

إبتين جيس

نزہة رياضاتية فريدة



نزهة رياضية فريدة



كاسپار ديبيد فريديش
"هائم فوق بحر الضباب" (1818) ©

إيتيبن جيس

Étienne Ghys

نزهة رياضية فريدة



تم إنتاج النص والرسوم التوضيحية بغير الرمز © من قبل إبتين جيس الذي تنازل عن جميع حقوق النشر والحقوق ذات الصلة أو المجاورة. يمكنكم نسخها وتعديلها وتوزيعها، حتى للأغراض التجارية، كل ذلك دون طلب إذن. للحصول على معلومات حقوق النشر المتعلقة بالرسوم التوضيحية الأخرى، راجعوا صفحة **اعتمادات الصور**.

لمزيد من المعلومات حول ترخيص CC0 راجعوا **المشاع الإبداعي**.

تتوفر نسخة pdf من هذا الكتاب مجانًا على **Arxiv** وعلى **صفحة المؤلف** وعلى موقع **ENS Éditions**.

يمكنكم الحصول على ملفات LATEX الأصلية **هنا**.

نسخة مطبوعة متاحة للبيع لدى **ENS Éditions**.

المترجم من النص الأصلي بالإنجليزية: حمزة خليف (Hamza Khelif)

عنوان التواصل: **hkhelif@gmail.com**. الصفحة الشخصية: **فضاء رياضياتي**.

صورة الغلاف من اختيار المؤلف.

المؤلف :

Étienne Ghys
CNRS-ENS Lyon, UMPA
46 Allée d'Italie
69364 Lyon
France

etienne.ghys@ens-lyon.fr
perso.ens-lyon.fr/ghys

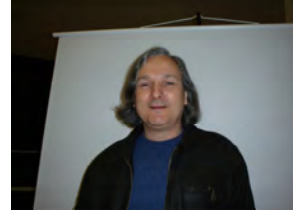
لمارتين، التي شجعتني دائماً على تأليف "كتاب صغير".

*Pour Martine, qui m'a toujours encouragé
à écrire "un petit livre".*

مقدمة الترجمة العربية

عزيزي القارئ، باللغة العربية،

يا له من شعور غريب أن يرى المرء نصًا كتبه بنفسه مترجمًا إلى لغة أجنبية لا يفهمها على الإطلاق! هناك مزيج من الفخر والفضول. هل هذا الكتاب العربي الذي أمامي "هو نفسه" الذي كتبه بالإنجليزية؟ هل تتخطى الرياضيات اللغة المستخدمة للتعبير عنها؟ هل هرب مني "كناي"؟ بصراحة، سأكون مبهتًا بذلك لأنني لا أعتقد أن الرياضيات ملك لأحد.



يجزم البعض أن الرياضيات هي مجرد لغة، سلاسل طويلة من الرموز مكتوبة وفقًا لتركيب معين، وأنه لا ينبغي للمرء أن يبحث عن المعنى المطلق فيها. يُجادل آخرون أن اللغة ليست سوى أداة لوصف عالم رياضي مجرد وكوئي قد يكون موجودًا لا نعرف أين، في مكان ما في الحنة الأفلاطونية. أخيرا يدعي البعض الآخر أن الرياضيات لا يمكن اختزالها إلا في عدد قليل من الوصلات العصبية، والتي تختلف بالتالي بالنسبة إلى كل واحد منا والتي تشاركها جزئيًا فقط من خلال الكلمات. أحب أن أتخيل أن المحتوى الرياضي لهذا الكتاب العربي يختلف تمامًا عن نسخته الإنجليزية، وذلك على وجه التحديد لأنه مكتوب باللغة العربية ولأنه يضيف شيئًا آخر. اعتقدت دائمًا أنه يتم التعبير عن الرياضيات بلغة طبيعية، سواء تعلق الأمر بالفرنسية أو الإنجليزية أو العربية، وأن هذه اللغة جزء لا يتجزأ من المحتوى الرياضي، في تعايش غامض. لا يمكن أن تكون الترجمة إيزوتشاكلًا عاديًا: إنها إبداع جديد ويجب علينا الاستمتاع بها.



إيتيهن جيس

مدرسة CIMPA، الوادي

26 فبراير - 10 مارس 2005.

كتب اللغوي الشهير ويلارد فان أورمان كواين كتابًا مهمًا يقضي على بعض معتقداتنا. في "الكلمة والشيء"، يوضح أن الترجمة - الإيزوتشاكل مستحيلة لأنه ليس لها معنى جوهري. لا توجد حقيقة واحدة يمكن التعبير عنها بشكل لا لبس فيه في كل لغة. يقدم كواين تجربة فكرية. يزور عالم لغوي قبيلة لا يعرف شيئًا عن لغتها. ونجأة يرى

أحد أفرادها يهتف "فايافاي!" وفي نفس الوقت يرى أربابًا يركض هاربا. هل "فايافاي" تعني "الأرنب"؟ ليس هناك ما يؤكد ذلك لأن المتكلم ربما كان يقصد الهروب أو أي شيء آخر. لذلك فإن أطروحة كواين هي أن لغويين كُفأين يواجهان نفس المواقف يمكن أن يؤسسا قاموسين غير متوافقين ولكنها يسمحان للمرء بإجراء أحاديث متماسكة مع هؤلاء الناس. لذلك لا يمكن ترجمة "فايافاي"، وداوماً وفقاً لكواين، فإنه ليس لتعابيرنا معنى كوني.



حمزة خليف

مدرسة CIMPA، الوادي
26 فبراير-10 مارس 2005.

إن تعميم هذا النوع من الحجج على الرياضيات أمر محفوف بالمخاطر، وربما مفرط في التبسيط. ومع ذلك، فعندما ينطق رياضياتيان كلمة "مُنَوَّعة" على سبيل المثال، فإن لكل منهما تفسيره الخاص، وربما يكون بعيداً تماماً عن التعريف "الرسمي" الموجود في كتب الرياضيات الجادة. الكلمات "مُنَوَّعة"، "Variété"، "Manifold"، "Mannigfaltigkeit"، "Variedade" إلخ. ألا تثير الكثير من الصور الذهنية عندما نسمعها أو نقرأها بلغتنا؟ أترك للقارئ تكوين رأي شخصي.



تدين الرياضيات كثيراً للغة العربية، كأداة لنقل التراث الذي تركه اليونانيون ومصدر لرياضيات جديدة.

لذلك، بكل فخر وامتنان أود أن أشكر حمزة خليف الذي صنع هذا الإبداع الجديد! إنه ليس مبتدئاً حيث سبق له أن ترجم فيلمّي "أبعاد" و "الشواش" إلى اللغة العربية. لا بد أن تكون ترجمة هذه "الزهة" إلى العربية صعبة بشكل خاص لأنه ربما هناك العديد من الكلمات التقنية في الرياضيات التي ليس لها ما يقابلها في اللغة العربية. يقدم حمزة معجماً في نهاية الكتاب لمساعدة القارئ.

حُبّ حمزة للرياضيات بقي وصادق كما تُظهِر كُتبه عن المنحنيات والسطوح. التقيت به في عام 2005 في مؤتمر رياضيات لا يُنسى في الوادي. لقد كانت واحدة من أكثر الندوات الممتعة التي أتيت لي الفرصة لحضورها. شكراً حمزة.

إبتين جيس

باريس، في 11 ديسمبر 2021

من أجل نطقي أقرب إلى لغة الأصل لأساء بعض الرياضياتيين وللبعض الآخر من الأسماء الأعلام، يستعمل النص الحروف العربية الإضافية (المتوقرة على الشبكة وفي "مايكروسوفت أوفيس" 2019) الموجودة أذناه مع ما يقابلها في اللغات اللاتينية.

پ : p - پ : v - ث : g - و : o -
ؤ : ou, u - و : [ø] -
ؤ : [y] - ي : é, è, ê
[e, ø, ε, ε:, ə]

يستعمل النص أيضاً أمام كلمة تشاكل البوادي: إيزو (متساو)، أطو (ذاتي)، هولو (تأثم) وهوميو (شبيهة) لعدم وجود مصطلحات موحدة بالعربية في هذا الشأن. (المترجم)

المحتويات

vii	مقدمة الترجمة العربية
1	مقدمة
5	خارطة طريق
11	كثيرات الحدود المتقاطعة : ماكسيم كوتنسبييتش
17	أنماط وتبديلات : دُنالد كنوث
27	التبديلات القابلة للفصل
35	هيباركوس وشرودر
43	<i>De methodis serierum et fluxionum</i> : طريقة نيوتن
51	<i>De methodis serierum et fluxionum</i> : متسلسلات نيوتن
59	بعض من الجبر الشكلي
69	فاوس حول المنحنيات الجبرية
79	إثبات ادعاء فاوس حول المُفرديات
87	<i>De seriebus divergentibus</i> : أويلر، كوشي و بوانكاري
95	التقارب : كوشي
111	مويوس وشريطه

121	قلادات مويوس
133	حل المفرديات
143	الـ 3 - كرة وتلييف هوييف
157	القرنة وثلاثية الوريقات
169	فيكتور بويوزو أخيرا !
177	جاك ميلنور وتلييفه
191	تجميعي السطوح لـ هيباركوس - شرودر - تاماري - سطاشيف
199	جيم سطاشيف وفضاءات الحلقات
211	العمولات (أُبرادات)
221	العمولات المفردة
229	ويعود فاوس: المنحنيات في المستوي
243	المخططات الوترية التحليلية : خوارزمية
257	المخططات الوترية التحليلية : البيانات المتشابهة
275	فاوس والربط
285	ويعود كونتسهيتش: اللا متغيرات الكونية
293	خاتمة
295	شكر
297	اعتمادات الصور
299	مصطلحات

جميع الفصول تقريبًا مستقلة بشكل أساسي ويمكنكم تخطي أكبر عدد تريده منها. إذا وجدتم قسمًا شاقًا جدًا أو مسطحًا جدًا، فيمكنكم تجاوزه بسهولة. سنقوم بزيارة هيباركوس ونيوتن وفاؤوس، ولكن أيضًا العديد من الرياضياتيين المعاصرين. نحن نتعامل مع القليل من الجبر، والطوبولوجيا، والهندسة، والتحليل المركب، والتوافقيات، وعلوم الحاسوب. نزهة في عالم الرياضيات.

ومع ذلك، من أجل الوصول إلى نوع من الهدف وليس تحويل هذه النزهة إلى نزهة عشوائية تمامًا، دعوني أقتبس نتيجة سيتم إثباتها في أحد الفصول الأخيرة. ربما تكون هذه هي النتيجة الجديدة الوحيدة في هذا العمل.

لتكن p نقطة على منحنٍ مستوي C .

إذا كان C أملس، فإن الصورة المحلية ليست مثيرة للاهتمام.

إذا كان C مفردًا في p ، فقد تكون الصورة أكثر تعقيدًا، على سبيل المثال نقطة قُرنية

$x^2 = y^3$. لنقتصر دراستنا على المنحنيات الجبرية المعرفة بواسطة معادلة

$F(x, y) = 0$ حيث F كثير حدود لـ x ، y بمعاملات حقيقية. يتضح أنه في جوار

لإحدى نقطه، مثل هذا المنحني هو اتحاد عدد منته من القطع غير القابلة للاختزال، والتي

تسمى عادةً الفروع. كانت طبيعة هذه الفروع موضوع الكثير من الجدل في الماضي،

وسناقش هذا الموضوع بالتفصيل. والنتيجة الرئيسية هي أن الفروع لمساءً طوبولوجيا!

بتعبير أدق من أجل كل فرع، يوجد هوميوتشاكل (مستشاكل) محلي للمستوي يُحوّله إلى

مستقيم. يتقاطع كل فرع مع دائرة صغيرة متركزة في p في نقطتين بالضبط.

يعتبر الوضع النسبي للفروع للعديدة للمنحني أكثر دقة. في جوار لنقطة مفردة، يتم

وصف الطوبولوجيا بعدد زوجي من النقط على دائرة، مقترنة مثنى مثنى: يتم إعطاء

الاقتران بواسطة الفروع. نحصل على $2n$ نقطة على دائرة مجمعة في n ثنائية، لكل

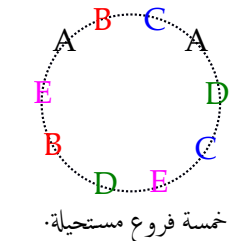
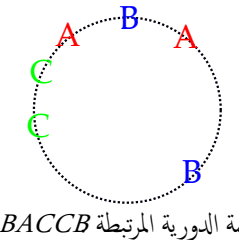
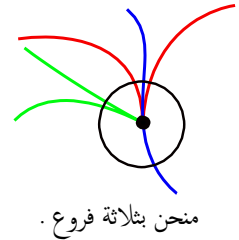
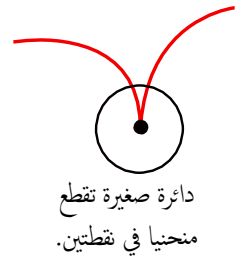
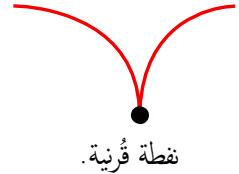
ثنائية لون أو حرف.

يمكنني الآن أن أذكر مبرهنة ستكون وجهتنا النهائية بشكل أو بآخر، كنوع من المنارة

يظهر اتجاهها ما.

مبرهنة. لا توجد مفردة لمنحن جبري حقيقي في المستوي مكون من خمسة فروع A ،

B ، C ، D ، E تتقاطع مع دائرة صغيرة كما في الصورة في الهامش.



في الواقع، سأثبت مبرهنة أكثر دقة بكثير تقدم وصفًا كاملاً لجميع التكوينات الطوبولوجية الممكنة لفروع منحني تحليلي. لقد كتبت هذا "الكتاب الصغير" أخذا بعين الاعتبار قارئاً واحداً: أنا بذاتي، عندما كنت دارساً جامعياً في مرحلة ما دون التدرج... لأكون محدداً للغاية، فقد اقتصرمت المتطلبات الأساسية على خلفيتي الشخصية عندما اجتزت امتحان "التبريز"، قبل أربعين عاماً بالضبط! أتذكر بوضوح أنني واجهت (وما زلت أواجه) صعوبات كبيرة في قراءة أطروحات رياضياتية طويلة، مليئة بالتفاصيل التقنية، وأنتي فضلت النظر إلى الصور. لقد تعلمت الآن أن الدقة والتفاصيل ضرورية في كثير من الأحيان في الرياضيات، لكنني ما زلت مغرماً جداً بالزهات. لقد حاولت أن أتخيل ما يمكن أن تكون عليه ردود أفعالي تجاه هذا الكتاب، كمتدئ. هذه "المحادثة" بين "نسختين مني أنا" مثيرة للاهتمام وذكرتني بالقصة القصيرة "El Otro" لبورجس (Borges). هل كان حلماً؟ إعادة بناء الماضي؟

كلمة تحذير في محلها: هذا ليس كتاباً مدرسياً مكتملاً بهيكل تعريف - مبرهنة - برهان. عليكم أن تكونوا مستعدين للتعب من وقت إلى آخر، كما هو الحال في العديد من الزهات. أعلم أنكم ستندمرون مني بسبب عدم وجود تعريفات دقيقة، وفي الواقع سينتبع عليكم قبول التعريفات نصف المحبوزة ... بالطبع، الكتب المدرسية ضرورية وسأقدم العديد من المراجع في الهوامش. ومع ذلك، أنا مقتنع بأن الأفكار والأمثلة الرياضية تسبق البراهين والتعاريف الرسمية. كما قال دالمبير ذات مرة: "فقط استمروا ... وسوف يلحق بكم الإيمان!". قد ترون بين الحين والآخر بانوراما جميلة تنبتق من الضباب، مثل تلك الموجودة في مقدمة هذا المقال، بقلم كاسبار ديبيد فريدريش

(Der Wanderer über dem Nebelmeer (1818)):

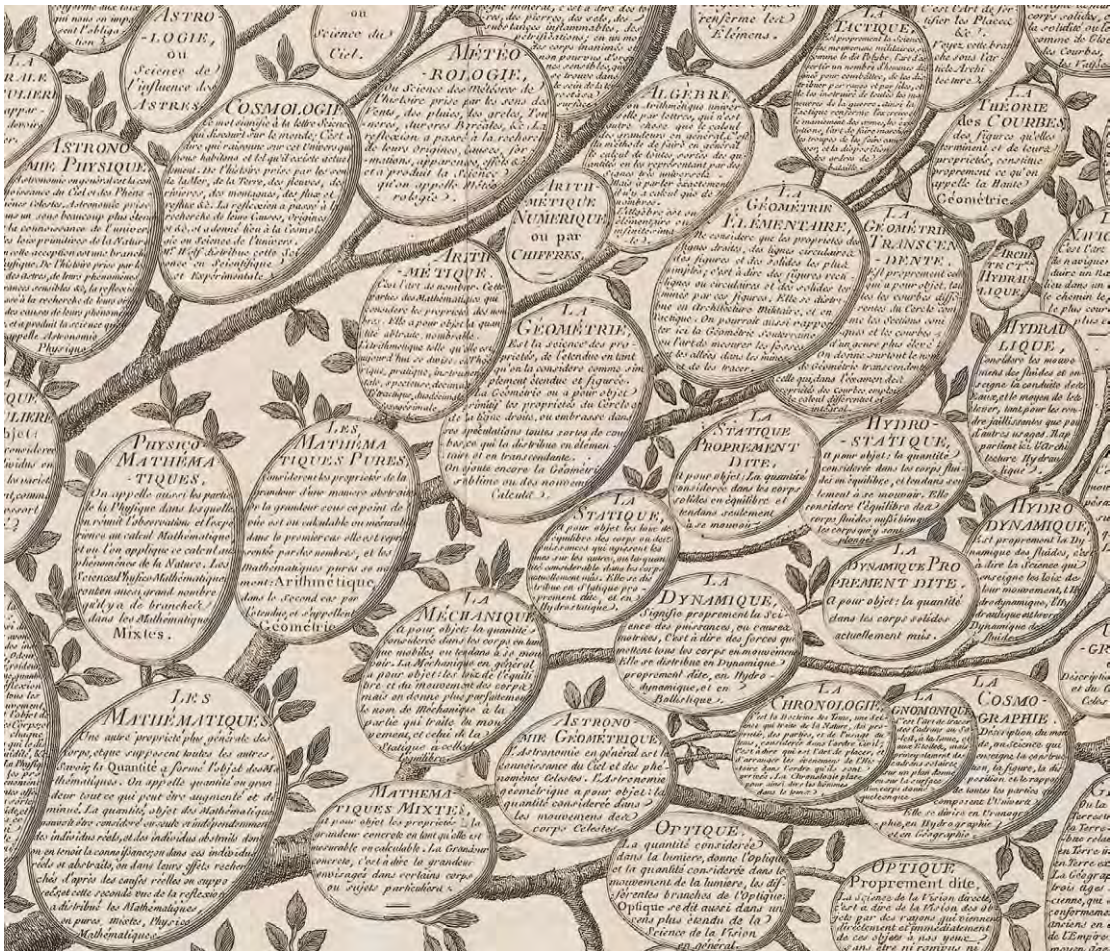
اقترح للعالم الرياضي؟

أمل أن يستمتع بعض الدارسين الجامعيين المتحمسين اليوم ببعض هذه المشاهد.

يمكننا الآن الشروع في رحلتنا.



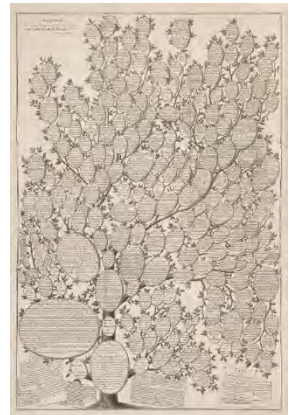
"سيروا إلى الأمام ... وسوف
يلحق بكم الإيمان."



تفصيل من

“Essai d'une distribution généalogique des sciences et des arts principaux” (Chrétien Frédéric Guillaume Roth, 1769).

وقدم إدراجها كواجهة رئيسية لموسوعة **Encyclopédie** الشهيرة لديدرو و دالمبير. تقع "الرياضيات" في الزاوية اليسرى السفلى و "نظرية المنحنيات" في الزاوية اليمنى العليا. هل المعرفة البشرية منظمة كشجرة؟

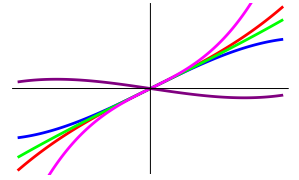


خارطة طريق

نظرًا إلى أننا بالتأكيد لن نتبع طريقًا مباشرًا، ونظرًا إلى أنه يجب أن تكونوا مستعدين لبعض الانعطافات الاختيارية، فقد يكون مخططًا تقريبيًا لمسار الرحلة مفيدًا، كما هو الحال في العرض الترويجي لحزمة سياحية من قِبَل منظّم الرحلات.

تناقش الفصول الأربعة الأولى الأوضاع النسبية للرسوم البيانية لعائلة من كثيرات الحدود الحقيقية P_1, \dots, P_n بروح **مبرهنة كونتسبيلتس** التي ذكرتها في المقدمة. من خلال مقارنة لقيم $P_i(x)$ من أجل القيم الموجبة الصغيرة والقيم السالبة الصغيرة لـ x ننتج تبديلة لـ $\{1, \dots, n\}$ والتي تصف الصورة المحلية في جوار 0. سأعطي توصيفًا دقيقًا إلى حد ما لهذه التبديلات. تبين أنه قد تم اعتبارها بالفعل في تمويه مختلف من قبل التوافقيتين، تحت اسم "التبديلات القابلة للفصل". ثم نقوم بفحص مجموعات الدفع والإخراج، كما قدمها **دونالد كوث** في فن برمجة الحاسوب. نحسب أيضًا عدد **التبديلات القابلة للفصل**، وستكون هذه فرصة لاكتشاف أن هذه الأعداد قد تم اعتبارها بالفعل من قبل **هيباركوس**، منذ أكثر من ألفي عام.

نحاول بعد ذلك تعميم المشكلة من الرسوم البيانية لكثيرات الحدود إلى المنحنيات المستوية، المعرفة ضمنيًا بواسطة معادلة كثيرة الحدود حقيقية $F(x, y) = 0$. وهذا يتطلب فهم طوبولوجيا المنحنى الجبري (أو التحليلي) في جوارٍ لנקطة مفردة. تعود النتائج المهمة الأولى إلى نيوتن في عام 1669، في ورقة* استثنائية بعنوان **Tractatus de methodis serierum et fluxionum**، سندرستها على مدى فصلين.



تبديلة معرفة بـ 5 كثيرات الحدود.

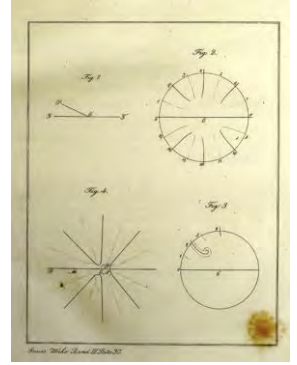
specimen aequalis obliqua proportionis, parali					
B					
x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4	
x^3	x^2y	xy^2	y^3	y^4	
x^2	xy	y^2	y^3	y^4	
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	
0	y	y^2	y^3	y^4	
A					C

correspondentia unigenio nota al
sforti plura in unigenio nota

من "de methodis" لنيوتن *

* في هذا السياق، تمت ترجمة كلمة "Paper"، أسوة باللغة الأصلية للكتاب، ببساطة إلى "ورقة" والتي تعني، بدهاء، ورقة بحثية، إلخ. (الترجم)

تحتوي هذه الورقة على عرض تفصيلي لطريقة نيوتن الشهيرة لإيجاد قيم تقريبية لجذور كثيرات الحدود. كما أنها تقدم الفكرة ذات الصلة لمضلعات نيوتن. بالمعنى الدقيق للكلمة، لم يقدم نيوتن البراهين، لكنه فهم أن المنحني التحليلي محليًا يتكون من عدد منته من الفروع، وهي "رسوم بيانية" لمتسلسلة القوى الشكلية ذات الأساس المنطقية. فضل إضافي - أسميته **الجبر الشكلي** - يشرح نتائج نيوتن في المصطلحات الحديثة ويقدم البراهين.



من أطروحة فاوس للدكتورا

حتى هذه النقطة، ستكون المناقشة جبرية بحتة. ثم نراجع **أول برهان لفاوس للمبرهنة الأساسية للجبر** - أطروحته للدكتورا (هكذا) عام 1799 - باستخدام حجج ذات طبيعة طوبولوجية، والتي كانت ثورية في ذلك الوقت. يعتمد هذا على الادعاء غير المثبت بأن منحنيًا جبريًا يدخل القرص يجب أن يخرج منه. إن **البرهان على هذا الادعاء** أكثر دقة مما يمكن تخيله، ولم يتمكن رياضياتيان يشتركان في نفس الاسم من إثبات ذلك في القرن التاسع عشر.

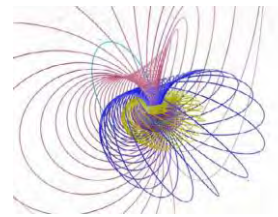
كان **أويلر وكوشي وپونكاري** أساتذة عظماء في معالجة المتسلسلات. فصلان يتناولان اكتشافاتهم. في نهاية الثاني، باستخدام **حساب النهايات لكوشي**، حصلنا أخيرًا على إثبات لتقارب متسلسلات نيوتن. يمكننا هذا من تبيان أن دائرة صغيرة حول مفردة منحني تحليلي حقيقي مستو تتقاطع مع المنحني في عدد زوجي من النقط وتحدد مخططًا وتريا، أي $2n$ نقطة مرتبة دوريًا على دائرة ومجمعة في أزواج.

الفصول الثلاثة الآتية معنية بطوبولوجيا مفردة المنحنيات المستوية التحليلية. نفسر طريقة التفجير، وهي نوع من المجهر يمكننا من النظر بعمق في المفردة. من الناحية الطوبولوجية، يُقدّم هذا **شريطا لموبيوس**، أو **قلادات لموبيوس** إذا تم استخدام المجهر عدة مرات. ستصبح عملية التفجير أداة قوية في **حل المفرديات**.

الصور المحلية لمنحنيات مستوية مركبة جميلة وتستحق الزيارة. نظرًا إلى أن \mathbb{C}^2 بُعدًا حقيقيًا يساوي 4، فإننا سنقطع المنحني بكرات صغيرة ثلاثية الأبعاد حول المفردة. من وجهة النظر هذه، حتى المستقيمات تنتج أشياء رائعة، مثل **تلييف هوفيف**.



تفجير قرص ثلاث مرات



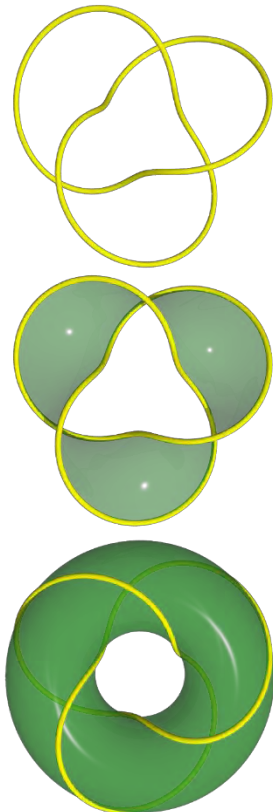
ألياف هوفيف

المُفرديات الأكثر تعقيدًا، مثل **القرنة** $x^3 - y^2 = 0$ موصوفة بالعقد والروابط. من أجل فهم الحالة العامة، نقوم بزيارة **بكتور بويزو**، الذي اقترح في عام 1850 نهجًا جديدًا تمامًا لمسلسلة نيوتن. في عام 1968، استخدم **جاك ميلنور** هذه الأفكار لإعطاء صورة طوبولوجية كاملة، ولكن لا تزال على الأعداد المركبة. ومن المثير للاهتمام، أننا نكتشف صلة بين التبديلات القابلة للفصل و**تجميعي السطوح**. هذه عائلة من متعددات الرؤوس المحدبة قدمها تاماري وسطاشيف من أجل فهم معنى "التجميعية بترادف مقرب". باستخدام متعددات الرؤوس هذه، كان **جيم سطاشيف** قادرًا على إعطاء توصيف للفضاءات التي لها نفس نوع الترادف مثل الزمر الطوبولوجية. اتضح أن هذه كانت نقطة البداية ل**نظرية العمولات** (نظرية الأبرادات)، التي تلعب دورًا أساسيًا في نظرية الترادف الحديثة والطوبولوجيا الجبرية. العمولات (جمع عمولة) هي بنى جبرية عامة جدًا وهي تتكيف تمامًا مع وضعنا. يتم إعطاء أمثلة نموذجية عن طريق الأشجار والصفائر وفضاءات التشكيل وما إلى ذلك. سنرى أن مجموعة كل المفرديات، إلى هوموتشاكل مقرب، يمكن اعتبارها **عمولة مفردة** وهذا يساعد على فهم الصورة الإجمالية.

للمتعة فقط، نقوم بفحص **ملاحظة قصيرة من فاوس**، بخصوص حلقات (أو عُرى) مغلقة في المستوي ذات نقط مضاعفة عادية. مع السير حول الحلقة (أو العروة)، تتم زيارة كل نقطة مضاعفة مرتين، بحيث يجد ذلك مخططا وتريا ما. هل يمكننا وصف هذا النوع من الرسوم البيانية؟

وصلنا أخيرًا إلى هدفنا المفقود: التمييز الكامل، في فصلين، **للمخططات الوترية المرتبطة بمفرديات المنحنيات المستوية التحليلية الحقيقية**.

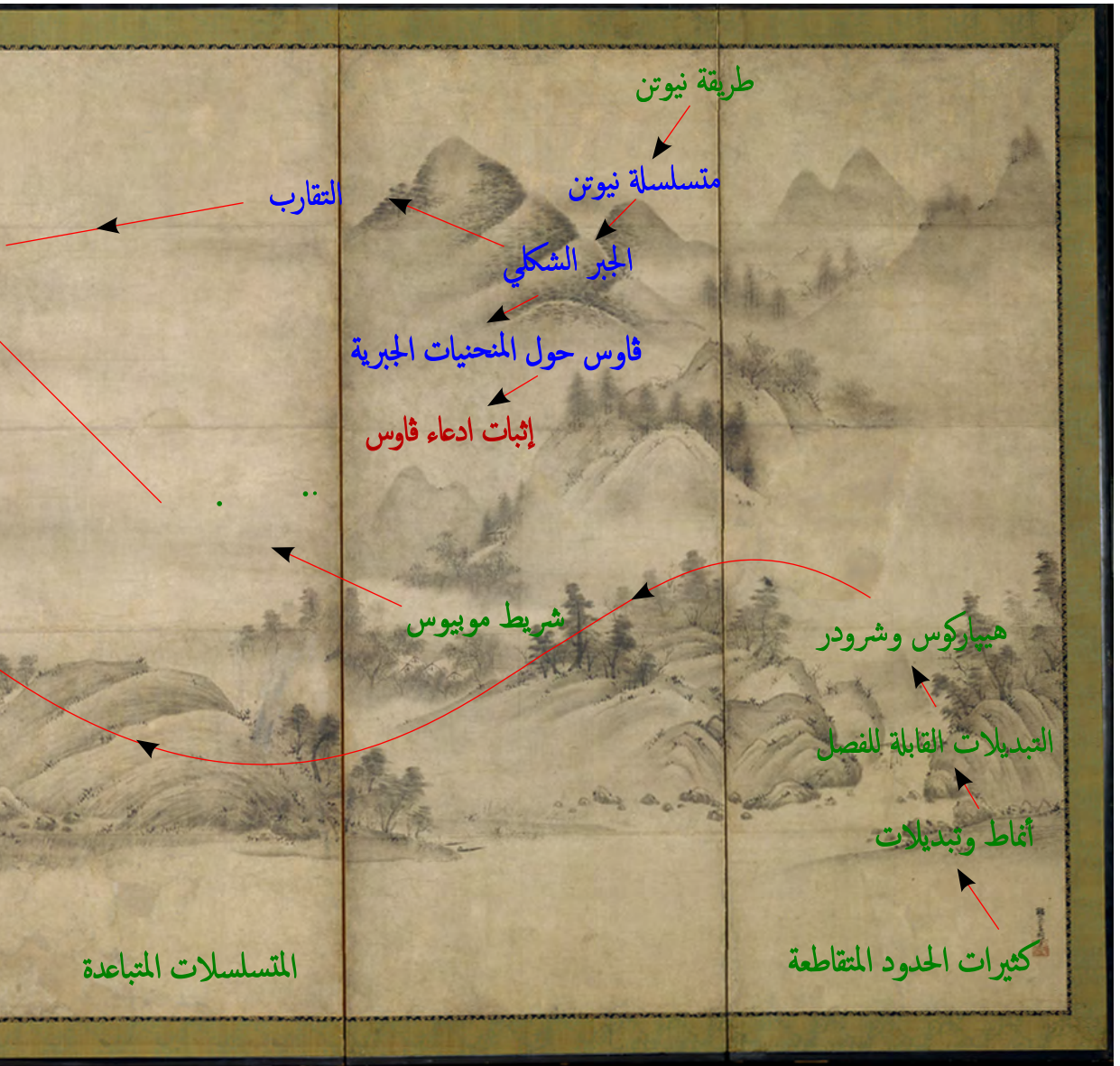
يُختتم الكتاب بفصلين إضافيين. واحد حول تقريب **فاوس** لأعداد الارتباط وآخر نهائي، دون برهان، حول **اللامتغير الكوني للعقد لكونتسبهييتش**. الغرض الرئيسي من هذا الفصل الأخير هو تشجيع القارئ على مواصلة الاستكشاف.



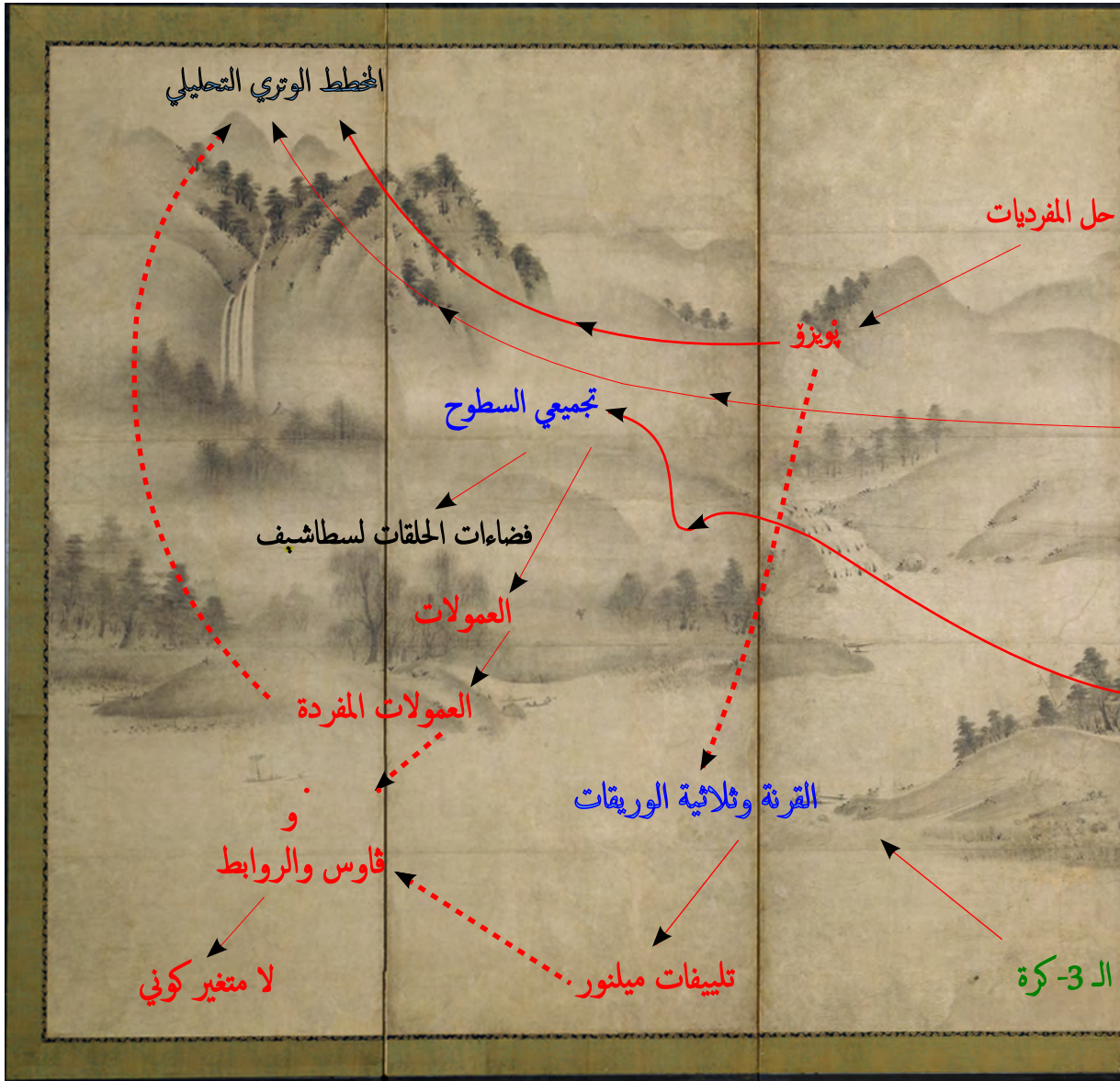
عقدة ثلاثية الوريقات



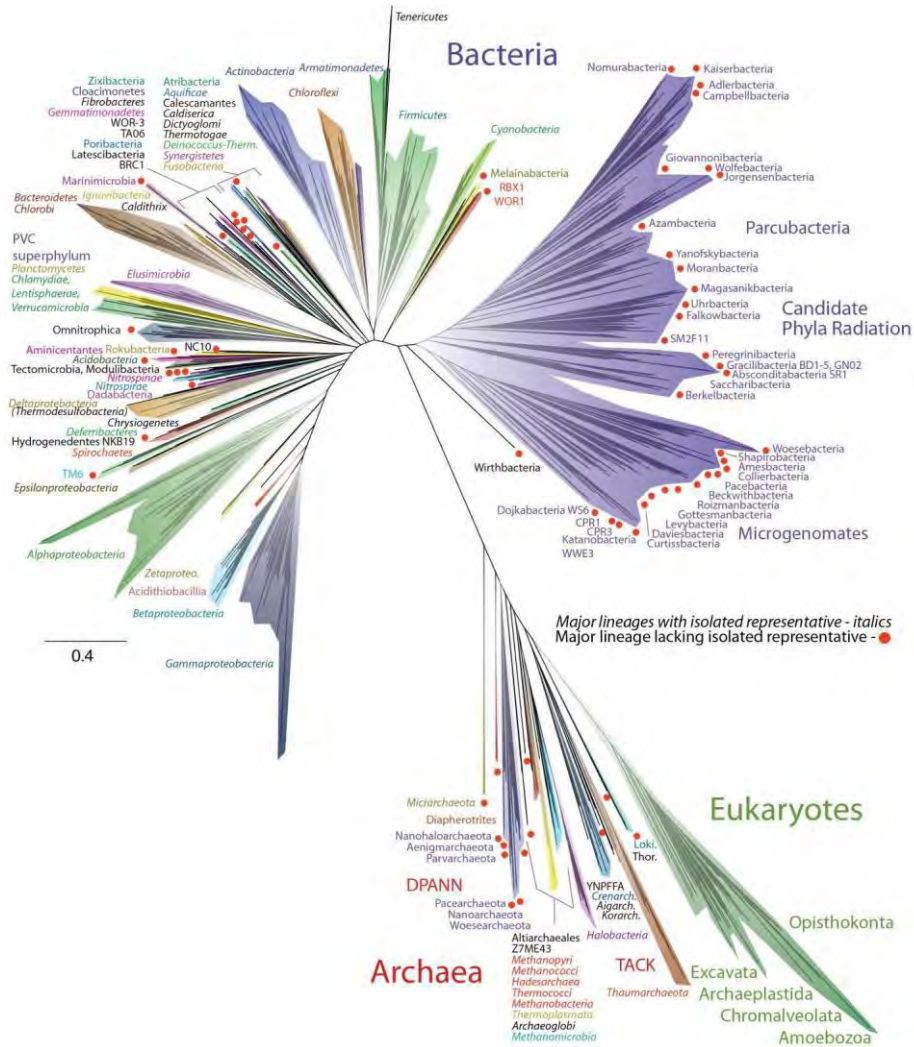
تجميعي السطوح



الألوان (الأخضر والأزرق والأحمر والأسود)
تعطي فكرة غير موضوعية للغاية حول الصعوبة



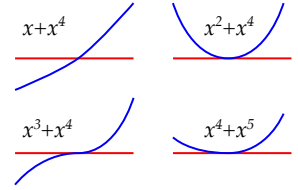
منظر طبيعي للفصول الأربعة
(ثمانية مناظر لنهر شياو وشياتق)،
رسمها سواي، أوائل القرن السادس عشر. ٥



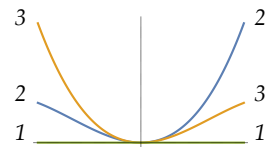
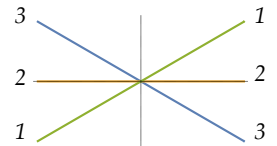
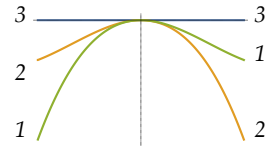
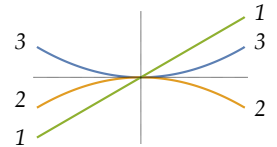
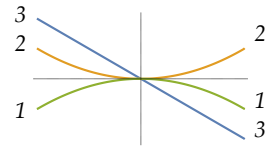
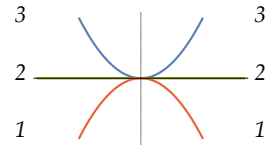
من "نظرة جديدة لشجرة الحياة،" *Nature Microbiology* 1, (2016). هل يمكن أن تصنع هذه الفروع رسوماً بيانية لكثيرات الحدود؟

⊙

كثيرات الحدود المتقاطعة ماكسيم كونتسببيتش



تبادلات كثيرة الحدود



قبل إثبات مبرهنة كونتسببيتش، اسمحوا لي أن أبدأ بملاحظة أولية للغاية. لنعتبر وضعية الرسم البياني لكثير حدود واحد حقيقي غير منعدم $P(x)$ بالنسبة إلى محور الفواصل x . بجوار 0. هناك احتمالان. إما أن يكون الرسم البياني لـ P يتقاطع مع محور الفواصل في 0، وإما أن يبقى على نفس الجانب. للتمييز بين هاتين الحالتين، أقدم التعريف الآتي.

