditions, l’écoulement se décolle au dos de l’aile.
- Si l’on a une forme d’aile régulière (i.e. sans angle) ou/et symétrique (par exemple la sphère), on a $\Gamma = 0$ et $C_z = 0$: on retombe sur un cas sans portance aéro.

Terme d’histoire

Pour être exhaustif, on notera que le terme d’histoire est nul pour un écoulement stationnaire et $\mathbf{F}_H = 0$. On a $\mathbf{F}_H = o(R_e \mathbf{F}_P)$ sinon : ce terme est négligeable en général à petit Reynolds.

4.2.3 Terme aléatoire

Finalement, le dernier terme est le term aléatoire \mathbf{F}_b , caractérisé par les valeurs moyennes suivantes

$$\langle \mathbf{F}_b \rangle = 0. \quad (4.18)$$

$$\langle \mathbf{F}_b(t) \mathbf{F}_b(t + \tau) \rangle = 2 \times \underbrace{6\pi\eta R}_{\text{Stokes}} \underbrace{k_B T}_{\text{thermo}} \delta(\tau). \quad (4.19)$$

Cette force stochastique permet d'expliquer le phénomène de diffusion par une approche mécanique (les particules subissent des forces aléatoires plus intenses à haute température). Si cette force est importante à l'échelle mésoscopique (exemple : le pollen de l'expérience de Jean Perrin), elle est négligeable à l'échelle macroscopique.

4.2.4 En pratique

En général, pour résoudre un problème de mécanique, la résultante des forces exercées par un fluide sur un solide se réduit à la force de trainée (dont on doit connaître l'expression en fonction du Reynolds), la poussée d'Archimède (souvent importante dans un liquide ou pour un ballon de gaz moins dense que l'air) et éventuellement une portance (Magnus ou aéro).

$$\mathbf{F}_{\text{hydro}} \simeq \mathbf{F}_T + \mathbf{\Pi} + \left\{ \underbrace{\mathbf{F}_{\text{aéro}}}_{\text{avion}} + \underbrace{\mathbf{F}_M}_{\text{ballon}} \right\}. \quad (4.20)$$

4.3 Chute libre avec frottements fluides

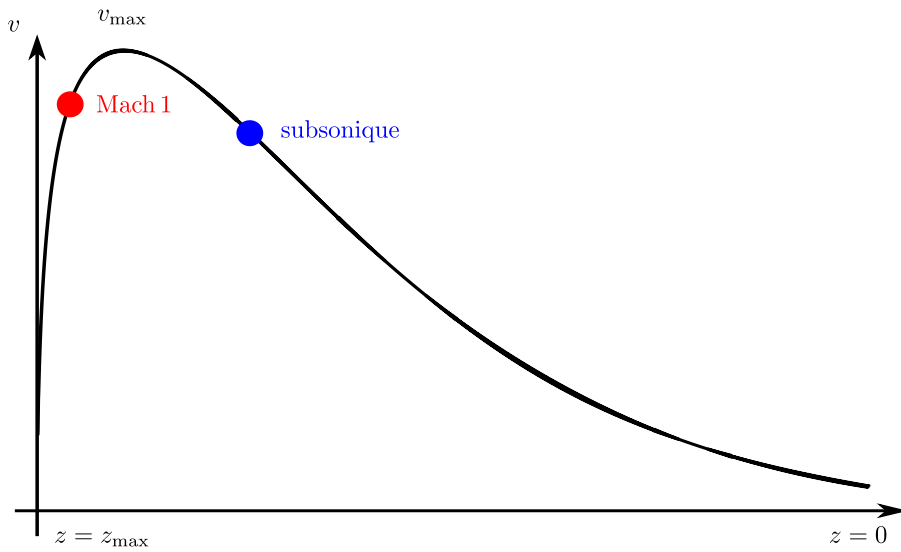


FIGURE 4.4 – Profil de vitesse caractéristique pour une chute libre stratosphérique

On considère le problème d'un corps en chute libre soumis à une force de frottements fluides linéaire $\mathbf{F}_T = -\frac{m\mathbf{v}}{\tau}$, lâché sans vitesse initiale. Dans un référentiel galiléen,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g, \quad (4.21)$$

g étant la gravité effective prenant en compte les corrections dues à la poussée d'Archimède. L'équation différentielle linéaire du premier ordre Eq. 4.24 admet la solution

$$v(t) = g\tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right). \quad (4.22)$$

Le comportement asymptotique de cette solution peut se retrouver directement à partir de Eq. 4.24. Si $t \ll \tau$, $v \simeq v_0 = 0$ et Eq. 4.24 se simplifie en

$$\frac{dv}{dt} = g, \quad (4.23)$$

qui admet la solution $v \sim gt$ correspondant à la chute libre. Si $t \gg \tau$, on tend vers le régime permanent résultant de la balance entre la gravité et les frottements ($\frac{dv}{dt} \ll \frac{v}{\tau}$), i.e.

$$\frac{v}{\tau} = g. \quad (4.24)$$

Le corps atteint la vitesse limite $g\tau$ pour $t \gtrsim \tau$.

Remarques :

- On atteint aussi une vitesse limite pour des frottements en $-\alpha v^2$, ainsi qu'une position limite.
- Dans le cas de la chute libre à haute altitude, il faut prendre en compte la variation de densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude (e.g. $f_T \propto \rho \propto e^{-z/H}$ dans le cas de l'atmosphère isotherme). La vitesse de chute libre passe par un maximum à une altitude non nulle. Elle peut en particulier devenir supersonique à un certain point (Fig. 4.4).

Le modèle du pendule simple

5.1 Le pendule simple

5.1.1 Définition

Pendule simple : masse ponctuelle suspendue par un fil sans masse, inextensible, sans raideur, soumise à un seul champ de pesanteur constant, et dont le mouvement s'effectue dans un plan.

Le pendule simple est donc un système idéal permettant de modéliser l'évolution des objets pesants suspendus (Fig. 5.1).

Notations : On note m la masse du pendule, l la longueur du fil et \mathbf{g} le champ de pesanteur.

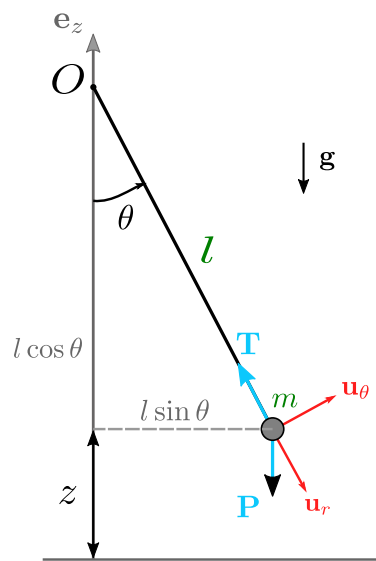


FIGURE 5.1 – Représentation schématique et paramétrisation d'un pendule simple.

5.1.2 Équations du mouvement

Référentiel	Du laboratoire, galiléen.
Base	Polaire $(O, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$. On note $z \equiv l(1 - \cos \theta)$.
Système	La masse m .
Forces extérieures	Le poids \mathbf{P} (conservatif), la tension du fil \mathbf{T} (ne travaille pas car $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = 0$, pas de couple associé car $\mathbf{M}_{\mathbf{T}/O} = \mathbf{T} \times \mathbf{r} = 0$).

L'équation d'évolution du pendule simple peut s'obtenir de trois manières différentes :

- par le principe fondamental de la dynamique :

$$\text{selon } \mathbf{u}_r : -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T, \quad (5.1)$$

$$\text{selon } \mathbf{u}_\theta : ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta. \quad (5.2)$$

- par le théorème du moment cinétique en O :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta. \quad (5.3)$$

- par le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E_{m,i} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_i^2 + mgl(1 - \cos \theta_i), \quad (5.4)$$

où θ_i désigne l'angle initial donné au pendule. Cet angle n'est égal à l'angle d'excursion maximum θ_{\max} que si le pendule est lâché sans vitesse initiale ($\dot{\theta}_i = 0$). On choisit $E_p(\theta = 0) = 0$ pour avoir $E_m \geq 0$ (Fig. 5.2).