تعريف. ليكن $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ كثير حدود (أو متسلسلة شكلية) التقويم $v(P)$ لـ P (في 0) هو أصغر عدد صحيح k بحيث يكون $a_k \neq 0$. حسب الاصطلاح، فإن تقويم كثير الحدود المنعدم هو ∞ .

من الواضح أن الرسم البياني لـ P يتقاطع مع محور الفواصل في 0 إذا وفقط إذا كان التقويم $v(P)$ عددا صحيحا فرديا. من أجل اثنين مختلفين من كثيرات الحدود P_1 ، P_2 ، فإن إشارة $P_1(x) - P_2(x)$ تتغير في 0 إذا وفقط إذا كان $v(P_1 - P_2)$ فرديا. لنفرض الآن أن لدينا ثلاثة من كثيرات الحدود P_1 ، P_2 ، P_3 ولنلق نظرة على الرسوم الممكنة في جوار المبدأ. توضح الأشكال الستة الموجودة في الهامش أنه يمكن تحقيق جميع التبديلات الست لـ $\{1, 2, 3\}$ إذا اخترنا كثيرات الحدود بشكل ملائم.

على سبيل المثال :

$$P_1(x) = -x^2 ; P_2(x) = 0 ; P_3(x) = x^2$$

$$P_1(x) = -x^2 ; P_2(x) = x^2 ; P_3(x) = -x$$

$$P_1(x) = x ; P_2(x) = -x^2 ; P_3(x) = x^2$$

$$P_1(x) = -x^2 + x^3 ; P_2(x) = -x^2 - x^3 ; P_3(x) = 0$$

$$P_1(x) = x ; P_2(x) = 0 ; P_3(x) = -x$$

$$P_1(x) = 0 ; P_2(x) = x^2 + x^3 ; P_3(x) = x^2 - x^3.$$

تبدأ ظاهرة كونتسبميتش إذن بأربع معادلات كثيرة الحدود. لاحظوا أن جميع الصور السابقة ربما أوحى إلي أن أفترض أن $P_i(0) = 0$ ولكن هذا ليس ضروريًا. هذا فقط بسبب حقيقة أن هذا الكتاب يناقش بشكل رئيسي الخصائص المحلية، في جوار نقطة واحدة $(0,0)$.

يمكننا الآن إثبات مبرهنة تذكرة المترو المذكورة في المقدمة.

بالتناقض، نفترض وجود أربعة كثيرات حدود P_4, P_3, P_2, P_1 بحيث :

$$1. P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x) \text{ من أجل } x \text{ صغير سالب.}$$

$$2. P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x) \text{ من أجل } x \text{ صغير موجب.}$$

باستبدال $P_i - P_1$ بـ P_i ، يمكننا أن نفترض أن $P_1 = 0$. ونظرا إلى أن P_2 و P_4

تتغير إشارتهما في المبدأ فإن تقويمهما $v(P_2)$ ، $v(P_4)$ فرديان.

نظرا إلى أن P_3 لا تتغير إشارته، فإن تقويمه $v(P_3)$ يكون زوجيًا.

من $0 < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ من أجل القيم الصغيرة السالبة لـ x ، نستنتج

$$\text{أن } v(P_2) \geq v(P_3) \geq v(P_4).$$

وبالمثل، من $|P_4(x)| < |P_2(x)|$ من أجل القيم الصغيرة الموجبة لـ x ، نستنتج أن

$$v(P_4) \geq v(P_2)$$

سيؤدي ذلك إلى إجبار التقويمات الثلاثة على التساوي، لكن اثنين منها فرديان والثالث

زوجي.

وهذا تناقض. □

لاحظوا أن نفس الإثبات يُطبَّق على الدوال التحليلية الحقيقية ولكن لا يطبق على الدوال

الملساء. في الواقع، سيجد القارئ بسهولة أربع دوال P_i من صنف C^∞ تتقاطع في

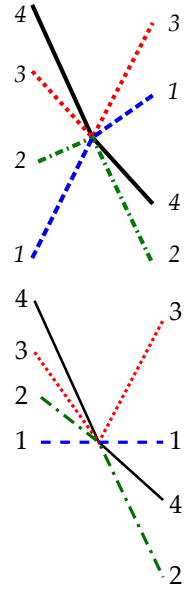
المبدأ وفقًا للتبديلة "المحظورة".

كثيرات الحدود

$$x^2 P_1(x), \dots, x^2 P_n(x)$$

مرتبة مثل $P_1(x), \dots, P_n(x)$

وتنعدم جميعها في $x = 0$.



أستخدم الرمز □ في نهاية الإثبات.

هل سيخمن القارئ الذكي لماذا أضع •

في □؟ إرشاد: فكر بالفرنسية.

لماذا؟

عندما نغير الاتجاه على محور الفواصل، نرى أن التبديلة العكسية محظورة أيضًا. كثرين، أوصي بإثبات أن التبديلات الـ 22 المتبقية لـ $\{1,2,3,4\}$ تحدث وفق الاختيارات المناسبة لـ P_i ، $i \in \{1,2,3,4\}$. لنحاول الآن تحليل الوضع بأي عدد من كثيرات الحدود.

تعريف. ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من أو يساوي 2 ولتكن π تبديلة لـ $\{1,2,\dots,n\}$. نقول إن π تبادلٌ كثير الحدود إذا وُجد n كثير حدود P_1, \dots, P_n بحيث يكون:

- $P_1(x) < P_2(x) < \dots < P_n(x)$ من أجل القيم الصغيرة السالبة لـ x .
- $P_{\pi(1)}(x) < P_{\pi(2)}(x) < \dots < P_{\pi(n)}(x)$ من أجل قيم x الصغيرة الموجبة.

هدفنا هو إعطاء وصف دقيق إلى حد ما للتبادلات كثيرة الحدود.

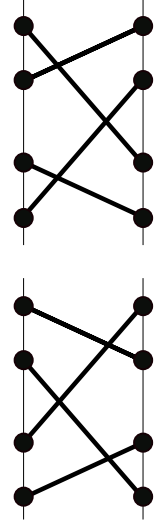
التبديلات القابلة للفصل

تعريف. ليكن $n, n \geq 2$ ، عددًا صحيحًا و π تبديلة لـ $\{1,2,\dots,n\}$. نقول إن π قابلة للفصل إذا كانت لا "تحتوي" على إحدى التبديلات المحظورة، أي إذا لم تكن هناك أربعة دلائل $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ ، بحيث يكون $\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$ أو $\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2)$.

بعبارة أخرى، تكون تبديلة قابلة للفصل إذا كانت لا تحتوي على إحدى تبديلات كونتسبميتش على أربعة حروف. يجب أن يكون واضحًا أن تبادلًا كثير الحدود قابل للفصل لزوماً. في هذا الجزء تثبت العكس. لنبدأ بتوطئة تبدو وكأنها "فولكلور" في أدب التوافقيات¹.

توطئة. لتكن π تبديلة قابلة للفصل من $\{1, \dots, n\}$ ($3 \leq n$). يوجد مجال مناسب $I = \{k, k+1, \dots, k+l\}$ (مع $1 \leq k \leq k+l \leq n$)، طوله $l+1$ ، $2 \leq l+1$ ، وصورته بـ π هي مجال.

يمكننا أن نفترض أن $\pi(1) < \pi(2)$ لأنه بخلاف ذلك يمكننا استبدال التبديلة "العكسية" $\bar{\pi}(k) = n+1 - \pi(k)$ بالتبديلة π . إذا كان $\pi(2) = \pi(1) + 1$ نكون قد أنهينا الإثبات لأن صورة $\{1,2\}$ هي المجال $\{\pi(1), \pi(2)\}$. ومن ثم نفترض أن $\pi(2) > \pi(1) + 1$.



التبديلتان المحظورتان.

سبب المصطلح "قابل للفصل" سيتضح في الفصل الآتي.

¹ P. Bose, J. F. Buss, and A. Lubiw. Pattern matching for permutations. *Inform. Process. Lett.*, 65(5):277–283, 1998.

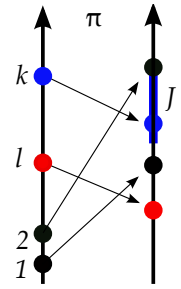
لاحظوا أنه إذا كان π تبادلًا كثير الحدود، فإن الأمر كذلك بالنسبة إلى $\bar{\pi}$ (تضرب كل كثيرات الحدود في $-x$). وبالمثل، من خلال تعريف التبديلات القابلة للفصل، π و $\bar{\pi}$ قابلان للفصل في نفس الوقت.

ليكن k أصغر عدد صحيح بحيث يحتوي $\pi(\{2, \dots, k\})$ على مجال J بين $\pi(1)+1$ و $\pi(2)$. لاحظوا أن $\pi(k)$ في J بحيث أن $\pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$. إذا كانت الصورة $\pi(\{2, \dots, k\})$ تساوي تمامًا المجال J ، فإننا سنجد مجالًا غير تافه تكون صورته بواسطة π مجالًا.

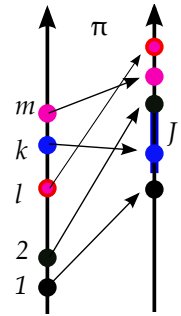
في خلاف ذلك، اختاروا عنصرًا l بين 2 و k صورته بواسطة π هي "خارج J ". لدينا $\pi(l) < \pi(1)$ أو $\pi(l) > \pi(2)$.

إذا كان $\pi(l) < \pi(1)$ فإن العناصر الأربعة $1, 2, l, k$ تحقق $1 < 2 < l < k$ و $\pi(1) < \pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$.

لذلك تم ترتيبها على أنها "تبديلة محظورة" وهو أمر مستحيل، من خلال تعريف التبديلة القابلة للفصل.



إذن يمكننا أن نفترض أن جميع عناصر $\pi(\{2, \dots, k\})$ هي أكبر من أو تساوي $\pi(1)$. يمكننا أيضًا أن نفترض أن $\pi(\{2, \dots, k\})$ ليست مجالًا لأنه في خلاف ذلك نكون أننا نعمل. وعليه هناك "فجوة" واحدة على الأقل في $\pi(\{2, \dots, k\})$ ، والتي يجب أن تكون أكبر من $\pi(2)$. لذلك يوجد m بحيث $k < m$ و l بحيث $2 < l < k$ و $\pi(m) < \pi(l)$. العناصر الأربعة $2, l, k, m$ تحقق $2 < l < k < m$ و $\pi(k) < \pi(2) < \pi(m) < \pi(l)$ بحيث يتم ترتيبها مثل "التبديلة المحظورة" الأخرى وهذا مستحيل.



ومنه إثبات التوطئة.
من السهل تحسين التوطئة

توطئة. لنفترض أن π تبديلة قابلة للفصل في $\{1, 2, \dots, n\}$. يوجد عددان صحيحان متتابعان صورتاهما متتابعان.

الإثبات واضح بالاستقراء لأن أي مجال تام تكون صورته مجالًا يُعرّف تبديلة قابلة للفصل أخرى بقيمة أصغر لـ n ، والتي تحتوي بالتالي على عنصرين متتابعين صورتاهما متتابعان. □

يمكننا الآن إثبات النتيجة الرئيسية لهذا الفصل. المثال المضاد لـ كوتسبهيتمش هو بطريقة ما المثال الوحيد.

مبرهنة. تكون تبديلة تبادلاً كثير الحدود إذا فقط إذا كانت قابلة للفصل.

لقد لاحظنا بالفعل أن التبادلات كثيرة الحدود قابلة للفصل: هذه ملاحظة كوتسبهيتمش.

مرة أخرى من خلال الاستقراء على n ، نبين أن كل تبديلة قابلة للفصل هي تبادل كثير الحدود. لتكن تبديلة قابلة للفصل في $\{1, 2, \dots, n\}$. نحن نعلم وجود عددين صحيحين متتابعين i و $i+1$ ، مع صورتين متتابعتين $\pi(i)$ و $\pi(i+1)$.

إذا تم "طي" $\{i, i+1\}$ و $\{\pi(i), \pi(i+1)\}$ إلى نقطة واحدة، فإننا ننتج تبديلة π' على $n-1$ من الأشياء هي بكل وضوح قابلة للفصل، وبالتالي فهي تبادل كثير الحدود عن طريق الاستقراء. ويترتب على ذلك وجود $n-1$ من كثير الحدود

$$P_1, \dots, P_{n-1}$$

والتي تتقاطع في المبدأ وفقاً لـ π' . الشيء الوحيد الذي لا يزال يتعين علينا القيام به هو تقسيم كثير الحدود الـ i أي P_i من أجل إنتاج n من كثيرات الحدود

$$P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P''_i, P_{i+1}, \dots, P_{n-1}$$

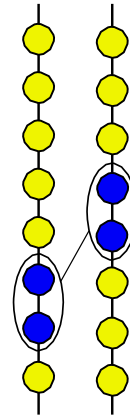
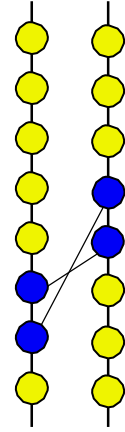
والتي تتقاطع وفق π .

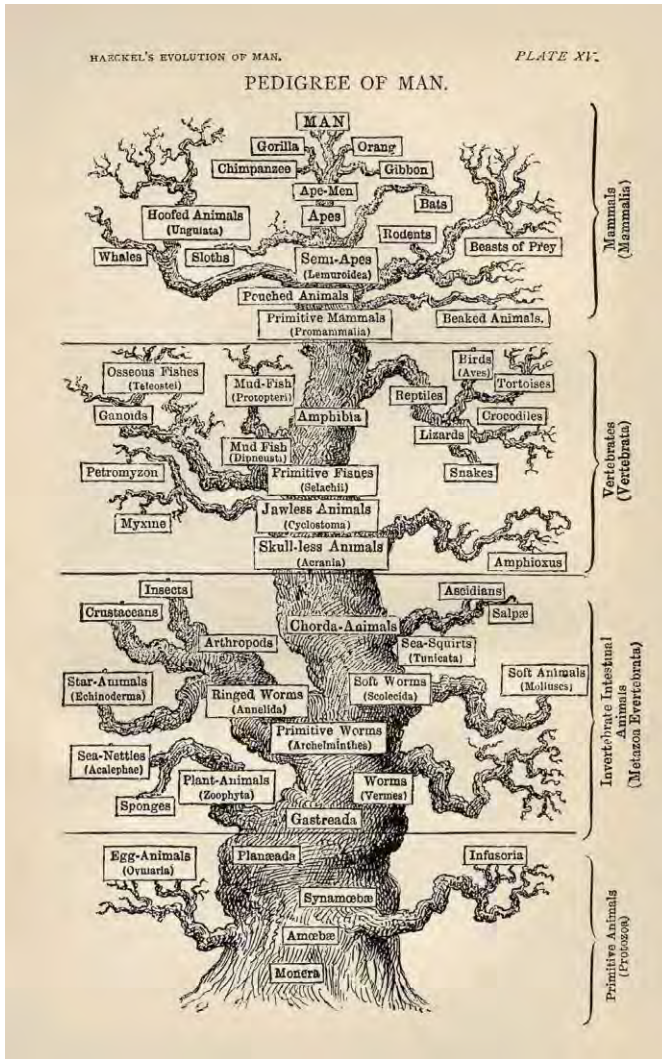
يكفي وضع

$$P'_i(x) = P_i(x) \quad ; \quad P''_i(x) = P_i(x) + (-x)^N$$

من أجل قيمة كبيرة بما فيه الكفاية لـ N ، زوجية أو فردية، تبعاً لـ $\pi(i+1) < \pi(i)$ أو $\pi(i+1) > \pi(i)$.

الآن وقد حددنا التبادلات كثيرة الحدود، فإن واجبنا الآتي هو فهم هيكل تلك التبادلات القابلة للفصل.





" شجرة الحياة " ل

(1879) Ernst Haeckel

هل الإنسان في أعلى شجرة الحياة ؟

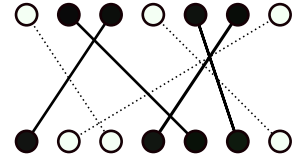
أنماط وتبديلات

دُنالد كِنوث



تبديلات

دُنالد كِنوث



² D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 1: Fundamental algorithms.* Second printing. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont, 1969.

³ S. Kitaev. *Patterns in permutations and words.* Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer, Heidelberg, 2011. With a foreword by Jeffrey B. Remmel.

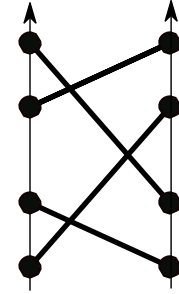
إذا تم تدريب قرائي رياضياتيا كما كان بالنسبة لي، فرما شعر العديد منهم ببعض الانزعاج في الفصل السابق. على أية حال، عادةً ما يتم تعريف التبديلات على أنها تقابل من مجموعة في نفسها وسبب وجودها هو أنها تشكل زمرة. بدلاً من ذلك، قمنا بمعالجة التبديلات بطريقة غريبة عندما استخدمنا تعبير "التبديلة π تحوي إحدى التبديلتين المحظورتين لـ كونتسبميتش" للدلالة على أن هناك أربعة دلائل i_1, i_2, i_3, i_4 ، بحيث يكون

$$\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2) \text{ أو } \pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$$

لا يعني هذا بالتأكيد أن المجموعة $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ صامدة بواسطة π . نحن لا نأخذ الاختصار على مجموعة جزئية صامدة. سنستخدم كلمة "التبديلة" من منظور مختلف تماماً، أقرب إلى علوم الحاسوب. هذا النهج يرجع في جزء كبير منه إلى دُنالد كِنوث في كتابه الرائع "فن برمجة الحاسوب"². الكتاب الأحدث³ مصدرٌ جيدٌ للمعلومات ويُظهر أن هذا المجال يزدهر حالياً.

لتكن مجموعة منتهية E مجهزة بعلاقتي ترتيب كلي \ll و \gg . لترتب عناصرها باستخدام الترتيب الأول :

$$x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n.$$



كونوا حذرين. في هذا الشكل،
 $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4$
 و $2 \lll 4 \lll 1 \lll 3$
 $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4))$
 $= (2, 4, 1, 3)$ ،

بحيث يكون π في الواقع معكوس
 التبديلة التي ترونها باتباع الحواف،
 من النقط الموجودة عن اليسار إلى
 النقط الموجودة عن اليمين.

على سبيل المثال كل تبديلة تختلف
 عن الوحدة تحتوي على $(2, 1)$.

موقع قاعدة بيانات تجنب نقط
 التبديلات يحتوي على عدد كبير
 من الأمثلة.

حاولوا إثبات مبرهنة Erdős-
 Szekeres: كل تبديلة $\pi \in \Sigma_n$
 مع $n > (p-1)(q-1)$ تحوي
 $(1, 2, 3, \dots, p)$ أو
 $(q, q-1, \dots, 2, 1)$.

$Av((1, 2, 3))$ يتكون من تلك
 التبديلات التي يمكن كتابتها كاتحاد بين
 متتاليتين متناقضتين.

انظروا الآن إلى الطريقة التي يتم بها ترتيبها بـ \lll . هذا يعرف التبديلة π في
 $\{1, 2, \dots, n\}$ بحيث

$$x_{\pi(1)} \lll x_{\pi(2)} \lll \dots \lll x_{\pi(n)}.$$

سنسبني وجهة النظر هذه: أي تبديلة هي مقارنة بين ترتيبين كليين.

على سبيل المثال، يمكن تجهيز المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ بالترتيبين $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4$ و
 $2 \lll 4 \lll 1 \lll 3$ ؛ سنشير بـ $\{2, 4, 1, 3\}$ إلى التبديلة المرتبطة بذلك.

يمكن ترتيب أي مجموعة منتهية من كثيرات الحدود الحقيقية $\{P_i(x)\}$ بطريقتين على
 الأقل: بمقارنة قيم $P_i(x)$ من أجل القيم الصغيرة السالبة أو الموجبة لـ x . هذا يؤدي
 إلى تبادلات كثيرة الحدود.

يمكننا بالتأكيد اقتصار علاقات الترتيب على مجموعات جزئية وهذا ما يحدد مفهوم احتواء
 التبديلات.

تعريف. لنفترض أن π تبديلة في $\{1, \dots, n\}$ مرتبطة بعلاقتي ترتيب كلي \ll و
 \lll على مجموعة E ذات n عنصراً. لتكن F مجموعة جزئية ذات p عنصراً.
 اقتصاراً \ll و \lll على F يعرفان تبديلة $\sigma: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$. في مثل
 هذا الوضع، سنقول إن σ محتواة في π ونكتب $p \leq \pi$.

لتكن Σ_n مجموعة التبديلات (لا ينظر إليها كرمرة) في $\{1, 2, \dots, n\}$ و Σ_∞ الاتحاد
 المنفصل لـ Σ_n من أجل $n \geq 1$. هذا يعرف ترتيباً جزئياً \leq على Σ_∞ . ففهم هذا
 الترتيب يسمى التعرف على الأنماط، كما نقول أيضاً إن σ هي نمط في π عندما يكون
 $\sigma \leq \pi$.

تسمى مجموعة جزئية C من Σ_∞ صنف تبديلة إذا كانت $\pi \in C$ و $\sigma \leq \pi$
 تستلزمان $\sigma \in C$. بالنسبة إلى صنف التبديلة هذا، يمكننا اعتبار أن أساسها B
 يتكون من تلك التبديلات π التي ليست في C ولكن بحيث تكون أي σ ،
 $\sigma \leq \pi$ ، وتختلف عن π ، في C . لذا، فإن التبديلة π تنتمي إلى C إذا وفقط إذا
 كانت لا تحتوي على عنصر من B ، سنكتب $C = Av(B)$ ونقول إن C تتكون من
 التبديلات التي تتجنب B .

على سبيل المثال، من الواضح أن المجموعة $Inter$ ($Inter \subset \Sigma_\infty$) للتبادلات كثيرة
 الحدود هي صنف تبديلة. لقد رأينا أن أساسها يتكون من عنصرين $(2, 4, 1, 3)$
 $(3, 1, 4, 2)$.

فما يأتي أسئلة نموذجية في النظرية. ليكن C صنف تبديلية:

- هل يمكننا تحديد أساسها؟ متى تكون متتهية؟
- هل يمكننا حساب عدد العناصر في $C \cap \Sigma_n$ ؟ أو على الأقل، هل يمكننا تقدير هذا العدد؟
- هل يمكننا أن نقرر بطريقة خوارزمية ما إذا كانت تبديلة ما π هي في C ؟ ما مدى تعقيد مثل هذه الخوارزمية؟

سنجيب (عن) كلّ هذه الأسئلة في الوقت المناسب بالنسبة إلى صنف التبادلات كثيرة الحدود / التبديلات القابلة للفصل.

التبديلات القابلة للفرز بالتكديس

تلقت نظرية أتماط التبديلات زخما قويا من تمرين واحد في المجلد الأول من "فن برمجة الحاسوب". كانت لدى دُنالد كنوث فكرة أن يُسند درجة من الصعوبة إلى كل تمرين في كتابه.

"0" يعني أن القارئ يجب أن يكون قادراً على حله على الفور.

"10" يتطلب التمرين دقيقة واحدة.

"20" يتطلب عدة ساعات، إلخ.

المقياس هو في الواقع لوفاريتي ويبدو أنه يحتوي على قطب ما بجوار 50 ...

التمرين الذي أريد مناقشته يشار إليه بـ [M28]. الـ M يعني أنه يستهدف القراء ذوي الميول الرياضية و 28 هو مؤشر على الوقت المطلوب لحله (في المقياس اللوفاريتي الذي سبق شرحه). اليوم، هذا ليس بالأمر الصعب ولكن اتضح أن هذا التمرين كان له تأثير دائم على التوافقيات.

سنصنف صنف تبديلية يتم تحديده بالتكديس.

تخيلوا n من الأشياء المشار إليها بـ $1, 2, \dots, n$ ، مصطفة على مستقيم أفقي، بهذا الترتيب من اليسار إلى اليمين: $n \ll \dots \ll 2 \ll 1$. عن يمين n ، يوجد مكّسد. هذا نوع من الآبار حيث يمكن تكديس الأشياء فوق بعضها البعض.

في البداية، المكّسد فارغ. ثم نحدد الشيء n وندفعه في المكّسد. لدينا خياران.

إما أن ندفع العنصر الأخير في السطر إلى أعلى المكّسد. أو نخرج العنصر العلوي من المكّسد إلى اليمين.

جدوا بعض الأمثلة لصنف تبديلة ذي أساس غير منته.



• فن برمجة الحاسوب

انظروا إلى الشكل الموجود في الهامش، وتطور الأشياء ضمن تسلسل دفع، دفع، إخراج، دفع، إخراج، إخراج، دفع، دفع، دفع، إخراج، إخراج، إخراج، إخراج. في نهاية العملية يكون التسلسل (1,2,3,4,5,6) قد تحوّل إلى (3,2,1,6,4,5). يمكن النظر إلى هذا إما على أنه تبديلة أو أنه ترتيبان: $6 \lll 5 \lll 4 \lll 3 \lll 2 \lll 1$ (عن اليسار) و $5 \lll 4 \lll 6 \lll 1 \lll 2 \lll 3$ (عن اليمين).

تعريف. تكون تبديلة π قابلة للفرز بالتكديس إذا كانت ناتجة عن سلسلة من عمليات "دفع" و "إخراج" مطبقة على $\{1,2,\dots,n\}$.

التمرين 5 من الفصل 2 من كتاب كوث والذي تم تقويمه على أنه [M28]، هو الآتي:

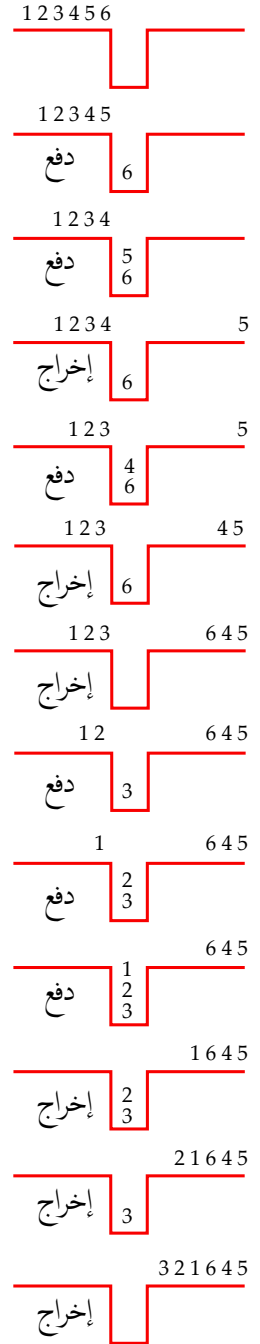
مبرهنة. تكون تبديلة قابلة للفرز بالتكديس إذا وفقط إذا كانت لا تحتوي على (2,3,1).

لنحلّ هذا التمرين.

لنبدأ بتبديلة، على سبيل المثال، (3,2,1,6,4,5). العنصر الأخير هو 5. إذا أردنا فرز هذه التبديلة باستخدام مكديس، لا يوجد خيار: علينا دفع جميع العناصر في القائمة (1,2,3,4,5,6) حتى يكون 5 موجوداً في أعلى المكديس، كي تتمكن من إخرجه ثم وضعه في مكانه المناسب، في نهاية القائمة الناتجة. ثم نبحت عن الثاني إلى الأخير، أي 4، ونستمر في الدفع حتى يصبح الرقم 4 في أعلى المكديس وهكذا. لذا، إذا أردنا فرز التبديلة، فهناك طريقة وحيدة للقيام بذلك.

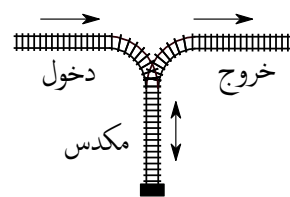
علينا فقط أن نفهم متى قد يحدث خطأ في الفرز. سيحدث هذا بالضبط عندما يحين الوقت لإخراج شيء a وهو للأسف موجود بالفعل في المكديس ولكن ليس في الأعلى، أسفل عنصر b ، $b \ll a$. إذا تم دفع b بالفعل في المكديس، فذلك لأننا اضطررنا سابقاً إلى إخراج شيء آخر c ، $c \ll b \ll a$.

لدينا $a \lll c$ لأنه تم إخراج c بالفعل ونحن نحاول إخراج a . وبالمثل، لدينا $a \lll b$ لأننا لا نريد إخراج b وإنما a . المجموعة الجزئية $\{c,b,a\}$ محتواة في $\{1,2,\dots,n\}$ ، وهذا يؤدي إلى الاحتواء $(2,3,1) \leq \pi$ كما كان علينا أن نبين. □
أشجع القارئ بقوة على القيام بحل جميع تمارين كتاب كوث.



يُنَجِّج مسار القطار في الهامش إمكانية فرز التبديلات بالتكديس. قطار يتكون من عربات $(1, 2, \dots, n)$ يصل من اليسار. يمكن بعد ذلك تفكيك العربات ويجب على كل واحدة اتباع المسار في الاتجاه الذي تحدده الأسهم. يتم تجميع القطار مرة أخرى على جانب الخروج، عن يمين الصورة.

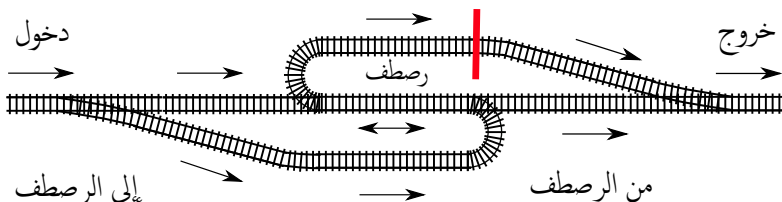
يعرف كوث أيضًا كلمة "deques" التي تم التعبير عنها هنا بالرصطف (وهي تركيب من "deck" رصيف و "queue" اصطفاف). يتم الحصول عليها بواسطة مسار القطار الأكثر تعقيدًا كما توضحه الصورة أدناه.



ينجج مسار القطار البسيط هنا تبديلات قابلة للفرز بالتكديس.

هذا هو رصيف - اصطفاف

= رصطف



ما هي التبديلات القابلة للفرز بالرصطف (Deque-Sortable)؟

حذار! صعوبة هذا السؤال قد تكون حوالي 160

إذا كان الباب الأحمر مغلقًا، نحصل على رصطف مقيد الخروج. التبديلات المرتبطة هي بالضبط تلك التي لا تحتوي على $(4, 2, 3, 1)$ ، $(4, 1, 3, 2)$. نحن نقترّب من تمييز التبادلات كثيرة الحدود، والتي تتجنب $(2, 4, 1, 3)$ و $(3, 1, 4, 2)$.

لمزيد من المعلومات حول هذا المجال الرائع، أوصي بالكتاب المذكور أعلاه من تأليف كيتايبيب.

كتلان في كل مكان

تم تصنيف التمرين 4 في نفس الفصل من كتاب كوث على أنه [M34]. ومع ذلك، فإن حله يكون أسهل بعدما يتم حل التمرين 5.

تكمّن المشكلة في حساب عدد التبديلات القابلة للفرز بالتكديس والتي طولها n .

هذا هو عدد **كتلان** C_n رقم n الذي يظهر تقريبًا أينما كان في الرياضيات.

قيمه الأولى هي :

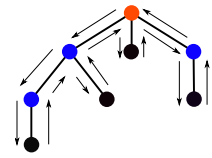
1، 2، 5، 14، 42، 132، 429، 1430، 4862، 16796، 58786، 208012، 742900، 2674440، 9694845، 35357670، إلخ. (المتتالية A000108 في OEIS).



أوجين كتلان

ولد في عام 1814 في بروج، حينها تنتمي إلى الإمبراطورية الفرنسية النابليونية.

هذه الشجرة تُعرّف كلمة لديك. فقط ابدأوا من الجذر واتبعوا الشجرة خارجياً، عكس اتجاه عقارب (أو عقريّ) الساعة. في كل خطوة ستكونون أبعد أو أقرب أكثر من الجذر: هذا يعطي متتالية من $+1$ و -1 أو "دفع" و "إخراج".



في هذا المثال نحصل على المتتالية

. + + + - - + - - + - + + - -

في المقابل، يمكن تحويل كلمة لديك إلى شجرة مستوية مجذرة.

بشكل عام، توجد تقابلات بين،

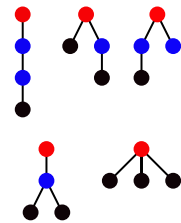
• فرز بالتكديس لتبادلات n من الأشياء.

• كلمات ديك ذات الطول $2n$.

• تقويس متوازن بـ $2n$ قوساً (مع n قوساً مفتوحاً و n قوساً مغلقاً).

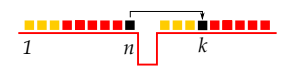
• أشجار مجذرة مستوية ذات n حافة.

5 أشجار مستوية مجذرة بـ 3 حواف.



العدد الأصلي لأي من هذه المجموعات هو عدد كتلان الـ n C_n .

لتكن تبديلة قابلة للفرز بالتكديس، انظروا إلى العنصر الأخير n من قائمة الأشياء (عن اليسار، باللون الأسود في الصورة) وفي موضعها k بعد عملية الفرز. التبديلة تُحوّل المجال (الأحمر) $\{k, \dots, n-1\}$ إلى $\{k+1, \dots, n\}$ والأصفر $\{1, 2, \dots, k-1\}$ إلى نفسه. لذلك، تنتج تبديلة قابلة للفرز بالتكديس على هذين المجالين. ومن ثم نحصل على علاقة التراجع:

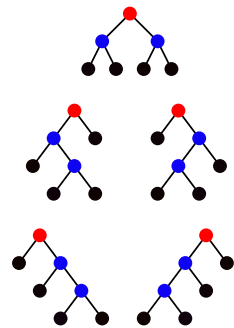


انظروا إلى علاقة التراجع هذه من حيث كلمات ديك والأقواس والأشجار المستوية المجذرة.

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}.$$

هذا هو التوقيع المميز لكتلان: فهو موجود في سياقات كثيرة مختلفة.

على سبيل المثال، لتكن الأشجار الثنائية المستوية المجذرة. يتعلق تعريفها بآراء المؤلفين ولكن اسمحو لي أن أعرفها على أنها أشجار مستوية مجذرة بحيث لا تحتوي كل عقدة على أطفال أو على طفلين، أحدهما "عن اليسار" والآخر "عن اليمين". إذا كانت مثل هذه الشجرة تحتوي على عدد n من العقد الداخلية، فسيكون لها $n+2$ ورقة، و $2n+2$ حافة. إذا قمتم بإزالة جذرها، فستحصلون على شجرتين ثنائيتين مستويتين مجذرتين. في المقابل، يمكنكم إضافة جذر مشترك إلى شجرتين ثنائيتين مستويتين مجذرتين لإنتاج شجرة ثنائية مستوية مجذرة أكبر. هذا يبيّن، بعد لحظة من التفكير، على أن عدد الأشجار الثنائية المستوية المجذرة ذات $n+1$ ورقة يحقق علاقة كتلان التراجعية.



5 أشجار مستوية مجذرة بـ 4 حواف.

يمكن للمرء أن يتحقق من وجود 1، 1، 2، 5 من الأشجار الثنائية المستوية المجذرة بأعداد متتابعة من الأوراق 1، 2، 3، 4، وبالتالي نحصل عن طريق الاستقراء على أن C_n هو أيضاً عدد الأشجار الثنائية المستوية المجذرة بـ $n+1$ ورقة.

يشير هذا إلى أنه يجب أن يكون هناك بعض التطابق بين الأشجار المستوية المجذرة والأشجار الثنائية المستوية المجذرة. هذا هو الحال بالفعل. اسمحو لي أن أقدم اختلافاً طفيفاً حول ما يسمى بتحويل كوث أو تمثيل الطفل الأول-الأخ (أو الأخت) الآتي. بدءاً بشجرة مستوية مجذرة T ذات n حافة (الصورة الأولى)، نقوم ببناء شجرة ثنائية مستوية مجذرة T_{bin} ذات $n+1$ ورقة (الصورة الأخيرة). نقوم أولاً ببناء شجرة مساعدة T' (الصورتان الثانية والثالثة). مجموعة عقد T' هي نفس مجموعة عقد T . الجذر هو نفسه. لكل عقدة v من T' طفلان على الأكثر. الأول هو الابن الأكبر لـ v في T ، إن وُجد. الثاني هو الأخ أو الأخت الآتية لـ v في T ، أي الأكبر بين الأشقاء الأصغر من v ، إذا كان موجوداً. ثم نقوم بتحويل T' إلى شجرة ثنائية مستوية مجذرة T_{bin} بالطريقة الآتية. أولاً نحذف الجذر والحافة التي تخرج منه. الجذر الجديد لـ T_{bin} هو الطفل الأكبر لجذر T . بالنسبة إلى كل عقدة من T' ، نقوم بإضافة طفل عن اليسار إذا لم يكن لهذه العقدة أطفال في T وطفل عن اليمين إذا لم يكن لهذه العقدة شقيق أصغر. وبالتالي، إذا كانت العقدة ورقة من T' (أي ليس لديها أطفال ولا أخ (ت) أصغر في T)، فإننا نضيف طفلين في T_{bin} (انظروا إلى النقط الخضراء في الصورة الرابعة). تحققوا من أن هذا يعطي تقابلاً بين الأشجار المستوية المجذرة ذات n حافة والأشجار الثنائية المستوية المجذرة ذات $n+1$ ورقة ([M15]).

مثلاً جرت العادة في التوافقيات، يتم ترميز هذه المتتالية (C_n) بواسطة متسلسلتها المولدة الشكلية

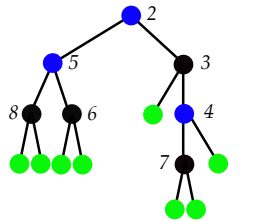
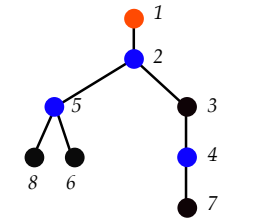
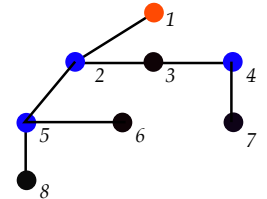
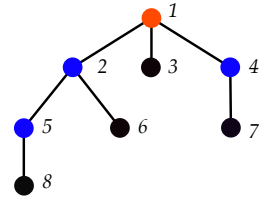
$$C(t) = \sum_{n \geq 0} C_n t^n$$

والتراجع يصبح

$$C(t) = tC^2(t) + 1.$$

بالعودة إلى المعادلات التربيعية في التعلم الثانوي، نحصل على

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$



لماذا اخترت علامة - أمام الجذر التربيعة؟

ويترتب على هذه الصيغة أن نصف قطر تقارب $C(t)$ هو $1/4$ لذلك، ومن خلال مبرهنة كوشي- هادامار، يمكن تقدير نمو C_n :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log C_n = \log 4.$$

يمكن أيضًا استخدام هذه الصيغة للحصول على تعبير أنيق لـ C_n . استخدموا فقط متسلسلات نيوتن ذات الحدين

$$\sqrt{1-4t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4t)^n.$$

بمقارنة معاملات t^n نجد

$$C_n = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n+1} (-4)^{n+1}.$$

تقوم الآن بقليل من التنظيف :

$$C_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n\right) (-1)^{n+1} 2^{2(n+1)} = \dots$$

أو

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

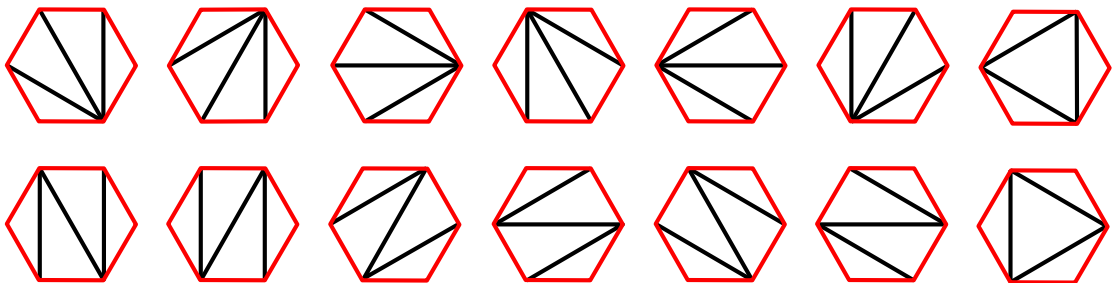
الإنجیلان في موضوع أعداد كتلان هما الكتابان اللذان كتبهما ستانلي^{4,5}. موقع كتلان أعداد كتلان، الذي يديره إيثور باك، هو مصدر رائع للمعلومات. يقدم كتاب Flajolet و Sedgewick⁶ منظورًا أوسع (عودوا على وجه الخصوص إلى الفصل 6 عن الأشجار).

⁴ R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software,

⁵ R. P. Stanley. *Catalan numbers.* Cambridge University Press, New York, 2015.

"...". الثانية يعني أنه يتم تشجيعكم على القيام بالحساب أتم بأنفسكم!

⁶ R. S. P. Flajolet. *An introduction to the analysis of algorithms.* Addison-Wesley, 2nd ed edition, 2013



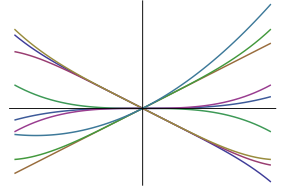
هناك $C_4 = 14$ طريقة لتقسيم سداسي إلى مثلثات.



شجرة مستوية في فوادلوب،
معروفة بشكل شائع باسم نخلة
المسافرين.