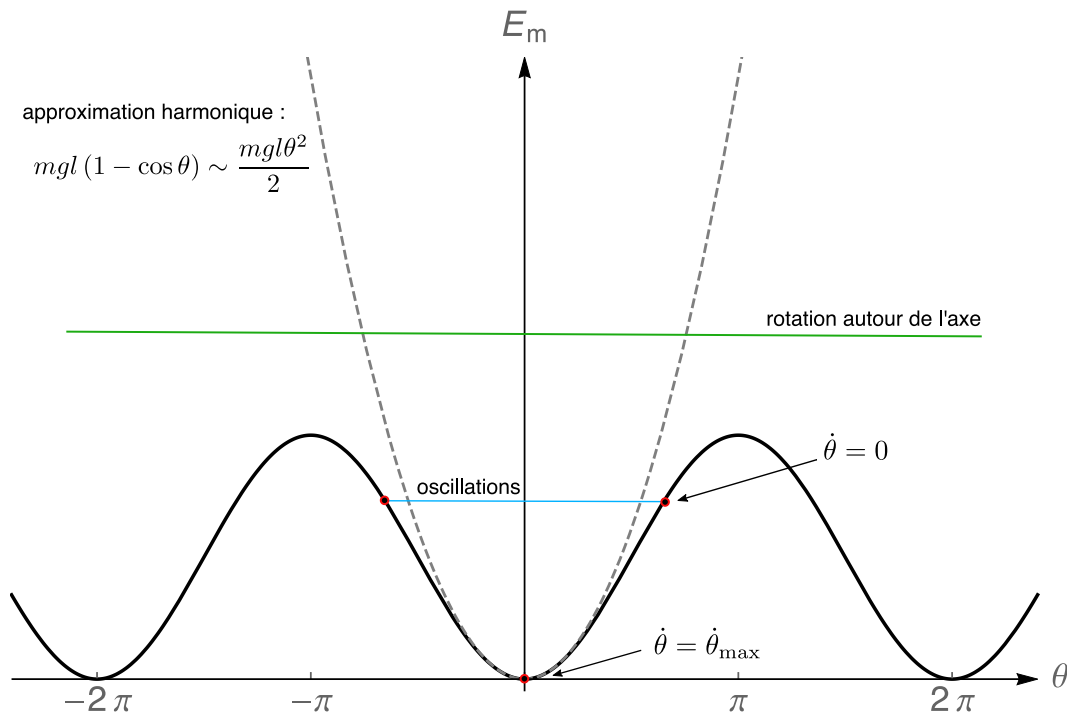


FIGURE 5.2 – Énergie potentielle d'un pendule simple.

Les équations 5.2, 5.3 et 5.4 en dérivant par rapport au temps sont identiques :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg}{ml} \sin \theta = 0. \quad (5.5)$$

On note que le principe d'équivalence entre masse gravitationnelle (au numérateur) et inertielle (au dénominateur) permet de simplifier l'équation Eq. 5.5 pour obtenir

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (5.6)$$

Eq. 5.6 est l'équation d'évolution du pendule simple. Si l'on multiplie Eq. 5.6 par $\dot{\theta}$ et que l'on intègre par rapport au temps, on retrouve l'intégrale première de l'énergie (Eq. 5.4) comme attendu. En utilisant une notation classique pour une pulsation $\omega_0^2 \equiv g/l$ ($[g/l] = s^{-2}$), Eq. 5.6 se réécrit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (5.7)$$

Remarques :

- Eq. 5.7 est une équation différentielle du second ordre *non linéaire*.
- Eq. 5.7 est symétrique par rapport aux transformations $\theta \rightarrow -\theta$, $t \rightarrow -t$.
- Eq. 5.7 est indépendante de la masse m (deux pendules simples de masses 100 g ou 10 kg lâchés avec les mêmes conditions initiales ont une dynamique identique).
- La solution de Eq. 5.7 dépend de θ_0 et $\dot{\theta}_0$.
- Le changement de variable $t \rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}\tau$ transforme Eq. 5.7 en

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin\theta = 0. \quad (5.8)$$

Eq. 5.8 montre que l'évolution d'un pendule simple est fonction du seul paramètre $\sqrt{l/g}t$.

- Eq. 5.2 donne la valeur de la tension T qui assure $l = \text{cste}$.

5.1.3 Isochronisme des petites oscillations

On s'intéresse au cas particulier $\theta \ll 1$ pour lequel $\sin\theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^3) \sim \theta$. Dans cette limite, Eq. 5.7 se réduit à

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad (5.9)$$

l'équation de l'oscillateur harmonique. La période $\mathcal{T}_0 \equiv 2\pi/\omega_0$ du pendule aux petits angles est

$$\mathcal{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.10)$$

\mathcal{T}_0 augmente quand le fil est plus long et quand le champ de pesanteur est plus fort. Sur Terre ($g \simeq 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$), on peut mettre Eq. 5.11 sous la forme numérique suivante :

$$\mathcal{T}_0 \simeq 2.0 \text{ s} \sqrt{l/1 \text{ m}}. \quad (5.11)$$

Ainsi, un pendule de 1m passe par la verticale environ toutes les secondes. Eq. 5.11 permet de mesurer g . Comme

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\mathcal{T}_0}{\mathcal{T}_0}\right)^2}, \quad (5.12)$$

on réalise la mesure sur un grand nombre de périodes. On montre que l'incertitude sur la mesure de longueur devient limitante pour $\Delta g/g \lesssim 0.01\%$.

5.2 Le pendule simple aux grands angles

5.2.1 Puit de potentiel et mouvement

Dans le cas général, le diagramme (E, θ) du pendule simple est une succession périodique de puits et de bosses (Fig. 5.2). Lorsque l'énergie mécanique est plus grande que l'énergie critique correspondant à la hauteur des bosses $E_c = 2mgl$, le pendule est libre de tourner autour de son point d'attache. Si $E_m < E_{m,c}$, le pendule est piégé dans le puit de potentiel central : son mouvement est oscillant, d'amplitude θ_{\max} . On a

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_i^2 + mgl(1 - \cos\theta_i) = E_m = mgl \cos(1 - \theta_{\max}) < E_{m,c}. \quad (5.13)$$

L'approximation des petits angles étudiée en Sect. 5.1.3 correspond à $-mgl(1 - \cos\theta) \sim mgl\frac{\theta^2}{2}$: le potentiel périodique est approximé par sa parabole osculatrice au voisinage de $\theta = 0$.