التبديلات القابلة للفصل

من كثيرات الحدود إلى الأشجار



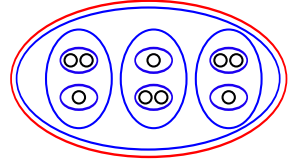
حلقة كثيرات الحدود $K[x]$ ذات المعاملات في حقل K مميزة 0 مَزُوْدَة بتقويم v ، يُعْطَى بدرجة أول معامل غير منعدم، ومسافة فوق مترية طبيعية، مُعرِّفَة بدلالة v :

$$\text{dist}(P, Q) = \exp(-v(P-Q)).$$

9 كثيرات حدود والشجرة المرفقة بها أدناه. هل يمكنكم اقتراح 9 معادلات؟

بكلمات واضحة، يكون كثيرا حدود متقاربين إذا كانت مشتقاتها الـ k الأولى في 0 متطابقة، من أجل قيمة كبيرة لـ k . الخاصية فوق المترية لمسافة تعني على وجه التحديد أنه من أجل كل $0 < \varepsilon$ تكون العلاقة

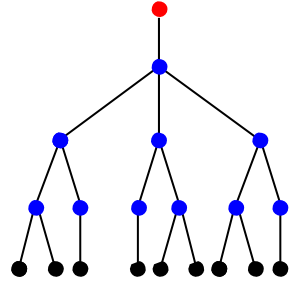
$$\text{dist}(P, Q) < \varepsilon$$



علاقات تكافؤ متداخلة.

علاقة تكافؤ. عندما تنخفض قيمة ε ، تصبح علاقات التكافؤ هذه أدقَّ ويكون تقاطعها ناهياً.

لتكن E مجموعة منتهية من كثيرات الحدود. نعرف شجرة بالطريقة الآتية. تتم تسمية الجذر بالمجموعة E . أبناء الجذر يتم تصنيفهم بواسطة أصناف التكافؤ للعلاقة $v(P-Q) \geq 1$. يتم تسمية أحفاد الجذر بواسطة أصناف التكافؤ للعلاقة $v(P-Q) \geq 2$. وبوجه عام، يتوافق الجيل k مع أصناف التكافؤ للعلاقة $v(P-Q) \geq k$. هذه الشجرة هي غير منتهية لكن أصناف التكافؤ تستقر عند أحاديث العنصر عندما يكون k كبيراً. لذلك يمكننا القيام ببعض التشذيب من أجل الحصول على شجرة منتهية يتم وسم أوراقها بواسطة عناصر E . في المقابل، يمكن استرداد بنية التقويم من الشجرة.



الشجرة المرفقة.

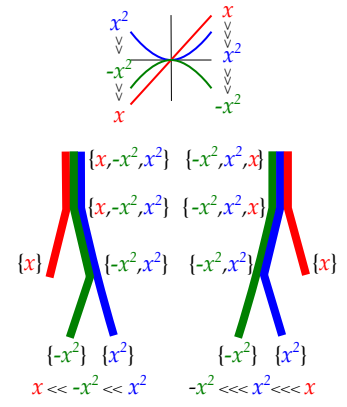
ليكن P ، Q عنصرين من E ، يُنظر إليهما على أنهما ورقتان، نحث في الشجرة عن أقرب سلف مشترك. تقويم $P - Q$ هو مستوى هذا السلف، ويُعرّف على أنه طول المسار الذي يربطه بالجذر.

لنفترض الآن أن K هو حقل الأعداد الحقيقية. كما سبق أن لاحظنا، إن أي مجموعة منتهية من كثيرات الحدود الحقيقية مجزأة بترتيبين كليين، مع مقارنة القيم من أجل قيم x الصغيرة السالبة والموجبة. كلاهما يقدم ترتيباً على مجموعة أوراق الشجرة يعطيه التقويم. لاحظوا أن أحفاد العقدة، أي صنف التكافؤ في مستوى ما، تحدد مجالاً في كل من هذين الترتيبين. لذلك فإن شجرتنا هي شجرة مستوية بطريقتين.

حسب الاصطلاح، لنختر الترتيب الأول (أي من أجل x صغير سالب) ولنربط الشجرة المستوية المقابلة لمجموعتنا E من كثيرات الحدود. تحدد المقارنة بين الترتيبين تبديلاً π نطلق عليها اسم التبادل كثير الحدود.

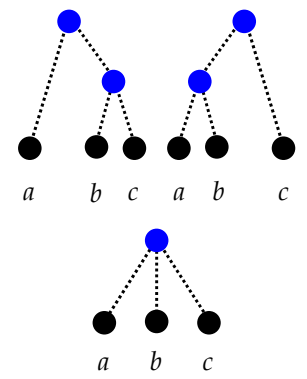
تُروّد مجموعة أوراق أي شجرة مستوية مجزأة بترتيبين قانونيين. الأول، ويرمز له بـ \ll ، هو ببساطة الترتيب المعطى من تعريف الاستوائية. الثاني، ويرمز له بـ \lll ، يُعرّف على النحو الآتي. لنكن ورقتان a و b ، لنشر بـ $a \vee b$ إلى أقرب سلف مشترك. إذن $a \ll b$ و $a \lll b$ صحيحان في وقت واحد فقط إذا كان مستوى $a \vee b$ زوجياً. يمكن أن يُتحقق من أن هذا يعرّف بالفعل ترتيباً \lll ، بمعنى آخر، $a \lll b \lll c \lll a$ غير ممكن. نستطيع افتراض أن $a \lll b \lll c$ أو $a \lll c \lll b$ والحالة الثانية تتحول إلى الحالة الأولى بالتناظر. إذا كان لدينا $a \lll b \lll c \lll a$ ، يجب أن يكون مستويًا $a \vee b$ و $b \vee c$ زوجيين، ويجب أن يكون مستوى $c \vee a$ فردياً. تُظهر الصور في الهامش أن هذا غير ممكن. لنلخص.

- تُنتج مجموعة منتهية من كثيرات الحدود الحقيقية شجرة مستوية مجزأة.
 - تحدد شجرة مستوية مجزأة ترتيبين في مجموعة أوراقها، وبالتالي تبديلاً في الأوراق.
 - إن التبديلة المرتبطة بالشجرة المستوية المرتبطة بمجموعة منتهية من كثيرات الحدود هي ببساطة التبادل كثير الحدود المقابل.
- تحتوي أشجارنا على الكثير من المعلومات وسنقوم بتشذيب حوافها.

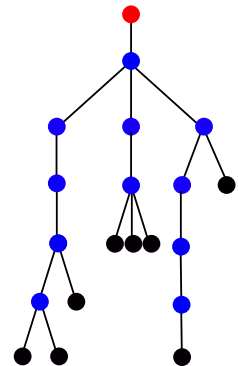


الشجرتان المستويتان المرتبطتان بكثيرات الحدود $\{x, -x^2, x^2\}$ ، بالنظر إلى القيم الصغيرة السالبة (عن اليسار \lll) والقيم الصغيرة الموجبة (عن اليمين \lll) x .

إذا كان $P(x) < R(x) < Q(x)$ من أجل قيم x موجبة لـ x أو قيم x سالبة لـ x ، فإن $val(P - Q) \geq val(R - Q)$ ومنه فكل أثناف التكافؤ $val(P - Q) \geq k$ هي مجالات في كلا الترتيبين: أشجارنا مستوية بالفعل.



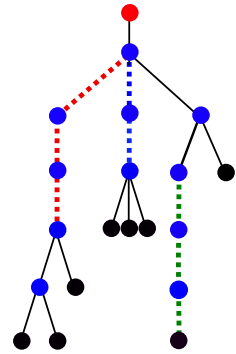
أولاً، إذا كان للعقدة الداخلية ورقة واحدة فقط بين أحفادها، فيمكننا حذف جميع أحفادها دون تغيير التبديلة (المسار الأخضر في الهامش). لنفترض الآن أن عقدتين داخليتين P ، Q متصلتان بالشجرة من خلال مسار ما، بحيث تكون جميع الرؤوس بين P و Q غير متفرعة، أي لديها طفل واحد فقط (المسارات الحمراء والزرقاء). إذا كان عدد الحواف في هذا المسار زوجياً، فما علينا سوى حذفه ومطابقة تقطعي النهاية كعقدة واحدة. إذا كان عدد الحواف في هذا المسار فردياً، فما علينا إلا حذفه وتوصيل تقطعي النهاية بجافة واحدة. هذا ينتج شجرة جديدة. في هذه العملية، تغيرت مستويات بعض العقد، ولكن فقط بعدد زوجي. لذلك، إذا قمنا بحساب التقويم في الشجرة الجديدة، فإن الشفعية لم تتغير وهذه الشفعية هي المعلومة الوحيدة المهمة لبناء التبادل كثير الحدود. لاحظوا أن للشجرة المشدبة خاصية هي أن لجميع عقدها الداخلية طفلين على الأقل.



شجرة قبل التقليم

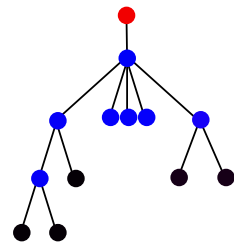
باختصار، ليكن n من كثيرات الحدود، نقوم ببناء شجرة مستوية مجذرة بحيث :

- يمكن أن يكون للجذر أي عدد من الأطفال.
- لكل عقدة داخلية طفلان على الأقل.
- هناك n ورقة بالضبط، موسومة بالـ n كثير الحدود.



إزالة حواف

نقول إن شجرة مستوية قد تم تشذيبها إذا كانت تحقق هذه الخصائص. يجب أن يكون واضحاً أنه بالنسبة إلى أي شجرة مشدبة (أو مقلمة)، يمكن للمرء أن يجد n من كثيرات الحدود بحيث تكون الشجرة المشدبة المرتبطة هي الشجرة المعطاة. لقد رأينا أنه بالنسبة إلى أي مجموعة منتهية من كثيرات الحدود، يمكن قراءة التبادل كثير الحدود المرتبط بها من الشجرة. على وجه الخصوص، يكون عدد التبادلات كثيرة الحدود أصغر من أو يساوي عدد الأشجار المشدبة.



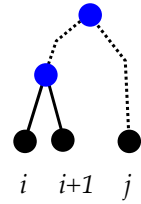
إعادة الاتصال

من تبديلة إلى شجرة

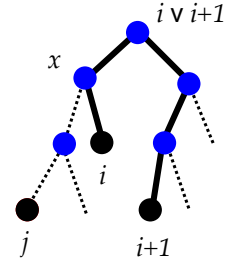
نبين الآن أن عدد التبادلات كثيرة الحدود يساوي عدد الأشجار المشدبة. تكمن المشكلة في إثبات أن شجرتين مشدبتين مختلفتين تنتجان تبديلتين مختلفتين.

لتكن T شجرة مشدبة، بأوراقها $n \ll \dots \ll 2 \ll 1$ ، من اليسار إلى اليمين، ولتكن π التبديلة المرتبطة بها ($2 \leq n$).

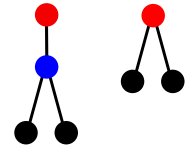
توطئة. الصورتان بواسطة π لعددین صحیحین متتابعین i ، $i+1$ تكونان متتابعین إذا فقط إذا كانت الورقتان المقابلتان i ، $i+1$ شقيقتين، أي أن لها والدًا مشتركًا.



بالفعل، إذا كان لكل من i و $i+1$ والد مشترك، فسيكون لدينا $i \vee j = (i+1) \vee j$ من أجل كل $i \neq j$. ومنه يأتي أن $i \lll j \lll i+1$ و $i+1 \lll j \lll i$ مستحيلة. يقال بشكل مختلف إن i ، $i+1$ هما أيضًا متتابعان بالنسبة إلى \lll .



في المقابل، لنفترض أن $i \vee (i+1)$ ليس أبًا. إذن يبلغ طول المسار الذي يربط i و $i+1$ في الشجرة، 3 على الأقل، و لذلك يحتوي على عقدة داخلية x بحيث يكون مستويًا x و $i \vee (i+1)$ مختلفين. لنختر ورقة j تكون سليلية لـ x وتختلف عن i ، $i+1$ (j موجودة كون T مشدبة). ومنه يأتي أن j تقع بين i و $i+1$ بالنسبة إلى الترتيب \lll .



هذا يعطينا دليلاً آخر على أن أي تبادل كثير الحدود يحتوي على عددین صحیحین متتابعین على الأقل، لهما صورتان متتابعتان. يكفي اعتبار عقدة داخلية ذات أعلى مستوى في T : لديها طفلان على الأقل يجب أن يكونا ورقتين، وبالتالي شقيقتين.

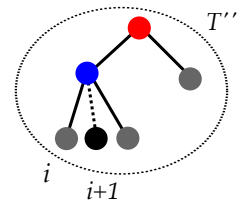
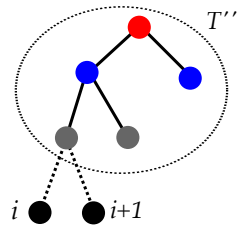
يمكننا الآن أن نثبت، عن طريق الاستقراء على $2 \leq n$ ، أنه يوجد على الأكثر شجرة

واحدة مشدبة تُنتج تبديلة π . هذا بالطبع بديهي من أجل $n=2$. إذا كان T_2 و T_1 لهما n ورقة وتعرفان نفس التبديلة π ، فإن التوطئة السابقة توضح أن هناك زوجاً أو ورقتين متتابعين i و $i+1$ هما شقيقتان بالنسبة إلى كل من T_1 و T_2 . نحذف الورقة $i+1$ من T_1 و T_2 ، ما ينتج الشجرتين T'_1 و T'_2 بـ $n-1$ ورقة. من الواضح أن T'_1 و T'_2 تعرفان نفس التبديلة π' على الـ $n-1$ ورقة. يجب أن نكون حذرين مع ذلك، قد لا تكون T'_1 أو T'_2 مشدبة. يحدث هذا على وجه التحديد عندما يكون i و $i+1$ الابن الوحيد لعقدة داخلية في T_1 أو T_2 . تُظهر فرضية الاستقراء أن

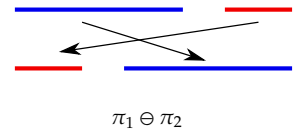
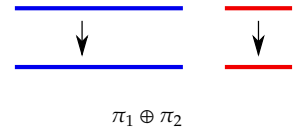
الشجرتين المشدبتين T''_1 و T''_2 تساويان شجرة T'' ما. يتم الحصول على شجرتنا T_1 و T_2 من T'' في إطار إحدى العمليتين الآتيتين: إضافة طفلين إلى الورقة الـ i من T'' ، أو إضافة شقيق إلى الورقة الـ i من T'' . من خلال الافتراض، تُنتج T_1 و T_2 نفس التبديلة بحيث يكون لوالدي i و $i+1$ في T_1 و T_2 مستويان من نفس الشفعية. ومنه يأتي أنه يتم الحصول على T_1 و T_2 من T'' عن طريق إجراء نفس العملية. ومن ثم $T_1 = T_2$ ، وهو المطلوب. □

لذلك فإن عدد التبادلات كثيرة الحدود ذات الحجم n يساوي عدد الأشجار المشدبة ذات n ورقة.

الشجرتان المقلمتان ذواتا ورقتين، تحددان النقلة والوحدة.



من شجرة مشدبة إلى تبادل كثير الحدود وتبديلة قابلة للفصل هذا يقودنا إلى التعريف الأصلي للتبديلات القابلة للفصل. لتكن π_1 و π_2 تبديلتين لـ n_1 و n_2 شيئاً مرتباً، يمكننا التفكير بطريقتين لإنتاج تبديلة للأشياء الـ $n_1 + n_2$. نقوم بتقييم الـ n_1 شيئاً الأولى $\{1, 2, \dots, n_1\}$ والـ n_2 الأخرى $\{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2\}$. لترمز بـ $\pi_1 \oplus \pi_2$ إلى التبديلة المعرفة بـ

$$\pi_1 \oplus \pi_2(k) = \pi_1(k) \text{ من أجل } n_1 \geq k \geq 1$$


و

$$\pi_1 \oplus \pi_2(k) = n_1 + \pi_2(k - n_1) \text{ من أجل } n_1 + n_2 \geq k \geq n_1 + 1$$

ثم نعرف

$$\pi_1 \ominus \pi_2(k) = \pi_2(k) + n_1 \text{ من أجل } n_2 \geq k \geq 1$$

و

$$\pi_1 \ominus \pi_2(k) = \pi_1(k - n_2) \text{ من أجل } n_2 + n_1 \geq k \geq n_2 + 1$$

في تعريف 1998⁷، تكون تبديلة قابلة للفصل إذا تم الحصول عليها من عدة نسخ من تبديلة تافهة على شيء واحد بعمليات متتابعة \oplus و \ominus . لدينا بالفعل فهم جيد لهذه التبديلات⁸.

⁷ P. Bose, J. F. Buss, and A. Lubiw. Pattern matching for permutations. Inform. Process. Lett., 65(5):277–283, 1998.

لاحظوا أنه إذا كانت تبديلة π قابلة للفصل، فإن الحال كذلك بالنسبة إلى التبديلة العكسية

$$\bar{\pi}(k) = n + 1 - \pi(k).$$

⁸ É. Ghys. Intersecting curves (variation on an observation of Maxim Kontsevich). Amer. Math. Monthly, 120(3):232–242, 2013.

مبرهنة. لتكن π تبديلة في $\{1, \dots, n\}$. إذن الشروط الآتية متكافئة.

1. π هي تبادل كثير الحدود مرتبط بالـ n كثيرات الحدود المختلفة P_1, \dots, P_n .
2. π لا تحتوي على $(2, 4, 1, 3)$ أو $(3, 1, 4, 2)$.
3. π هي تبديلة معرفة بشجرة مشدبة.
4. π تنتج من نسخ كثيرة من التبديلة التافهة على شيء واحد من خلال عمليات متتابعة لـ \oplus و \ominus .

تم بالفعل تعريف هذه التبديلات على أنها قابلة للفصل.

لقد أثبتنا فعليا كل شيء باستثناء التكافؤ بين 3 و 4. لتثبت هذا التكافؤ عن طريق الاستقراء.

لتكن π موصوفة بشجرة مشدبة T . جذر هذه الشجرة قد يكون له طفل فريد. إذا كان الحال هكذا، فإن أحفاد هذا الطفل الفريد يحددون شجرة مشدبة أخرى \bar{T} يكون فيها للجذر الجديد العديد من الأطفال.

متحرك، على غرار ألكسندر كالدر. بالطبع، هذه المتحركات ليس من المفترض أن تكون مستوية ولكن أي اثنين من تمثيلاتها المستوية يختلفان بتبديلة قابلة للفصل على أوراقها. •



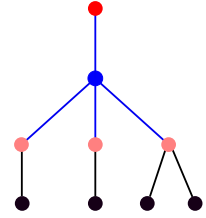
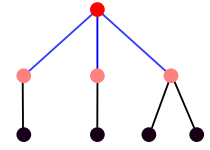
التبديلة المرتبطة بـ \bar{T} هي التبديلة العكسية $\bar{\pi}$. لاحظوا أن

$$\pi_1 \ominus \pi_2 = \overline{\pi_1 \oplus \pi_2}.$$

لذلك يمكننا أن نفترض أن للجذر عدة أطفال. يعرف هؤلاء الأطفال أشجاراً مشدبة وتبادلات كثيرة الحدود $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ التي مجموعها بـ \oplus هو π . عن طريق الاستقراء، جميع التبديلات $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ يتم الحصول عليها من التبديلة التافهة من خلال عمليات \oplus و \ominus وهكذا يكون الشيء نفسه صحيحاً بالنسبة إلى π .

العكس هو بنفس السهولة. علينا أن نبين أن المجموعين \oplus و \ominus لتبديلتين مرتبطين بشجرتين مشدبتين هما أيضاً مرتبطين بشجرة مشدبة. ما علينا سوى وصل جذري شجرتين تم تشذيبهما بواسطة أحد الوالدين المشتركين، أو إضافة جد، حسب الإشارة.

□



إضافة والد أو جد لوصل العديد من الأشجار.

مسارات القطارات، التكديس، مخططات الطوابق والتبديلات

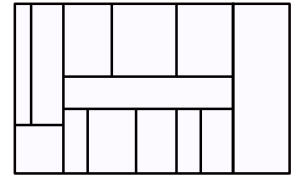
تخيلوا قطاراً (رياضياتياً) يتكون من عدد n من العربات. أدخلوا منضدة دوارة رياضياتية، أي أحد هذه الأجهزة التي يراها المرء أحياناً في السكك الحديدية، والتي تتيح دوراناً بمقدار 180 درجة. المنضدة الدوارة رياضياتية لأنها يمكن أن تتناسب مع أي عدد من العربات المتتالية. نفترض أيضاً أنه بمجرد عكس جزء من العربات، يتم ربط هذه العربات بطريقة دائمة: لا يمكن فصلها في المستقبل. دعوا القطار يتحرك عدة مرات في المنضدة الدوارة. التبديلة النهائية للعربات قابلة للفصل، تقريباً بالتعريف.

يمكن أيضاً التعبير عن نفس الفكرة باستخدام التكديس بتسلسل الإخراج، كما كان في الفصل السابق. تخيلوا تسلسلاً غير محدد من الأكداس المصطفة عن يمين التسلسل 1, 2, ..., n . تختلف قواعد لعبة الفرز عن حالة المكس الفردي. في كل خطوة، يُسمح لنا بدفع عنصر من القائمة أعلى المكس الأول، أو نقل المحتوى الكامل لمكس إلى المكس الآتي.

هنا ظهور آخر للتبديلات القابلة للفصل. نبدأ بمستطيل ونجزئه إلى عدة غرف مستطيلة عن طريق التقطيع الرأسى أو الأفقي المتتابع. هذا مخطط أرضية تقطيع، كما في الهامش. اجنثوا عن تعريف جيد لمخططات التقطيع المتكافئة وجدوا تقابلاً مع التبديلات القابلة للفصل.⁹



منضدة دوارة.



⁹ E. Ackerman, G. Barequet, and R. Y. Pinter. [A bijection between permutations and floorplans, and its applications](#). *Discrete Appl. Math.*, 154(12):1674–1684, 2006.

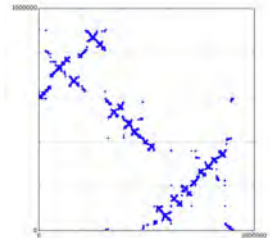
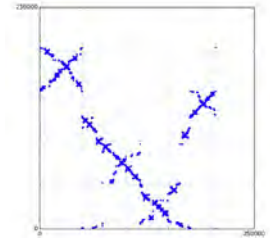
في ختام هذا الفصل، لنذكر بطبعة أولية حديثة¹⁰ تصف السلوك الاحتمالي للتبديلات القابلة للفصل عندما يؤول n إلى اللامتهني. لتكن تبديلة π في $\{1, \dots, n\}$ ، لننظر إلى الرسم البياني الخاص بها: هذا الأخير هو المجموعة الجزئية $\{(i, \pi(i))\}$ في $\{1, \dots, n\}^2$.

لنعد قياس هذه الصورة كي نرسمها في مربع الوحدة $[0,1]^2$. نرفق بكل تبديلة π ، قياس الاحتمال μ_π في المربع وهو مجموع كتل ديراك الـ n التي وزنها $1/n$ والمقموعة في $(1/n, \pi(i)/n)$. الفضاء $\text{Prob}([0,1]^2)$ لقياسات الاحتمال على المربع، متراص (بالنسبة إلى الطوبولوجيا الضعيفة) بحيث نتمكن من دراسة نقط تراكم الـ μ_π في $\text{Prob}([0,1]^2)$. من السهل أن نرى أن أي نقطة تراكم μ هي بُديلة (Permuton): قياس احتمال على المربع الذي يمثل هامشاه (إسقاطاه على المحورين) قياس لؤببقي (Lebesgue) على $[0,1]$. النسخة الأولية التي كتبها باسينو وآخرون تصف نهايات التبديلات القابلة للفصل. من أجل كل n ، اختاروا التبديلة القابلة للفصل عشوائيًا (موزعة بانتظام بين جميع التبديلات القابلة للفصل). ينتج عن هذا توزيع احتمالي عشوائي على $\text{Prob}([0,1]^2)$ ، من أجل كل n . يثبت المؤلفون أن متتالية الاحتمالات هذه تؤول إلى احتمال معرّف جيدًا في الفضاء $\text{Prob}([0,1]^2)$. هذه النهاية هي احتمال عشوائي على فضاء التبديلات وهي البُديلة العشوائية القابلة للفصل. الصورتان في الهامش، والمستخرجتان من هذه النسخة الأولية، تُظهران رسوما بيانية نموذجية لتبديلة قابلة للفصل من أجل القيم الكبيرة لـ n . لمعرفة المزيد عن توافقيات التبديلات القابلة للفصل، عودوا إلى¹¹ أو¹². ومع ذلك، اسمحو لي أن أقترح تمرينًا واحدًا.

أثبتوا أن هناك خوارزمية تقرر ما إذا كانت تبديلة في $\{1, \dots, n\}$ قابلة للفصل في الوقت الخطي (في n) أو لا.

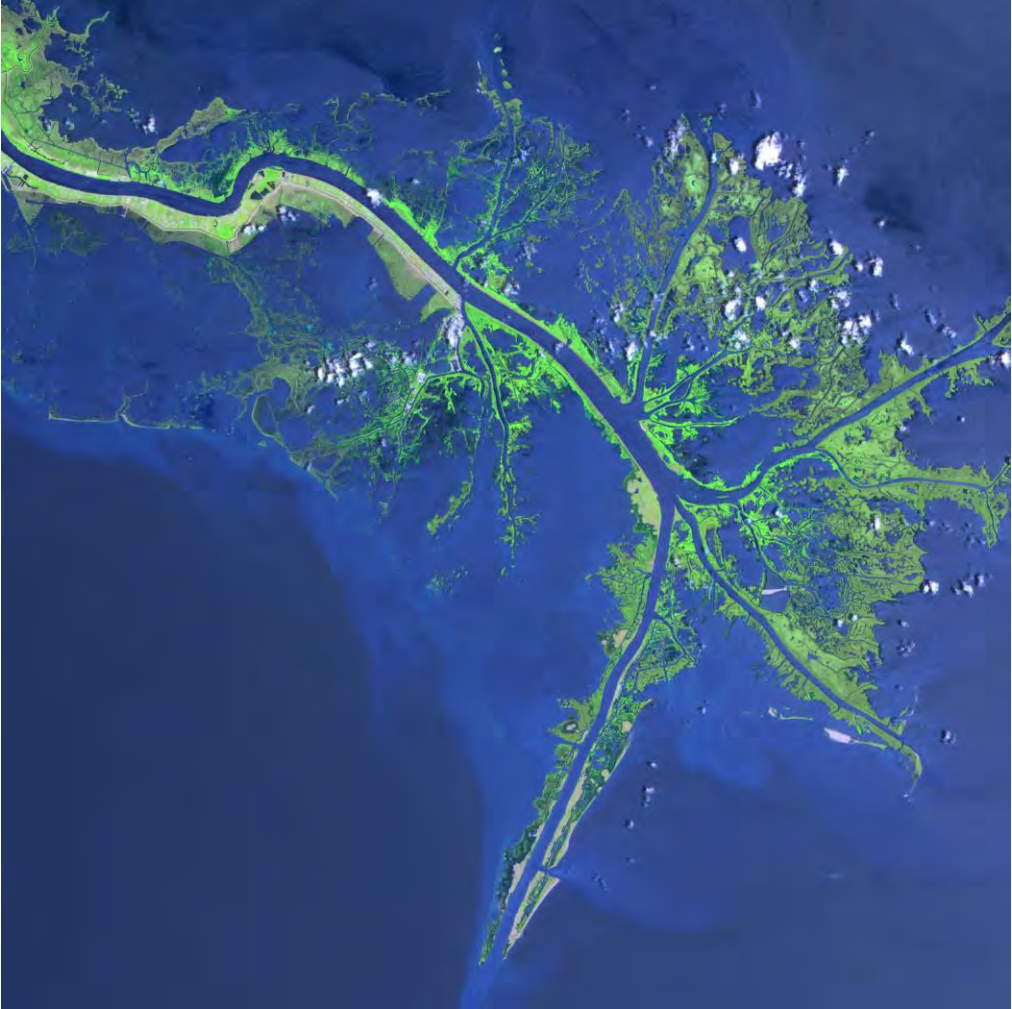
لاحظوا أن هناك خوارزمية واضحة في الزمن كثير الحدود: من أجل كل رباعية $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 \leq n$ تحققوا مما إذا كانت صورها مرتبة كواحدة من التبديلتين المخطورتين. قد يكون الانتقال من الزمن كثير الحدود إلى الزمن الخطي أهم لأن $\log n!$ ينمو أسرع من دالة خطية في n ، ولكنه أبطأ من دالة تربيعية، بواسطة علاقة ستيرلينغ. لذلك، إذا تمكنتم من العثور على خوارزمية زمنية خطية، فأنتم تثبتون على وجه الخصوص أن عدد التبديلات القابلة للفصل صغير عند مقارنته بـ $n!$. كإرشاد لهذا التمرين، اقرأوا مرة أخرى إثبات التقابل بين التبديلات القابلة للفصل والأشجار المشدبة.

¹⁰ F. Bassino, M. Bouvel, V. Féray, L. Gerin, and A. Pierrot. *The Brownian limit of separable permutations*. 2016.



¹¹ S. Kitaev. *Patterns in permutations and words*. Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer, Heidelberg, 2011. With a foreword by Jeffrey B. Remmel.

¹² M. Bóna. *Combinatorics of permutations*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2012. With a foreword by Richard Stanley.



● دلّتا نهر المسيسيبي.

هيباركوس وشرودر

لنعدّ الأشجار

القيم الأولى لـ $a(n)$

1	1
2	2
3	6
4	22
5	90
6	394
7	1806
8	8558
9	41586
10	206098
11	1037718
12	5293446
13	27297738
14	142078746
15	745387038
16	3937603038
17	20927156706
18	111818026018
19	600318853926
20	3236724317174
21	17518619320890
22	95149655201962
23	518431875418926
24	2832923350929742
25	15521467648875090
26	85249942588971314
27	469286147871837366
28	2588758890960637798
29	14308406109097843626
30	79228031819993134650

سنقوم بحساب العدد $a(n)$ للتبادلات كثيرة الحدود (أو التبديلات القابلة للفصل) على عدد n من الأشياء.

لنفترض أن $b(n)$ هو عدد الأشجار ذات n ورقة والتي تم تعليمها بحيث يكون للجذر طفلان على الأقل إذا كان $n \geq 2$ (وليس له أطفال، إذا كان $n=1$). بالنسبة إلى مثل هذه الشجرة، يمكننا إنشاء جذر جديد يكون الجذر الأصلي هو ابنه الوحيد. ويترب على ذلك أن $a(n) = 2b(n)$ من أجل $n \geq 2$. القيم الأولى لـ b هي:

$$b(1) = 1: \text{ شجرة صغيرة جذرها هو أيضًا ورقتها الوحيدة.}$$

$$b(2) = 1: \text{ شجرة صغيرة ذات فرعين وورقتين.}$$

$$b(3) = 3$$

من المغربي جدًا إنشاء علاقة تراجعية لـ $b(n)$.

نبدأ بشجرة مشذبة ذات n ورقة بحيث يكون للجذر طفلان على الأقل. إذا حذفنا الجذر والفروع المجاورة، فسنحصل على عدد معين من الأشجار، بعدد إجمالي n من الأوراق. في المقابل، انطلاقًا من مجموعة مرتبة من شجرتين مشذبتين على الأقل بهما عدد إجمالي n من الأوراق، يمكننا إضافة جذر جديد وربطه بالجذور السابقة، من أجل بناء شجرة مشذبة ذات n ورقة.

ومنه يأتي أن العلاقة الآتية صحيحة

$$b(n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k: i_1 + \dots + i_k = n-1} b(i_1)b(i_2)\dots b(i_k).$$

نحن نستخدم الآن الطريقة التقليدية للمتسلسلات المولدة.

نعرف متسلسلة القوى الشكلية H بـ

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n = t + t^2 + 3t^3 + \dots$$

لترتيع H

$$H(t)^2 = t^2 + 2t^3 + 7t^4 + \dots$$

معامل t^n في هذه المتسلسلة الجديدة هو $\sum_{i_1+i_2=n} b(i_1)b(i_2)$ ، وهو يساوي عدد الأشجار المشدبة ذات n ورقة بحيث يكون للجذر طفلان بالضبط. باستخدام $H(t)^3$ ، نحسب عدد الأشجار التي يكون لجذرها ثلاثة أطفال، إلخ.

المتسلسلة غير المنتهية

$$H(t)^2 + H(t)^3 + \dots$$

تحتسب إذن جميع الأشجار، ما عدا الشجرة الوحيدة التي لها ورقة واحدة. ومن ثم، فإن هذا المجموع غير المنتهي هو $H(t) - t$. وبالتالي

$$H(t) - t = H(t)^2 + H(t)^3 + \dots$$

بتجميع المتسلسلة الهندسية، نحصل على

$$H(t) - t = \frac{H(t)^2}{1 - H(t)}$$

أو

$$2H(t)^2 - (1+t)H(t) + t = 0$$

من حيث يأتي:

$$H(t) = \frac{1+t - \sqrt{1-6t+t^2}}{4}.$$

كدالة لمتغير مركب، $t \mapsto \frac{1+t - \sqrt{1-6t+t^2}}{4}$ معرفة جيداً وهولومتشاكلية (أو هولومورفية) في القرص الذي مركزه 0 والذي شعاعه (نصف قطره) هو أصغر جذري المعادلة $1-6t+t^2=0$ ، أي $t=3-2\sqrt{2}$. ومنه، فإن شعاع تقارب $H(t)$ هو $3-2\sqrt{2}$. بتعبير آخر

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b(n) = \log(3+2\sqrt{2}).$$

سيبين القارئ بسهولة أنه يمكن استبدال \lim بـ \limsup . إن الـ $a(n)$ هي



E. SCHRÖDER.

فريدريش فيلهلم كارل إرنست شرودر (1841-1902) كان له هوايات رياضية عديدة: ركوب الدراجات والمشى لمسافات طويلة والسباحة، التزحلق على الجليد وركوب الخيل والبستنة. لأنه كان ينظر إليه دائماً وهو يركب دراجة حول كارلسروه، كان معروفاً محلياً باسم "أستاذ الدراجة" (انظروا [MacTutor](#) تاريخ أرشيف الرياضيات)



هيباركوس

(حوالي 190 - حوالي 120 ق.م.)

أعداد شرودر الكبيرة، والـ $b(n)$ هي أعداد شرودر الصغيرة. لا تنسوا أن $a(n) = 2b(n)$ من أجل $n \geq 2$.

إن موسوعة المتتاليات الصحيحة المدهشة على الإنترنت لها عدة صفحات مخصصة لهاتين المتتاليتين (من بين العديد من الصفحات الأخرى) وربما تحتوي على الكثير من المعلومات! على سبيل المثال، يجد المرء التقدير المقارب:

$$a(n) \sim \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n}{2n\sqrt{2\pi n} \sqrt{3\sqrt{2} - 4} \left(1 - \frac{9\sqrt{2} + 24}{32n} + \dots\right)}$$

هيباركوس وشرودر

يؤكد مبدأ أرنولد أنه

إذا كان مفهوم يحمل اسمًا شخصيًا، فهذا ليس اسم المكتشف.

ومكمله، مبدأ بېري :

ينطبق مبدأ أرنولد على نفسه ¹³.

ينطبق هذا بشكل خاص على اكتشاف أعداد شرودر. كان إرنست شرودر منطيقًا (منطقيًا) ألمانيًا مهمًا وقد أوضح أن هدفه كان ¹⁴:

تصميم المنطق كنظام حسابي، لا سيما لإتاحة الوصول إلى المعالجة الدقيقة للمفاهيم النسبية، ومن ذلك الحين فصاعدًا، عن طريق التحرر من الادعاءات الروتينية للغة الطبيعية، سحب أي تربة خصبة من 'رؤسم' (cliché) مجال الفلسفة أيضًا. يجب أن يمهد هذا الأرضية للغة عالمية علمية تختلف بشكل واسع عن الجهود اللغوية مثل فُلايوك (Volapük) [لغة عالمية مثل الإسبرانتو، كانت شائعة جدًا في ألمانيا في ذلك الوقت]، تبدو وكأنها لغة إشارة أكثر من كونها لغة صوتية.

نظرًا إلى وجهة نظره حول المنطق، فقد كان سؤالًا طبيعيًا جدًا بالنسبة إليه ليحسب عدد الأقواس الصحيحة في كلمة ذات طول n .

هذا هو الغرض من بحثه لعام 1870 ¹⁵.

بالنسبة إلى كلمة طولها 2، هناك امكانتان:

ab و (ab) .

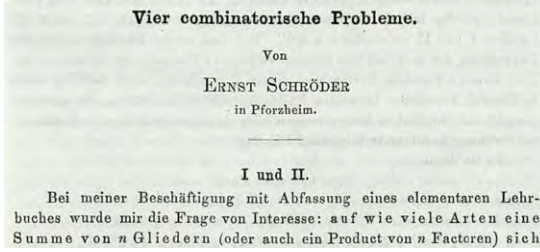


¹³ V. I. Arnold. On teaching mathematics

في سياق مختلف، هذا هو ما يسمى أيضًا قانون ستيفلر ل الاسم. ورد عن A. N. Whitehead أنه قال "كل شيء من الأهمية قيل من قبل شخص ما لم يكتشفها".

¹⁴ V. Peckhaus. 19th century logic between philosophy and mathematics. Bull. Symbolic Logic, 5(4):433-450, 1999.

¹⁵ E. Schröder. Vier combinatorische probleme. Bull. Symbolic Logic, 15:361-376, 1870.



وهناك ست إمكانيات بالنسبة إلى كلمة طولها 3 :

$$abc \quad (ab)c \quad a(bc) \\ .(abc) \quad ((ab)c) \quad (a(bc))$$

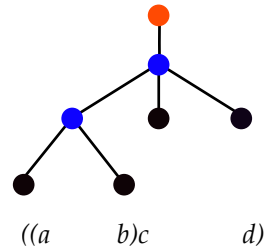
قواعد اللعبة هي أنه لا يمكن وضع حرف واحد بين قوسين مثل (a) ويجب ألا يكرر أحد الأقواس مثل ((ab)). يمكن أن تكون الكلمة الكاملة داخل زوج واحد من الأقواس أو لا تكون (وهذا هو السبب في أن أعداد شرودر الكبيرة زوجية). لاحظوا أن زوجًا من الأقواس يمكن أن يشتمل على أكثر من حرفين. توجد 22 إمكانية لكلمة طولها 4.

يجب أن يكون واضحًا للقارئ أن هذه التعبيرات الـ 22 ليست شيئًا آخر سوى قائمة الـ 22 شجرة المشدّبة ذات 4 أوراق. بالفعل، يمكن وصف الكلمات الموضوعية بين الأقواس بالأشجار المشدّبة، كما هو موضح في الهامش. كان شرودر يعدّ ببساطة الأشجار المشدّبة، والمعروفة بالتبادلات كثيرة الحدود، والمعروفة أيضًا بالتبديلات القابلة للفصل. تحتوي ورقته على علاقة التراجع والدالة المولدة الموصوفة أعلاه.

في عام 1994، كان ديفيد هوش، دارس دراسات عليا في جامعة جورج واشنطن (الولايات المتحدة الأمريكية)، يقرأ التمرين 1.45 من كتاب ستانلي¹⁶ :

الاقْتباس الآتي مأخوذ من Plutarch's Table Talk VIII.9.732 يقول كريسبوس إن عدد القضايا المركبة التي يمكن إجراؤها من عشرة قضايا بسيطة فقط تتجاوز مليونًا. من المؤكد أن هيباركوس، كي يتأكد، قد دحض ذلك من خلال إظهار أنه على الجانب الإيجابي يوجد 103049 بيانًا مركبًا، وعلى الجانب السلبي 310952. وفقًا لـ ي. هيلث، تاريخ الرياضيات اليونانية. المجلد 2، ص 245؛ "يبدو أنه من المستحيل صنع أي شيء من هذه الأشكال". [يلاحظ هيث أيضًا أن القراءة المتغيرة لـ 103049 هي 101049]. في الواقع هل يمكن التعبير عن بيان بلوتارخوس بأي معنى؟

$$abcd \quad (abcd) \\ (ab)cd \quad ((ab)cd) \\ a(bc)d \quad (a(bc)d) \\ (ab(cd)) \quad ((ab(cd))) \\ (ab)(cd) \quad ((ab)(cd)) \\ (abc)d \quad ((ab)cd) \\ a(bcd) \quad (a(bcd)) \\ ((ab)c)d \quad (((ab)c)d) \\ (a(bc))d \quad ((a(bc))d) \\ a((bc)d) \quad (a((bc)d)) \\ (a(b(cd))) \quad ((a(b(cd))))$$



¹⁶ R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1986. With a foreword by Gian-Carlo Rota.

لاحظ هوق أن 103049 هو عدد شرودر الصغير العاشر (10b) ولا يمكن أن يكون ذلك من قبيل الصدفة.

كان بُلوتارخوس مؤرخًا وكتّاب سيرة يونانيا، وكان دوره (في قصتنا) يقتصر على إعادة نسخ الاقتباس بواسطة هيباركوس قبل مائتي عام. من الصعب تخيل أن هذا الرقم 103049 كان يمكن تذكره خلال مثل هذا الوقت الطويل دون أن يتم حفظه في كتاب بحوزة بُلوتارخوس.

ربما يكون هيباركوس أهم فلكي في العصور القديمة. يشتهر باكتشافه لمبادرة الاعتدال ولكن قبل كل شيء لبناء وصف علمي متماسك لحركة الكواكب. خلفه، بطليموس، بعد ثلاثمائة عام، اشتهر بنظام مركزية الأرض البطلمي الذي أصبح العقيدة الفلكية حتى قدم كوبرنيكوس نظام مركزية الشمس، بعد عدة قرون. يدين بطليموس بالكثير لهيباركوس ولا يعترف دائماً بدينه. لكن هذا لا علاقة له بقصتنا.

لذلك، وفقا لهوق، هيباركوس، تحت إرسال من بُلوتارخوس، كان يعدّ الكلمات بين الأوقاس ذات الطول 10. تمت كتابة العديد من الأوراق التاريخية حول هذا الاكتشاف لأعداد شرودر بواسطة هيباركوس^{17 18}.

يقدم مقال في MathPages¹⁹ شرحًا أكثر تفصيلاً نوعاً ما بمفردات المنطق الرواقي (منطق في ما قبل-الأرسطوية دُرّس بشكل خاص من قبل كريسيديوس، وانتقده هيباركوس).

ليكن عدد معين من "التأكيدات" المنطقية a_1, a_2, \dots, a_k ، توجد طريقتان على الأقل للجمع بينهما بالوصل أو بالفصل:

$$\bullet \text{ } a_1 \text{ OR } a_2 \text{ OR } \dots \text{ OR } a_n \text{ وهي دالة } n \text{-اية } (OR(a_1, \dots, a_n))$$

$$\bullet \text{ } a_1 \text{ AND } a_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } a_n \text{ وهي دالة } n \text{-اية } (AND(a_1, \dots, a_n))$$

في الترميز البوليني (نسبة إلى جورج بُول) الحديث، نستخدم + لـ OR ونقطة، أو فقط التعاقب لـ AND. الآن، نعتبر كلمة طولها n (على سبيل المثال $abcd$ من أجل $n=4$). من أجل كل من الـ $n-1$ فراغا بين الحروف، اختاروا "+" أو ".". يوجد 2^{n-1} امكانية (8 في مثالنا).



Ta sage instruction fert de riche couronne
A Trajan, élevé par dessus tous humains.
Si les grands te portoient au cœur & dans leurs mains,
Vertu viroit au lieu de Venus & Bellone

بُلوتارخوس

(حوالي 60 ب م - 120 ب م)

¹⁷ R. P. Stanley.

Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough. *Amer. Math. Monthly*, 104(4):344–350, 1997.

¹⁸ F. Acerbi. On the shoulders of Hipparchus: a reappraisal of ancient Greek combinatorics. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 57(6):465–502, 2003.

¹⁹ K. Brown. Hipparchus on compound statements. *MathPages*.

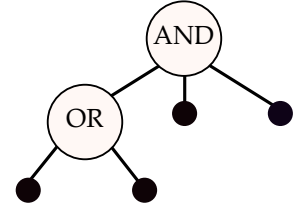
$$\begin{array}{ll} abcd & abc + d \\ ab + cd & ab + c + d \\ a + bcd & a + bc + d \\ a + b + cd & a + b + c + d \end{array}$$

نحن معتادون على إعطاء الأولوية للضرب على الجمع ولكن إذا أردنا تحديد ترتيب لتقويم هذه الدالة المنطقية، فالأقواس ضرورية.

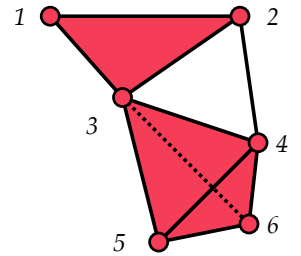
يمكن وصف ذلك بشجرة مشدبة. اربطوا الرمز OR بعقدة ذات مستوى فردي وAND بعقدة ذات مستوى زوجي. تعمل كل عقدة وفقاً لمجموعة من أبنائها، هؤلاء الأبناء يتم احتضانهم بين قوسين. إذا كان للجذر ابن واحد، فليس من الضروري تسميته بـ AND لأنه يعمل على مجموعة أحادية (العنصر).

يتم تشجيع القارئ، كثيرين، على إظهار أن تعبيرين مختلفين، أي شجرتين مشدبتين مختلفتين، تعرفان دالتين بوليانييتين مختلفتين $\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ عند تقويمهما في $a_i = 0$ أو $a_i = 1$ (خاطئ أو صحيح). لذلك، كان هيباركوس على حق: هناك $a(10) = 2 \times 103\ 049$ طريقة للجمع بين 10 تأكيدات، باستخدام OR أو AND، بالمعنى الموصوف للتو. يمكن للمرء أن يتساءل لماذا ذكر $b(10)$ وليس $a(10)$. ربما لاحظ الالتفاف الطبيعي بين القضايا المركبة التي يقدمها النفي، والذي يبادل بشكل أساسي بين AND وOR؟

$abcd$	$abc + d$
$ab(c+d)$	$a(bc+d)$
$ab+cd$	$a(b+c)d$
$a(b+cd)$	$(ab+c)d$
$ab+c+d$	$a(b+c)+d$
$a(b+c+d)$	$a+bcd$
$(a+b)cd$	$(a+bc)d$
$a+bc+d$	$(a+b)(c+d)$
$(a+b)c+d$	$a+b(c+d)$
$a+(b+c)d$	$a+b+cd$
$(a+b+c)d$	$a+b+c+d$



هناك سؤال مفتوح ذو صلة، يسمى **مشكلة دهبكيند**. هناك 2^{2^n} دالة بوليانية (أو منطقية)، أي دوال من $\{0,1\}^n$ في $\{0,1\}$. من السهل أن نرى أن أي دالة بوليانية من هذا القبيل يمكن كتابتها ببعض الصيغ باستخدام OR وAND وNOT. تلك الدوال التي يمكن وصفها بالصيغ التي لا تتضمن الدالة NOT تسمى الدوال البوليانية الرتيبة (لكن لاحظوا أننا لا نفرض أن كل متغير يظهر مرة واحدة في الصيغة، كما في حالة هيباركوس). السؤال حول حساب عدد الدوال البوليانية الرتيبة مفتوح من أجل $n < 8$. هذا العدد له أيضاً تفسير طوبولوجي لطيف: إنه عدد المركبات البسيطة التي رؤوسها هي $\{1, \dots, n\}$.



معظم الرياضياتيين، بمن فيهم أنا، لديهم فكرة ساذجة حول الرياضيات اليونانية. نعتقد أنها تتكون فقط من الهندسة بروح إقليدس. قد يكون مثال حساب هيباركوس لعدد شرودر العاشر تلميحا إلى أن اليونانيين القدماء قد طوّروا فهما مفصلاً إلى حد ما للتوافقيات: هذا هو موضوع مقالة أكربي المقتبسة أعلاه.

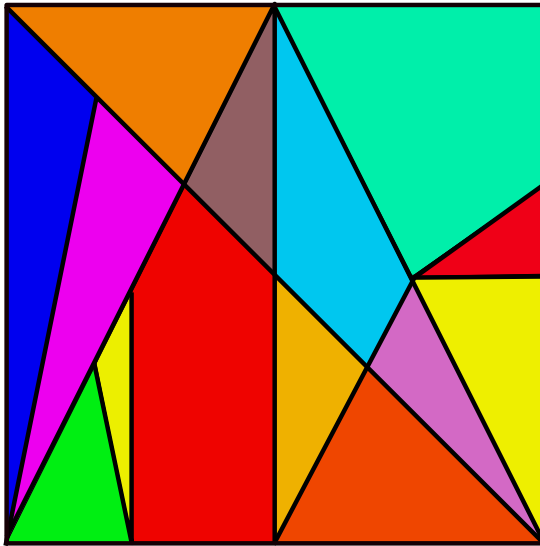
مُرَكَّب بسيط مع مجموعة رؤوس $V = \{1, \dots, 6\}$ الدالة التي تربط مجموعة جزئية X من V إذا كانت X بسيطاً، و 1 في خلاف ذلك، هي دالة بوليانية رتيبة.

يقدم كتاب نيتز²⁰ منظورات جديدة حول هذا التاريخ. يناقش الفصل الأول التوافقيات اليونانية ولا سيما العدد 103049. يحتوي أيضًا على وصف للغز توافقي تم العثور عليه في طرس أرخميدس الشهير (يتم حث القارئ على القراءة²¹ مثل قراءة قصة بوليسية). يتكون هذا من 14 قطعة متعددة الأضلاع ويشبه لعبة طاشرام أو لعبة القطع السبع. نيتز "طلب من زميله في ستانفورد، برسي، وهو توافيقي مشهور، مساعدته في حل ما افترض أنه سؤال بسيط: كم عدد الطرق المتاحة لتجميع المربع معًا؟ [...] استغرق الأمر من دياكونيس شهرين وعمل تعاوني مع ثلاثة زملاء للتوصل إلى عدد الحلول: 17142".

هل يعرف أرخميدس الجواب؟

²⁰ R. Netz. *Ludic proof*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Greek mathematics and the Alexandrian aesthetic.

²¹ R. Netz and W. Noel. *The Archimedes codex*. Phoenix, London, 2008. Revealing the secrets of the world's greatest palimpsest.



معدة أرخميدس.

THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;

WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, K^t.
Late President of the Royal Society.

*Translated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.*

To which is subjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Consisting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatise
A compleat Institution for the use of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M. A. and F. R. S.
Master of Sir *Joseph Williamson's* free Mathematical-School at *Rockester*.

L O N D O N :
Printed by HENRY WOODFALL ;
And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.

M.DCC.XXXVI.

Adam
83.12

8787

De methodis serierum et fluxionum

طريقة نيوتن

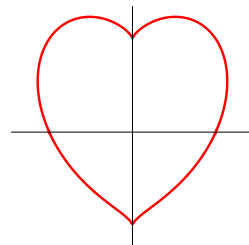
المنحنيات الجبرية

منذ إدخال الإحداثيات بواسطة روني ديكرت، أصبحت دراسة المنحنيات المستوية، وخاصة المنحنيات الجبرية المستوية (المعرفة بمعادلات كثيرة الحدود $(P(x, y) = 0)$ ، موضوعًا مركزيًا في الرياضيات ولا تزال كذلك. بالطبع، كانت معادلات الدرجتين 1 و2 (المستقيمت والمخروطات) مألوفة جدًا. عندما نظر الرياضياتيون في القرن السابع عشر إلى المنحنيات من درجة أعلى، وجدوا غابة تتكون من العديد من الأشكال المختلفة التي حاولوا ترويضها. على سبيل المثال، كتب إسحاق نيوتن مذكرات طويلة عن المنحنيات من الدرجة الثالثة، مفككا إياها إلى عدد كبير من "الأنواع". انظروا المناقشة في ²² أو في ²³. وبسرعة كبيرة، ظهر بوضوح أن النقط المفردة تلعب دورًا مركزيًا في فهم هندسة هذه المنحنيات. تكون نقطة (x_0, y_0) مفردة إذا كانت تنتمي إلى المنحني، أي إذا كان $P(x_0, y_0) = 0$ ، وكان المشتقان الجزئيان $\partial P/\partial x$ و $\partial P/\partial y$ ينعدمان في (x_0, y_0) . في جوار لنقطة عادية (أي غير مفردة)، لا يجد رياضياتي معاصر صعوبة في تطبيق مبرهنة الدالة الضمنية: في إحداثيين أمليسين مناسبين حول هذه النقطة، يكون المنحني مستقيمًا.

ومع ذلك، قد تكون النقط المفردة أكثر تعقيدًا ويستغرق فك رموز طبيعتها وقتًا طويلًا.

²² J. Stillwell. *Mathematics and its history*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.

²³ W. W. R. Ball. On Newton's Classification of Cubic Curves. *Proc. London Math. Soc.*, S1-22(1):104-143, 1890.



منحن جبري بنقطتين مفردتين

في هذا الفصل، سنصف إحدى الخطوات الرئيسية نحو هذا الفهم، باتباع كتاب نيوتن *De methodis serierum et fluxionum* (طريقة المتسلسلات والتدفقات). لا نريد الخوض في أي تفاصيل تاريخية حول التنافس بين نيوتن ولايبنيز فيما يتعلق باختراع حساب التفاضل والتكامل. اسمحوا لنا أن نوصي خصيصًا لغرضنا بسيرة نيوتن الذاتية الممتازة لـ ويستفال²⁴.

هذا هو الوصف الذي قدمه نيوتن بنفسه لـ *Annus mirabilis* (انظروا²⁵):

²⁴ R. S. Westfall. *Never at rest*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980. A biography of Isaac Newton.

²⁵ R. S. Westfall. *Newton's marvelous years of discovery and their aftermath: myth versus manuscript*. Isis, 71(256):109–121, 1980.

في بداية عام 1665، وجدث طريقة المتسلسلات التقريبية وقاعدة تقليص أي خطوة لأي ذي حدين إلى مثل هذه المتسلسلة. في نفس العام في مايو، وجدت طريقة المماسات لـ فربقري وسلوزيوس، وفي نوفمبر كان لدي طريقة مباشرة للتدفق وفي العام الذي تلاه في يناير كان لدي نظرية الألوان وفي مايو بعد ذلك دخلت إلى طريقة التدفقات العكسية. وفي نفس العام بدأت أفكر في امتداد الجاذبية إلى مدار القمر. كل هذا حدث في سنتي الطاعون 1665-1666. لأنني في تلك الأيام كنت في ريعان عمري من أجل الاختراع والعقلية الرياضية والفلسفة أكثر من أي وقت منذ ذلك الحين.

في يوليو 1669، استنادًا إلى أفكاره لعام 1665، كتب نيوتن

De Analysisi per aequationes numero terminorum infinitas.

في عام 1671، كتب *De methodis serierum et fluxionum* لكنه لم ينشر هذا العمل:

في عام 1676، كتب رسالتين مشهورتين إلى لايبنيز (عبر أولدنبورث، كوسيط):

epistola prior and epistola posterior

ظهرت الترجمة الإثليزية بواسطة كولسون (Colson) لـ *De methodis* في عام 1736 (أي بعد 9 سنوات من وفاة نيوتن). ترجمة فرنسية للترجمة الإثليزية، كتبها جورج لوي لوكبر (de Buffon)، ظهرت في 1740.

يبدو أن كولسون لم يقبل أن يظهر المخطوط اللاتيني لـ دو بوف.

كل هذه الأوراق تحتوي على وصف دقيق للنقط المفردة للمنحنيات الجبرية، بتعبير ما يسمى اليوم متسلسلة بويزو، باتباع مبدأ أرنولد مرة أخرى.

نريد دراسة المنحني $P(x, y) = 0$ ، حيث P كثير حدود بمعاملات مركبة.

يجب أن نفهم أولاً أن نيوتن لا يفكر في هذا على أنه منحني، ولكن كدالة: إذا كان x معطى، فإنه يريد حل المعادلة $P(x, y) = 0$ ، وإيجاد y كدالة $y(x)$.

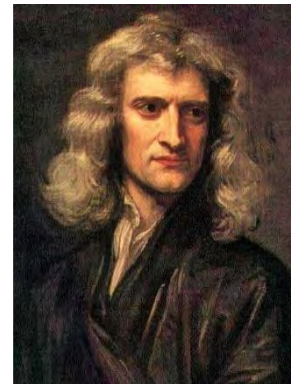
في وقت لاحق، سوف ندرس حالة المعاملات الحقيقية وكذلك الدوال P التي يفترض أنها تحليلية فقط.

نتيجته الرئيسية هي أنه ممكن بالفعل، بمجرد أن يكون المرء على استعداد لاعتبار $y(x)$ متسلسلة غير منتهية بقوى منطقية لـ x . لنذكر الآن مبرهنة سيتم توضيحها لاحقاً، والتي أثبتها نيوتن "تقريباً".

مبرهنة. كل معادلة كثيرة الحدود $P(x,y)=0$ (حيث P ليس قابلاً للقسمة على x) بحيث يكون $P(0,0)=0$ ، متكافئة، في جوار $(0,0)$ ، لعدد منته من المساويات $y=f_i(x)$ (مع $i=1,\dots,n$) حيث f_i متسلسلة لـ بوزو الشكل

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} x^k$$

من أجل معاملات مركبة $a_{i,k}$ وأعداد صحيحة موجبة m_i .



نيوتن عام 1689، بريشة غودفري كينلر.

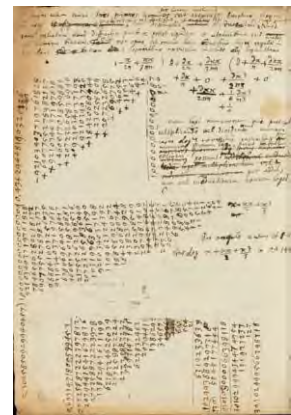
بمعنى آخر، $\{P=0\}$ هو اتحاد عدد منته من الرسوم البيانية للمتسلسلة f_i . نحن في وضع مشابه لوضع السؤال الأصلي لـ كونتسبويتش وسيكون من الطبيعي أن نسأل أنفسنا عن الطبيعة الطوبولوجية لهذه الرسوم البيانية. ومع ذلك، قبل دراسة هذا السؤال، هناك العديد من التفاصيل التي يجب تحديدها، لأن هذه الـ f_i ليست دوالاً حقاً. فكروا على سبيل المثال في "الرسم البياني" للجذر التربيعي.

سننظر عن كُتب في الجزء الأول من *De methodis serierum et fluxionum* توجد واجهة صدر هذا الكتاب المهم في الصفحة الأولى من هذا الفصل. من أجل تبسيط مهمة القراء، سننتع الترجمة الإنجليزية.

طريقة نيوتن

دعونا نبدأ في قراءة نيوتن.

نظراً لوجود توافق كبير بين العمليات في الأنواع ونفس العمليات في الأعداد العادية؛ ولا يبدو أنها تختلف، إلا في الأحرف التي يتم تمثيلها بها، الأولى عامة وغير محددة، والأخرى محددة وخاصة: لا يسعني إلا أن أتعجب من أنه لا أحد فكّر في استيعاب عقيدة الكسور العشرية المكتشفة مؤخراً بطريقة ماثلة للأنواع [...] خاصة أنها قد تكون قد فتحت طريقاً لمزيد من الاكتشافات المجردة.



صفحة من *De methodis*

التفسير: يعني نيوتن بالأعداد العادية . . . عددا عاديا، أي ما نسميه اليوم عددا مركبًا. لاحظوا أن عددًا قليلًا جدًا من الرياضياتيين في ذلك الوقت كانوا يعتبرون هذه الأعداد "عادية". بالأنواع، فهو يعني كثير حدود في x ، أو متسلسلة صحيحة، أو ما يسمى اليوم متسلسلة لورن (لورّا Laurent)، أو ربما متسلسلة بويزو، أي متسلسلة بالقوى الناطقة لـ x . على أية حال، فإن الأنواع حسب تعبير نيوتن هي نوع من الدوال.

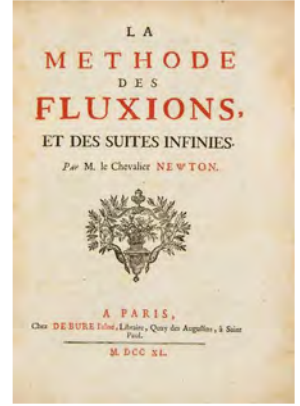
ولكن نظرًا إلى أن لعقيدة الأنواع هذه نفس العلاقة بالجبر، مثل ما لعقيدة الأعداد العشرية بالحساب العادي؛ عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة واستخراج الجذور، يمكن تعلّمها بسهولة من تلك، إذا كان للمتعلّم مجرد مهارة في الحساب العشري، والجبر البدهيي، ويلاحظ التطابق الذي يحصل بين الكسور العشرية ومصطلحات الجبر المستمرة بلا حدود.

التفسير: يلاحظ نيوتن أن المتسلسلة من الممكن معالجتها بنفس طريقة معالجة الأعداد، والتي لدينا من أجلها أربع عمليات (+، -، ×، /). في المصطلحات الحديثة، يلاحظ أن الأعداد العادية ومتسلسلات لورن تشكل حقلين.

كما هو الحال في الأعداد، تتناقص الأماكن باتجاه اليمين باستمرار في نسبة عشرية أو شبه مضاعف؛ لذلك فهي في الأنواع على التوالي، عندما يتم التخلص من الشروط، (كما هو مطلوب في كثير من الأحيان فيما يأتي) في متوالية منتظمة مستمرة بشكل غير منته، وفقًا لترتيب الأبعاد لأي بسط أو مقام.

التفسير: مرة أخرى في المصطلحات غير التاريخية الحديثة، نيوتن يجربنا عن طوبولوجيا هذين الحقلين. يكون عددا حقيقيان متقاربين إذا اتفق نشرهما العشريان حتى رتبة كبيرة، وبالمثل، فإن اثنين من كثيرات الحدود في x ، أو متسلسلتين، متقاربان بجوار 0 إذا كان تقويم فرقهما كبيرًا.

في هذه المرحلة، يمكننا تخمين استراتيجية نيوتن. سيعلّمنا طريقة حلّ المعادلات كثيرة الحدود $P(y) = 0$ حيث P كثير حدود بمعاملات في حقل ما، والذي يمكن أن يكون إما من الأعداد العادية أو من الأنواع. لذلك سينطبق هذا على المعادلات ذات الشكل $P(x, y) = 0$ ، حيث P كثير حدود بمتغيرين، يُنظر إليه على أنه كثير الحدود $P(x)(y)$ بمتغير واحد y بمعاملات في حقل الدوال الناطقة $C(x)$ أو في حقل متسلسلات لورن $C((x))$.



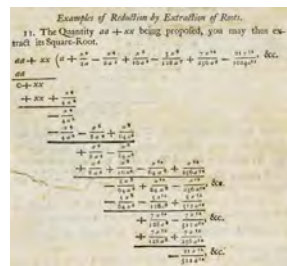
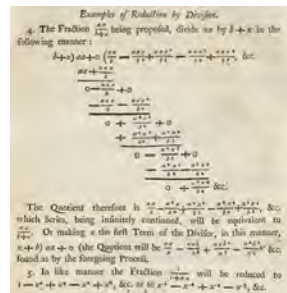
غلاف الترجمة الفرنسية لـ Buffon ©

في عرض تربوي للغاية، يعطي نيوتن عدة أمثلة توضح التشابه بين الأنواع والأعداد العادية. أولاً يوضح كيفية فك $a^2/(b-x)$ كمتسلسلة في x . مثلما يوضح في المدرسة الابتدائية أن قسمة 1 على $0.9 = 1 - 0.1$ ينتج عنها $1.11111111\dots$. هذا سهل ويجب أن يكون سهلاً أيضاً على قرائه.

ثم يشرح معنى الأساس الناطقة التي يجب أن تكون مألوفة أيضاً لمعظم قرائه. يمكنه بعد ذلك تقديم صيغته الشهيرة ذات الحدين من خلال مثال الجذر التربيعي لـ $a^2 + x^2$ ، كمتسلسلة غير منتهية في x :

$$(a^2 + x^2) = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} \dots$$

نأتي الآن إلى الجزء الأكثر إثارة للاهتمام بالنسبة إلينا. يود حل ما يسميه "المعادلات المتأثرة". وهي معادلات كثيرة الحدود معاملاتها الأنواع، أي المعادلات $P(x, y) = P(x)(y) = 0$. مرة أخرى بطريقة تربوية للغاية يعلن أنه سيبدأ بحل المعادلات العادية في الأعداد العادية من الشكل $P(y) = 0$ ، حيث P كثير حدود من $C[y]$.



Of the Reduction of affected Equations.

19. As to affected Equations, we must be something more particular in explaining how their Roots are to be reduced to such Series as these; because their Doctrine in Numbers, as hitherto deliver'd by Mathematicians, is very perplexed, and incumber'd with superfluous Operations, so as not to afford proper Specimens for performing the Work in Species. I shall therefore first shew how the Resolution of affected Equations may be compendiously perform'd in Numbers, and then I shall apply the same to Species.

هذه هي طريقة نيوتن الشهيرة والتي هي واحدة من الأدوات الأساسية جدا في التحليل.

		$(+2,10000000$	
		$-0,00544852$	
		$2,09455148$	
$2+p=y.$	y^3	$+8 +12p +6pp +p^3$	
	$-2y$	$-4 - 2p$	
	-5	-5	
	Summa	$-1 +10p +6pp +p^3$	
$0,1+q=p.$	$+p^3$	$+0,001 +0,03q +0,39q +q^3$	
	$+6pp$	$+0,06 +1,2 +6,$	
	$+10p$	$+1, +10,$	
	-1	-1	
	Summa	$0,061 +11,23q +6,39q +q^3$	
$-0,0054+y=q.$	$+q^3$	$-0,0000001577464 +0,0000007482 +0,0016277 +1,173$	
	$+6,39q$	$+0,000183708 -0,06804 +6,3$	
	$+11,23q$	$-0,060642 +11,23$	
	$+0,061$	$+0,061$	
	Summa	$+0,0005416 +11,1627$	
$-0,00004852+y=r.$			

انظروا إلى الطريقة التي يعرض بها الحسابات. مثاله هو المعادلة من الدرجة الثالثة

$$y^3 - 2y - 5 = 0.$$

إنه يلاحظ، بالتجربة والخطأ، أن هناك جذراً لا يختلف كثيراً عن 2.

لذلك فهو يبحث عن y ك $y = 2 + p$ مع p صغير. وبعد التعويض في المعادلة الأصلية يجد

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

يمكنه الآن "إلغاء" $p^3 + 6p^2$ بسبب صغره " للحصول على

$$10p - 1 = 0$$

بحيث تكون p قريبة من $1/10$. يمكنه بعد ذلك وضع $p = 0.1 + q$ والتعويض في المعادلة للحصول على

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0.$$

"ولما كانت العلاقة $11.23q + 0.061 = 0$ قريبة من الصحة" فهو يعلم أن q قريب من

$$-0.061/11.23 \approx -0.0054.$$

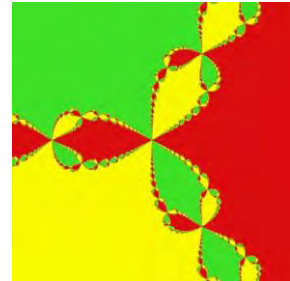
بكتابة $q = -0.0054 + r$ ، يمكنه التعويض كما كان من قبل ومتابعة العملية "بقدر ما أريد". لقد حصل أخيرًا على الحل بالقرب من 2.09455148.

توضح الفقرة الآتية، إذا لزم الأمر، أن نيوتن كان موهوبًا بشكل لا يُصدق لإجراء العمليات الحسابية. "يمكن اختصار العمل بشكل كبير" بالفعل. يشرح ما (يجب) على جميع الدارسين في مرحلة ما دون التدرج معرفته: إنه في كل خطوة يتم مضاعفة عدد الرتب العشرية الصحيحة بشكل أساسي، وإنه ليس من الضروري حساب p ، q ، r ، s ، إلخ. وهذا هو السبب أن في جدولاه، تم شطب بعض الأرقام: هذا ليس خطأ فادحًا، هذا تبسيط ذكي.

في عام 1690، نشر رافسون (1648-1715) (زميل الجمعية الملكية، وبالتالي يعرف نيوتن جيدًا) طريقة لحل المعادلات في *Analysis aequationum universalis*. نبدأ بحل تقريبي y_0 لـ $P(y) = 0$ ونعتبر المتتالية $(y_k)_{k \geq 0}$ المعرفة بـ

$$y_{k+1} = y_k - \frac{P(y_k)}{P'(y_k)}$$

والتي، إذا كان كل شيء يعمل بشكل جيد، تتقارب إلى حل. لم يذكر رافسون نيوتن. يدعي بعض المؤرخين أن الطريقتين مختلفتان تمامًا. في حالة رافسون، يحتفظ المرء بنفس المعادلة ويحسب المتتالية y_k . في حالة نيوتن، في كل خطوة يحسب المرء معادلة جديدة. تعطي الطريقتان نفس النتيجة تمامًا وهما متطابقتان شكليًا، ولكن من الواضح أنه إذا تم الحساب يدويًا، فإن عرض نيوتن سيكون أكثر كفاءة. يمكن للمرء أن يقول إن رافسون يستخدم التكرار وإن نيوتن يستخدم الارتداد²⁶. يدعي بعض الرياضياتيين أن رافسون فهم دور مشتق P بينما كان نيوتن يجعل فقط المعادلة خطية. حسنا، من يستطيع أن يقول إنه لم يكن بإمكان نيوتن، مخترع المشتقات، ملاحظة أن الجزء الخطي هو المشتق؟ طالما أنا محتم بذلك، سأستمر في الحديث عن طريقة نيوتن وليس طريقة نيوتن-رافسون. كتعليق أخير، لا داعي للقول إن نيوتن لم يناقش على الإطلاق أي سؤال حول التقارب. لاحظوا أيضًا أن مثاله يتضمن فقط الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود الحقيقية.



يمكن استخدام طريقة نيوتن لإيجاد جذور كثيرات الحدود $P(z)$ بمعاملات مركبة. ابتداءً من z_{init} ما، نأمل أن يتقارب تكرار خوارزمية نيوتن إلى جذر. لذلك فإن المستوي (أو على الأقل مجموعة z_{init} التي تعمل من أجلها الطريقة) يمكن تحليله إلى عدة ميادين، وفقًا للجذر المنهني. في عام 1880، طلب كيلي وصفًا لهذا التحليل. كتب أن السؤال سهل في الدرجة 2 (تقريبًا للقارئ) وبالنسبة إلى الدرجة 3 فهو "أي شيء إلا الواضح". في الواقع، من المعروف اليوم أن هذا التحليل له طبيعة كسورية. يُعرف هذا باسم أرنب نيوتن.

²⁶ C. Christensen. *Newton's method for resolving affected equations*. *College Math. J.*, 27(5):330-340, 1996.



شجرة تفاحة نيوتن في كلية ترينيتي. اسطورة
يتم تداولها في بعض الأحيان أن هذه الشجرة
هي التي سقطت منها التفاحة على إسحاق
نيوتن. الحقيقة، أنه لم يكن في كامبريدج خلال
كتابه *Annus mirabilis*.

De methodis serierum et fluxionum

متسلسلات نيوتن

المعادلات المتأثرة

يمكن لنيوتن الآن حل "المعادلات المتأثرة" التي معاملاتها هي دوال لـ x . مثاله هو الآتي

$$y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0.$$

x^4	x^3y	x^2y^2	x^4/a	x^3y^2
x^3	x^2y	x^2y^2	x^3y^3	x^2y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
1	y	y^2	y^3	4

في هذه المعادلة، a ، b هما وسيطان. لاحظوا أن نيوتن يهتم كثيراً بكتابة معادلات متجانسة. من أجل التبسيط، سنكون أقل حرصاً ونختار $a=b=1$. يبحث نيوتن أولاً عن حل تقريبي من الشكل $y = ux^\alpha$ حيث u ثابت غير منعدم وغير معلوم، α عدد ناطق غير معلوم. بعد الاستبدال يجد

$$u^6x^{6\alpha} - 5u^5x^{1+5\alpha} + u^4x^{3+4\alpha} - 7u^2x^{2+2\alpha} + 6x^3 + x^4 = 0.$$

هذا تعبير يتضمن "وحيدات الحد" بالقوى الناطقة لـ x . الأساس هي $1+5\alpha$ ، 6α ، $3+4\alpha$ ، $2+2\alpha$ ، 3 ، 4 . إذا درسنا الموقف في جوار 0 ، فإن الحدود الأكبر تتوافق مع أصغر هذه الأساس. بالنسبة إلى الاختيار العام لـ α ، فإن الأساس الستة مختلفة. هنا هذه هي الحالة، وإذا كنا نرغب في التعبير عن حقيقة انعدام الحد المهيم، فإن هذا يفرض علينا $u=0$: هذا بالتأكيد ليس ما نريد القيام به.

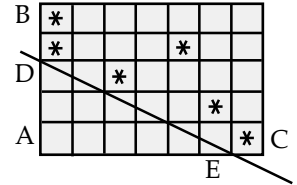
لذلك، علينا أن نختار α بحيث يكون اثنان على الأقل من الأساس الستة متساويين، علاوة على ذلك، بحيث يكونان الأصغرين. يعبر نيوتن عن هذا الشرط باستخدام

لا تنسوا أن نيوتن كان أيضاً فيزيائياً

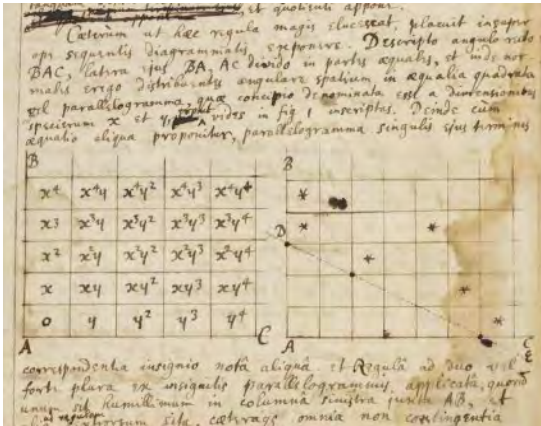
مضلعته الشهير. إنه يرسم نوعاً من لوحة الشطرنج مقسمة إلى مربعات (والتي يسميها متوازيات الأضلاع). من أجل كل وحيد حد غير منعدم $a_{ij}x^i y^j$, $(0 \leq i, j \leq 6)$ في المعادلة الأصلية، يقوم بوضع نجمة في المربع (i, j) . في مثاله السابق ست نجوم.

مع اختيار α ومقارنة الأساس $j + i\alpha$ يمكن تفسيره بطريقة هندسية، وهو ما فسره نيوتن بوضوح. ضعوا مسطرة على لوحة الشطرنج وحركوها حتى تلامس النجوم المعلّمة.

بعد ذلك، عند اقتراح أي معادلة، ضعوا علامة على متوازيات الأضلاع بما يتوافق مع جميع حدودها، ودعوا المسطرة تنطبق على اثنين، أو ربما أكثر، من متوازيات الأضلاع هذه، بحيث يكون أحدهما هو الأدنى في العمود الأسفل عند AB، يلامس الآخر المسطرة باتجاه اليمين؛ وكل الباقي الذي لا يمس المسطرة يقع فوقها. ثم اختاروا تلك الحدود من المعادلة التي يتم تمثيلها بواسطة متوازيات الأضلاع التي تمس المسطرة.



لسبب ما يضع نيوتن وحيد الحد $x^i y^j$ على المحور العمودي و y^j على المحور الأفقي.



لذلك، في حالته هذه، تم اختيار المعامل α ليكون مساوياً لـ $1/2$ (ميل المستقيم DE) ويتم اختيار وحيدات الحد الثلاثة المهجنة x^3 و x^2y^2 و y^6 . بالفعل، بالنسبة إلى $\alpha = 1/2$ ، تصبح المعادلة، بعد الترتيب حسب القوى المتزايدة لـ x :

$$(u^6 - 7u^2 + 6)x^3 - 5u^5x^{7/2} + x^4 + u^4x^5 = 0.$$

لذلك فإننا مضطرون إلى اختيار u حلاً للمعادلة

$$u^6 - 7u^2 + 6 = 0$$

التي تحتوي على ثلاثة وحيدات الحد لأن المسطرة تلامس ثلاث نجوم. هناك ستة حلول



$$.u = \pm\sqrt{-3}, u = \pm\sqrt{2}, u = \pm 1$$

يبدو أن نيوتن يتجاهل الحلين التخيليين الأخيرين. قد يكون هو معنيا بالحلول الحقيقية فقط ولكن حتى لو كان هذا هو الحال، فهذا خطأ، كما سنرى لاحقاً في هذا الجزء. ثم يختار الحل الأول. يمكنه كتابة $y = \sqrt{x} + p$ ، كما في طريقته مع الأعداد العادية. ثم يكفي "الاستمر طالما كانت الرغبة في ذلك".

ومع ذلك، ومن دون أي تفسير، يتخلى نيوتن فجأة عن مثاله الأول وينتقل إلى حالات عديدة أخرى، "موضحاً كيف تعمل طريقته في الممارسة العملية".

اسمحوا لنا أن نوضح كيفية متابعة مثال نيوتن الأول. من أجل التبسيط، نقوم بتغيير عرضه قليلاً.

بدلاً من تحسين الحل التقريبي الأول $y = \sqrt{x}$ بواسطة مجهول p ، لنضع

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = x_1(1 + y_1).$$

نعوض بهذه القيم في المعادلة الأصلية ونختصر على x_1^6 لنجد

$$\begin{aligned} -5x_1 + x_1^2 + x_1^4 - 8y_1 - 25x_1y_1 + 4x_1^4y_1 \\ + 8y_1^2 - 50x_1y_1^2 + 6x_1^4y_1^2 + 20y_1^3 \\ - 50x_1y_1^3 + 4x_1^4y_1^3 + 15y_1^4 - 25x_1y_1^4 \\ + x_1^4y_1^4 + 6y_1^5 - 5x_1y_1^5 + y_1^6 = 0. \end{aligned}$$

في هذه المعادلة الجديدة، معامل x_1 و y_1 ليسا منعدمين. إذن، فإن مسطرة نيوتن تمر الآن عبر $(0,1)$ و $(1,0)$. هذه طريقة أخرى للقول إن المعادلة الجديدة ليست مفردة في المبدأ. لذا فإن الحدود المهجنة خطية

$$-5x_1 - 8y_1$$

الذي يستلزم

$$y_1 \approx -\frac{5}{8}x_1.$$

لمواصلة العملية نضع:

$$x_1 = x_2 \quad ; \quad y_1 = -\frac{8}{5}x_2(1 + y_2)$$

في 24 أكتوبر 1676، أرسل نيوتن خطاباً إلى لايبنيز، "واصفاً" مساهمته في حساب التفاضل والتكامل. في نهاية الرسالة، يكتب: "[...] المشكلات العكسية للمماسات في حدود قوتنا، و الأخرى أكثر صعوبة من هذه، ولحلها أنا استخدمت طريقة ذات شقين، جزء منها أكثر إيقاظاً، الآخر أكثر عمومية. في الحاضر، اعتقدت أنه من المناسب تسجيل كليهما في حروف منقولة"... ثم هو يخفي طريقته في الجنس الناقص:

```
5accd10e fffh11i4l3m9n6oqq
r8s11t9y3x: 11ab3cdd10eg1
0ill4m7n6o3p3q6r5s11t8vx,
3ac4egh5i4l4m5n8oq4r3s6t4v,
aaddceceijmmnnooprsss
sssttuu.
```

لايبنيز المسكين! لا بد أنه كان عليه أن يكافح للعثور على معنى الجنس الناقص. القارئ المسكين! حتى لو أعطيت الحل، فإنه تتحتم عليه (L) الترجمة من اللاتينية إلى لغته (L) الخاصة، وبعد ذلك سوف يفهم أن المحتوى ليس واضحاً بما فيه الكفاية!

"Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis, as eruendos terminos assumptae seriei".

وهكذا، يمكننا إيجاد نشر لـ y باعتباره حاصل ضرب لـ \sqrt{x} ولتسلسلة بقوى صحيحة لـ x . بمساعدة ماثماتيكا (Mathematica)، يجد حاسوبي

$$y(x) = x^{1/2} - 5.2^{-3}x + 79.2^{-5}x^{3/2} - 14185.2^{-10}x^2 \\ + 3118083.2^{-15}x^{5/2} - 189696965.2^{-18}x^3 \\ + 24625187405.2^{-22}x^{7/2} - 1670815928565.2^{-25}x^4 + \dots$$

بالنسبة إلى الحل الآخر $u = \sqrt{2}$ ، نفس الحاسوب يدعي أن

$$y(x) = \sqrt{2}x^{1/2} + 2x - 13\sqrt{2}.2^{-2}5^{-4}x^{3/2} + 3825^{-2}x^2 \\ - 267229\sqrt{2}.2^{-5}5^{-3}x^{5/2} + 903813.2^{-15}5^{-4}x^3 \\ - 1661176381\sqrt{2}.2^{-7}5^{-5}x^{7/2} - 777992628.5^{-6}x^4 + \dots$$

تعليق أخير على دوافع نيوتن. لما كان قد "أثبت" أن أي "دالة" $y(x)$ معرفة بعلاقة ضمنية $P(x, y) = 0$ يمكن نشرها كتسلسلة قوى لـ x (على حساب استخدام أساس ناطقة) ونظراً إلى أنه، بالطبع، يعرف جيداً مشتق أي قوة x^α ودالتها الأصلية، فيمكنه استخدام تقنيته لحساب المشتقات والدوال الأصلية لأي متسلسلة. بعبارة أخرى، هو قادر على حساب المشتق والدالة الأصلية "لأي" دالة. تم تخصيص بقية *De methodis serierum et fluxionum* للعديد من تطبيقات هذه الطريقة.

خطأ نيوتن؟

إنه لأمر مدهش أن ندرك أن نيوتن قد فاته جذر للمعادلة

$$u^6 - 7u^2 + 6 = 0.$$

قد يظن المرء أنه اعتقد أن الجذور التخيلية $\pm\sqrt{-3}$ ستؤدي إلى حلول تخيلية لـ $y(x)$. لكن الأمر ليس كذلك واعتقد أن هذا خطأ بالفعل.

اكتشاف خطأ في 2016 في ورقة مهمة كتبها نيوتن حوالي عام 1669 هي تجربة مثيرة للاهتمام. بالنظر إلى المخطوطة الأصلية، نرى أنه كان على نيوتن إصلاح خطأ فادح ولصق قطعة من الورق أعلى الصفحة الأصلية. أظن أن مكتبة كلية ترينيتي لن توافق على نزع المخطوطة الثمينة لمعرفة ما هو تحتها. يجب على المرء استخدام أشعة X.



نيوتن على وجه الدقة لحظة الخطأ؟
(تقدير لـ فوتليب).