5.2.2 Période des oscillations

Dans ce qui suit, on s'intéresse au mouvement oscillant du pendule correspondant à $E_m < E_{m,c}$. On a $\dot{\theta} = 0$ à $\theta = \pm\theta_{\max}$. L'intégrale première de l'énergie se réécrit sous la forme

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(\cos\theta_{\max} - \cos\theta) = 0, \quad (5.14)$$

i.e.

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}. \quad (5.15)$$

En séparant les variables,

$$\pm\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}dt, \quad (5.16)$$

qui, après intégration, permet d'obtenir le temps t mis pour atteindre l'angle θ sous la forme implicite

$$t(\theta) = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos\theta' - \cos\theta_{\max}}}. \quad (5.17)$$

Par symétrie, la période de l'oscillation se décompose en quatre quarts de périodes égaux $\theta = 0 \rightarrow \theta_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow -\theta_{\max} \rightarrow 0$, i.e. $\mathcal{T} = 4t(\theta_{\max})$. Ainsi, aux grands angles, les oscillations d'un pendule dépendent de l'amplitude θ_{\max} (elles ne sont *pas isochrones*).

Compléments : En posant $k \equiv \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)$ et en faisant le changement de variables $\sin\theta'/2 \equiv k\sin\phi$ pour ramener l'intégrande à une forme $(1+x)^n$ avec $x \ll 1$ et faire un développement limité, on obtient

$$\mathcal{T} = \frac{4}{1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}} \underset{\phi \ll 1}{\simeq} 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\phi + \dots\right] d\phi. \quad (5.18)$$

Eq. 5.18 donne la formule de Borda

$$\mathcal{T} \simeq \mathcal{T}_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16}\right), \quad (5.19)$$

i.e. la première correction à la formule aux petits angles (à l'ordre deux par symétrie $\theta \rightarrow -\theta$).

À savoir : Pour une précision de $\sim 1\%$, l'approximation des petits angles marche pour $\theta_{\max} \lesssim 20^\circ$ et la formule de Borda pour $\theta_{\max} \lesssim 70^\circ$.

Hors programme : L'inversion de l'équation Eq. 5.17 se fait au moyen de la fonction *sinus elliptique* de Jacobi $\text{sn}(x, k)$, une fonction implémentée e.g. dans PYTHON ou MATHEMATICA. Précisément,

$$\theta(t) = 2\sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \times \text{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t, \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)\right)\right\}. \quad (5.20)$$

La Fig. 5.3 montre le caractère non harmonique des oscillations du pendule aux grands angles. La période des oscillations \mathcal{T} s'exprime en fonction de θ_{\max} à l'aide de la *fonction elliptique complète de première espèce*,

$$\mathcal{T}(\theta_{\max}) = \mathcal{T}_0 \times \frac{2}{\pi} K\left(\sin^2\left\{\frac{\theta_{\max}}{2}\right\}\right), \quad (5.21)$$

où $K(x) \equiv \int_0^1 \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{1-x^2u^2}}$ et \mathcal{T}_0 est la période aux petits angles défini par Eq. 5.11 (en 2008, il a été montré que la fonction K se calcule remarquablement bien numériquement au moyen de suites arithmétiques et géométriques). La Fig. 5.4 montre que la période d'un pendule simple est une fonction croissante de l'amplitude θ_{\max} . Dans la limite $\theta_{\max} = \pi$, $\mathcal{T} = \infty$, i.e. le pendule s'approche de la verticale en un temps infini. Le développement limité de Eq. 5.21 au deuxième ordre redonne bien la formule de Borda.