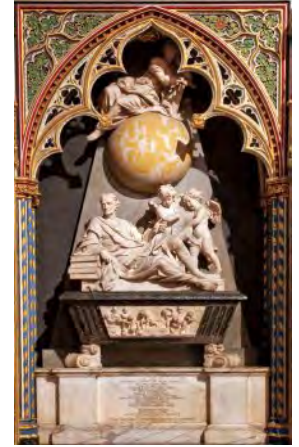
$$y(x) = -3^{1/2}(-x)^{1/2} - 9 \cdot 2^{-3}(-x) - 721 \cdot 2^{-6} 5^{-1} 3^{-1/2}(-x)^{3/2} \\ - 36543 \cdot 2^{-10} 5^{-2}(-x)^2 - 27986569 \cdot 2^{-15} 3^{-3/2} 5^{-3}(-x)^{5/2} \\ - 96025589 \cdot 2^{-18} 5^{-4}(-x)^3 + 169264391911 \cdot 2^{-22} \\ 3^{-5/2} 5^{-5}(-x)^{7/2} + 1398151100829 \cdot 2^{-25} 5^{-6}(-x)^4 + \dots$$

قد يتساءل المرء لماذا وجدنا ثلاثة حلول وليس ستة حيث أن للمعادلة

$$u^6 - 7u^2 + 6 = 0$$

ستة حلول بالفعل. هذا هو ببساطة لأن الجذور المتناظرة تؤدي إلى نفس الحل. لا تنسوا أن نيوتن يعتبر \sqrt{x} دالة ذات قيمتين، بحيث يكون بالنسبة إليه \sqrt{x} و $-\sqrt{x}$ "نفس الشيء". أوافق على أن الكتابة $\sqrt{x} = -\sqrt{x}$ قد تؤدي إلى تناقضات، ولكن ليس تحت قلم نيوتن. من الحكمة أن نعلم تلاميذنا أن \sqrt{x} هو الجذر الموجب لـ x من أجل x حقيقي وموجب، واختيار تحديد رئيسي بالنسبة إلى $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. في المصطلحات الحديثة، المنحنيان الموسطان (t^2, t) و $(t^2, -t)$ هما نفس المنحني، بتوسيطين مختلفين.

ما لم يثبتته نيوتن



نصب نيوتن التذكاري في Westminster Abbey.



يده اليمنى على كتفه الرئيسية الأربعة.



اليد اليسرى مشيرة إلى اثنين من الملائكة يعرضان... متسلسلة ذات الحدين. ●

لم يكن تعريف "التقارب" تحت تصرف نيوتن. ومع ذلك، تشير حساباته العددية إلى أن متسلسلاته متقاربة بالفعل، بل إنه يستخدم مصطلح المتقاربة. لكي نكون صادقين، يمكن أن نقول إنه يظهر فقط أن متسلسلاته تقدم نشورا مقارنة. في الممارسة العملية، فإن المتسلسلة

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \dots$$

(حيث $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ هي أساس ناطقة) هي مقارنة لدالة $f(x)$ إذا كان من أجل كل $1 \leq k$

$$f(x) - \sum_{i=1}^k a_i x^{\alpha_i} = o(x^{\alpha_k}).$$

هذا لا يعني أن $f_k(x) = \sum_{i=1}^k a_i x^{\alpha_i}$ تتقارب نحو f ، ولكنه كثيراً ما يكون مفيداً، وأحياناً أكثر فائدة، من التقارب المعتاد.

جانب آخر لم يناقشه وهو يتعلق بطبيعة الأساس الناطقة التي تظهر في متسلسلته. في كل خطوة، يظهر عدد ناطق جديد وليس من الواضح أن متتالية الأساس هذه تتقارب إلى اللامنتهي.

والأقل وضوحًا هو حقيقة أن جميع المقامات محدودة. ومع ذلك، لاحظ نيوتن أن طريقته لا تقتصر على المعادلات كثيرة الحدود $P(x, y) = 0$ ولكنها تعمل بشكل مثالي مع "المعادلات بعدد غير منته من الحدود"

(aequationes numero terminorum infinitas)

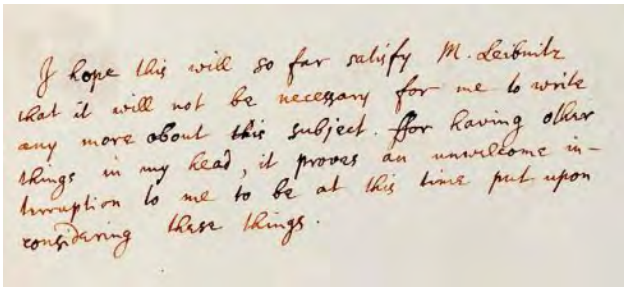
من الشكل $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$ (مع $a_{00} = 0$)، متضمنة ما يسمى اليوم بالدوال التحليلية.

لاختتام هذا الفصل، هيا بنا لنلقي نظرة على منحنى نيوتن الأصلي

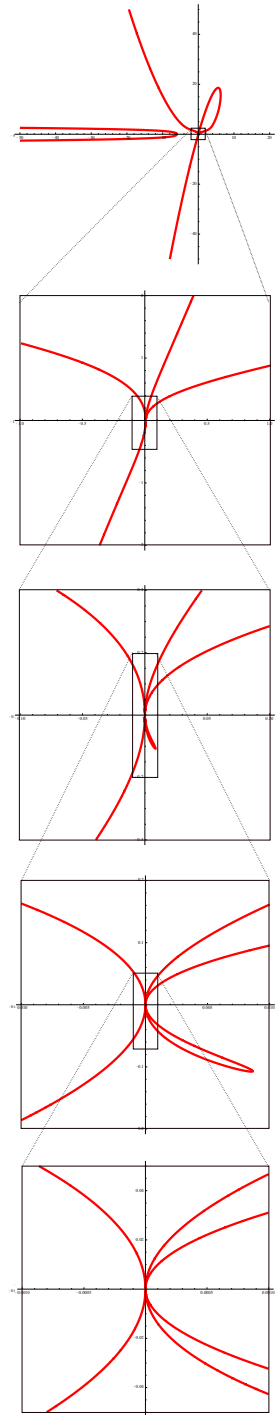
$$P(x, y) = y^6 - 5xy^5 + x^3y^4 - 7x^2y^2 + 6x^3 + x^4 = 0.$$

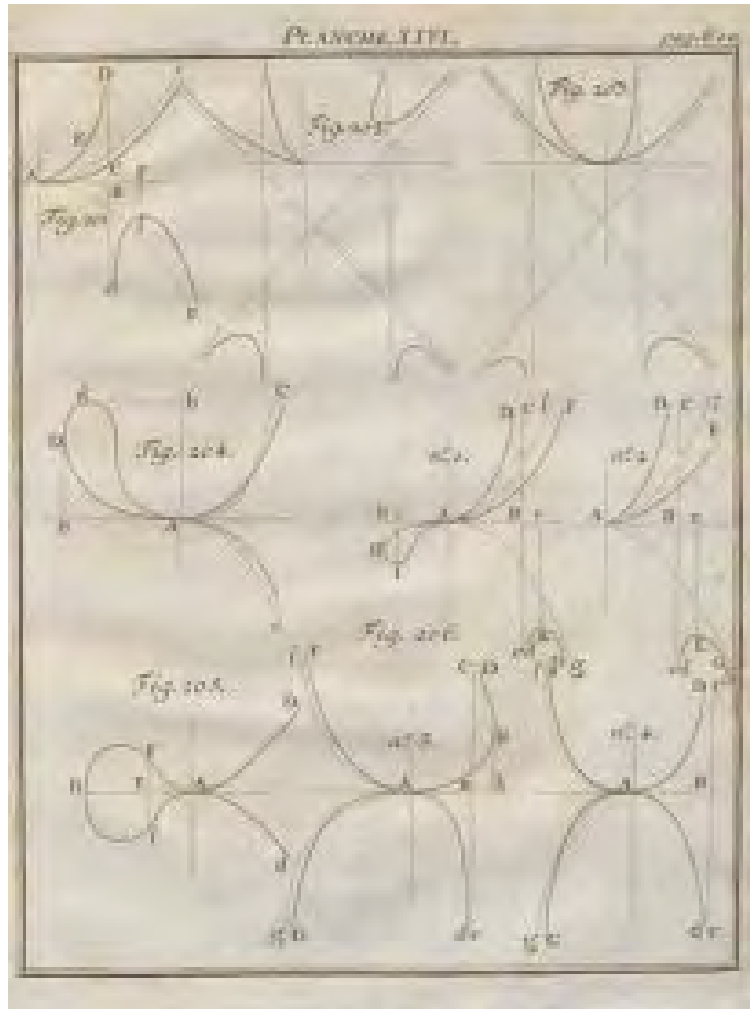
إذا طلبت من حاسوبي أن يرسم هذا المنحنى في المستطيل $[-50, +50] \times [-50, +20]$ ، أحصل على الرسم الأول في الهامش. قد يبدو هذا مفاجئًا لأننا نرى فرعين فقط في جوار المبدأ. دعونا نكبر وننظر في مستطيل أصغر $[-1, 1] \times [-2, 2]$ (الرسم الثاني)، يمكننا تخمين فرع آخر. تكبير أكثر في $[-1, 1] \times [-4, 4]$ (الرسم الثالث)، هذا أسهل للرؤية. الوضع المحلي واضح تمامًا في $[-0.1, 0.1] \times [-2, 2]$ (الرسم الرابع). أخيرًا، في $[-0.01, 0.01] \times [-0.05, 0.05]$ ، نرى ثلاثة فروع مقارنة لـ $\pm\sqrt{x}$ ، $\pm\sqrt{2x}$ ، $\pm\sqrt{-3x}$ كما تنبأ نيوتن (إلا أنه نسي الثالث، بالنسبة إلى $x < 0$).

كثير الحدود $P(x, y)$ أولي: لا يمكن تحليله بشكل غير تافه إلى جداء لاثنتين من كثيرات الحدود. ومع ذلك، كتسلسلة قوى بالنسبة إلى x ، y متقاربة في جوار المبدأ، فإنه يمكن تحليله إلى جداء ثلاثة عوامل، مقابلة للفروع الثلاثة.



عندما طلب نيوتن من أولدنبورق (Oldenbourg) إعادة توجيه رسالته *Epistola Posterior* إلى لايبنيذ، أضاف هذه الملاحظة. نعم، كان لديه بالفعل أشياء أخرى في رأسه.





• لوحة من كتاب كرامر حول المنحنيات.

بعض من الجبر الشكلي

سيكون الجبر في هذا الفصل "شكلياً" لأننا سنعتبر المتسلسلات الشكلية.

إيجاد حل واحد

اسمحوا لي أن أكرر حجج نيوتن، معبراً عنها بمصطلحات جبرية أكثر حداثة. إن عزو كل هذا إلى نيوتن يتطلب خيالاً واستنباطاً لا حصر لها. سوف أؤكد مع ذلك على مساهمة مهمة من كرامر. عادةً ما يُنسب جزء كبير مما يأتي إلى بُويزُو، لكن هذا سيتطلب على الأقل قدرًا كبيرًا من الاستقراء. سوف أصف مساهمة بُويزُو في الوقت المناسب. هناك كتب ممتازة في هذا الموضوع. أوصي بشكل خاص بـ ²⁸ والكلمة ²⁹ و ³⁰ وكاساس-ألپيرو ³¹.

ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً مميزته صفر. المثال الرئيسي الذي يدور في ذهني هو بالطبع الحقل \mathbf{C} للأعداد المركبة.

بعض الرموز،

– $K[x]$ هي حلقة كثيرات الحدود لـ x والتي معاملاتها في K .

– $K(x)$ هو حقل الدوال الناطقة لـ x والتي معاملاتها في K . هذا هو حقل حاصل القسمة لـ $K[x]$.

– $K[[x]]$ هي حلقة المتسلسلات الشكلية بـ x : عبارات من الشكل $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

حيث a_i تنتمي إلى K ، دون أي إشارة إلى مسألة التقارب.

²⁸ R. J. Walker. *Algebraic curves*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. Reprint of the 1950 edition.

²⁹ E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.

³⁰ C. T. C. Wall. *Singular points of plane curves*, volume 63 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

³¹ E. Casas-Alvero. *Singularities of plane curves*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1 edition, 2000.

نحصل على معادلة كثيرة الحدود في u :

$$p(u) = \sum_{\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0} a_{ij} u^j.$$

نظرًا إلى أن K مغلق جبريًا، فإن هناك على الأقل حلا غير منعدم u_0 . ثم نعود إلى المعادلة الأصلية $F_0(x_0, y_0) = 0$ ، ونستبدل $x_1^{\alpha_0}$ بـ x_0 و $u_0 x_1^{\beta_0} (1 + y_1)$ بـ y_0 . نتنج عن هذا متسلسلة شكلية جديدة بـ (x_1, y_1) والتي، وفق إنشائها، قابلة للقسمة على $x_1^{\gamma_0}$. بالقسمة على $x_1^{\gamma_0}$ نحصل

$$F_1(x_1, y_1) = 0$$

و العملية يمكن أن تستمر "إلى ما نريد" (بكلمات نيوتن)، منتجة متتالية من

المعادلات $F_k(x_k, y_k) = 0$ ($k \geq 1$) والأعداد الصحيحة $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$.

خاصية واحدة مهمة مفقودة ولم يناقشها نيوتن. علينا أن نبيّن أنه بعد عدد منته من الخطوات، تكون المعاملات a_k تساوي دائمًا 1، ما يعني أن ميول جميع المستقيمت الحاملة هي مقلوب أعداد صحيحة وليست فقط أعدادا ناطقة. هذا مهم لأن كل خطوة تتضمن إدخال جذر $x_{k+1} = x_k^{1/\alpha_k}$ وسنقع في مشكلة إذا اضطررنا إلى القيام بذلك عددا غير منته من المرات.

تم تحليل هذا بالتفصيل في الفصل السابع من كتاب كرامر الممتاز "[Introduction](#)."

³² *à l'analyse des lignes courbes algébriques* الذي نُشر في عام 1750.

يعطي المؤلف الفضل الكامل لنيوتن ولكنه يوضح أن:

La vraie Méthode des Séries est fondée sur le Parallélogramme de Mr. Newton, invention excellente, mais dont l'Auteur n'a pas donné la Démonstration, dont il semble même n'avoir pas senti tout le prix.

تعريف. إذا كانت F متسلسلة قوى شكلية في $K[[x, y]]$ لا تقبل القسمة على x ، فإن التعددية، المشار إليها بـ $mult(F)$ ، هي تقويم $F(0, y)$ كمتسلسلة في y . هذا أيضًا هو أصغر ارتفاع لنقطة في مضلع نيوتن لـ F على المحور العمودي.

لاحظوا أنه من خلال التحذب، يتقاطع أي مستقيم حامل مع المحور z أسفل $mult(F)$. على وجه الخصوص درجة كثير الحدود $p(u)$ هي على الأكثر $mult(F)$.

توطئة. $mult(F_1) \leq mult(F)$.

الخطوة الأولى. في F_0 يتم الاستبدال

$$x_0 \rightarrow x_1^2; y_0 \rightarrow x_1(1 + y_1).$$

ثم القسمة على x_1^7 . نحصل على

$$\begin{aligned} F_1(x_1, y_1) = & x_1 + 4y_1 + 2x_1^2 \\ & + 2x_1y_1 + 18y_1^2 + 6x_1^2y_1 + x_1y_1^2 \\ & + 34y_1^3 + 10x_1^2y_1^2 + 35y_1^4 + \\ & 10x_1^2y_1^3 + 21y_1^5 + 5x_1^2y_1^4 + 7y_1^6 + \\ & 3x_1^7 + x_1^2y_1^5 + y_1^7 + x_1^8 + 10x_1^7y_1 \\ & + x_1^8y_1 + 21x_1^7y_1^2 + 24x_1^7y_1^3 \\ & + 16x_1^7y_1^4 + 6x_1^7y_1^5 + x_1^7y_1^6 \end{aligned}$$

الذي له حد خطي غير تافه في y_1 بحيث يمكن نشر y_1 على شكل متسلسلة قوى في x_1 .

³² G. Cramer. *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*. Frères Cramer et Cl. Philibert, 1750.



فابرييل كرامر (1704-1752). يجتوي كتابه في المنحنيات، إلى جانب التحليل الجاد لمتسلسلة نيوتن، نظريّة في المعادلات الخطية في n مجهول (قاعدة كرامر الشهيرة) وعناصر من نظرية الإقصاء. أنا أحب عنوان الملحق 1: "De l'évanouissement des inconnues" الذي يبدو أكثر إغراء من "إقصاء"

حسب التعريف

$$F_1(x_1, y_1) = x_1^{-\gamma} \sum_{i,j} a_{ij} x_1^{\alpha_0 i + \beta_0 j} u_0^j (1 + y_1)^j.$$

من أجل الحصول على $mult(F_1)$ ، نضع $x_1 = 0$ وننظر إلى تقويم $p(u_0(1 + y_1))$ ككثير حدود في y_1

$$mult(F_1) \leq \deg(p) \leq mult(F).$$

□

لذلك، في ظل خوارزمية نيوتن، متتالية التعدديات $mult(F_k)$ غير متزايدة. هذه المتباينة تامة ما لم يكن لـ F_0 شكل خاص جدا نقوم بتحليله الآن.

تكون المساواة إذا وفقط إذا كان $p(u_0(1 + y_1))$ يحتوي على وحيد حد واحد درجته $mult(F_k)$. هذا يعني على وجه الخصوص أن درجة p تساوي $mult(F_k)$.

على نحو مختلف، يجب أن يكون الجذر $y_1 = 0$ لـ $p(u_0(1 + y_1)) = 0$ مضاعفا لترتيب $mult(F_k)$. هذا يعني أن p من الشكل

$$p(u) = C(u - u_0)^{mult(F)}.$$

كثير الحدود هذا له معاملات غير منعدمة من كل درجة من 0 إلى $mult(F_k)$. ومن ثم، فإن قطعة حد مضلع نيوتن الذي اخترناها تحتوي على نقط من أجل كل قيمة j من $j = 0$ إلى $j = mult(F)$. هذا يعني أن لمضلع نيوتن جانبا واحدا فقط (الأخر من مقطع المحورين) وأن $a_0 = 1$. لنلخص.



مقتطف من الإثبات لكرامر

(صفحة 200).

Et dès-lors la Série devient régulière, parceque toutes les déterminatrices suivantes partant du point T, on ne tombe plus dans des équations qui ayent plusieurs racines. Tous les termes suivants de la Série peuvent même se calculer avec plus de facilité par la Méthode qu'on va expliquer.

على طول الخوارزمية، التعدديات $mult(F_k)$ غير متزايدة وبالتالي يجب أن تكون ثابتة بعد مرور وقت ما. في هذه المرحلة، يكون لجميع مضلعات نيوتن $a_k = 1$ (علاوة على ذلك، لها بنية خاصة جدًا تم وصفها للتو). لدينا

$$x_0 = x_1^{\alpha_0} = x_2^{\alpha_0 \alpha_1} = \dots = x_k^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} = \dots$$

و

$$y_0 = u_0 x_1^{\beta_1} (1 + y_1) = u_0 x_1^{\beta_1} (1 + u_1 x_2^{\beta_2} (1 + y_2)) = \dots$$

نظرًا إلى أن الـ a_k تساوي 1 من أجل القيم الكبرى لـ k ، يمكننا الإشارة بـ m ليكون حاصل ضرب كل المعاملات a_k ونسمي t قيمة x_k من أجل القيم الكبيرة لـ k . لدينا $x_0 = t^m$ وبشكل عام، كل x_k هو قوة لـ t مع أس صحيح موجب. العلاقة الاستقرائية

$$y_k = u_k x_{k+1}^{\beta_{k+1}} (1 + y_{k+1})$$

تعرف متتالية من كثيرات الحدود $y_k(t)$ بالمتغير t . هذه المتتالية "تتقارب" نحو متسلسلة نهاية $f(t) \in K[[t]]$ ، هذا يعني أن تقويم $f(t) - y_k(t)$ يؤدي إلى الا منتهي عندما يؤول k إلى الا منتهي.

لكي يكتمل الإثبات، يجب أن نتحقق من أن هذا هو بالفعل حل لمشكلتنا، أي أن $F(t^m, f(t))$ ينعدم تطابقًا. نشجع القارئ على التحقق من ذلك. على أية حال، كان للخوارزمية هدف واحد فقط: إيجاد حل.

هذا إثبات لمبرهنة نيوتن: كل معادلة من الشكل $F(x, y) = 0$ تقبل حلا، بمعنى محدد بشكل صحيح. □

المُعْلَقة الجبرية

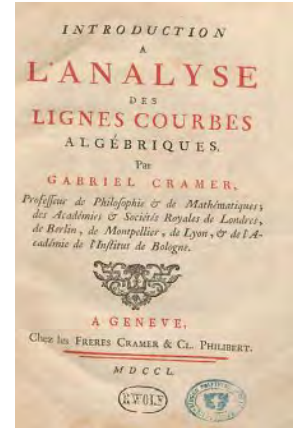
حان الوقت لإعطاء تعريف دقيق لمتسلسلة بأساس ناطقة. يُرمز بـ $K[[x]][x^{-1}]$ إلى حقل متسلسلات لوزن الشكلية، أي العبارات الشكلية من الشكل $\sum_{i \geq i_0} a_i x^i$ (حيث

i_0 قد يكون عددًا صحيحًا سالبًا). هذا هو حقل حاصل القسمة للحلقة $K[[x]]$ بشكل عام، إذا كان m عددًا صحيحًا موجبًا غير منعدم، فإننا نشير بـ $K[[x^{1/m}]] [x^{-1/m}]$ إلى حقل متسلسلات لوزن الشكلية بالمتغير $x^{1/m}$: العبارات

الشكلية من الشكل $\sum_{i \geq i_0} a_i x^{i/m}$ (حيث i_0 قد يكون عددًا صحيحًا سالبًا). الحقل

الجزئي الذي يتكون من المتسلسلات التي يكون فيها $a_i = 0$ عندما لا تكون i قابلة للقسمة على m (متشاكل تقابليًا) بشكل قانوني مع $K[[x]][x^{-1}]$.

بمجرد يمكننا رؤية $K[[x^{1/m}]] [x^{-1/m}]$ كحقل امتداد لـ $K[[x]][x^{-1}]$. من السهل وصف زمرة قائلوا لهذا الامتداد: فهي تتكون من الجذور الـ m ية للعدد واحد.



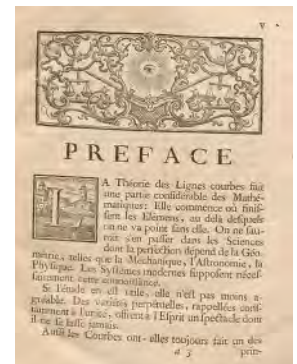
نعتبر المعادلة الجبرية \bar{F}_2 للحل F_2 ذي عنصرين. جربوا الخوارزمية في كثير الحدود

$$F = y^2 + x^2 y + x^2$$

مع المعاملات في \bar{F}_2 وبينوا أننا نحصل على الحل

$$y = x \left(1 + \sum_{k \geq 1} x^{-\frac{1}{2^k}} \right).$$

هذه ليست من متسلسلات بوزرو لأن الأساس $1 - 2^{-k}$ ليس لها قاسم مشترك ولا حتى تؤول إلى اللامنتهي. ماذا حدث؟



"Un spectacle dont on ne se lasse jamais".

"عرض لا نمل منه أبدًا".

عمل مثل هذا الجذر ω على

$$\sum_{i \geq i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$$

يُنتج

$$\sum_{i \geq i_0}^{\infty} \omega^i a_i x^{i/m} .$$

هذا امتداد لـ $K[[x^{1/m}]]$ عناصر $K[[x^{1/m}]]$ والتي هي لا متغيرة في إطار عمل زمرة $K[[x]][[x^{-1}]]$ فالأولى موجودة في $K[[x]][[x^{-1}]]$.

بنفس الطريقة إذا كان m_1 يقسم m_2 ، فإن الحقل $K[[x^{1/m_1}]]$ حقل جزئي من $K[[x^{1/m_2}]]$. يُرمز إلى النهاية المباشرة لجميع امتدادات $K[[x]][[x^{-1}]]$ هذه بـ $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$.

هذا هو حقل متسلسلات پويزوّ، متسلسلات ذات أساس ناطقة، لها قاسم مشترك. في الواقع، إن متسلسلة پويزوّ هي عبارة شكلية من الصيغة $\sum_{i \geq i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$ من أجل عدد صحيح موجب غير منعدم m . تشكل متسلسلات پويزوّ، حيث $0 \leq i_0$ ، حلقة، نشير إليها بـ $K[[x^*]]$.

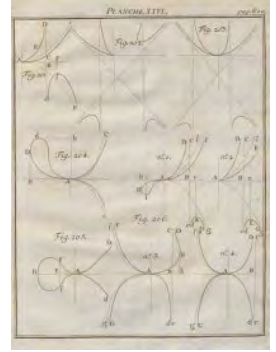
مبرهنة (نيوتن - كرامر). حقل متسلسلات پويزوّ $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$ مغلق جبريًا. هذا هو المغلقة الجبرية لحقل متسلسلات لوزن $K[[x]][[x^{-1}]]$.

هذه المبرهنة ليست سوى إعادة صياغة للمبرهنة الرئيسية من هذا الفصل. حقيقة أن $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$ امتداد جبري لـ $K[[x]][[x^{-1}]]$ واضحة. بالفعل، تقع أي متسلسلة من متسلسلات پويزوّ في $K[[x^{1/m}]][[x^{-1/m}]]$ ما، وبالتالي فهي جبرية على $K[[x]][[x^{-1}]]$.

لنعتبر معادلة كثيرة الحدود (غير ثابتة) ذات معاملات في $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$ ومتغير y . واضعين $\bar{x} = x^{1/m}$ من أجل m ما، قابل للقسمه عاليًا وضرب جميع المعاملات في قوة عالية لـ \bar{x} يمكننا أن نفترض أن معاملات كثير الحدود الذي لدينا هي في $K[[\bar{x}]]$. لذلك فإن معادلتنا من الشكل $F(\bar{x}, y) = 0$ حيث F هي متسلسلة قوى شكلية.

نحن نعلم أن لمثل هذه المعادلة حلاً كتسلسلة بـ $\bar{x}^{-1/\bar{m}}$ من أجل \bar{m} ما، وهو على وجه الخصوص في $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$. لذلك، فمن أجل أي كثير حدود غير ثابت بمعاملات في $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$ وجدنا جذرًا في $K[[x^*]][[x^{*-1}]]$.

□



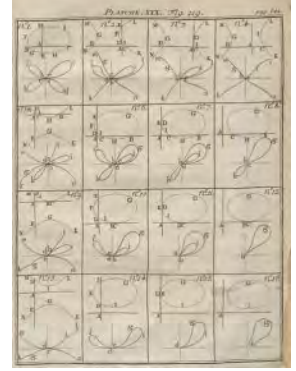
إيجاد كل الحلول

إذا فكرنا في $F(x, y) = 0$ ، كمعادلة حيث يكون المجهول متسلسلة $y(x)$ من $K[[x^*]][x^{*-1}]$ ، يمكننا المحاولة، كما نفعل مع معادلة كثيرة الحدود معتادة، لتحليل F إلى جداء عوامل خطية في المغلقة الجبرية

$$F = A(x, y)(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$$

حيث $A(0, 0) \neq 0$ والـ n حلا $f_i(x)$ تنتمي إلى $K[[x^*]][x^{*-1}]$. سيكون هذا واضحًا لو كانت F كثيرة حدود بالمتغير y ، لكنها مجرد متسلسلة شكلية. ليس من الواضح حتى ما إذا كان لمعادلتنا عددٌ منته من الحلول.

في واقع الأمر، كان نيوتن محققًا ومعادلاتنا قريبة جدًا بالفعل من كونها معادلات متعددة الحدود "معيارية"، كما أشرح الآن. اسمحو لي أن أبدأ ببعض الملاحظات الأولية.



توطئة. نفترض أن متسلسلة شكلية $y = f(x)$ ، $f(x) \in K[[x]]$ ، هي حل للمعادلة $F(x, y) = 0$ ، حيث تنتمي F إلى $K[[x, y]]$. إذن F قابلة للتقسمة على $y - f(x)$ في $K[[x, y]]$.

هذا واضح إذا كان $f(x) = 0$. الآن التحويل الشكلي

$$(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$$

يؤدي إلى أوطوتشاكل (تشاكل ذاتي) لـ $K[[x, y]]$ يحوّل y إلى $y - f(x)$. □

توطئة. من أجل f في $K[[x^*]]$ ، نعزف

$$\bar{f}(x, y) = (y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_m(x))$$

حيث f_1, \dots, f_m هي مرافقات فالوا لـ f . إذن $\bar{f}(x, y)$ تنتمي إلى $K[[x, y]]$.

هذا واضح، حيث أن $\bar{f}(x, y)$ كثير الحدود في y معاملاته صامدة تحت زمرة قالوا. لاحظوا أن كثير الحدود هذا هو كثير الحدود الأصغري لـ f من $K[[x^*]][x^{*-1}]$ باعتباره التمديد الجبري لـ $K[[x]][x^{-1}]$. □

توطئة. نفترض أن متسلسلة بوزو الشكلية $y = f(x)$ من $K[[x^*]]$ ، هي حل للمعادلة $F(x, y) = 0$ حيث F تنتمي إلى $K[[x, y]]$. إذن فالمتسلسلة المرتبطة بها $\bar{f}(x, y)$ في $K[[x, y]]$ تقسم $F(x, y)$ في الحلقة $K[[x, y]]$.

نظرا إلى أن f حل والمعادلة لا متغيرة تحت زمرة قالوا، فإن جميع المرافقات هي أيضًا حلول. نبيّن بعد ذلك، باستخدام التوطئة الأولى m مرة أن F قابلة للقسمة على $\bar{f}(x, y)$ في $K[[x^{1/m}, y]]$. الآن حاصل القسمة F/\bar{f} هو قالوا لا متغير، بحيث يكون بالفعل في $K[[x, y]]$. □

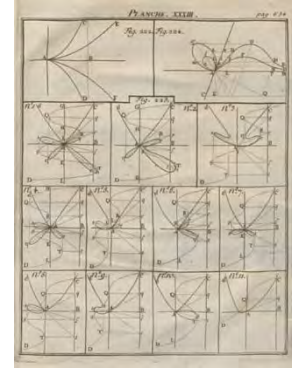
يمكننا الآن إثبات ما يسمى مبرهنة الإعداد لـ فايرشتراس (Weierstraß) للمتسلسلة الشكلية.

مبرهنة. ليكن $F(x, y)$ في $K[[x, y]]$. نفترض أن F لا يقبل القسمة على x . إذن F يمكن كتابته كجداء $A(x, y)P(x, y)$ حيث A ، P في $K[[x, y]]$ و

- $A(0, 0) \neq 0$ بحيث يكون A عنصرا قابلا للقلب.
- $P(x, y)$ كثير حدود بالنسبة إلى y .

الإثبات يتم بالاستقراء على التعددية $mult(F)$. لاحظوا أن تقويم الجداء هو مجموع التقويمات وأن $mult(F) = 0$ تعني على وجه التحديد أن $F(0, 0) \neq 0$. إذا كانت $mult(F) \geq 1$ ، نعلم أن F لديه حل واحد على الأقل $y = f(x)$ في $K[[x^*]]$ وأن F قابل للقسمة على $\bar{f}(x, y)$ من $K[[x, y]]$. تعددية حاصل القسمة أقل. □

الآن، يمكننا أن نحدد ونؤسس نتيجتين طبيعيتين تتبعان بسهولة من المبرهنة السابقة. البراهين هي نفسها كما في الحالة التقليدية لحلقات كثيرات الحدود على حقول.



مبرهنة. يمكن تحليل أي عنصر غير منعدم F من $K[[x, y]]$ كالآتي

$$F = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$$

حيث A من $K[[x, y]]$ يحقق $A(0, 0) \neq 0$ ، الـ n حلا $f_i(x)$ تنتمي إلى $K[[x^*]]$ و $0 \leq r$.

مبرهنة. الحلقة $K[[x, y]]$ هي ميدان تحليل وحيد.

العوامل غير القابلة للاختزال هي الـ \bar{f}_i من $K[[x, y]]$. نختتم هذا الفصل بتمرينين.

تمرين. تنتج خوارزمية نيوتن الحلول $y(x)$. في كل خطوة، يتعين علينا اختيار أحد المستقيمات الحاملة على حد المضلع وجذر في المعادلة كثيرة الحدود المقابلة. أثبتوا أن هذه الخوارزمية تعطي كل الحلول $f_i(x)$ للمعادلة $F(x, y) = 0$.

تمرين. لنفترض أننا اتبعنا خوارزمية نيوتن باستخدام بعض اختيارات القطع، ما أدى في النهاية إلى حل $y = f(x)$. تنتج العملية متتالية من المتسلسلات الشكلية $F_k(x_k, y_k)$. لقد أثبتنا أن التعدديات $mult(F_k)$ ل F_k تكون ثابتة في النهاية. بينوا أن هذه "التعددية النهائية" هي مجرد تعددية الجذر، أي عدد العوامل التي تساوي $(y - f(x))$ في التحليل أعلاه ل F كجاء

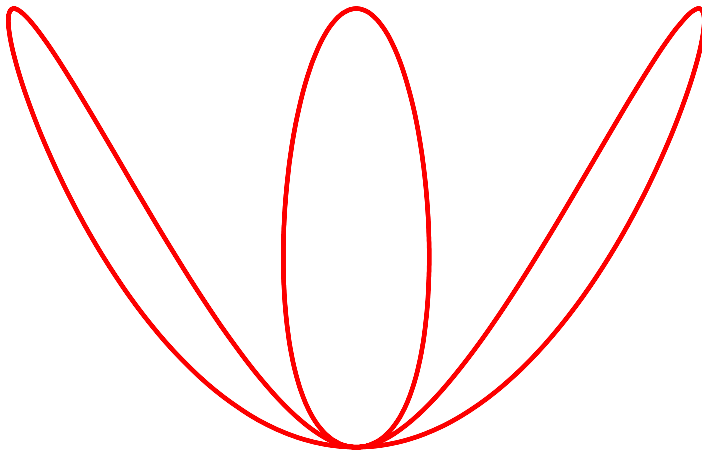
$$F = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x)).$$

يكفيينا من الجبر في الوقت الحاضر!

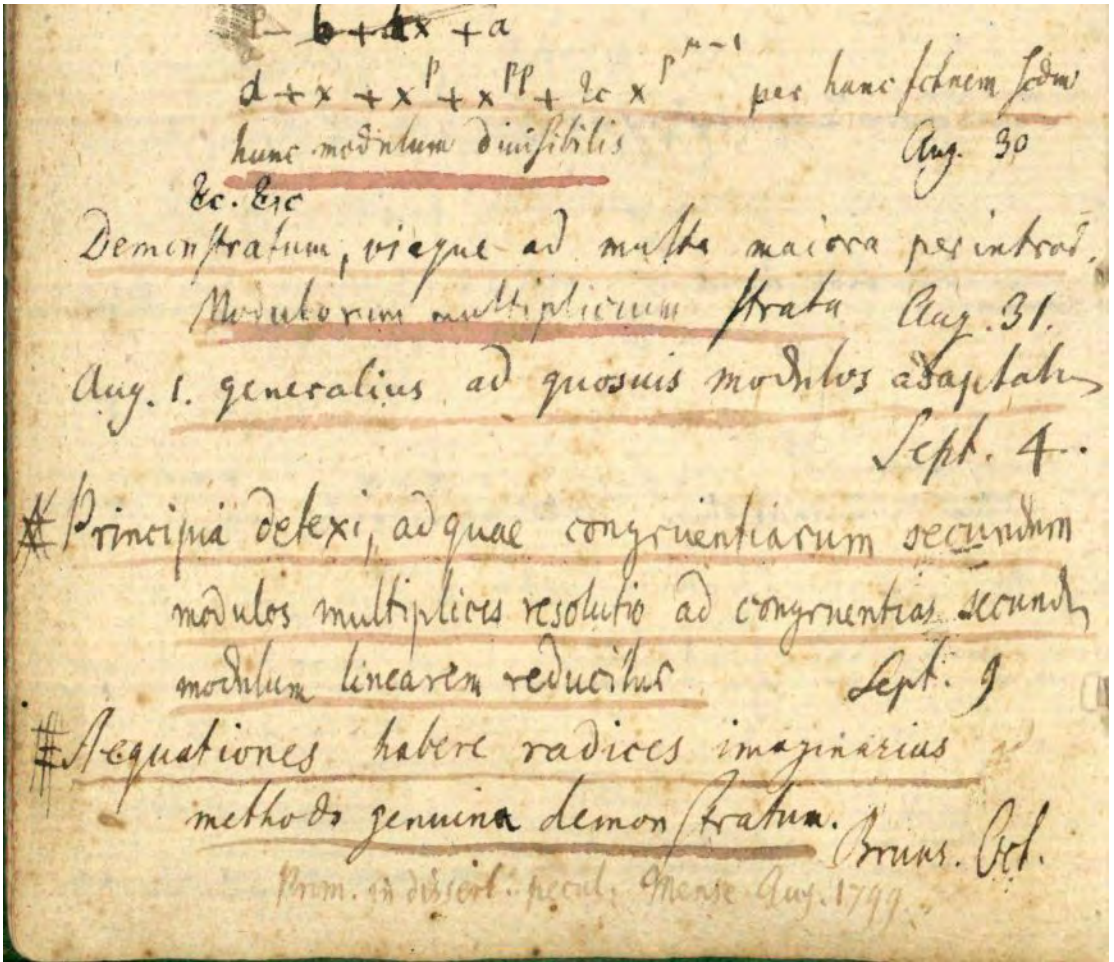
من المؤسف أن السيد نيوتن كان راضياً عن عرض اكتشافاته دون إرفاق أي براهين وأنه فضل متعة الإعجاب به على متعة التدريس.

Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre de démonstrations et qu'il ait préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire.

من مقدمة كرامر



هذا هو أحد المنحنيات السادسة التي درسها كرامر، معادلته $y^6 - (y - x^2)(y - 4x^2)^2 = 0$. النقطة المفردة لها 3 فروع. هل تستطيعون رسم هذه الفروع؟



بدءًا من عام 1796 (عندما كان عمره 19 عامًا) سجل فاوس اكتشافاته الرياضياتية في كتابه الشهير **Tagebuch**. قائمة نتائج مثيرة للإعجاب. انظروا شروح كلاين³³ و³⁴ بالنسبة إلى ترجمة إنجليزية. تتعلق هذه الصفحة بالفترة من أغسطس إلى أكتوبر 1797. الموضوع الأخير

“Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum”
يوضح إثباته لمبرهنة الجبر الأساسية. أسفل هذا السطر، بجزر مختلف، إضافة أخيرة تعلن أن هذا كان موضوع أطروحة دكتوراه:

“Prom[ulgatum] in dissert[at]ione pecul[iari] mense Aug. 1799”. ○

³³ F. Klein. **Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796-1814**. *Math. Ann.*, 57(1):1-34, 1903.

³⁴ J. J. Gray. A commentary on Gauss's mathematical diary, 1796-1814, with an English translation. *Exposition. Math.*, 2(2):97-130, 1984.

Curuam algebraicam

neque alicubi subito abrumpi posse:

فاوس حول المنحنيات الجبرية

المبرهنة الأساسية للجبر



كان كارل فريدريش فاوس يبلغ من العمر 22 عامًا عندما قدم أطروحته عام 1799. هذا **عمل رائع**³⁵ يحتوي على ما يمكن اعتباره "الإثبات" الأول لمبرهنة الجبر الأساسية.

أي كثير حدود غير ثابت ذي معاملات مركبة له جذر واحد على الأقل. بمصطلحات مختلفة قليلاً، وعدم استخدام الكلمات "مركبة" أو "تخيلية"، والتي كانت مشبوهة في ذلك الوقت، لقد أثبت أن أي كثير حدود حقيقي هو جداء عوامل من الدرجة 1 أو 2. في لغة مختلفة، يكون عنوان دكتوراهه هو:

DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM VNIVS VARIABILIS IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADVS RESOLVI POSSE

هذا ليس دليلاً وفقاً لمعايير اليوم، لكنني سأقدم تغييراً طفيفاً حول نفس الموضوع وهو مقبول تماماً من قبل رياضياتي القرن الحادي والعشرين. لم تكن المحاولة الأولى للإثبات. من بين سابقي فاوس، يمكن للمرء أن يذكر دالمبير وأويلر ولافرانج، لم يكن أي من هذه "البراهين" السابقة متيناً، حتى في ذلك الوقت، لكنني سأحاول إعادة بناء برهان دالمبير لأنه استخدم مضلع نيوتن.

طابع بريدي تذكاري لمستوي فاوس المركب.

³⁵ C. F. Gauß. *Werke*. Band III. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973. Reprint of the 1866 original.

حصل فاوس على شهادته من جامعة هيلمستيدت. كان مستشاره الرسمي يوهان فريدريش بفاف الذي قرأ الرسالة بعناية. ومع ذلك، فقد كانت الدكتوراه غيبياً: لم يكن هناك عرض شفوي. تذكر المخطوطة أنه تم الحصول على النتيجة الرئيسية في أكتوبر 1797. الترجمة الإنجليزية للأطروحة ل إرنست فاندراير متاحة على الخط.

يتعامل الجزء الأول من أطروحة فاوس مع نقد سابقه. يشرح بعناية لماذا كانت براهين دالمبير وأويلر ولاقرانج معيبة. من الصعب تخيل وضع مشابه اليوم لشاب يافع يدافع عن الدكتورا ويبدأ بتدمير منهجي لأسياد كبار ومحترمين وافتهم المنية قبل خمسة عشر عامًا فقط، أو حتى أنهم ما زالوا على قيد الحياة (كما في حالة لاقرانج). ثم، في جزء ثان، قدم فاوس إثباته. إثبات جميل، في الواقع، ولكن ليس مستثنى تمامًا من "الحقائق غير المثبتة". في لحظة حاسمة، سيتم وصفه لاحقًا، فهو يحتاج إلى وصف دقيق إلى حد ما للبنية المحلية لمنحن جبري حقيقي. ثم يؤكد دون برهان أن

حقائق غير مؤكدة لفاوس لا علاقة لها به "الحقائق البديلة" لترامب: على أي حال فهي صحيحة.

ولكن وفقًا للرياضيات العليا، فإن أي منحن جبري (أو الأجزاء الفردية لمثل هذا المنحنى الجبري إذا كان يتكون من عدة أجزاء) يعود إلى نفسه أو يمتد إلى اللامتناهي. ينتج من ذلك أن أي فرع من أي منحن جبري يدخل في فضاء محدود، يجب بالضرورة أن يخرج من هذا الفضاء في مكان ما.