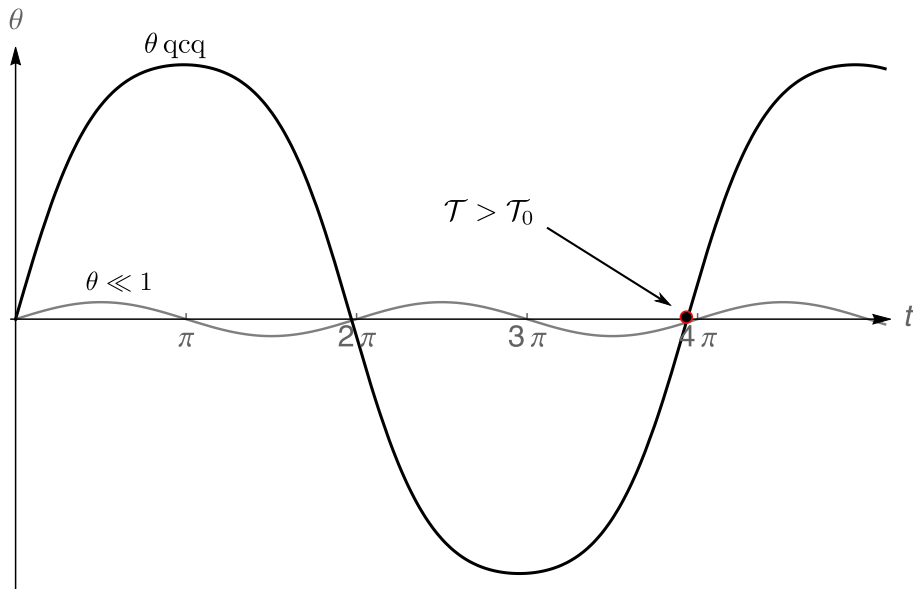


FIGURE 5.3 – Aux grands angles (ici $\theta_{\max} = 150^\circ$), le mouvement du pendule n'est plus harmonique. La période des oscillations augmente avec θ_{\max} .

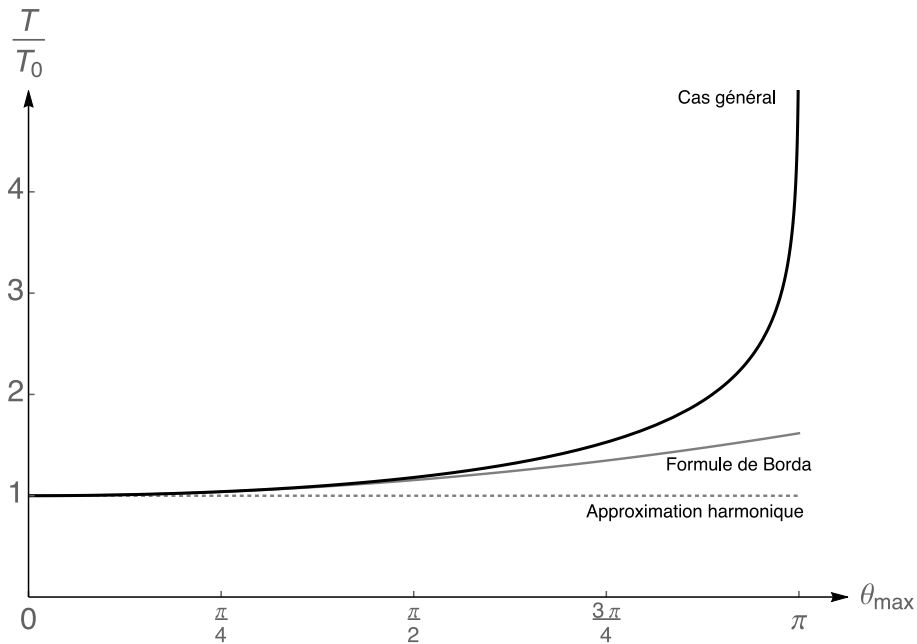


FIGURE 5.4 – Évolution de la période d'oscillation d'un pendule simple en fonction de l'angle θ_{\max} . Les approximations harmoniques et de Borda sont données pour comparaison.

5.2.3 Tension du fil

En combinant les équations Eqs. 5.1 et 5.14, on exprime la tension du fil comme

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_{\max}). \quad (5.22)$$

Ainsi, $T(\theta_{\max}) = mg \cos \theta_{\max}$. En particulier, si $\theta_{\max} > \pi/2$, la tension peut être négative. Dans ce cas, $T = 0$ pour $\theta_{\text{fil}} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3} \cos \theta_{\max}\right)$. En pratique, deux cas peuvent se produire dans cette situation. Soit le fil est inextensible et il travaille en compression (le fil pousse la bille), soit il est souple et la masse chute de manière balistique.

La Fig. 5.5 représente l'évolution de la tension telle que donnée par l'équation 5.22. De façon surprenante, des erreurs sont souvent commises lors du tracé de cette figure, en apparence simple. En particulier