"*Iam ex geometria sublimiori constat, quamvis curuam algebraicam, (sive singulas cuiusvis curuae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redientem aut vtrunque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curuae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere.*"

بعبارة أخرى، يدعي فاوس أن المنحنى الجبري لا يمكن أن يتوقف عند نقطة معينة. يتم تقديم "الإثبات" في حاشية سفلية: إنه مثال نموذجي لإثبات عن طريق التخويف:

يبدو أنه قد تم إثباته بما يكفي من اليقين ألا يمكن كسر المنحنى الجبري فجأة في أي مكان (كما يحدث، على سبيل المثال، مع المنحنى المتسامي الذي معادلته $y = 1/\log x$ ولا يضيع، إذا جاز التعبير، في نقطة ما بعد العديد من اللفات غير المنتهية (مثل اللولب اللوفاريتي). على حد علمي، لم يثر أحد أي شكوك حول هذا الموضوع. ومع ذلك، إذا طلب أحد ذلك، فسألتزم بتقديم إثبات لا يقبل الشك، في مناسبة أخرى.

"*Satis bene certe demonstratum esse videtur, curuam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (vti e. g. euenit in curua transscendente, cuius aequatio $y = 1 \sim \log x$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (vt spiralis logarithmica), quantumque scio nemo dubium contra rem mouit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam.*"

"لم يثر أحد شكوكا وسببته في مناسبة أخرى" ☺! في الواقع، هو لم يثبت هذه الحقيقة أبدًا (على الرغم من أنه نشر لاحقًا ثلاثة براهين أخرى للمبرهنة الأساسية في الجبر، كما لو كان هو نفسه غير مقتنع). يا له من شاب مغرور (ورائع)! يعطي فاوس مثالين للمنحنيات. الأول هو الرسم البياني لـ $y = 1/\log x$ والثاني هو اللولب اللوفاريتي $r = \exp(\theta)$ في الإحداثيات القطبية.

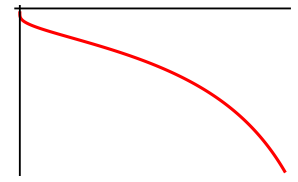
يمكن تعريف كليهما بمعادلة $F(x, y) = 0$ وكلاهما يمكن نوعاً من نقطة التوقف. إذا رسمنا قرصاً صغيراً حول هذه النقطة، فإن المنحني يدخل هذا القرص ولكنه لا يخرج منه. ادعاء فاوس (الصحيح) هو أن هذا يرجع إلى الطبيعة المتسامية لهذه المنحنيات وأن هذا لا يحدث للمنحنيات الجبرية التي يكون $P(x, y)$ ، بالنسبة إليها، كثير حدود.

إعادة بناء الإثبات من قبل فاوس

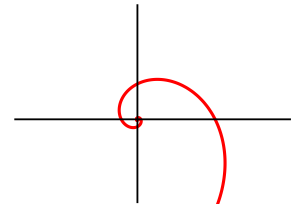
قصدي بالتأكيد ليس تحليل هذا الإثبات من وجهة نظر تاريخية. سيكون هناك الكثير للمناقشة: مفهوم الاستمرار للمنحني، والحجج الطوبولوجية، وفوق كل شيء الاستخدام الهندسي للأعداد المركبة كنقط في مستوى. أوصي بكتب دومبريس وألغاريز³⁶ وفان دبر فاردن³⁷. اسمحو لي أن أذكر فقط وجهة نظر واضحة عبر عنها فاوس، قبل أكثر من عشرين عاماً من آبل وقالوا. في ما يأتي، ما يسميه معادلة بحتة وهي معادلة من الشكل $x^n = a$.

[...] بعد الكثير من العمل الذي قام به الرياضياتيون الكبار، لم يبق سوى أمل ضئيل للغاية للتوصل إلى حل عام للمعادلات الجبرية. يبدو ربما أكثر فأكثر أن مثل هذا الحل مستحيل ومتناقض تماماً. يجب ألا يُعتبر هذا مفارقياً على الإطلاق، حيث أن ما يسمى عادةً حلاً للمعادلة ليس في الواقع سوى اختزالها إلى معادلات بحتة. لأن حل المعادلات البحتة هنا لم يتم تدريسه ولكنه مفترض؛ وإذا قمتم بالتعبير عن جذور المعادلة $x^m = H$ بواسطة $\sqrt[m]{H}$ ، فلن تكونوا قد قمتم بحلها بأي شكل من الأشكال، ولم تقوموا بأكثر مما فعلونه إذا كنتم قد ابتكرتم بعض الرموز للدلالة على جذر المعادلة $x^h + Ax^{h-1} + \dots = 0$ ووضع الجذر مساوياً لهذا.

هذه المتواضع هو اقتراح إعادة بناء حديثة للإثبات، يوضح سبب حاجة فاوس إلى بعض الفهم للطبيعة المحلية للمنحنيات الجبرية. لنفترض أن $P(z)$ كثير حدود واحد من الدرجة $1 \leq n$ بمعاملات مركبة. الفكرة الرئيسية هي التفكير في $z = x + iy$ كنقطة في المستوى و $P(x + iy)$ على أنه $p(x, y) + iq(x, y)$ ، معرفين اثنين من كثيرات الحدود الحقيقية في (x, y) . إن إثبات وجود جذر مركب لـ P يكافئ تبين أن للمنحنيين الجبريين $p(x, y) = 0$ و $q(x, y) = 0$ تقاطعاً غير خال.



المنحني $x \exp(-1/y) = 1$ (أي $y = 1/\log x$) يحتوي على نقطة نهاية في نهاية "في" $(0, 0)$.

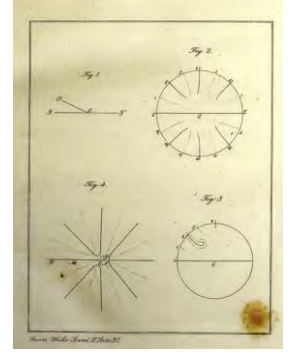


الحزون اللوغاريتمي ذو المعادلة $y - x \log \tan(x^2 + y^2) = 0$ (أي $r = \exp(-\theta)$) في الإحداثيات القطبية) يحتوي على عدد غير منته من اللفات عندما يقترب من المبدأ.

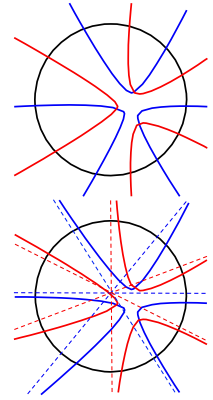
³⁶ J. Dhombres and C. Alvarez. Une histoire de l'invention mathématique : les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville. Hermann, 2013

³⁷ P. D. B. L. van der Waerden. A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1985

لاحظوا أن "الفكرة البسيطة" للتفكير في كثير الحدود كتطبيق من مستوى إلى مستوى آخر كانت فكرة جديدة في عام 1797.

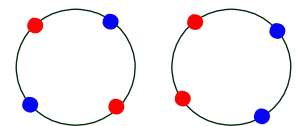


هذا هو الرسم الوحيد من أطروحة فاوس.



³⁸ J. W. Milnor. *Topology from the differential viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

³⁹ V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Reprint of the 1974 original.



مرتبطة وغير مرتبطة.

سنقوم بتحليل السلوك النوعي لهذين المنحنيين في جوار اللامنتهي. عندما يكون مقياس (أو طولية) z كبيراً، يكون $P(z)$ و z^n متكافئين، لذلك نعتبر كأول تقريب المنحنيين

$$\Re(x + iy)^n = 0 ; \Im(x + iy)^n = 0.$$

هذه المعادلات سهلة الحل: فهي تعرف الخطوط الشعاعية

$$\arg z = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (0 \leq k \leq 2n-1); \arg z = \frac{2k\pi}{2n} \quad (0 \leq k \leq 2n-1)$$

التي تتقاطع في المبدأ. تتقطع هذه الخطوط الـ $2n$ كل دائرة $|z| = R$ في $4n$ نقطة. الادعاء الأول لـ فاوس هو كما يأتي:

توطئة. عندما يكون R كبيراً بما فيه الكفاية، فإن كلا من المنحنيين الجبريين $p(x, y) = 0$ و $q(x, y) = 0$ يتقاطع مع الدائرة $|z| = R$ في $2n$ نقطة قريبة من السابقة.

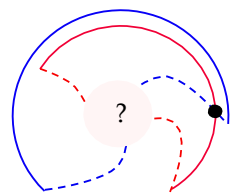
الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لـ $\frac{1}{R^n} P(R \exp(i\theta))$ كثيراً حدود مثلثان من الدرجة n بالمتغير θ وهما قريبان من $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$. لذلك فكل واحد ينعدم $2n$ مرة على الأكثر وهما ينعدمان $2n$ مرة حسب مبرهنة القيمة الوسطية. التفاصيل الأولية متروكة للقارئ. إثبات هذه النقطة من قبل فاوس تام. □

الآن يأتي الجزء الطوبولوجي من البرهان. نفترض أولاً أن المنحنيين الجبريين $p(x, y) = 0$ و $q(x, y) = 0$ ، اللذين سنسميها المنحنيين الأزرق والأحمر، أملسان. داخل القرص $|z| \leq R$ هما يتكوanan من عدد منته من الأقواس، كل منها متفاكل مع $[0, 1]$ وعدد معين من الحلقات، كل منها متفاكلة مع دائرة. يأتي هذا من تصنيف المنوعات المتراسة ذات البعد واحد (انظروا على سبيل المثال إلى ³⁸ أو ³⁹). هناك $4n$ نقطة على دائرة، زرقاء وحمرء، بألوان متبادلة. سنقول إن نقطتين (من نفس اللون) تم إقرانها إذا كانتا نقطتين حدوديتين لأحد هذه الأقواس الزرقاء أو الحمرء داخل القرص. لذا فإن مجموعتنا المكونة من $4n$ نقطة تتكون من $2n$ زوجاً.

نعتبر أربع نقط متمايزة على الدائرة، اثنتان منها ملونتان بالأحمر والنقطتان الأخريان باللون الأزرق. من وجهة النظر الطوبولوجية، هناك احتمالان. يمكن أن تكون مرتبطة أو غير مرتبطة. بالطواف حول الدائرة، نقرأ ألواناً متبادلة، مثل "أزرق، أحمر، أزرق، أحمر" في

الحالة المرتبطة، و " أزرق، أزرق، أحمر، أحمر" في الحالة غير المرتبطة. التوطئة الطوبولوجية الحاسمة والبدئية، هي الآتية:

توطئة. لتكن b_0, b_1, r_0, r_1 أربع نقط على الدائرة بحيث تكون $\{b_0, b_1\}$ و $\{r_0, r_1\}$ مرتبطين. ليكن b (على التوالي r) قوساً أملس في القرص يربط بين b_0 و b_1 (على التوالي r_0 و r_1). إذن r و b يتقاطعان بشكل غير تافه.



حقيقة أن منحنيين عرضيين مغلقين في المستوي يتقاطعان في عدد زوجي من النقط تكافئ إلى حد ما مبرهنة جوردن: "متمة منح مغلوق مغطس في المستوي لها مركبتان مترابطتان بالضبط."

بالفعل، إذا كان c_1 و c_2 منحنيين مغلقين وعرضيين، فبمكّن أولاً تعديل c_1 بشكل طفيف، دون تغيير تقاطعه مع c_2 ، بحيث يصبح c_1 تغميسا بتقاطعات ذاتية عرضية. ثم تعديل c_1 كما في الصورة أدناه، مرة أخرى دون تغيير التقاطع مع c_2 ، من أجل استبدال اتحاد منفصل من المنحنيات المغلقة المغطسة به. الآن وفقاً لمبرهنة جوردن، في كل مرة يدخل c_2 مركبة مترابطة من متمة c_1 (المعدّل)، عليه أن يخرج، بحيث يوجد بالفعل عدد زوجي من التقاطعات. حاولوا أن تثبتوا مبرهنة جوردن من شفعية التقاطع.

هذا يأتي من إحدى المبرهنات الأولى في الطوبولوجيا الجبرية (لذلك لم يكن متاحاً رسمياً لـ فاوس). منحنيان مغلقان في المستوي متقاطعان عرضياً لهما عدد زوجي من نقط التقاطع (انظروا على سبيل المثال كتاب ميلنور). إذا كان من الممكن وجود أقواس منفصلة تربط النقطتين الزرقاء والحمراء داخل القرص، فيمكننا بناء حلقتين مغلقتين في المستوي تتقاطعان في نقطة واحدة بالضبط (انظروا الشكل في الهامش).

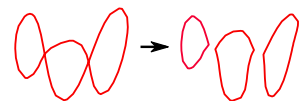
توطئة. لنفترض أن $2k$ شخصاً يجلسون حول طاولة ويتصافون اثنين اثنين، دون تشابك الذراعين! إذن، جاران على الأقل يتصافان.

بالنسبة إلى $k=2$ ، هذه هي التوطئة السابقة. نعتبر شخصين يتصافان. هما يجزئان حدود الطاولة إلى مجالين. إذا كان أحدهما خالياً، فقد أنهينا البرهان. في خلاف ذلك، نواصل عن طريق الاستقراء. □

مع استمرار افتراض أن المنحنيين $p(x, y) = 0$ و $q(x, y) = 0$ الأزرق والأحمر أملسان، تثبت المبرهنة الأساسية للجبر، متبعين فاوس. بالتناقض، نفترض أن القوسين الأزرق والأحمر لا يتقاطعان. بناء على التوطئة السابقة يتم إقران جارتين على الدائرة. وهذا مستحيل لأن نقطتين متتاليتين ليس لهما نفس اللون. □

الآن، نحن نفهم الصعوبة التي بسببها "لا أحد لديه أثار لشكوك". إذا كان هناك منحني جبري مع نقطة نهاية، يمكن لقوس أن يخترق داخل القرص ويتوقف هناك، من دون خروج وسيكون ذلك فادحاً للإثبات. دعونا نجعل ادعاء فاوس دقيقاً.

مبرهنة. لتكن (x_0, y_0) نقطة من منحني جبري حقيقي C معرف بـ $F(x, y) = 0$ ، حيث F كثير حدود حقيقي في $\mathbf{R}[x, y]$. إذن يوجد هوميوتشاكل بين قرص صغير متمركز في (x_0, y_0) يحول C إلى اتحاد عدد زوجي من الأشعة (أنصاف الأقطار) المختلفة.



أثبتوا أن عدد "الإقرانات غير المقاطعة" لعدد زوجي من النقط على الدائرة هو عدد لكتلان

سوف تضطرون إلى الانتظار حتى الفصل!

هذا الادعاء صحيح بالفعل و "سوف أتعهد بتقديم إثبات لا يخضع لأي شك، في مناسبة أخرى".

إذا افترضنا أن هذا صحيح، فمن السهل إنهاء الإثبات. إذا كان المنحنيان الأزرق والأحمر $p(x, y) = 0$ و $q(x, y) = 0$ مفردين ومنفصلين، يكفي تعديلها بشكل طفيف، كما في الهامش، محليًا في جوارات صغيرة منفصلة لكل النقط المفردة، وربط الأشعة في أزواج، بحيث تصبح أقواسًا غير مفردة منفصلة. لقد رأينا أن هذا غير ممكن. □

تعليقات على هذا الإثبات

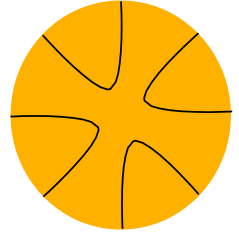
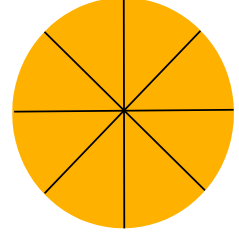
قدم ستيف سميل في ورقة تناول الإصدارات الفعالة من البرهنة الأساسية للجبر⁴⁰. وشدد على ادعاء فاوس غير المثبت:

لكن في الوقت الحالي، أود أن أشير إلى فجوة هائلة احتواها إثبات فاوس. إنها نقطة دقيقة حتى اليوم أن منحنيا مستويا جبريا حقيقيا لا يمكن أن يدخل قرصًا دون مغادرته.

كما يعلق على النقاش اللامتتهي حول من أعطى الإثبات المقبول "الأول".

يمكن للمرء أن يفهم الوضع التاريخي بشكل أفضل ربما من وجهة نظر إيمر لاکاتوس⁴¹. لاکاتوس في تقليد هيفل، من ناحية، وبوير، من ناحية أخرى، يرى أن الرياضيات تطور باستمرار على شكل تسلسل من "البراهين والدحوض".

هناك طرق عديدة "لإصلاح" البرهان وملء "الفجوة الهائلة". أولاً، يجب أن أذكر الورقة الطويلة المفصلة ل أوستروفسكي، المؤرخة في 1920، والمخصصة بالكامل لإثبات ادعاء فاوس⁴². المنحنيان $p(x, y) = 0$ و $q(x, y) = 0$ المستخدمان بواسطة فاوس هما بالفعل منحنيان جبريان، لكنهما منحنيان جبريان خاصان جدًا. في المصطلحات الحديثة، كثيرا الحدود هذان هما الجزءان الحقيقي والتخيلي لدالة هولومتشاكلة $P(z)$ وبالتالي فهما كثيرا حدود توافقان. الإثبات التصفيلي الذي قدمه أوستروفسكي يتعامل بالفعل مع كثيرات الحدود التوافقية، وهو ما يكفي لمشكلتنا الحالية. مع مفاهيم أولية حول التحليل المركب، فسيكون من السهل بالفعل ملء التفاصيل، كما سنبين الآن.



⁴⁰ S. Smale. *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4(1):1–36, 1981.

⁴¹ I. Lakatos. *Proofs and refutations*. Cambridge Philosophy Classics. Cambridge University Press, Cambridge, paperback edition, 2015. Originally published in 1976.

⁴² A. Ostrowski. *Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra*. *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen*, 1920.

فكروا في $P(z) = P(x+iy) = p(x,y) + iq(x,y)$ في $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ في نسخة أخرى من نفسه. تناضل هذا التطبيق P في نقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ يمكن اعتباره إما مصفوفة حقيقية 2×2 أو عددا مركبا $P'(z_0)$. ومن ثم، فإن النقط الحرجة هي ببساطة العدد المنتهي من أصفار المشتق P' . المنحنيان الأزرق والأحمر هما الصورتان العكسيتان للمحورين. لنحلل الصورة العكسية لمستقيم بواسطة P في حالة الضرورة، يمكن أن يكون الكتاب⁴³ مفيداً في فهم هذه الصور. في جوار لنقطة z_0 ، لدينا

$$P(z) - P(z_0) = \left((z - z_0)^k \sqrt[k]{c_k} \sqrt{1 + \frac{c_{k+1}}{c_k} (z - z_0) + \dots} \right)^k = \phi(z)^k.$$

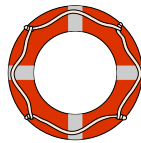
هنا، $\sqrt[k]{c_k}$ هو أي اختيار لجذر من الترتيب k والجذر الثاني من الترتيب k هو متسلسلة قوى متقاربة حسب مبرهنة نيوتن ذات الحدين. التفاضل في z_0 لـ ϕ ليس منعدماً، لذا فإن ϕ تفاكل محلي. باختصار، $P(z)$ هو تركيب محلي لتفاكل وللتطبيق $z \mapsto P(z_0) + (z - z_0)^k$. وبالتالي فمن الواضح أن الصورة العكسية بواسطة P لمنحن أملس يمر بـ $P(z_0)$ هي اتحاد k منحن أملس يمر بـ z_0 .

على وجه الخصوص، محلياً هناك $2k$ نصف مستقيم، وهذا يثبت ادعاء فاوس في الحالة الخاصة التي كان يحتاجها. هذه الحالة الخاصة هي في الواقع خاصة جداً لأن الـ k منحني الأملس هذه تنشئ زوايا متساوية. □

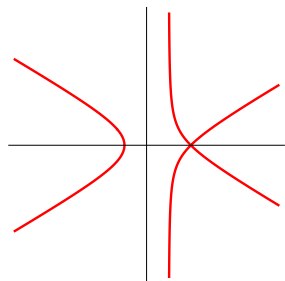
لكن لا تنسوا أننا لم نثبت بعد ادعاء فاوس بكل عاميته.

هناك طريقة أخرى للمء "الفجوة الهائلة" لفاوس. بتدوير المحورين بزاوية θ ، يمكننا استبدال $\exp(i\theta)P(z)$ بـ $P(z)$. المنحني $p(x,y) = 0$ $q(x,y) = 0$ على التوالي) مفرد إذا وفقط إذا كانت واحدة من القيم الحرجة لـ P تنتمي إلى المحور الحقيقي (التخيلي على التوالي). ومن ثم يكفي التدوير بواسطة θ مناسب لتجنب ذلك، بحيث يمكن أن يكون فاوس قد بدأ أيضاً بافتراض أن المنحنيين الأزرق والأحمر أملسان. لم تكن هذه الحجّة السهلة سهلة في عام 1797.

اليوم، هناك العديد من البراهين على المبرهنة الأساسية للجبر. أوصي بورقة أيسرمان⁴⁴ للحصول على نظرة عامة واضحة.

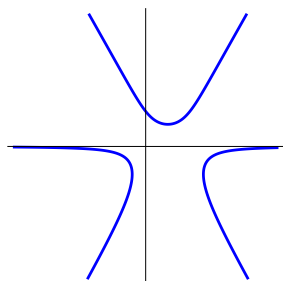


43 T. Needham. *Visual complex analysis*. The Clarendon Press, Oxford University Press,



الصورة العكسية للمحور العمودي بـ $2z^3 - 3z^2 + 1 + i$.

النقط الحرجة هي $z = 0, 1$ والقيم الحرجة هي $1 + i$ و i : واحدة منها على المحور العمودي.



الصورة العكسية للمحور الأفقي بـ $2z^3 - 3z^2 + 1 + i$.

لا توجد قيمة حرجة على هذا المحور.

44 M. Eisermann. *The fundamental theorem of algebra made effective: an elementary real-algebraic proof via Sturm chains*. *Amer. Math. Monthly*, 119(9):715–752, 2012.

هذا الإثبات من قبل فاوس ليس بالتأكيد الأكثر مباشرة ولا الأسهل. يتطلب تنظيفه بعض الحجج الطوبولوجية الدقيقة، ولكن في طريقنا سنحصل على مكافآت كثيرة، كما نفهم بصورة أفضل كثيرات الحدود المركبة كتطبيقات.

اسمحوا لي أن أقدم إثباتي المفضل، بروح إثبات فاوس الطوبولوجي، يمكن العثور عليه في ورقة شميل المذكورة أعلاه. بالنسبة لي، هذا هو الأبسط⁴⁵. نختار نقطة z_0 بطريقة بحيث تكون القطعة γ التي تربط 0 بـ $P(z_0)$ لا تحتوي على واحدة من القيم الحرجة المنتهية العدد لـ P . يكون ذلك ممكناً إذا لم يكن 0 قيمة حرجة، ولكن إذا كانت هذه هي الحالة، فإن 0 قيمة بحيث يكون لـ P جذر. انظروا إلى الصورة العكسية لـ γ بواسطة P . هذه الأخيرة متنوعة متراسة ملساء من البعد 1، ذات حد. النقطة z_0 هي نقطة حدية لمركبة واحدة. من الواضح أن النقطة الحدية الأخرى لهذه المركبة هي جذر لـ P .

ها هو كل شيء! □

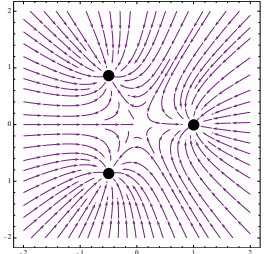
هذا الإثبات البسيط يُعطي في الواقع أكثر من ذلك بكثير. بعيداً عن القيم الحرجة، يمكننا "السحب إلى الخلف" (pull back) للحقل الشعاعي $-x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$ بواسطة تفاضل P . نحصل على حقل شعاعي في المستوي بعيداً عن النقط الحرجة. مسارات هذا الحقل هي بالضبط الصور العكسية للمستقيمات الشعاعية. ومن ثم، بالبدء من نقطة وبحل هذه المعادلة التفاضلية، يجب أن نصل إلى جذور P . طريقة واحدة لتقريب حلول معادلة تفاضلية عادية هي استخدام طريقة أويلر النموذجية. قد اتضح أن مخطط أويلر التكراري يتطابق مع طريقة نيوتن. نيوتن وفاوس وأويلر معاً!

إثبات دالمبير

أصف أيضاً إثباتاً قدمه دالمبير⁴⁶ لسببين. الأول هو أن المبرهنة الأساسية للجبر تسمى غالباً في فرنسا مبرهنة دالمبير ©. والثاني هو أن هذا يرتبط ارتباطاً وثيقاً بمضلعات نيوتن التي حللناها سابقاً. انظروا⁴⁷ و⁴⁸ للمزيد حول هذا الإثبات. لم يذكر دالمبير نيوتن. كيف يمكن لفرنسي أن يعترف بمساهمة رجل إنجليزي؟

ماذا أعني بـ "أبسط"؟ ربما ليس الأقصر لأن هذا الإثبات يحتوي على الكثير من الحقائق الضمنية التي يجب إثباتها. البساطة هي مفهوم دقيق وشخصي للغاية في الرياضيات. في هذه الحالة الخاصة، أود أن أقول هذا بسيط لأنني أعتقد أنني لا أستطيع أن أساءه.

45 É. Ghys. Inner simplicity vs. outer simplicity. In R. Kossak and P. Ording, editors, *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts Conferences (CUNY New York, 2013)*. Springer Verlag, 2017.



لوحة الأطوار للحقل الشعاعي $-P(z)/P'(z)$ بالنسبة إلى $P(z) = z^3 - 1$. تتحول المسارات بواسطة P إلى مستقيمات شعاعية.

46 J. D'Alembert. *Recherches sur le calcul intégral. Histoire de l'Acad. Royale Berlin*, pages 182–224, 1748.

C. Baltus. *D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra. Historia Math.*, 31(4):414–428, 2004.

48 C. Gilain. Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 42(2):91–136, 1991.

اسمحوا لي بأن أقدم نسخة مبسطة من "برهانه". نفترض أننا نريد أن نحل المعادلة

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

نضع $z = y/\varepsilon$. نحصل على معادلة مكافئة تمامًا

$$y^n + a_{n-1}\varepsilon y^{n-1} + \dots + \varepsilon^n a_0 = 0.$$

بالطبع، $y=0$ هو حل من أجل $\varepsilon=0$ ، ونحن نريد حلاً من أجل $\varepsilon \neq 0$. نعتبر المعادلة أعلاه كمعادلة من الشكل $F(x,y)=0$. بواسطة نيوتن وكرامر، لا توجد حلول غير تافهة $y(\varepsilon)$ ، على الأقل من أجل القيم الصغيرة لـ ε ، معبراً عنها كتسلسلة لـ ε . "وبالتالي"، فقد وجدنا جذراً لمعادلتنا. □

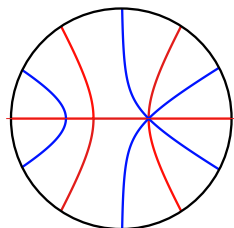


ج. دالمبير. (1717–1783)

"بالتالي" السابقة تخضع لكثير من النقاش. واحدة من الصعوبات الرئيسية أنه لا نيوتن ولا كرامر ولا دالمبير أثبت تقارب المتسلسلة. الاسوأ، استخدام خوارزمية نيوتن التي تبني متسلسلة بويرز للمبرهنة الأساسية للجبر. حلقة مفرغة. من المثير للدهشة أن دالمبير نشر أيضاً نسخة من هذا الإثبات في مذكرة تتعامل مع سبب الرياح⁴⁹.

⁴⁹ J. D'Alembert. *Réflexions sur la cause générale des vents*. David l'ainé, Paris, 1747.

اسمحوا لي أن أختتم هذا الفصل بتمرين اقترحه تلميذي السابق فيكتور كلبيتسين. انظروا إلى الصورة العكسية للمحور الحقيقي (باللون الأحمر) والمحور التخيلي (باللون الأزرق) ببعض كثيرات الحدود المركبة $P(z)$. ينتج عن هذا رسم بياني في قرص كبير. كل حافة ملونة باللون الأزرق أو الأحمر. النقط المفردة من الرسم البياني الأزرق (الأحمر على التوالي) هي نقط حرجة لـ P والتي تم تحويلها إلى المحور الحقيقي (التخيلي على التوالي): هي تقدم عددا زوجيا من الحواف الزرقاء (الحمرء على التوالي) الخارجة من رأس. بشكل عام، لا توجد مثل هذه النقطة المفردة. الصورة المحلية حول تقاطع الرسمين البيانيين قد تم وصفها أعلاه: $4k$ حافة تخرج من الرأس، بالتناوب دورياً أزرق واحمر. هذه التقاطعات موجودة بالفعل حسب المبرهنة الأساسية للجبر. في الدوائر الكبيرة، لدينا تناوب بين الأحمر والأزرق.



الصورة العكسية للمحور الحقيقي والمحور التخيلي بواسطة $z^3 - 3z + 2$. هناك قيمتان حرجتان: 0 و 4.

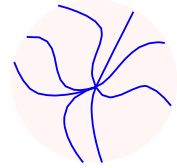
السؤال يتعلق بالعكس. نفترض أن لدينا بيانا ملونا في قرص يعرض كل الميزات النوعية السابقة. في ظل أي ظروف يوجد كثير حدود $P(z)$ بحيث يكون الرسم البياني الملون المرتبط به هوميومورفياً مع الرسم البياني المعطى، في ظل هوميومورفياً للقرص؟



جوزيف ألفريد سبّرّي (1819–1885)

ادعاء قاوس حول مفرديات المنحنيات الجبرية: ورقتان لاثنين من سبيري

حان الوقت لإثبات تأكيد قاوس: "الجوار لنقطة منحني جبري حقيقي مستوي هوميومتشاكل مع عدد زوجي من الأشعة في القرص".



صورة محلية لمنحن جبري

البراهين غير كافية

لا ينبغي الخلط بين جوزيف ألفريد سبيري (1819-1885) ويول جوزيف سبيري (1827-1898).

كان جوزيف ألفريد يتمتع بمهنة رائعة. وقع كتبه باسم "عضو في المعهد ومكتب خطوط الطول، أستاذ في كلية فرنسا (كوليج دو فرانس) وكلية العلوم في باريس".

في عام 1849، نشر كتابًا مؤثرًا للغاية "دروس في الجبر الأعلى" في مجلدين يحتويان على واحد من أولى العروض المنهجية لمبرهنة فالوا. وهو أيضًا من منشئي معلم فربني-سبيري للمنحنيات في الـ 3-فضاء.

كان لدى الشاب پول جوزيف حياة مهنية أكثر تواضعًا. وقع على مؤلفاته "دكتور في العلوم، عضو في الجمعية الفيولوماتية (محبو العلوم والتعلم)".

عمل استاذًا في كلية سانت بارب في باريس. لم يتمكن من العثور على صورته.

في عام 1847، كتب جوزيف ألفريد ورقة بحثية "يثبت" فيها تأكيدًا من نيوتن:

إذا كان مستقيمًا مقاربًا لفرع منحني جبري، فهو أيضًا مقارب لفرع آخر.

⁵⁰ J. A. Serret. *Théorème sur les courbes algébriques asymptotiques*. *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 6:217-218, 1847.

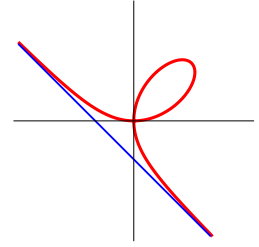
حسب جوزيف ألفريد ،

"Ce théorème est dû à Newton, et est énoncé, si je ne me trompe, dans son *Enumeratio Linearum tertio ordains*".

"تعود هذه النظرية إلى نيوتن، وقد ورد ذكرها، إذا لم أكن مخطئًا، في

Enumeratio Linearum tertio ordains".

لاحظوا أن ما يسميه نيوتن هنا فرعًا هو نصف ما نسميه فرعًا. كمثل بسيط، انظروا إلى
 ورقيقة ديكارت $x^3 + y^3 = 3xy$. يقترب المنحني من خطه المقارب عندما يؤول x
 إلى $+\infty$ و $-\infty$. يتوافق هذا مع فرعين في مصطلحات نيوتن وفرع واحد في اللا
 منتهي في المصطلحات الخاصة بنا.



المستقيم المقارب لورقيقة ديكارت
 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

"ce qui ne peut arriver pour
 une courbe algébrique".
 "ما لا يمكن أن يحدث لمنحن جبري"

يتكون إثبات جوزيف ألفريد سبزي مما يأتي. لتكن $F(x, y) = 0$ معادلة المنحني في
 نظام إحداثيات بحيث يكون $y = 0$ هو المستقيم المقارب. لنضع $1/x$ بدلا عن x .
 ينتج عن ذلك منحني جبري ثانٍ $F_1(x, y) = 0$. الآن إذا كان للمنحني الأصلي فرع
 واحد مقارب لـ $y = 0$ ، فإن المنحني الجبري $F_1(x, y) = 0$ سيكون له "نقطة
 توقف" في $(0, 0)$ ، أي "طريق مسدود"، وهو مستحيل. بشكل مثير للدهشة، يعتبر
 جوزيف ألفريد أمرًا مسلمًا به أن نقطة التوقف هذه مستحيلة. من الواضح أن هذا ليس
 إثباتًا بأي معنى للكلمة.

ومن المفارقات أنه ينتقد أويلر لافتقاره إلى الصرامة. في نهاية ورقته البحثية القصيرة،
 يقتبس بالفعل مقدمة أويلر *Introductio in analysin infinitorum* (المجلد 2، الفصل
 7، القسم 174):

Quam ob rem Linea curva duos habebit ramos in infinitum
 excurrentes inter se oppositos. . .

الجملة الأخيرة من أوراق جوزيف ألفريد هي: " *quam ob rem* هذا بحاجة إلى إثبات ".
 هل كان يعتقد حقًا أن أويلر، أو نيوتن، لم يكن بإمكانه التفكير في تغيير المتغيرات
 $x \mapsto 1/x$ ؟

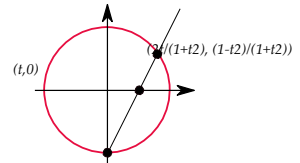
بعد ثمانية عشر عامًا، كتب پول جوزيف ورقة أخرى قصيرة⁵¹، في نفس المجلة، منتقدًا
 الورقة السابقة لزميله المرموق والمشارك له في الاسم. يبدأ بتأكيد أن مساهمة جوزيف
 ألفريد هي اختصار مشكلة الخطوط المقاربة لمشكلة نقط توقف المنحنيات الجبرية، لكن
 هذا كان "بديهيًا مسبقًا". الآن - يصر پول جوزيف - يظل السؤال الرئيسي مفتوحًا:
 لا يزال يتعين على المرء إثبات أن المنحني الجبري لا يمكن أن يكون له نقطة توقف. يقترح
 أخيرًا الإثبات الآتي.

لنفترض أن $(0, 0)$ نقطة على منحني جبري $F(x, y) = 0$. ندع المنحني يتقاطع مع
 دائرة صغيرة متمركزة في المبدأ $x^2 + y^2 = r^2$. نستخدم التوسيط المعروف

$$x = \frac{2rt}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{(1-t^2)r}{1+t^2}.$$

"لهذا السبب، يحتوي المنحني على
 فرعين في اللامنتهي يكونان معاكسين
 لبعضهما البعض" . . .

51 P. J. Serret. [Note sur les courbes algébriques.](#)
 Nouvelles annales de
 mathématiques,
 journal des candidats
 aux écoles polytechnique et
 normale, 4:311-313, 1865.



بالتعويض في $F(x, y) = 0$ والضرب في $(1+t^2)^d$ حيث d هي درجة F ، نحصل على المعادلة $\phi_{2d}(t) = 0$ ، حيث ϕ_{2d} كثير حدود من الدرجة $2d$. الآن، إذا كانت النقطة $(0,0)$ نقطة توقف، فإن المنحني سينتقاطع مع دائرة صغيرة في نقطة واحدة، بحيث يكون للمعادلة في t من الدرجة الزوجية $2d$ جذر واحد، "وهو أمر سخيف".

مدهش. كيف يمكن لبول جوزيف ألا يعرف أن t^2 من الدرجة الثانية وأن له جذرا واحدا؟ هذا الجذر مضاعف، لكن هذه هي مشكلتنا بالضبط. يمكننا تخيل منحني جبري يذهب إلى نقطة ما ويعود متبعًا نفس المسار. هناك شيء يجب إثباته.

حقيقتان مهمتان في الجبر التبديلي

أجمع هنا مبرهنتين أساسيتين حول كثيرات الحدود تمكنا من إصلاح إثبات بول جوزيف. انظروا على سبيل المثال ⁵² أو ⁵³ أو ⁵⁴ لمعرفة المزيد عن الجبر. سيتم افتراض أن جميع الحلقات تبديلية. توجد بعض التعريفات المفيدة في الهوامش.

مبرهنة. ليكن \mathcal{R} ميدان تحليل وحيد (حلقة عاملية). إذن حلقة كثيرات الحدود $\mathcal{R}[x]$ هي أيضًا ميدان تحليل وحيد.

نقول إن كثير حدود في $\mathcal{R}[x]$ بدائي إذا كانت معاملاته أولية نسبيًا (أولية في ما بينها). النقطة المفتاح هي ما يسمى بـ ... توطئة فاوس.

توطئة. جداء كثيري حدود بدائيين في $\mathcal{R}[x]$ كثير حدود بدائي.

البرهان (الحديث) سهل (لكنه غير مباشر إلى حد ما). إذا كان p أوليا في \mathcal{R} ، فإن الحلقة \mathcal{R}/p ميدان متكامل (حلقة متكاملة أو صحيحة). إذا كان $P_1(x)$ و $P_2(x)$ كثيري حدود حاصل ضربها ليس بدائيا، فإن جميع معاملات P_1P_2 قابلة للقسمة على عدد أولي p . نستطيع اختصار جميع المعاملات مقياس (ترديد) p ونحصل على المساواة الآتية في $\mathcal{R}/p[x]$:

$$\overline{P_1}(x)\overline{P_2}(x) = 0.$$

نظرًا إلى أن حلقة كثيرات الحدود على ميدان متكامل هي ميدان متكامل، نستنتج أن $\overline{P_1}(x)$ أو $\overline{P_2}(x)$ منعدم في $\mathcal{R}/p[x]$. □

أعني بدرجة F ، القيمة الكبرى $i+j$ عندما يتغير $x^i y^j$ بين وحيدات الحد بمعامل غير تافه. سوف نتحقق لاحقًا من أن بول جوزيف كان على حق وأن الدرجة هي بالفعل $2d$ وليست فقط أصغر من أو تساوي $2d$.



⁵² S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

⁵³ M. Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

⁵⁴ N. Bourbaki. *Commutative algebra. Chapters 1-7*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.

تم إثباته بواسطة فاوس في المقالة ⁴² من *Disquisitiones Arithmeticae* في عام 1801، ثلاث سنوات بعد دكتوراهه.*

ميدان متكامل (أو حلقة صحيحة) هو حلقة يكون فيها جداء عنصرين غير منعدمين غير منعدم. وحدة في حلقة هي عنصر يقبل مقلوبا. نقول إن عنصرين a, b في حلقة متشاركين، ونكتب $a \equiv b$ ، إذا وجدت وحدة u بحيث $b = ua$.

* أفضل دكتورا، دكتوروان، دكتوروات لتجئب دكتوراهك، دكتوراهه، دكتوراهها، ...، ما دامت الكلمة أجمية. (الترجم)

نعرف المحتوى $cont(P)$ لكثير الحدود $P(x)$ من $\mathcal{R}[x]$ على أنه القاسم المشترك الأكبر لمعاملاته. بوضوح، كل كثير حدود $P(x)$ يمكن كتابته على الشكل $cont(P)\tilde{P}(x)$ حيث $\tilde{P}(x)$ بدائي. توطئة فاوس تعني ببساطة أن محتوى الجداء هو جداء المحتويات.

يمكننا الآن إثبات المبرهنة. سنظهر أن العناصر الأولية في $\mathcal{R}[x]$ هي :

1. العناصر الأولية لـ \mathcal{R} ، يُنظر إليها على أنها كثيرات حدود ثابتة،
 2. كثيرات الحدود البدائية في $\mathcal{R}[x]$ والتي تكون أولية عندما يُنظر إليها أنها كثيرات حدود على حقل حاصل القسمة $Quot(\mathcal{R})$.
- حلقة كثيرات الحدود على حقل إقليدية. هذا ينطبق على $Quot(\mathcal{R})[x]$ بحيث يمكن كتابة أي عنصر $P(x)$ من $\mathcal{R}[x]$ كجداء لكثيرات حدود أولية في $Quot(\mathcal{R})[x]$. بعد التخلص من المقامات، يمكننا كتابة P كجداء لعناصر النوعين 1 و 2. كالآتي:

$$P(x) = u \cdot r_1 \cdots r_k \cdot P_1(x) \cdots P_l(x).$$

هنا، u وحدة في \mathcal{R} ، الـ r_i أولية في \mathcal{R} والـ P_i بدائية وغير قابلة للاختزال في $Quot(\mathcal{R})[x]$. بواسطة توطئة فاوس، الجداء $r_1 \cdots r_k$ هو محتوى P وبالتالي يتم تعريفه بشكل وحيد بواسطة P .

نظرًا إلى أن \mathcal{R} ميدان تحليل وحيد، فإن الـ r_i معرفة بوحدانية بواسطة P (إلى وحدات وإلى تبديلة مقربة).

نظرًا إلى أن $Quot(\mathcal{R})[x]$ هو أيضًا ميدان تحليل وحيد، فإنه يتم أيضًا تعريف العوامل $P_i(x)$ بطريقة وحيدة إلى تبديلة ووحدات مقربة، في $Quot(\mathcal{R})[x]$. الآن، المساواة $Q(x) = aP(x)$ ، حيث $P(x)$ و $Q(x)$ بدائيان في $\mathcal{R}[x]$ و a في $Quot(\mathcal{R})$ ، تستلزم أن a وحدة في \mathcal{R} . □

والنتيجة الطبيعية المباشرة هي أنه بالنسبة لأي حقل K ، فإن حلقات كثيرات الحدود $K[x_1, \dots, x_n]$ ميادين تحليل وحيد. في هذه الحالة الخاصة، تعني المبرهنة أن أي كثير حدود غير ثابت في $K[x_1, \dots, x_n]$ يمكن كتابته كجداء لعوامل غير قابلة للاختزال، بطريقة وحيدة، إلى تبديلة وضرب بواسطة عوامل ثابتة مقربة (في K).

النتيجة الجبرية الثانية تتعلق بالنتائج. ليكن $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ كثيري حدود في حلقة كثيرات الحدود $\mathcal{R}[x]$ على ميدان متكامل \mathcal{R} ، درجتاهما d_1 ، d_2 أكبر من أو يساويان الواحد.

عصر بدائي p في ميدان متكامل \mathcal{R} هو عنصر بحيث تكون حلقة حاصل القسمة \mathcal{R}/p متكاملة.

يكون عنصر a من ميدان متكامل غير قابل للاختزال إذا لم يكن جداء عنصرين ليسا وحدتين. العناصر الأولية غير قابلة للاختزال. العكس ليس على العموم صحيحًا. ميدان تحليل وحيد (تسمى أحيانًا حلقة عاملية) هي حلقة فيها كل عنصر يساوي جداء لعناصر أولية وحيدة إلى ترتيب مقرب ووحدة مقربة. الحلقات الإقليدية والحلقات الرئيسية - على سبيل المثال حلقة كثيرات الحدود على حقل - هي ميادين تحليل وحيد. في هذه الحالة، يكون مفهومًا العنصر الأولي والعنصر غير القابل للاختزال متطابقين والقواسم المشتركة الأكبر معرفة جيدًا.

نشير بـ $\mathcal{R}_d[x]$ إلى \mathcal{R} - مقياس كثيرات الحدود من درجة على الأكثر d ،
الايزومتشاكل مع \mathcal{R}^{d+1} . نعتبر التطبيق

$$\Phi: (A_1, A_2) \in \mathcal{R}_{d_2-1}[x] \times \mathcal{R}_{d_1-1}[x] \mapsto A_1 P_1 - A_2 P_2 \in \mathcal{R}_{d_1+d_2-1}[x].$$

يمكن اعتبار هذا كتطبيق خطي من $\mathcal{R}^{d_1+d_2}$ في نفسه. محده يسمى ناتج P_1 و P_2 ،
ويرمز له بـ $Res(P_1, P_2)$. هذا العنصر من \mathcal{R} هو عبارة كثيرة الحدود كونية، مع
معاملات في \mathbf{Z} ، في معاملات P_1 و P_2 .

مبرهنة. نفترض أن \mathcal{R} ميدان تحليل وحيد. الناتج $Res(P_1, P_2)$ يساوي الصفر إذا
وفقط إذا كان لـ P_1 و P_2 قاسم مشترك غير تافه في $\mathcal{R}[x]$.

بالفعل، إذا كان $P_1 = QQ_1$ و $P_2 = QQ_2$ ، يكون العنصر (Q_2, Q_1) ، في نواة
 Φ بحيث ينعدم الناتج.

في المقابل، إذا انعدم الناتج، فإن نواة Φ ليست تافهة بحيث يوجد عنصران غير تافهين
في $\mathcal{R}_{d_2-1}[x]$ و $\mathcal{R}_{d_1-1}[x]$ بحيث يكون $A_1 P_1 = A_2 P_2$. الخاتمة
تتبع من حقيقة أن $\mathcal{R}[x]$ هو ميدان تحليل وحيد: لو كان P_1 و P_2 أوليين نسبياً،
لكان P_1 قاسماً لـ A_2 وهذا مستحيل لأن درجة A_2 أقل من درجة P_1 . □

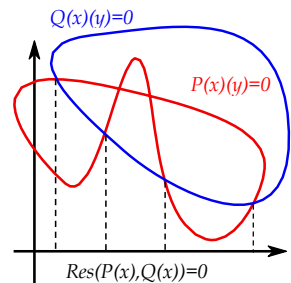
إثبات ادعاء فاوس

يمكننا الآن إثبات أن جوار نقطة ما على منحن جبري يتكون من عدد زوجي من
الأقواس التي تتقاطع فقط في نقطة المبدأ.

لتكن $F(x, y) = 0$ معادلة المنحني الجبري الحقيقي الذي يمر عبر المبدأ $(0,0)$.
نكتب F كجداء لعوامل غير قابلة للاختزال

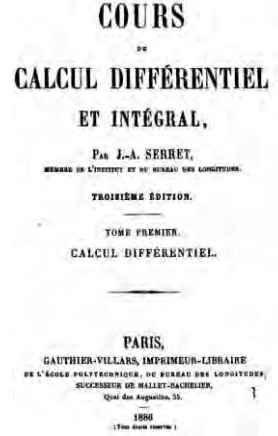
$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdots F_n(x, y).$$

دون تغيير المحل الصفري لـ F في جوار $(0,0)$ ، يمكننا حذف بعض العوامل وافترض
أن جميع الـ F_i تنعدم في $(0,0)$ ، وهي عوامل غير مرتبطة وغير قابلة للاختزال.
الموضع الصفري لـ F في جوار $(0,0)$ هو اتحاد المحلات الصفرية للـ F_i .
من أجل إثبات ادعاء فاوس، نقوم بإثبات توطئتين.



يتم إعطاء إسقاط تقاطع منحنين
 $Q(x, y) = 0, P(x, y) = 0$
على محور الفواصل بواسطة أصفار
الناتج.

كثيرا الحدود F_i ، F_j غير مرتبطة
عند ما يكون $F_i \not\equiv F_j$ بالنسبة إلى
 $i \neq j$: لا يوجد ثابت c بحيث
يكون $F_j = cF_i$.



توطئة (1). لنفترض أن $P(x)$ كثير حدود غير قابل للاختزال ينتمي إلى $\mathbf{R}[x, y]$ و $Q(x, y)$ كثير حدود كفي ينتمي إلى $\mathbf{R}[x, y]$. نفترض أن للمنحنيين $P(x, y) = 0$ و $Q(x, y) = 0$ عددا غير منته من نقط التقاطع في جوار صغير للمبدأ. إذن P يقسم Q في $\mathbf{R}[x, y]$. على وجه الخصوص، إذا كان P و Q غير قابلين للاختزال وغير مرتبطين، فيمكن أن يتقاطع المنحنيان المقابلان فقط في نقط منعزلة.

توطئة (2). إذا كان $P(x, y)$ غير قابل للاختزال، فإن محله الصفري في جوار المبدأ يتكون من عدد زوجي من الأقواس المتقاربة نحو $(0, 0)$.

لنبدأ بالتوطئة الأولى. إذا كان $P(x, y) = 0$ يشمل عددا غير منته من النقط على نفس المحور العمودي $x = x_0$ ، فإن كثير الحدود $P(x, y)$ قابل للقسمة على $x - x_0$ وحيث أننا نفترض أنه غير قابل للاختزال وينعدم في المبدأ، فهذا يشير إلى أن $P(x, y)$ هو مضاعف ثابت لـ x ، والذي بالنسبة إليه، التوطئة واضحة. لذلك يمكننا دون فقدان العمومية افتراض أن $P(x, y) = 0$ يقطع كل مستقيم عمودي في عدد منته من النقط.

إذا كان $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ فإن لكثيري الحدود $P(x_0, y)$ ، $Q(x_0, y)$ ، منظور إليهما على أنهما عنصران من $\mathbf{R}[y]$ ، جذرا مشتركا y_0 وبالتالي ينعدم الناتج، كعنصر من \mathbf{R} .

نفترض أن للمنحنيين $P(x, y) = 0$ و $Q(x, y) = 0$ عددا غير منته من نقط التقاطع في جوار صغير للمبدأ. لنلق نظرة على ناتج العنصرين P ، Q من $\mathbf{R}[x][y]$ كعنصر من $\mathbf{R}[x]$. هذا الناتج ينعدم في عدد غير منته من القيم x_0 وبالتالي ينعدم تطابقا. لقد رأينا أن هذا يعني أن لـ P ، Q عاملا مشتركا في $\mathbf{R}[x, y]$. ولما كان P غير قابل للاختزال، فهذا يدل على أن P يقسم Q .
ثبتت الآن التوطئة الثانية متبعين فكرة بول جوزيف. لنضع

$$F(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j.$$

لنرمز بـ d إلى درجة F (التي هي بالتعريف القيمة الكبرى لـ $i + j$ والتي من أجلها $a_{ij} \neq 0$). لاحظوا أنه نظرًا إلى أن F غير قابل للاختزال، فهو لا يقبل القسمة على x (ما لم يكن مضاعفًا ثابتًا لـ x) بحيث لا يكون أحد المعاملات a_{0j} منعدما. وعند تثبيت r ، نحصل على توسيط بواسطة t لدائرة شعاعها r باستثناء $\{(0, -r)\}$:

لاحظوا أنه إذا كان $F(x, y) = x$ فإن التوطئة واضحة.

$$x = r \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad y = r \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

نعوض في $F(x, y)$ ونضرب النتيجة بـ $(1+t^2)^d$ لنجد

$$\phi_{2d,r} = \sum_{i,j} a_{ij} r^{i+j} (2t)^i (1-t^2)^j (1+t^2)^{d-i-j}.$$

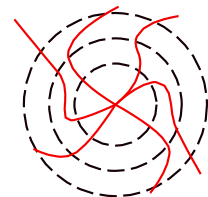
هذا كثير حدود في t حده ذو الدرجة الأعلى هو

$$\sum_{i,j} (-1)^j a_{0,j} r^j t^{2d}$$

وهو بالتأكيد ليس منعدياً من أجل $r \neq 0$ صغير. ومن ثم، فإن بول جوزيف محق ودرجة $\phi_{2d,r}(t)$ تساوي $2d$. لإكمال الإثبات، لا يزال يتعين علينا تبين أن جذور $\phi_{2d,r}(t) = 0$ بسيطة من أجل $r \neq 0$ صغير، بحيث يوجد عدد زوجي من الجذور. في جذر مزدوج t_0 ، كثير الحدود $\phi_{2d,r}(t)$ ينعدم ومشتقاته في نفس الوقت. هندسياً، هذا يعني أن مماس الدائرة في هذه النقطة هو أيضاً مماس المنحني $F(x, y) = 0$. بتعبير مختلف، النقط المضاعفة التي نريد استبعادها تتوافق مع تقاطع $F(x, y) = 0$ والمنحني $y \partial F / \partial x - x \partial F / \partial y = 0$ وحيث أننا نفترض أن F غير قابل للاختزال، فإن التوطئة الأولى تعني أن هذين المنحنيين يتقاطعان في عدد منته من النقط، ما لم تقسم F ، $y \partial F / \partial x - x \partial F / \partial y$ ، لسبب يتعلق بالدرجة، يمكن أن يحدث هذا فقط إذا كان $y \partial F / \partial x - x \partial F / \partial y$ مضاعفاً ثابتاً لـ F ، الأمر الذي يعني بدوره أن F ثابت على الدوائر. وهذا يعني من جديد أن F كثير حدود في $x^2 + y^2$.

تم الانتهاء بشكل أساسي من إثبات ادعاء فاوس. لاقتصار F على كل دائرة $x^2 + y^2 = r^2$ من أجل r صغير غير منعدياً عدد زوجي من الأصفار التي تكون بسيطة. باستخدام مبرهنة الدالة الضمنية في هذه الحالة الأولية للغاية، نستنتج أن هذه الأصفار تحدد عدداً زوجياً من المنحنيات المنفصلة والمتقاربة صوب المبدأ. هذا لا يقول أي شيء عن اتجاهات النهاية لهذه المنحنيات: فقد تتقارب بشكل مسبق من المبدأ دون أن يكون لها مماس نهاية. □

كان كارل فريدريش فاوس وبول جوزيف سبترى على حق.



سبترى أن لأي فرع من منحني جبري مماساً.



لوحة من كتاب بقلم J. Lamouroux، مؤرخة عام 1821، تمثل *Oculina Hirtella*. كان هذا الكتاب في مكتبة
◦ *HMS Beagle*، والتي كانت أيضًا مقصورة داروين لمدة خمس سنوات. *Ramis sparsis divergentibus!*

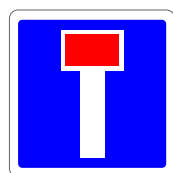
المتسلسلات المتباعدة : أويلر، كوشي و پوانكاري

متسلسلات أويلر المتباعدة (*Euler's seriebus divergentibus*)

لم يقتصر نيوتن في استخدام المتسلسلات غير المنتهية على المعادلات من الشكل $F(x, y) = 0$. فقد استخدمها بطريقة منهجية لحل المعادلات التفاضلية. مقارنته كانت عملية في الأساس. يبحث عن حل كمتسلسلة شكلية وبحسب استقرائياً عدداً كبيراً من حدود المتسلسلة للحصول على بعض " الدقة ". لم يكن هناك إدراك منهجي لمفهوم التقارب، ولكن في جميع الحالات التي عالجها كانت المتسلسلة متقاربة بالفعل. في وقت لاحق، أصبح أويلر سيد المتسلسلات الكبير. إنه رأي مشترك لدى الرياضياتيين المعاصرين أن أويلر كان غير مبال مع المتسلسلات وأنه تلاعب بالمتسلسلات التي "لا معنى لها". على سبيل المثال، صيغته⁵⁵

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \dots = -\frac{1}{8}$$

أمر صادم للدارسين الجامعيين في مرحلة ما قبل التدرج والذين تم تدريسهم تعريف متسلسلة متقاربة في وقت مبكر جداً ويرفضون أخذ هذه الفطائع بعين الاعتبار. ليس الأمر كذلك! أويلر يعرف ما يفعله. هو يناقش الإجراءات المختلفة لإسناد مجموع للمتسلسلة، حتى لو كانت متباعدة، ويحاول مقارنة هذه الإجراءات. متسلسلته ليست الأكثر عمومية: فهي مُعرفة ضمناً بواسطة نوع من الخوارزمية، لاستخدام مفارقة تاريخية. إنه مقتنع بأن المتسلسلات المتباعدة تمثل "شيئاً" مرتبطاً بطبيعة المتسلسلة.



نهاية. هذا الفصل مستقل تماماً عن بقية الكتاب.



ليونهارد أويلر (1707-1783)

⁵⁵ L. Euler. Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 17:83-106, 1768. See the [Euler Archive](#) for English translations and comments.

تعتبر ورقته *De seriebus divergentibus*⁵⁶ جوهرة صرفة وأنا أوصي بها أي رياضي.

واحد من أمثله الشهيرة

$$S = 1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \dots$$

باستخدام خمس طرق مختلفة للجمع، يحصل أويلر على قيم يبدو أنها تشير إلى أن S يجب أن يكون قريبًا من 0.5963473621237. واحدة من أكثر الطرق إقناعًا تستخدم حقيقة أن المتسلسلة الشكلية

$$\hat{f}(x) = x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots$$

حل للمعادلة التفاضلية الخطية

$$x^2 y' + y = x.$$

هذه معادلة أولية جدًا يجد المرء من أجلها الحل الصريح الذي يساوي 0 من أجل $x = 0$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) dt.$$

بطريقة ما، يمكننا القول إن $f(x)$ تمثل قيمة المتسلسلة الشكلية $\hat{f}(x)$. القيمة العددية التي وجدها أويلر 0.596347362123 هي القيمة $f(1)$. فقط اكتبوا ما يأتي في حاسوبكم

$$N[\text{Exp}[1] * \text{Integrate}[\text{Exp}[-1/t]/t, t, 0, 1], 100]$$

لتحصلوا على الفور على

$$0.5963473623231940743410784993692793760741778601525$$

$$487815734849104823272191148744174$$

ليس في اتفاق كامل على الرغم من النتيجة العددية لأويلر.

ثم جاءت فترة الاستياء من المتسلسلات المتباعدة.

كان السيد الجديد أوفيستان لوي كوشي (Augustin Louis Cauchy) الذي عرّف بوضوح مفهوم التقارب والذي يرتبط عادة بالصرامة الرياضية. هذا ليس خاطئًا تمامًا ولكنه دون شك تبسيط مبالغ فيه. من ناحية، كانت الصرامة موجودة قبل كوشي ومن ناحية أخرى لم يرفض كوشي المتسلسلة المتباعدة⁵⁷. مع الأسف، حتى اليوم، لا يزال العديد من الدارسين مقتنعين بأن متسلسلة متباعدة تأتي من الشيطان...

⁵⁶ L. Euler. De seriebus divergentibus. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5:205-237, 1760. See the [Euler Archive](#) for English translations and comments.



كونوا حذرين! بالتأكيد لا أحب أن أعطي القارئ الشاب الشعور الخاطئ أن لأي متسلسلة متباعدة مجموعا معرفا جيدًا. بعض المتسلسلات المتباعدة هي في الواقع قابلة للجمع باستخدام طرق مختلفة وتعطي مجاميع مختلفة. كمثال سهل، فكروا $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

⁵⁷ A. Cauchy. [Sur un emploi légitime des séries divergentes](#). *Comptes Rendus Académie des Sciences*, XVII:18-25, 1843.

في عام 1821، كتب كوشي في مقدمة كتابه *Cours d'analyse*، أنه أُجبر على التخلي عن متسلسلة متباعدة!
لقد أُجبرت على قبول بعض المقترحات التي ربما يبدو من الصعب قبولها. على سبيل المثال، ليس لمتسلسلة متباعدة مجموع.
في رسالة مشهورة إلى هولمو، كتب **آبل** في عام 1826:
المتسلسلات المتباعدة بشكل عام شيء فادح، ومن العار أن يُبنى عليها أي إثبات.

"لقد أُجبرت على الاعتراف بمقترحات مختلفة قد تبدو ربما فاسية قليلاً. على سبيل المثال أن متسلسلة متباعدة ليس لها مجموع..."

پوانكاري

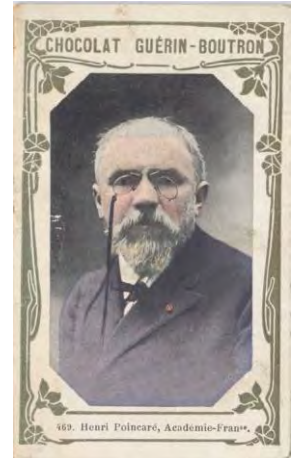
"المتسلسلات المتباعدة هي على العموم فادحة جداً وهو عار إلا نجرؤ على العثور لها على أي برهان". المجلد 2 من أوراق آبل المجمة.

السيد العظيم التالي لمن سبق ذكرهم كان پوانكاري الذي فهم بوضوح أن هذه المتسلسلات المتباعدة ليست مفيدة فقط ولكنها ضرورية أيضاً لحل الأسئلة الطبيعية من الميكانيكا السماوية. أنا أمتنع عن تقديم هذه الجوانب الديناميكية، على الرغم من أنها رائعة ومرتبطة بنشاط البحث الحالي.
اسمحو لي أن أقتبس من المجلد الثاني من "طرق جديدة للميكانيكا السماوية".

هناك نوع من سوء الفهم بين المهندسين الرياضياتيين (الجهومبيين) وعلماء الفلك فيما يتعلق بمعنى كلمة التقارب. المهندسون والمعنيون بالصرامة المطلقة لا يهتمون بالمقاييس وينزعجون من طول الحسابات غير المنفصلة التي يتصورونها لتكون ممكنة دون محاولة إجرائها بشكل صريح، قد يقولون إن المتسلسلة تكون متقاربة عندما يؤول مجموع الحدود إلى نهاية محددة، حتى لو تناقصت الحدود الأولى ببطء شديد. على العكس من ذلك، فإن علماء الفلك لديهم عادة القول إن متسلسلة تتقارب، على سبيل المثال، عندما تتناقص الحدود العشرون الأولى بسرعة كبيرة، حتى لو كانت الحدود المتبقية ستتمو إلى الأبد. وبالتالي، هيا بنا نأخذ مثلاً بسيطاً ونفكر في المتسلسلتين اللتين حداهما العامان

$$\frac{n!}{1000^n} \text{ و } \frac{1000^n}{n!}$$

سيقول المهندسون أن المتسلسلة الأولى تتقارب، بل وأنها تتقارب بسرعة [...]؛ وسيقولون إن المتسلسلة الثانية تتباعد [...]. على العكس من ذلك، سيعتبر علماء الفلك المتسلسلة الأولى متباعدة، [...]. والمتسلسلة الثانية متقاربة. القاعدتان شرعيتان: الأولى في الأبحاث النظرية. الثانية في التطبيقات العددية.



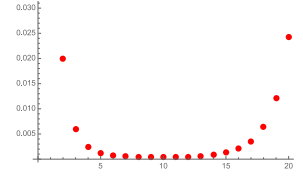
هنري پوانكاري (1854-1912). كم عدد الرياضياتيين الذين كانوا مشهورين بما يكفي خلال حياتهم حتى أن صورهم تمت طباعتها على قطع شوكولاته؟

Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. Ainsi, pour prendre un exemple simple,

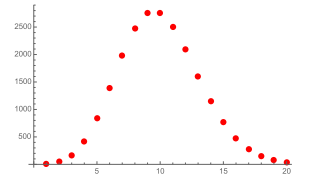
considérons les deux séries qui ont pour terme général $\frac{n!}{1000^n}$ et

$\frac{1000^n}{n!}$ Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement, [...] mais ils regarderont la seconde comme divergente [...]. Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, [...] et la seconde comme convergente [...] Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques ; la seconde, dans les applications numériques.

مثال يونانكارې مثالي: انظروا إلى قيم $\frac{1000^n}{n!} x^n$ و $\frac{n!}{1000^n} x^n$ من أجل $x = 100$ و 0.1. على التوالي، و $n = 1, \dots, 20$.



$$\frac{n!}{10^n} \text{ من أجل } n \in \{1, \dots, 20\}$$



$$\frac{10^n}{n!} \text{ من أجل } n \in \{1, \dots, 20\}$$

عقدة السرج ومعادلة أويلر

هيا بنا لنلقي نظرة على مثال بسيط للغاية يوضح أنه لا يوجد اختيارات: من أجل فهم المعادلات التفاضلية العادية، حتى مع معاملات كثيرة الحدود، علينا التعامل مع المتسلسلات المتباعدة. ليكن النظام البسيط الآتي:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 ; \quad \frac{dy}{dt} = -y + x$$

يطلق عليه اسم عقدة السرج لأنه يشبه السرج من أجل $x > 0$ وعقدة من أجل $x < 0$. قد يبدو هذا موقفاً متدهوراً للغاية ولكنه يظهر في تمام البعد 1: في المبدأ، للجزء الخطي من الحقل الشعاعي قيمة ذاتية واحدة منعدمة. لذلك تظهر عقد السرج المتشابهة في عائلات لحقول أشعة في المستوي ذات وسيط واحد عام.

تُظهر الصورة في الهامش لوحة الاطوار للحقل الشعاعي هذا. من الواضح أننا نرى منحنيًا أملس غير متغير يمر بالمبدأ (ويختلف عن محور الفواصل). هذا الأخير يسمى المنوَّعة المركزية. خلال البحث عن هذا المنحني باعتباره التمثيل البياني $\{(x, y(x))\}$ نحصل على الفور على معادلة أويلر $y = x - x^2 \frac{dy}{dx}$. إذن معادلة المنوَّعة المركزية هي

الدالة من الصنف C^∞ المعرفة بـ

$$y = f(x) = \exp \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{t} \exp \frac{-1}{t} dt$$

وعلينا أن نفهم كيف ترتبط هذه الدالة بالمتسلسلة الشكلية المتباعدة \hat{f} .

دالة أويلر، ظاهرة ستوكس، إلخ.

أتبع العرض الذي قدمه هاردي⁵⁸.

بندل المتغير ونضع $t = x/(1+xw)$ بحيث يكون

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-w) \frac{x}{1+xw} dw.$$

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-w) (x - x^2 w + x^3 w^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^n w^{n-1}) dw$$

$$+ (-1)^n x^{n+1} \int_0^\infty \frac{\exp(-w) w^n}{1+xw} dw$$

$$= x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1)!x^n + R_n(x).$$

الحد R_n قابل للحد من الأعلى بسهولة. إذا كان $0 < w$ ، $0 < x$ فإن $1 < 1+xw$ بحيث يكون

$$|f(x) - (x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1)!x^n)| \leq n!x^{n+1}.$$

بعبارة أخرى، فإن المتسلسلة الشكلية \hat{f} مقارنة للدالة C^∞ f .

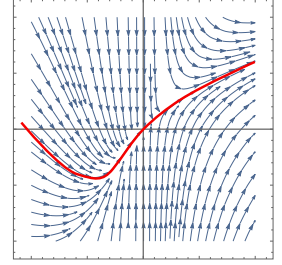
في الواقع، يمكن قول الكثير. نفترض الآن أن x عدد مركب وليس عددًا حقيقيًا سالبًا.

إذن، الصيغة التي تحدد f منطقية تمامًا، بحيث تكون f دالة هولومورفية في $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$. لنفترض الآن أن x ينتمي إلى قطاع حيث تكون عمدته في المجال

$$[-\pi + \delta, \pi - \delta], \text{ من أجل } \delta \text{ ما موجب تمامًا. في هذا القطاع، } |1+xw|$$

مصغور (لا يزال w عددًا حقيقيًا موجبًا) حتى نحصل على متباينة

$$|f(x) - (x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1)!x^n)| \leq C(\delta)n!|x|^{n+1}$$



صورة المراحل لعقدة الشرح.



تحذير: تغييرات خطيرة في المتغيرات!

58 G. H. Hardy. *Divergent series*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992. With a preface by J. E. Littlewood and a note by L. S. Bosanquet, Reprint of the revised (1963) edition.



"على الشباب إثبات المبرهنات، وعلى الكبار تأليف الكتب". هاردي. (1877-1947).

نذكر أن متسلسلة $\sum_k a_k x^k$ مقارنة لدالة $f(x) \mapsto x$ إذا كان لدينا من أجل كل n

$$f(x) - \sum_{k=1}^n a_k x^k = o(x^n).$$

من أجل x في هذا القطاع. وتعبير آخر، فإن المتسلسلة الشكلية \hat{f} مقارنة للدالة الهولومتشاكلة f في أي قطاع لا يحتوي نصف المستقيم الحقيقي السالب. لا يزال بالإمكان قول المزيد. لنواصل عرض هاردي لمعالجات أويلر.

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^x \frac{\exp(-1/t)}{t} dt = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$$

$$= -\exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{li}\left(\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$$

حيث li يرمز إلى اللوفاريم التكاملي المعزف من أجل $0 < v < 1$ بـ

$$\text{liv} = \int_0^v \frac{du}{\log u} = -\int_{\log \frac{1}{v}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du.$$

لدينا

$$-\text{li}(\exp(-y)) = \int_y^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du - \int_0^1 \frac{1 - \exp(-u)}{u} du$$

$$- \int_1^y \frac{du}{u} + \int_0^y \frac{1 - \exp(-u)}{u} du$$

$$= -\gamma - \log y + y - \frac{1}{2.2!} y^2 + \frac{1}{3.3!} y^3 - \dots$$

حيث γ هو ... ثابت أويلر. ومنه يأتي

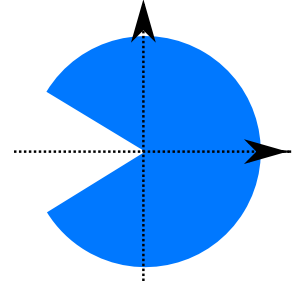
$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \log x + \mathcal{S}\left(\frac{1}{x}\right)$$

حيث

$$\mathcal{S}(y) = -\exp(y) \left(\gamma - y + \frac{1}{2.2!} y^2 + \frac{1}{3.3!} y^3 - \dots \right).$$

لاحظوا أن $\mathcal{S}(y)$ هي دالة صحيحة، أي هولومتشاكلة ومنتظمة (وحيدة القيمة) في المستوي المركب كله. يوفر هذا امتدادا هولومتشاكلا لـ f على الغطاء الكوني لـ

$$\mathbf{C} \setminus \{0\}. \text{ عندما ندور مرة واحدة حول المبدأ، تتغير الدالة بـ } 2i\pi \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$



ياكبان

$$\text{lix} = \int_0^x \frac{dt}{\log t} \text{ لاحظوا أن}$$

معرف أيضا من أجل $1 < x$ بالتكامل الموسع

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{\log x} \right).$$

إنه مشهور في نظرية الأعداد لأنه يعطي قيمة مقربة دقيقة للعدد $\pi(x)$ للأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي x عندما يؤول x إلى اللامتهبي.

لدينا على الخصوص

$$|\pi(x) - \text{lix}| = o\left(\frac{x}{(\log x)^N}\right)$$

من أجل كل $1 \leq N$.

نظرا إلى أن هذا الفصل يخض المتسلسلات المتباعدة، قد تكون فكرة جيدة أن أذكر النشر المقارب المتباعد

$$\text{lix} = \frac{x}{\log x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\log x)^k} \right)$$

الذي يجب أن تكونوا قادرين على إثباته بأنفسكم، بالمكاملة بالأجزاء.

لنلخص خصائص f :

- إنها دالة هولومتشاكلة متعددة القيم وهي معرفة في كل المستوي، أو بشكل أكثر دقة هي دالة هولومتشاكلة على سطح ريمان للوفاريتم.
- في أي قطاع (قياس) زاويته أصغر من 2π ، تكون الدالة f مقاربة للمتسلسلة الشكلية

$$\hat{f}(x) = x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots$$

- الامتداد الأوحده، أي التغير في قيمة $f(x)$ عندما تدور x حول المبدأ، هو $2i\pi \exp \frac{1}{x}$ ، وهو مسطح في أي قطاع زاويته أصغر من 2π . هذا يعني أن أي تحديدين أحاديي القيمة لـ f في قطاع لهما نفس النشر المقارب \hat{f} .

تباعد المتسلسلة الشكلية \hat{f} يتوافق مع خاصية "متعددة القيم إلى دالة مسطحة مقربة" للدالة f . ليست هذه هي المرة الأولى التي يتم فيها تفسير ظاهرة في المجال الحقيقي من خلال ظاهرة أخرى في المجال المركب. وهذا ما يسمى ظاهرة ستوكس (تم اكتشافها في 19 مارس 1857 على الساعة 3 صباحاً).

بالطبع مثال أويلر مجرد مثال. الحقيقة الرائعة هي أن هذا المثال مهم وأن نظرية جميلة قد تم تطويرها. قد يكون للمعادلات التفاضلية التحليلية أو حتى الجبرية حلول هي متسلسلات متباعدة، ولكن يمكن للمرء أن يعطي معنى محددًا جيدًا لمجموعها، كدوال متعددة القيم هولومتشاكلة.

نمتنع عن الاستمرار في هذا الاتجاه لأن زهنتنا لن تذهب إلى حيث نخطط أن نذهب. حتى في الزهات من الجيد الإبحار نحو اتجاه من الاتجاهات.

للحصول على وصف رائع للتطور التاريخي للنظرية، أوصي بشدة بـ⁵⁹. للحصول على وصف أكثر انتظامًا، على مستوى يسهل الوصول إليه، ستكون ملاحظات هذه المحاضرة⁶⁰ مفيدة.

هذه الورقة⁶¹ هي عرض تقديمي حديث للمتسلسلات المتباعدة نُشرت بمناسبة الذكرى 300 لميلاد ليونهارد أويلر.

إن "دالة هولومتشاكلة على سطح ريمان للوفاريتم" هي طريقة قديمة للتحديث عن $\phi(\log z)$ حيث ϕ دالة هولومتشاكلة معرفة على المستوي المركب. هذه الأخيرة متعددة القيم لأنه يتم تعريف $\log z$ "بتقريب $2i\pi$ ".

⁵⁹ J.-P. Ramis. [Poincaré et les développements asymptotiques \(première partie\)](#). *Gaz. Math.*, 133:33–72, 2012.; and J.-P. Ramis. [Les développements asymptotiques après Poincaré: continuité et divergences](#). *Gaz. Math.*, 134:17–36, 2012.

⁶⁰ M. Loday-Richaud. [Divergent series and differential equations](#). Part of a book. Submitted. 2014, hal-01011050.

⁶¹ V. S. Varadarajan. [Euler and his work on infinite series](#). *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 44(4):515–539, 2007.



أوقيانوسان كوشي
(1789 – 1857).

•

التقارب

حساب النهايات لـ كوشي

RESUMÉ D'UN MÉMOIRE
SUR
LA MÉCANIQUE CÉLESTE
ET SUR
UN NOUVEAU CALCUL APPELÉ CALCUL DES LIMITES (*).
(Lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 11 octobre 1821.)

ثبت الآن ما يسمى مبرهنة بويزو التي تعطي توسيطة محلليا لمنحن جبري مركب في جوار لنقطة مفردة، بواسطة متسلسلة قوى متقاربة. لن نتبع نهج بويزو الأصلي. بدلاً من ذلك، نفضل استخدام طريقة قدمها كوشي تحت اسم حساب النهايات⁶².

⁶²A. Cauchy.
Œuvres complètes, volume 12.
Gauthier Villars, 1882.

يجب أن تُفهم كلمة نهاية على أنها حد المصطلح الحالي هو "طريقة الحد من الأعلى".

مبرهنة الدالة الضمنية

أبدأ بإثبات مبرهنة كوشي للدالة الضمنية التقليدية. كان هذا هو الإثبات النموذجي في الكتب المدرسية القديمة ولكن كثيراً ما يتم تجاهله اليوم واستبدال أساليب أكثر قوة به، تستند إلى مبرهنات النقطة الثابتة. ومع ذلك، فإن له بعض المزايا: فهو أولي للغاية ويكاد يكون توافيقياً بالكامل. أوصي بهذا الكتاب⁶³ لمقاربة تاريخية مثيرة للاهتمام.

لنشر بواسطة K إلى حقل مميزته 0 ، مجهز بنظام، وهو تطبيق $|x| \mapsto x$ من K في \mathbf{R}_+ بحيث يكون $|xy| = |x||y|$ و $|x+y| \leq |x| + |y|$. نفترض أن $|x| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$ وأن K المجهز بـ $|\cdot|$ كامل أي أن متتاليات كوشي تتقارب فيه. تدور في ذهني بشكل أساسي حالة \mathbf{C} و \mathbf{R} ولكن هناك العديد من الأمثلة الأخرى (الحقول الـ p -رتابية (p -adic) على وجه الخصوص).

⁶³S. G. Krantz and H. R. Parks. *The implicit function theorem*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. History, theory, and applications.

علاوة على ذلك، نفترض أن النظام ليس هو النظام التافه والذي بالنسبة إليه $|x| = 1$ من أجل كل العناصر غير المتعدمة x .

نرمز بـ $K\{x\}$ إلى حلقة المتسلسلات

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} u_k x^k$$

التي من أجلها تكون u_k في K وتحقق متباينة من الشكل

$$|u_k| \leq Cr^k |u_0| \leq Cr^k$$

من أجل C و r موجبين تماما. نظراً إلى أن K كامل، فإن ذلك يتوافق مع المتسلسلات المتقاربة مطلقاً في جوار للصفير (براعم الدوال التحليلية بالنسبة إلى C ، \mathbf{R}). للتبسيط، سنقول إن عناصر $K\{x\}$ هي متسلسلات متقاربة.

وبالمثل، نرمز بـ $K\{x, y\}$ إلى حلقة المتسلسلات

$$F(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$$

التي تكون متقاربة، أي التي تكون فيها الـ a_{ij} في K وبحيث يوجد C و r موجبان تماما بحيث يكون بالنسبة إلى كل i, j

$$|a_{ij}| \leq Cr^{i+j}.$$

مبرهنة (مبرهنة الدالة الضمنية). لتكن F تنتمي إلى $K\{x, y\}$ بحيث يكون $F(0, 0) = 0$ و $\partial F / \partial y(0, 0) \neq 0$. توجد متسلسلة متقاربة $f(x)$ من $K\{x\}$ بحيث يكون $f(0) = 0$ و $F(x, f(x)) = 0$. الحلول (x, y) للمعادلة $F(x, y) = 0$ في جوار $(0, 0)$ في K^2 هي بالضبط الثنائيات $(x, f(x))$.

الإثبات هو الآتي. إذا استبدلنا سلسلة شكلية $y = \sum_{k \geq 1} u_k x^k$ في المتسلسلة

$$\sum_{l \geq 1} v_l x^l \quad \text{الشكلية} \quad \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \quad \text{(مع } a_{00} = 0\text{)}, \quad \text{فإن النتيجة متسلسلة شكلية} \quad \sum_{l \geq 1} v_l x^l$$

تتعلق معاملاتها بالـ u_k والـ a_{ij} . لنحسب الحدود الأولى في

$$\sum_{i, j} a_{ij} x^i \left(\sum_{k \geq 1} u_k x^k \right)^j = \sum_{l \geq 1} v_l x^l.$$

نجد

$$v_1 = a_{10} + a_{01}u_1$$

$$v_2 = a_{20} + a_{11}u_1 + a_{02}u_1^2 + a_{01}u_2$$

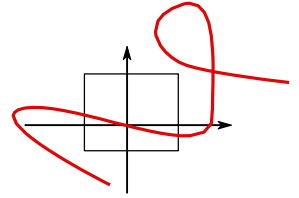
$$v_3 = a_{30} + a_{21}u_1 + a_{12}u_1^2 + a_{03}u_1^3 + a_{11}u_2 + 2a_{02}u_1u_2 + a_{01}u_3$$

$$v_4 = a_{40} + a_{31}u_1 + a_{13}u_1^3 + a_{04}u_1^4 + a_{21}u_2 + 2a_{12}u_1u_2 + 3a_{03}u_1^2u_2 + a_{02}u_2^2 + a_{11}u_3 + 2a_{02}u_1u_3 + a_{01}u_4$$

...



منحنيات التسوية لدالة منتظمة $F(x, y)$



حتى لو كان هذا معقدًا، يمكننا أن نثبت فورًا عن طريق الاستقراء أن v_l يكتب على هذا النحو

$$v_l = G_l \left((a_{ij})_{i+j \leq l}, (u_k)_{k \leq l-1} \right) + a_{0l} u_l$$

حيث G_l عبارة كثيرة الحدود بمعاملات صحيحة موجبة تتضمن الـ a_{ij} من أجل $i+j \leq l$ ، والـ u_k من أجل $k \leq l-1$.

تمثل مشكلتنا في تبيان أنه في ظل وجود متسلسلة متقاربة F ، توجد متسلسلة متقاربة فريدة $f(x)$ بحيث يكون $F(x, f(x)) = 0$. بعبارة أخرى، لدينا الـ a_{ij} حيث $|a_{ij}| \leq Cr^{i+j}$ ونريد أن نبيّن أن للمعادلات $v_l = 0$ ذات المجهول u_l حلا وحيدا متقاربا.

من خلال فرضيتنا، $a_{0l} \neq 0$ ، بحيث، بعد ضرب F في $-1/a_{0l}$ ، يمكننا افتراض أن $a_{0l} = -1$. بنفس الطريقة، بتغيير x ، y بمضاعفات ثابتة، يمكننا أن نفترض أن $C=1$ و $r=1$. وبعبارة أخرى، نفترض أن $|a_{ij}| \leq 1$ من أجل كل $0 \leq i, j \leq l$.

نظرًا إلى أن G_l يعتمد فقط على u_k من أجل $l-1 \geq k$ (والـ (a_{ij}) ، فإن العلاقات السابقة تُعرّف عن طريق الاستقراء متسلسلة وحيدة u_l (تتعلق بالـ (a_{ij})):

$$u_1 = a_{10}$$

$$u_2 = a_{20} + a_{11}u_1 + a_{02}u_1^2 = a_{20} + a_{11}a_{10} + a_{02}a_{10}^2$$

...

$$u_l = G_l \left((a_{ij})_{i+j \leq l}, (u_k)_{k \leq l-1} \right).$$

مهمتنا هي إظهار أن هذه المتسلسلة $\sum_l u_l x^l$ متقاربة.

الآن تأتي فكرة كوشي البسيطة والجميلة (انظروا ⁶⁴ للحصول على التفاصيل). سنتحقق من البرهنة في مثال واحد نوعي ثم نوضح أن الحالة العامة تتبعها مرة واحدة. في هذا المثال، نختار \bar{F} بحيث تكون $\bar{a}_{0l} = -1$ وكل الـ \bar{a}_{ij} الأخرى تساوي 1:

$$\bar{F}(x, y) = -y + x + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + \dots$$

لتكن \bar{u}_l المتتالية المرتبطة المقابلة لهذا الاختيار لـ \bar{F} والمعرفة بـ

$$\bar{u}_l = G_l \left((1), (\bar{u}_k)_{k \leq l-1} \right) \quad (k=1, 2, \dots).$$

من السهل حل $\bar{F}(x, y) = 0$ حيث أن المعادلة

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - 2y = 0$$

تمرين: اقرأوا هذا الإثبات بعناية وقدموا نسخة أكثر حدة لبرهنة الدالة الضمنية. افترضوا أن F متقاربة في قرص ثنائي

$$\{|x| < \alpha ; |y| < \beta\}$$

وأن $|F(x, y)| < M$ ، في القرص الثنائي هذا.

ما هي القيمة الكبرى $\rho(\alpha, \beta, M, |a_{0l}|) > 0$ ، بحيث يكون بالإمكان ضمان أن f متقاربة على القرص المفتوح الذي شعاعه ρ ؟

⁶⁴ U. Bottazzini and J. Gray. *Hidden harmony – geometric fantasies. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. Springer, New York, 2013. The rise of complex function theory.

لاحظوا أن G_l لا تتضمن \bar{a}_{0l} وهو الـ \bar{a}_{ij} الوحيد الذي لا يساوي 1.

تكافئ $y = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{(1-9x)/(1-x)} \right)$ في جوار 0 يجب علينا أن نختار الإشارة

- وهناك حل تحليلي وحيد

$$y = f(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{(1-9x)/(1-x)} \right)$$

$$= \bar{u}_1 x + \bar{u}_2 x^2 + \dots$$

$$= x + 3x^2 + 13x^3 + 71x^4 + 441x^5 + 2955x^6 + \dots$$

من الواضح أن المعاملات \bar{u}_k تحقق متباينة $\bar{u}_k \leq c\rho^k$ (مع $\rho > 9$) لأن f تحليلية في جوار للصفر.