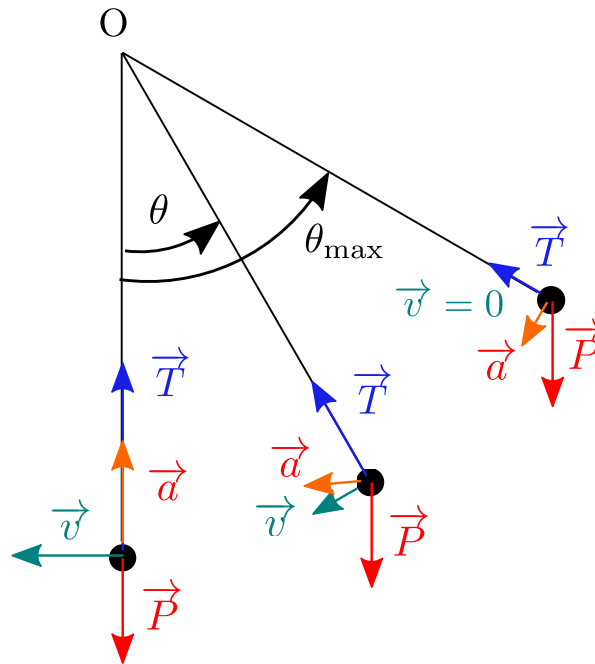


FIGURE 5.5 – Tension, vitesse et accélération au cours de l'évolution du pendule.

- T est maximum en $\theta = 0$. $T_{\max} = mg(3 - 2\cos\theta_{\max}) > mg$: à la verticale, la norme de la tension est plus grande celle du poids pour assurer la force centrale nécessaire à la rotation.
- L'accélération \mathbf{a} est colinéaire à \mathbf{u}_θ en θ_{\max} et à \mathbf{u}_r en $\theta = 0$. En général, \mathbf{a} et \mathbf{v} ne sont pas colinéaires.
- v est maximum à la verticale, i.e. en $\theta = 0$.

5.2.4 En résumé

À savoir sur cette partie :

1. Un pendule simple **n'est pas** un oscillateur harmonique (c'est le cas uniquement dans la limite des petits angles).
2. La période augmente avec l'amplitude (le must : connaître la formule de Borda).
3. La tension du fil s'annule à très grand angle (et donc si il est suspendu par un fil, il tombe).

Note : Dans les mauvaises leçons, le pendule est présenté d'emblée et sans précaution comme un oscillateur harmonique isochrone.

5.3 Le pendule réel

En pratique, on s'aperçoit que i) aux petits temps, la période des oscillations donnée par l'équation 5.21 doit être corrigée pour correspondre à la période mesurée du système réel et ii) les oscillations du pendule s'amortissent : le pendule relaxe vers une position verticale correspondant au fond d'un puits de potentiel $\theta = 0 [2\pi]$. On montre ci-dessous que ces écarts viennent essentiellement du fait qu'un pendule réel est une distribution de masse non-ponctuelle soumise à des frottements.

5.3.1 Distribution de masse

On regarde dans un premier temps ce qu'il se passe lorsque le pendule n'est plus ponctuel, mais est une distribution de masse m , de centre de masse G et de moment d'inertie par rapport à G I_G

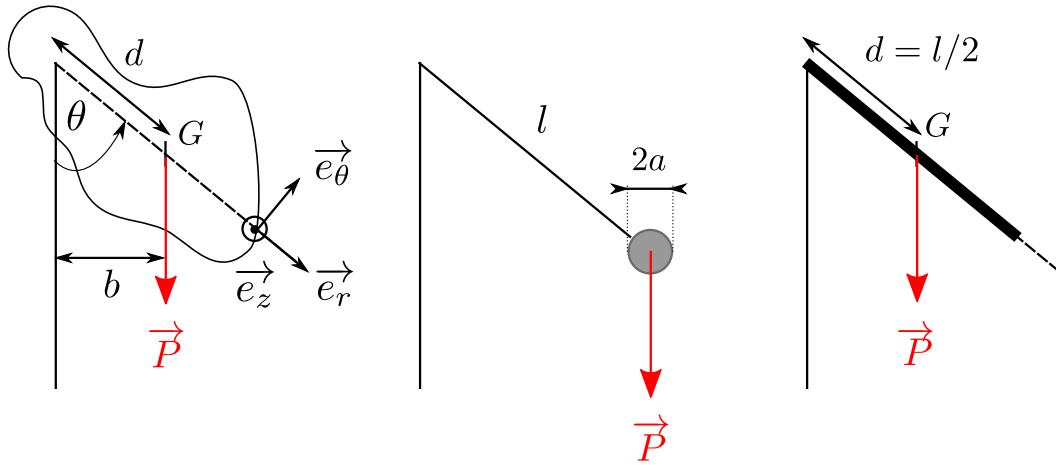


FIGURE 5.6 – Exemples de distributions de masses d'un pendule réel.

(Fig. 5.6). On note d la distance OG . Ainsi, le moment d'inertie *par rapport à* O $I_{/O}$ est donné par

$$I_{/O} = md^2 + I_{/G}. \quad (5.23)$$

Le théorème du moment cinétique projeté selon l'axe de rotation donne

$$I_{/O}\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta. \quad (5.24)$$

L'équation d'évolution du pendule pesant est donc

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_{/O}} \sin \theta = 0, \quad (5.25)$$

L'équation du pendule pensant s'obtient à partir de celle du pendule simple en remplaçant g/l par $mgd/I_{/O}$. En utilisant Eq. 5.23, la période d'oscillation aux petits angle s'écrit

$$\mathcal{T}_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{/O}}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{g}{d} + \frac{I_{/G}}{mgd}}. \quad (5.26)$$

Ainsi, si $I_{/G} \ll md^2$, $\mathcal{T}_0 \simeq 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$, et l'approximation du pendule simple marche bien. Considérons deux exemples caractéristiques :

- un pendule constitué d'une sphère de rayon a attachée à un fil de longueur l et de masse négligeable (Fig. 5.6, au centre). $I_{/G} = \frac{2}{5}ma^2$, d'où

$$\mathcal{T}_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right)}, \quad (5.27)$$

de telle sorte que

$$\frac{\Delta \mathcal{T}_0}{\mathcal{T}_0} = \frac{1}{5} \left(\frac{a}{l} \right)^2. \quad (5.28)$$

Pour $a = 1\text{cm}$ et $l = 1\text{m}$, on trouve $\Delta \mathcal{T}_0/\mathcal{T}_0 \sim 2 \cdot 10^{-5}$, une correction négligeable.

- une barre de longueur l est fixée en O par son extrémité (Fig. 5.6, à droite). $I_{/G} = \frac{1}{12}ml^2$. En notant que $d = l/2$, $I_{/O} = \frac{1}{3}ml^2$. On obtient

$$\mathcal{T}_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}. \quad (5.29)$$

Dans ce cas, la correction de période due à la répartition de masse du pendule ne peut pas être négligée.

5.3.2 Frottements et amortissement

Un pendule réel est soumis à deux types de frottements :

- des frottements solides d'intensité constante venant du pivot qui s'opposent au mouvement,
- des frottements fluides subits par la masse et par le fil. On estime le nombre de Reynolds dans l'air ambiant pour un pendule formé d'une sphère de 1 cm suspendue d'un mètre par

$$Re \equiv \frac{\rho v a}{\eta} \simeq \frac{1 \times 1 \times 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-5}} \sim 500. \quad (5.30)$$

Le régime de friction est donc essentiellement quadratique. Le fil, dont la section efficace est beaucoup plus faible, apporte un terme de friction linéaire. On notera que l'exemple académique d'un pendule magnétique amorti par courants de Foucault (frottements linéaires) n'est valable que qualitativement.

On modélise l'action de ces deux types de frottements en généralisant Eq. 5.7 par

$$\ddot{\theta} + \left\{ \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \alpha |\dot{\theta}| \dot{\theta} + c \operatorname{sgn} \dot{\theta} \right\} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (5.31)$$

Pour identifier les effets spécifiques aux frottements solides et fluides, on se place dans le régime des petits angles $\sin \theta \sim \theta$ et on étudie le rôle des différents termes séparément.

- *Frottements solides, petits angles.* Avec $\sin \theta \sim \theta$ (approximation harmonique), on étudie l'évolution du pendule donnée par

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -c \operatorname{sgn} \dot{\theta} = -c \times \begin{cases} +1, & \text{si } \dot{\theta} > 0; \\ -1, & \text{si } \dot{\theta} < 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

La résolution de l'équation différentielle linéaire avec second membre constant Eq. 5.32 sur la première demi-période $0 \leq t \leq \pi/\omega_0$ donne

$$\theta(t) = \underbrace{A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\frac{c}{\omega_0^2}}_{\text{solution particulière}}. \quad (5.33)$$

On détermine les constantes A et B en utilisant les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{c}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{c}{\omega_0^2}. \quad (5.34)$$

À la fin de la première demi-période, l'amplitude du pendule vaut $\theta(\pi/\omega_0) = -\theta_0 + 2c/\omega_0^2$, le deuxième terme correspondant à l'amortissement du aux frottements solides. De la même manière, sur la deuxième demi-période ($\pi/\omega_0 \leq t \leq 2\pi/\omega_0$), l'amplitude du pendule est donnée par

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{3c}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t - \frac{c}{\omega_0^2}, \quad (5.35)$$

et après une période entière, $\theta(2\pi/\omega_0) = \theta_0 - 4c/\omega_0^2$. Par récurrence, on obtient

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{(2n+1)c}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + (-1)^n \frac{c}{\omega_0^2}, \quad (5.36)$$

pour $n\pi/\omega_0 \leq t \leq (n+1)\pi/\omega_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ainsi, en présence de frottements solides, l'amplitude des oscillations décroît linéairement et l'amortissement se fait en un temps fini (Fig. 5.7).

- *Frottements fluides, petits angles.* L'évolution du pendule est donnée par

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (5.37)$$

Typiquement, pour un pendule dans l'air, le temps d'amortissement est bien plus long qu'une période d'oscillation ($\omega_0 \tau \gg 1$). L'évolution d'un pendule lâché sans vitesse initiale est donné par

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_1 t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad (5.38)$$

où ω_1 est la période du pendule libre corrigée au second ordre

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}}. \quad (5.39)$$

L'amplitude décroît exponentiellement (et donc peu efficacement à grands temps). Cette dé-

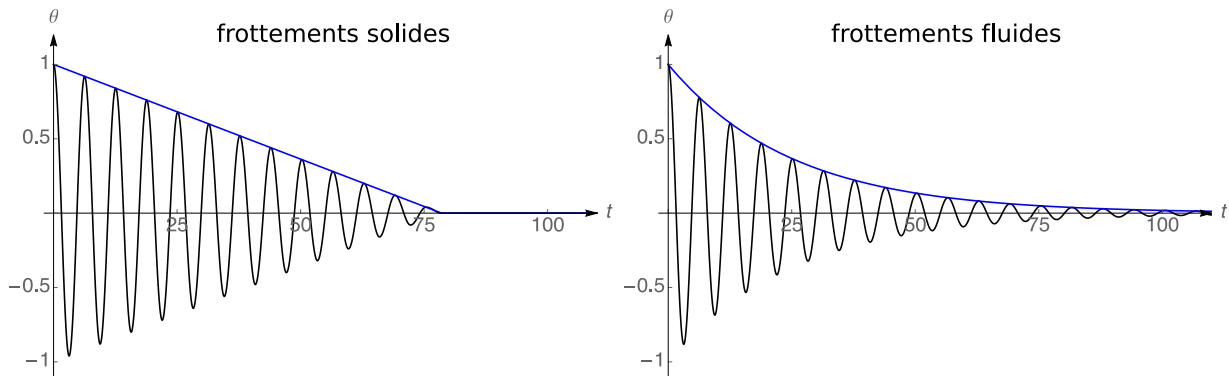


FIGURE 5.7 – La décroissance de l'amplitude des petites oscillations du pendule est exponentielle (resp. linéaire) pour des frottements fluides linéaires (resp. solides).

croissance est rarement observée en pratique, car la force de friction est non-linéaire.

5.3.3 Poussée d'Archimède

La somme du poids et de la poussée d'Archimède s'exerçant sur le pendule s'écrit

$$\mathbf{P} + \mathbf{\Pi} = (m - m_a) \mathbf{g}, \quad (5.40)$$

où m_a est la masse de l'air déplacée par le pendule. Ainsi, la contribution de la poussée d'Archimède à la dynamique du pendule s'écrit sous la forme d'une force de gravité effective \mathbf{g}_{eff}

$$\mathbf{P} + \mathbf{\Pi} = m \mathbf{g}_{\text{eff}}, \quad (5.41)$$

où $\mathbf{g}_{\text{eff}} = (1 - m/m_a) \mathbf{g}$. L'équation Eq. 5.12 permet d'estimer la correction de période associée

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{2} \frac{m_a}{m} = \frac{1}{2} \frac{\rho_a}{\rho}. \quad (5.42)$$

Dans les conditions habituelles, on trouve une correction de l'ordre $2.5 \cdot 10^{-4}$, peu importante en TP, mais importante en métrologie.

Remarques :

- La force hydrodynamique de « masse ajoutée », due à l'accélération de l'air due au pendule donne des corrections du même ordre de grandeur.
- On peut compenser les corrections de période dues à la friction et à la poussée d'Archimède par un choix judicieux de I et m (pendules de TP de type Bessel).

- En horlogerie/métrologie, on impose au pendule un couple supplémentaire appelé *échappement* par le biais d'un mécanisme pour compenser ces corrections, y compris les effets non-linéaires.
- Si initialement, le pendule est lancé avec une composante de vitesse hors du plan non-nulle, son mouvement est ellipsoïdal avec précession (effet différent de la précession due à la force de Coriolis dans le cadre d'un pendule de Foucault).

5.3.4 En résumé

À savoir sur cette partie :

1. Si la condition $I_G \ll md^2$ n'est pas valide, le pendule doit être traité comme un pendule pesant.
2. Un couple de frottements secs fait décroître linéairement l'amplitude des petites oscillations du pendule simple. Un couple de frottements fluides provoque une décroissance exponentielle.

A.1 Bibliographie générale

A.1.1 Livres

1. Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980
2. D. Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 1999
3. D. Kleppner and R.J. Kolenkow. *An Introduction to Mechanics*. Cambridge University Press, 2010

A.1.2 Notes de cours

A.2 Cadre de la mécanique

A.3 Gravitation

A.4 Forces électromécaniques

A.5 Interactions avec un fluide

A.6 Contact entre deux solides

A.7 Le modèle du pendule simple