هيا بنا الآن ندرس حالة F العامة، والتي افترضنا لها $|a_{ij}| \geq 1$. نظرا إلى أن لكثيرات الحدود G_l معاملات صحيحة موجبة، يتبع بالاستقراء أن $|u_l| \leq \bar{u}_l$. بالفعل:

$$|u_{l+1}| = \left| G_l \left((a_{ij})_{i+j \leq l+1}, (u_k)_{k \leq l} \right) \right|$$

$$\leq \left| G_l \left((1), (|u_k|)_{k \leq l} \right) \right|$$

$$\leq \left| G_l \left((1), (\bar{u}_k)_{k \leq l} \right) \right|$$

$$\leq \bar{u}_{l+1}.$$

على وجه الخصوص، $|u_k| \leq c\rho^k$ ، والمتسلسلة $f(x) = \sum_k u_k x^k$ متقاربة. تم تقريبا

الانتهاء من إثبات المبرهنة. لقد وجدنا حلاً مقارباً $y = f(x)$ ولا يزال يتعين علينا تبين أن كل حلول $F(x, y) = 0$ في جوار المبدأ هي من الشكل $(x, f(x))$.

في الحلقة $K\{x, y\}$ ، من الواضح أن العنصر $F(x, y)$ قابل للقسمة على y إذا

و فقط إذا انعدم عندما يتم استبدال 0 بـ y . ينتج التحويل

$(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ أو طوتشاكل لـ $K\{x, y\}$ يحول y إلى

$y - f(x)$. نعلم أن $y = f(x)$ حل لـ $F(x, y) = 0$ بحيث تشير الملاحظة

السابقة إلى أن F يقبل القسمة على $y - f(x)$ في $K\{x, y\}$. حاصل القسمة غير

منعدم في $(0,0)$ لأن

$$F(x, y) = -y + a_{10}x + \dots \text{ و } f(x) = a_{10}x + \dots$$

إذن $F(x, y) = \mathcal{U}(x, y)(y - f(x))$ حيث \mathcal{U} المنتهي إلى $K\{x, y\}$ يحقق

$\mathcal{U}(0,0) \neq 0$. وبالأخص في جوار $(0,0)$ ، فإن المعادلة $F(x, y) = 0$ تكافئ

بالفعل المعادلة $y = f(x)$. تم إثبات مبرهنة الدالة الضمنية. □

للحصول على وصف جيد لحساب النهايات، أنصح بكتاب هيل⁶⁵.

عندما يكون $K = \mathbf{C}$ ، أي عندما تكون F دالة هولومتشاكلية معرفة في جوار لـ $(0,0)$ في \mathbf{C}^2 ، كوشي يعطي صيغة تكاملية للدالة الضمنية:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{y \frac{\partial F}{\partial y}}{F(x, y)} dy$$

حيث C دائرة صغيرة حول المبدأ. أثبتوا ذلك.

⁶⁵E. Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997. Reprint of the 1976 original.

مبرهنة بوزو

تذكروا أننا قمنا بالفعل بحل المعادلات الضمنية من الشكل $F(x, y) = 0$ ، عندما تكون F متسلسلة شكلية غير تافهة في $K[[x, y]]$ ، حيث K حقل مغلق جبرياً مميزته 0.

بيئاً (بمساعدة نيوتن وكرامر) أن أي عنصر غير منعدم $F(x, y)$ في $K[[x, y]]$ يمكن تحليله إلى جداء

$$F(x, y) = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x))$$

حيث $A(0, 0) \neq 0$ والـ n حلا $f_i(x)$ هي متسلسلات شكلية لـ بوزو في $K[[x^*]]$.

هدفنا الآن هو تبيان أنه إذا كانت $F(x, y)$ متسلسلة متقاربة، فالحال كذلك بالنسبة إلى الـ $f_i(x)$.

نفترض أن K حقل مغلق جبرياً ومجهز بنظم كامل.

نظراً إلى أن كل عنصر $f(x)$ من $K[[x^*]]$ يقع في حلقة $K[[x^{1/m}]]$ من أجل m ما، أكبر من أو يساوي 1، أي متسلسلة بالمتغير $x^{1/m}$ ، فإنه لا توجد صعوبة في تعريف متسلسلات بوزو المتقاربة. يُرمز بـ $K\{x^*\}$ و $K\{x^*, y^*\}$ إلى حلقات متسلسلات بوزو المتقاربة بمتغير واحد وبمتغيرين.

على الرغم من أن المتسلسلات في $K\{x^*\}$ متقاربة بحكم التعريف، إلا أن علينا أن نكون حذرين: فهي ليست دوال فعلية معرفة في جوار للصفـر. إنها دوال متعددة القيم بالمتغير x .



فيكتور بوزو (1820 - 1883).

يعد إكمال المغلقة الجبرية لحقل الأعداد الـ p -رتابية مثلاً جيداً.

أمل أن يكون القارئ قد ضمن تعريف حلقة متسلسلات بوزو المتقاربة بمتغيرين: يكفي فقط الوضع في الاعتبار متسلسلات القوى المتقاربة بـ (x, y) ، وتعويض x و y بـ $x^{1/m}$ و $y^{1/m}$ من أجل $1 \leq m$.

مبرهنة ("مبرهنة بوزو"). أي عنصر غير منعدم F من $K\{x, y\}$ يمكن تحليله كجداء

$$F(x, y) = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x))$$

حيث $A(0, 0) \neq 0$ والـ n حلا $f_i(x)$ هي متسلسلات شكلية لـ بوزو في $K\{x^*\}$.

قد يبدو الإثبات مرهقاً بعض الشيء ولكن يجب على القارئ أن يضع في اعتباره أن هذه المبرهنة هي مجرد تعميم بسيط لمبرهنة الدالة الضمنية.

لنذكر بالحقائق الآتية :

1. إذا كانت متسلسلة شكلية لـ $y = f(x)$ بـ $F(x, y) = 0$ ، فإنه يتم الحصول عليها من خلال تطبيق خوارزمية نيوتن مع اختيار جانب من مضع نيوتن في كل خطوة.

2. في كل خطوة من خطوات الخوارزمية، نعرف

$$y_k = u_k x_k^{\beta_k} (1 + y_{k+1}) \text{ و } x_k = x_{k+1}^{\alpha_k}$$

من أجل أعداد صحيحة موجبة α_k و β_k و نستبدل $F_k(x_k, y_k) \rightarrow F_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = x_{k+1}^{-\gamma_k} F_k(x_k, y_k)$ (من أجل عدد صحيح موجب γ_k). لذلك يمكن للمتسلسلة $f(x)$ أيضًا أن توصف بواسطة المتسلسلات $y_k(x_k)$ ($1 \leq k$). من الواضح أن هذا يكافئ إثبات تقارب $f(x)$ أو أي من الـ $y_k(x_k)$.

3. بعد عدد معين من الخطوات، تظل تعدديات $F_k(x_k, y_k)$ أي تقويمات $(F_k(0, y_k))$ مساوية لـ "تعددية نهائية" $mult$ ، $1 \leq mult$ (مبرهنة كرامر).

4. هذا "الثابت النهائي" $mult$ المرتبط بجذر $y = f(x)$ لـ $F(x, y) = 0$ هو أيضًا تعددية الجذر، بكلمات أخرى هو عدد العوامل المتساوية $y - f(x)$ التي تظهر في تحليل F .

يمكننا أن نختم إثبات مبرهنة بويرو.

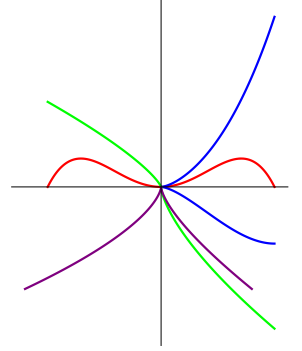
لنفترض أن F متسلسلة متقاربة في $K\{x, y\}$ وليكن

$$F(x, y) = A(x, y)x^r (y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$$

تحليلها كجداء (شكلي مسبقا) لمتسلسلة بويرو. نختار N بحيث تنتمي جميع الـ $f_i(x)$ إلى $K[[x^{1/N}]]$ ونضع $\bar{x} = x^{1/N}$ بحيث يمكن أيضًا رؤية F كعنصر من $K\{\bar{x}, y\}$ ، وجميع الـ f_i كعناصر من $K[[\bar{x}]]$. يتم اختصار عملنا إلى حالة F في $K\{x, y\}$ ، بحيث تكون كل الـ $f_i(x)$ متسلسلات شكلية في $K[[x]]$ وعلينا إثبات أن هذه الـ f_i هي بالفعل متسلسلات متقاربة، أي تنتمي إلى $K\{x\}$.

إذا كانت "التعددية النهائية" $mult$ لجذر $y = f(x)$ تساوي 1، فالمسار الذي تتبعه خوارزمية نيوتن ويؤدي إلى الحل $f(x)$ سيؤدي في النهاية إلى $F_k(x_k, y_k)$ ما، بتعددية تساوي 1. تطبيق مبرهنة الدالة الضمنية على F_k المتقاربة يوضح أن الحل $f(x)$ متقارب أيضًا.

إذا كان لكثير حدود جذر متعدد، فهذا الجذر هو أيضًا جذر لمشتقتها. في هذا السياق،



نقطة مفردة بأربعة فروع من نوع بويرو.

هذا يعني أنه إذا كانت $f(x)$ متسلسلة شكلية في $K[[x]]$ وهي حل لـ $F(x, y) = 0$ بتعددية $mult \leq 2$ ، فإن نفس المتسلسلة حل لـ $\partial F / \partial y(x, y)$ بتعددية أصغر. بالطبع، إذا كانت $F(x, y)$ متقاربة، فالحال كذلك بالنسبة إلى مشتقاتها الجزئية بالنسبة إلى y . استقراء بسيط يهيئ الإثبات. □

نتائج

لقد قمنا بمعظم العمل. حان وقت العُقبَة. أولاً، نحصل على نفس النتائج كالتالي كانت لدينا بالنسبة إلى المتسلسلات الشكلية، بنفس البراهين.

ما زلنا نفترض أن K مغلق جبرياً، مميزته 0 ومجهز بنظم كامل.

مبرهنة (مبرهنة الإعداد لـ فايرشتراس). لتكن $F(x, y)$ متسلسلة متقاربة في الحلقة $K\{x, y\}$ ، والتي لا تقبل القسمة على x . إذن يمكن كتابة F كجداء $A(x, y)P(x, y)$ حيث A, P في $K\{x, y\}$ و $A(0, 0) \neq 0$ بحيث يكون A عنصراً قابلاً للقلب. $P(x, y)$ كثير حدود بالنسبة إلى y . □

مبرهنة. الحلقة $K\{x, y\}$ هي ميدان تحليل وحيد. □

هناك صياغة مفيدة جداً لمبرهنة پويزو يعبر عنها بالتوسيطات.

مبرهنة (توسيط پويزو). لتكن $F(x, y)$ متسلسلة غير منعدمة متقاربة في الحلقة $K\{x, y\}$ ، تنعدم في المبدأ ولا تقبل القسمة على x . إذن توجد

1. أعداد صحيحة $1 \leq m_i$ ،

2. مجموعات مفتوحة $\mathcal{U}_i \subset K$ ، تشمل 0 (بالنسبة إلى الطوبولوجيا المحددة بواسطة النظم)

3. متسلسلات g_i من $K\{x\}$ متقاربة على \mathcal{U}_i ،

بحيث يكون تقاطع المنحني $F(x, y) = 0$ مع جوار صغير لـ $(0, 0)$ في K^2 هو اتحاد صور التطبيقات

$$\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow K^2 \quad ; \quad t \mapsto (t^{m_i}, g_i(t)).$$

علاوة على ذلك، فإن هذه التطبيقات ϕ_i متباينة ولا تتقاطع صورها إلا في المبدأ.

لاحظوا أولاً أن مجموعة الجذور $f_1(x), \dots, f_n(x)$ من $K\{x^*\}$ لمعادلتنا $F(x, y) = 0$ لا متغيرة تحت زمرة قالوا. من أجل كل جذر $f_i(x)$ ، ليكن m_i أصغر عدد صحيح بحيث $f_i(x) \in K\{x^{1/m_i}\}$. إن $f_i(x)$ ، على وجه الخصوص، m_i قالوا مرافقا مختلفا. من خلال إعادة الترتيب، يمكننا افتراض أن $f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)$ هي الـ m_1 مرافقا لـ f_1 . ولا واحدة من هذه الـ $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, m_1$)، هي "دالة لـ x " بالمعنى المعتاد. ومع ذلك، اختيار جذر m_1 أي x يُعرّف قيمة محددة لكل من الـ $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, m_1$). تغيير جذر لـ x يؤدي ببساطة إلى تبديل القيم لـ $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, m_1$). بتعبير مختلف، يوجد عنصر $g_1(t)$ من $K\{t\}$ متقارب بحيث تكون القيم الـ m_1 لـ $f_1(x)$ هي القيم الـ m_1 لـ $g_1(\sqrt[m_1]{x})$ للخيارات الـ m_1 الممكنة لـ $\sqrt[m_1]{x}$. كل هذه النقط مُوسّطة في جوار للصفر بواسطة:

$$\begin{aligned} \phi_1: \mathcal{U} &\rightarrow K^2 \\ t &\mapsto (t^{m_1}, g_1(t)). \end{aligned}$$

يعرف هذا عدداً منتهياً من الـ ϕ_i كما في المبرهنة، واحد لكل مدار من زمرة قالوا على مجموعة الجذور. صور الـ ϕ_i تغطي المحل الصفري لـ F (دائماً في جوار للمبدأ). يبقى أن نبين أن الـ ϕ_i متباينة وأن صورها تتقاطع فقط في المبدأ. أصفار دالة تحليلية منعزلة. في ما يأتي تنص التوطئة ببساطة على أن الشيء نفسه صحيح في $K\{x\}$ بالنسبة إلى K عام. أترك الإثبات كتمرين للقارئ.

توطئة. لتكن h متسلسلة متقاربة من $K\{x\}$. إذا وجدت متتالية $(x_k)_{k \geq 0}$ من $K \setminus \{0\}$ متقاربة نحو 0 بحيث يكون $h(x_k) = 0$ ، فإن $h = 0$. □

نفترض الآن أن ϕ_1 ، على سبيل المثال، ليست متباينة في جوار لـ 0. هذا يعني أن هناك جذراً m_1 ^١ للوحدة بحيث تتراكم الحلول لـ $g_1(\omega_1 t) = g_1(t)$ إلى 0. وفقاً للتوطئة، فإن $g_1(\omega_1 t)$ و $g_1(t)$ متساويان، تطابقياً، وهذا يتعارض مع حقيقة أن m_1 أصغر عدد صحيح يحقق $f_1(x) \in K\{x^{1/m_1}\}$. نفس الحجة تبين أن تقاطع صورتي

$$\begin{aligned} \phi_2: \mathcal{U}_2 &\rightarrow K^2 & \phi_1: \mathcal{U}_1 &\rightarrow K^2 \\ t &\mapsto (t^{m_2}, g_2(t)) & t &\mapsto (t^{m_1}, g_1(t)) \end{aligned}$$

غير تافه (أي يتراكم في المبدأ) إذا وفقط إذا كان $m_1 = m_2 = m$ ويوجد m - جذر ω للوحدة بحيث $g_2(t) = g_1(\omega t)$ ، تطابقاً. في هذه الحالة، تتطابق الصورتان بالفعل في جوار المبدأ. □

عادة ما تسمى صور الـ ϕ_i فروع المنحني $F(x, y) = 0$. توسيط فرع من نوع بويزو وحيد إلى عمل قالوا مقرب.

على وجه الخصوص، إن جواراً للمبدأ في $\{F(x, y) = 0\}$ هو ميويمتشارك مع اتحاد عدد منته من الكرات في K تتقاطع في نقطة واحدة. لاحظوا أن "كرة" هي مجال في \mathbf{R} ، قرص في \mathbf{C} ومجموعة كانتور بالنسبة إلى الأعداد الـ p -رتابية.

الأعداد الحقيقية

حتى الآن، افترضنا أن الحقل K مغلق جبرياً. هيا بنا ندرس حالة الأعداد الحقيقية التي، في التهاية، هي أصل نزهتنا.

لنفترض أن $F(x, y) \in \mathbf{R}\{x, y\}$ ، $F(x, y) \in \mathbf{R}\{x, y\}$ متسلسلة متقاربة غير منعدمة وتنعدم في المبدأ. لننظر إلى مجموعة أصفارها $\{(x, y) | F(x, y) = 0\}$ إما كمنحن مركب في \mathbf{C}^2 أو كمنحن حقيقي في \mathbf{R}^2 ، في جوار $(0, 0)$. هنا، نحن محتمون بشكل أساسي بوصف المنحني الحقيقي.

على الأعداد المركبة، مجموعة الأصفار هذه هي اتحاد الفروع المؤسطة بـ

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathcal{U}_i &\rightarrow \mathbf{C}^2 \\ t &\mapsto (t^{m_i}, g_i(t)). \end{aligned}$$

نظراً إلى أن لـ $F(x, y)$ معاملات حقيقية، فإن محلها الصفري في \mathbf{C}^2 لا متغير إجمالاً تحت المرافقة المركبة. نظراً إلى أن الفروع منفصلة بعيداً عن المبدأ، يجب أن تنتمي نقطة حقيقية مختلفة عن المبدأ إلى فرع يتطابق مع مرافقيه. المرافق المركب لصورة ϕ_i هو صورة

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i : \mathcal{U}_i &\rightarrow \mathbf{C}^2 \\ t &\mapsto (t^{m_i}, \overline{g_i(\bar{t})}). \end{aligned}$$

بالنسبة إلى $F(x, y)$ ما من $\mathbf{R}\{x, y\}$ ، قد يحدث أن يكون الجزء الحقيقي لمجموعة الأصفار مختصراً على المبدأ. أوضح مثال على ذلك هو $x^2 + y^2 = 0$ على الأعداد المركبة يتكون هذا المنحني من فرعين تخيليين $y = ix$ و $y = -ix$ ، اللذين يتقاطعان فقط في $(0, 0)$. بالطبع، كوننا محتمين فقط بالجزء الحقيقي من مجموعة الأصفار لـ F ، فإننا نتجاهل ببساطة جميع العوامل غير القابلة للاختزال من F التي تختصر مجموعات أصفارها على المبدأ (على الأعداد الحقيقية).

لذلك، فإن الفروع التي تشمل نقطا حقيقية مختلفة عن المبدأ هي بحيث

$$\overline{g_i(t)} = g_i(\omega t)$$

من أجل جذر m_i أي ω للوحدة. بكتابة

$$g_i(t) = \sum_{k \geq 1} a_k t^k$$

فإن هذا الشرط يعني

$$\overline{a_k} = a_k \omega^k.$$

ليكن μ أحد الجذرين التربيعيين لـ ω ولنضع $\mu = ts$. إذن

$$t^{m_i} = \mu^{m_i} s^{m_i} = \pm s^{m_i}$$

و

$$g_i(t) = \sum_{k \geq 1} a_k t^k = \sum_{k \geq 1} a_k \mu^k s^k = \sum_{k \geq 1} b_k s^k.$$

الآن، المعاملات b_k حقيقية لأن

$$\overline{b_k} = \overline{a_k} \overline{\mu}^k = a_k \omega^k \mu^{-k} = a_k \mu^k = b_k.$$

هيا بنا نلخص هذه المناقشة.

مبرهنة. لنفترض أن $F(x, y)$ متسلسلة في $\mathbf{R}\{x, y\}$ متقاربة غير منعدمة وبمعاملات حقيقية، تنعدم في المبدأ ولا تقبل القسمة على x . نفترض أن المحل الصفري لـ F في جوار $(0, 0)$ في \mathbf{R}^2 غير مختصر على المبدأ. إذن هذا المحل الصفري هو اتحاد عدد منته من منحنيات من الشكل

$$\phi_i :]-\varepsilon_i, +\varepsilon_i[\rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$t \mapsto (\pm t^{m_i}, g_i(t))$$

حيث g_i متسلسلة متقاربة ذات معاملات حقيقية. الـ ϕ_i متباينة ولا تتقاطع صورها إلا في المبدأ. \square

من السهل أن نرى أن هذه المنحنيات ϕ_i عرضية مع دوائر صغيرة متركزة في المبدأ. بالفعل، تتوافق نقط التماس مع انعدام

$$\frac{d}{dt}(t^{2m_i} + g_i^2(t)) = 2m_i t^{m_i-1} + 2g_i(t)g_i'(t)$$

التي أصفارها منعزلة. لاحظوا أن هذه العبارة لا يمكن أن تكون منعدمة تطابقيا وإلا فسيكون المنحني دائرة.

لقد أثبتنا ما هو أكثر من ادعاء فاوس: محليًا يتكون منحن تحليلي حقيقي من عدد منته من الفروع بحيث تكون الخصائص الآتية محققة.

• كل فرع هوميومورفيك مع $[\varepsilon, +\varepsilon]$ وهو عرضي لوائر صغيرة متركزة في المبدأ ويتقاطع مع هذه اللوائر في نقطتين بالضبط (واحدة بالنسبة إلى $0 < t$ والأخرى بالنسبة إلى $t > 0$).

• لا يتقاطع فرعان مختلفان إلا في المبدأ.

• على طول فرع ما، يتقارب y/x إلى نهاية في $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ عندما يؤول t إلى 0.

هذا يعني أن لكل فرع مماسا معرفا جيدًا في المبدأ.

لاحظوا أنه إذا كانت $(0, 0)$ نقطة منعزلة في محل صفري لـ $F(x, y)$ في $\mathbf{R}\{x, y\}$ ، فكل فرع مركب يتقاطع فقط مع مرافق مركب في المبدأ. في هذه الحالة، يجب أن يكون هناك عدد زوجي من الفروع، مترافقة مثنى مثنى، وتعددية F زوجية. هذه نتيجة طبيعية بسيطة، مماثلة لحقيقة أن كل كثير حدود حقيقي بدرجة فردية له جذر حقيقي.

لنفترض أن $F(x, y)$ متسلسلة متقاربة غير منعدمة وذات معاملات حقيقية، تنعدم في المبدأ، وليست قابلة للقسمة على x ، وتعددية فردية. إذن المنحني الحقيقي $F(x, y) = 0$ غير مختصر على المبدأ. بالنسبة إلى القيم الحقيقية الصغيرة لـ x ، يوجد حل حقيقي واحد على الأقل لـ $F(x, y) = 0$. تم تحويل هذه الحقيقة البسيطة إلى أداة قوية بواسطة يوانكاري الذي استخدمها في مواقف عديدة، على سبيل المثال لإثبات وجود مدارات دورية في مشكلة الأجسام الثلاثة (انظروا⁶⁶ صفحة 70). هذه هي طريقته الاستمرارية.

المخططات الوترية

الطوبولوجيا المحلية لمنحن تحليلي في جوار نقطة مفردة تقترح التعريف الآتي، والذي سيكون مهما في بقية هذا الكتاب.

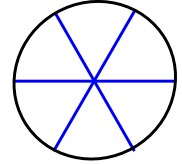
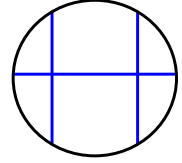
تعريف 1. المخطط الوتري هو مجموعة من $2n$ نقطة على دائرة مجهزة بالتفاف لا يقبل نقطًا ثابتة. بتعبير آخر، مجموعة من $2n$ نقطة مقترنة مثنى مثنى.

على وجه الخصوص لا يمكن لمنحن جبري بلوغ المبدأ على شكل حلزون غير منته.

⁶⁶ H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Tome I. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Reprint of the 1892 original.

2. يكون مخططان وتران متكافئين إذا وجد هوميوتشاكل للدائرة، يحافظ على الاتجاه، يُحوّل الأول إلى الثاني، ويتبادل مع الالتفاف. بكلات أخرى، نحن نعتبر كلمة دورية ذات $2n$ حرفاً حيث يظهر كل حرف مرتين بالضبط. يمكننا أيضاً رسم أوتار تربط الأزواج. يسمى هذا أحياناً كلمة فاوس، أو مواءمة، أو اقتزانا، حسب السياق. اضطررنا إلى الاختيار واخترتنا المخطط الوتري.

3. المخطط الوتري المرتبط بمنحن تحليلي في نقطة (مفردة) هو المخطط الوتري الذي يتم الحصول عليه بتقاطع المنحني مع دائرة صغيرة حول النقطة، حيث أزواج النقط تتوافق مع الفروع. يقال إن هذا المخطط الوتري تحليلي.



مخططان بثلاثة أوتار

نود أن نفهم المخططات الوتريّة التحليلية وطوبولوجيا المنحنيات التحليلية الحقيقية. تحلّوا بالصبر! نحن سنصل إلى هناك.

جدل حول شكل مناقير الطيور؟

"حتى الهندسة ليست خالية من الخلافات والتناقضات الظاهرة، على الرغم من أنه غالباً ما يُقال بخلاف ذلك".

في عام 1751، كتب أويلر مقالاً مثيراً للاهتمام (بالفرنسية) حول شكل المنحنيات التحليلية. يذكر في المقدمة أن

حتى الهندسة ليست مستثناة من الخلافات والتناقضات الظاهرة، على الرغم من أننا في كثير من الأحيان نحافظ على عكس ذلك.

الجدل الذي أراد أويلر توضيحه يتعلق بشكل النقط القرنية⁶⁷. كان هناك خلاف بين السيد المركزي دو لوييطال والسيد فوا دو مالپ. تصرف أويلر كقاض وبدد التناقضات الظاهرة بطريقة رائعة.

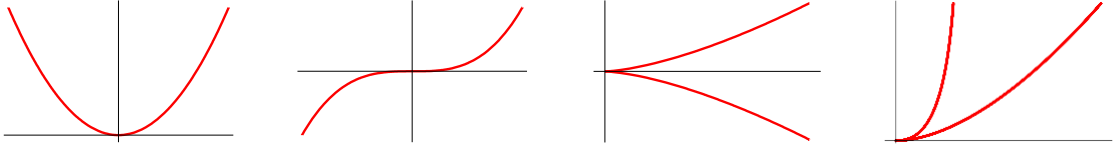
حتى الآن، كانت مناقشتنا تتعلق فقط بطوبولوجيا الفروع بالقرب من نقطة مفردة. لم نقل الكثير حول هندستها. ذكرنا فقط أن الفرع مماساً في نقطة مفردة. كتاب لوييطال عنوانه **التحليل اللامتتهي في الصغر** لذلك الخطوط المنحنية وتم نشره عام 1696. هو أول كتاب مدرسي في حساب التفاضل. يحتوي على تصنيف للفروع المفردة للمنحنيات التحليلية في أربع فئات.

"Même la géométrie n'est pas exemte [sic] de controverses, & des contradictions apparentes, quoi qu'on soutienne souvent le contraire."

هل يجب أن أعطي أمثلة على الخلافات الحديثة؟

67 L. Euler. Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hôpital. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 5:203–221, 1751. See the [Euler archive](#) for English translations and comments

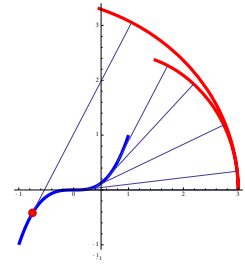
اسمحوا لي أن أعبّر عن هذا في المصطلحات الحديثة. نختار الإحداثيات بحيث يكون المماس ممثلاً بـ $y = 0$. محلياً، فرعنا هو اتحاد نصفي فرعين وهما ريسان بيانان لدالتين $h_1(x)$ ، $h_2(x)$ ، معرفتين في مجالين صغيرين من النموذج $[0, \varepsilon[$ أو $]-\varepsilon, 0]$. هاتان الدالتان ملساوان، بعيداً عن المبدأ.



الحالات الأربع هي :

1. معرفة h_1 على $]-\varepsilon, 0]$ و h_2 على $[0, \varepsilon[$ ومشتقاتهما الثانيان لهما نفس الإشارة. في هذه الحالة، يكون المنحني محذباً (أو مقعراً) وهو على جانب واحد من مُماسه.
2. نقطة انعطاف. نفس الشيء كما سبق إلا أن للمشتقين الثانيين إشارتين مختلفتين.
3. نقطة قرنية قياسية. هنا، h_1 و h_2 معرفتان على نفس الجانب من المبدأ ومشتقاتهما الثانيان لهما إشارتان متناظرتان. لذلك فإن لنصفي الفرعين تحديدين متناظرين.
4. منقار طير ("نقطة رجوع ذات منقار طير") حيث يكون للمشتقين الثانيين نفس الإشارة على نصفي الفرعين.

الحدود بين الهندسة والطوبولوجيا غير واضحة. أقول إن الطوبولوجيا تتعامل مع الخصائص اللامتنغيرة تحت الهوميومورفيشات واللامتنغيرات الهندسية تحت التشاكلات، مثل التقايسات الإقليدية، على سبيل المثال، والأوطوتشاكلات الإسقاطية، أو ببساطة التفاكلات. على سبيل المثال، سأعتبر وجود مماس لمنحن خاصة هندسية.



طول الخيط زائد الطول المنحني على طول المنحني يساوي ثابتاً.

من السهل جداً العثور على أمثلة للفئات الثلاث الأولى. بالنسبة إلى الفئة الرابعة، قدّم لوييطال المثال الآتي. نقوم بلق خيط على منحن بنقطة انعطاف، وربطه في نقطة أخرى على المنحني. عندما نفكّه بإبقائه مشدوداً، ستصف نقطة النهاية منحنيًا (يسمى ناشراً) سيُعطينا مثل منقار الطائر هذا. اخترت ببساطة $y = x^3$ كمنحني انعطاف وسألت حاسوبي ليرسم منحنيّ لوييطال. النتيجة في الهامش.

بالفعل، نصف نقطة نهاية الخيط منحنيًا أحمر يمثل منقار طائر عندما يكون الخيط مماسًا في نقطة الانعطاف، كما زُعم. نصف الفرعين لها نفس التقعر. هذا واضح "ميكانيكيًا" بالنسبة لـ لويبيطال.

في عام 1740، نشر السيد فوا دو مارپ **كتابًا رائعًا**⁶⁸ كان الغرض منه تجنب تقنيات نيوتن واستخدام ديكارت فقط. يجب أن أذكر الجدل بين الإثليز والفرنسيين خلال القرن الثامن عشر حول ديكارت ونيوتن.

كتوضيح لهذه الحرب الأثلو- فرنسية، أوصي بـ **رسائل حول ديكارت ونيوتن**، بقلم فولتير.

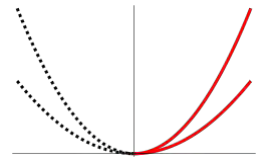
الفرنسي الذي يصل إلى لندن سيجد الفلسفة، مثل كل شيء آخر، متغيرة كثيرًا هناك. لقد ترك العالم ممتلئًا، وهو الآن يجده فراغًا. في باريس، يُرى الكون مؤلفًا من دوامات من المادة الرقيقة. لكن لا يوجد شيء مثله في لندن. في فرنسا، ضغط القمر هو الذي يسبب المد والجزر. لكن في إثلترا، البحر هو الذي يجذب نحو القمر. لذلك عندما تعتقدون أن القمر يجب أن يجعله مدًا عاليًا، يتخيل هؤلاء السادة أنه يجب أن يكون مدًا منخفضًا، وهو أمر لا يمكن إثباته لسوء الحظ. لكي تكونوا قادرين على القيام بذلك، من الضروري الاستفسار عن القمر والمد والجزر في لحظة الخلق.

على أي حال، يدور كتاب فوا حول نقاش، لا يزال نشطًا حتى اليوم: هل يجب أن تستخدم الهندسة الجبرية أدوات متسامية من الهندسة التفاضلية؟ من بين "المبرهعات" في هذا الكتاب، يجد المرء الادعاء بأن لويبيطال مخطئ وأن مناقير الطيور غير موجودة. يدرك فوا مثال لويبيطال لكنه ينتقده بالطريقة الآتية. افترضوا أنكم نظرتم إلى قطعين مكافئين $y = x^2$ و $y = 2x^2$ ولكن فقط من أجل $x \geq 0$. تحصلون على نصفي قطعين مكافئين محدين يبدو اتحادهما كمنقار طائر. لذلك، وفقًا لـ فوا، مثال لويبيطال لمنقار الطائر مصطنع: المنحني التحليلي الكامل يحتوي على فرعين أمليين، كما في مثال القطعين المكافئين، ويفقد الإنشاء الميكانيكي باستخدام الخيط نصف المنحني. منقطع؟ يواصل فوا و"يثبت" أن مناقير الطيور مستحيلة لمنحن تحليلي.

يذهب "الإثبات" بصورة أو بأخرى على طول السطور الآتية. يكون لفرع الشكل $y = ax^{p/q} + o(x^{p/q})$ من أجل عددين صحيحين أوليين نسبيًا p, q مع $q < p$ إذا كان $y = 0$ هو المماس في 0 . إذا كان هناك منقار، فيجب أن يكون q زوجيًا لأنه في خلاف ذلك سيكون y معرفًا من أجل كل قيم x ، سواء كانت موجبة أو سالبة.

⁶⁸ J.-P. Gua de Malves. *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul Différentiel, les Propriétés, ou affectations principales des lignes géométriques de tous les ordres*. Briasson, 1740.

"Un Français qui arrive à Londres trouve les choses bien changées en philosophie comme dans tout le reste. Il a laissé le monde plein ; il le trouve vide. À Paris, on voit l'univers composé de tourbillons de matière subtile ; à Londres, on ne voit rien de cela. Chez nous, c'est la pression de la lune qui cause le flux de la mer chez les Anglais, c'est la mer qui gravite vers la lune, de façon que, quand vous croyez que la lune devrait nous donner marée haute, ces Messieurs croient qu'on doit avoir marée basse ; ce qui malheureusement ne peut se vérifier, car il aurait fallu, pour s'en éclaircir, examiner la lune et les marées au premier instant de la création."



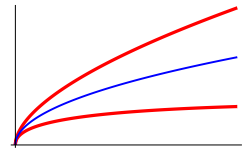
التقعر ناتج عن علامة المشتق الثاني، وهو من رتبة $x^{\frac{p-2q}{q}}$ $a \left(\frac{p}{q} \right) \left(\frac{p}{q} - 1 \right)$. نظرًا إلى أن $p-2q$ فردي و q زوجي، فإن لتحديدي هذا المشتق الثاني إشارتين مختلفتين ولنصفي الفرعين تحديبا معاكسا: ليس هذا منقار طائر. الآن يأتي أويلر الكبير. ورقته واضحة جدا ولا ريب فيها. في البداية، كان مقتنعا بحجة قوا لكنه وجد خطأ في عام 1744. في عمود بعنوان "هل أويلر يثبت قاعدة كرامر"، يذكر روب برادلي رسالة بين أويلر وكرامر تتعلق بهذا الموضوع. يستخدم أويلر وقوا ولوبيطال متسلسلات بويرو بحرية لا تثير أي شك بشأن تقاريرها. ما هو لافت للنظر في ورقة أويلر هو وصف دور الأعداد المركبة لفهم المنحنيات الجبرية الحقيقية (1751).
ها هو أحد أمثلة أويلر:

$$y = x^{1/2} \pm x^{3/4}.$$

يبدو الرسم البياني في الهامش وكأنه منقار نسر. كيف يمكن للمرء أن يعرف أن هذين الرسمين البيانيين، بعلامات \pm ، ينتميان بالفعل إلى نفس الفرع ولا يمكن إكمالهما كما في مثالنا مع قطعين مكافئين؟ يقدم أويلر حجة مقنعة باستخدام الأعداد المركبة. أنا أشجع القارئ بشدة على العثور على الخطأ في "إثبات" قوا.
يتم إبعاد علامات الجذر. يجد أويلر

$$y^4 - 2xy^2 + x^2 - x^3 - 4yx^2 = 0$$

وعليكم رسم مضع نيوتن والتحقق من أن هناك بالفعل فرعا واحدا في المبدأ. لم تعد مناقير الطيور اليوم مذكورة في كتب الرياضيات. تسمى هذه النقط الآن القرونات من الرتبة الثانية، بطريقة أكثر حيادية. في بعض الأحيان، لا يزال المرء يرى اسم المنحني رامفونيد (مقاربية)، من اليونانية "rampho" المرتبطة بالمنقار الملتوية التي لدى الطيور الجارحة.



أشكال مناقير العصافير من جزر فالابافوس كانت مهمة في اكتشاف داروين للتطور. ©

في ختام هذا الفصل، لدي نصيحة واحدة فقط: توقفوا عن قراءة هذا الكتاب وقوموا بقراءة (بعض) أوراق أويلر. حاليا!



شريط موبوس في القاعة الرئيسية لـ IMPA،
حيث تمت كتابة المسودة الأولى لهذا الكتاب.

موبيوس وشريطه



أوقوست فرديناند موبوس
(1825–1884).

هذا هو عنوان كتاب⁶⁹ مخصص للرياضيات الألمانية في القرن التاسع عشر. في هذا الفصل، نناقش الهيكل المرتبط بعملية إزالة المفردية في المنحنيات التحليلية، الشيء الذي يؤدي إلى بعض القلائد الجميلة المصنوعة من شرائط موبوس.

الإحداثيات القطبية

انظروا إلى التطبيق المألوف الآتي من الأسطوانة إلى المستوي

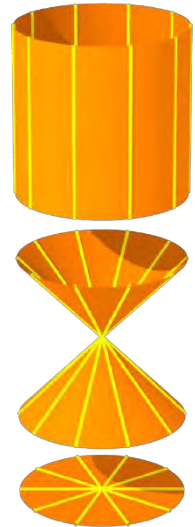
$$\Phi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

يتمتع هذا التطبيق بالخصائص الآتية:

1. اقتصار Φ على $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ تفاكل على المستوي المثقوب $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 2. Φ "يقوّض" الدائرة $\{0\} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ إلى المبدأ.
 3. الصورة العكسية بواسطة Φ لنقطة مختلفة عن المبدأ تشمل نقطتين بالتحديد، من الشكل (ρ, θ) و $(-\rho, \theta + \pi)$.
- الخاصية 3. ليست ملائمة جدًا لنظام الإحداثيات وهذا هو السبب الرئيسي لتعديل طفيف لـ Φ بعد قليل. في بعض الأحيان، يتم اقتصار Φ على $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ لكن هذا يقدم حدًا مصطنعًا.
- الخاصية 2. مثيرة للاهتمام في سياق إزالة المفردية. في جوار صغير للمبدأ، يتصرف Φ^{-1} مثل مجهر. يتم تحويل الدوائر الصغيرة $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ التي يحيطها $2\pi\varepsilon$ بواسطة Φ^{-1} إلى دائرتين كبيرتين $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \times \{\pm \varepsilon\}$ ، يحيطها 2π .

⁶⁹ R. F. John Fauvel, Robin Wilson. *Moebius and his Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany*. OUP, 1993.



كمثال ساذج أول، نعتبر مستقيماً D يشمل المبدأ. تتكون صورته العكسية $\Phi^{-1}(D)$ من "مستقيمين" $\theta = \alpha$ و $\theta = \alpha + \pi$ بالإضافة إلى الدائرة $\{0\} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. لذلك، إذا تقاطع مستقيمان مختلفان D_1 و D_2 في المبدأ، فإن صورتها العكسيتين تصحان منفصلتين بطريقة ما. أزالنا العملية Φ^{-1} نقطة التقاطع. "بطريقة ما" الأخيرة ترجع إلى حقيقة أن $\Phi^{-1}(D)$ تشمل $\Phi^{-1}(0,0)$ بحيث لا يمكن أن تكون الصورتان العكسيتان لمستقيمين متقاطعين منفصلتين.

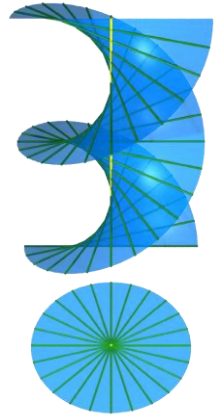
إجراء أفضل هو ما يأتي. لنكن X مجموعة جزئية من المستوي، لنشر به $\Phi^{-1}(X)$ إلى مُغلقة $\Phi^{-1}(X \setminus \{(0,0)\})$ في $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. مع هذا التعريف، فإن $\Phi^{-1}(D_1)$ و $\Phi^{-1}(D_2)$ منفصلتان بالفعل. نقول إن Φ^{-1} تحويل تام.

من أجل تصور Φ ، انظروا إلى السطح S المغطس في $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ والمعرّف به $x \sin \theta = y \cos \theta$. هذا مشابه لشلم حلزوني مزدوج. تمثل الصورة في الهامش سلماً بسيطاً في $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi[$. لاحظوا أن S سطح أملس. يتوافق تطبيقنا Φ مع الإسقاط على المستوي الأفقي \mathbf{R}^2 و $\Phi^{-1}(0,0)$ هي المجموعة العمودية $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \times \{(0,0)\}$.

كمثال ثانٍ بسيط، ليكن المنحني المستوي $x^3 = y^2$ ، الذي يحتوي على نقطة مفردة قريبة في المبدأ. محوِّله التام تمثله المعادلة $\rho = \sin^2 \theta / \cos^3 \theta$ (بمركبتين، كما ينبغي أن يكون) ولم يعد مفرداً. أصبح الآن أملس ومماساً للدائرة $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \times \{(0,0)\}$. الفكرة العامة هي أن المحوِّل التام لمنحنٍ "مفرد أقل" من المنحني الأصلي في المبدأ. بتكرار العملية عدداً معيناً من المرات، سيتحول المنحني المفرد، مفعلاً بالأمل، إلى منحنٍ أملس. قبل المضيّ قدماً، يجب أن نصلح المشكلة التي تكمن في أن الصور العكسية بواسطة Φ تشمل نقطتين. بتكرار العملية n مرة، نحصل على 2^n نقطة وهذا أمر يصعب التعامل معه.

شريط موبوس

لاحظوا أن الالتفاف الذي يرسل (ρ, θ) إلى $(-\rho, \theta + \pi)$ ليس له فقط ثابتة. طريقة سهلة للتخلص من الصور العكسية المزدوجة لـ Φ هي مطابقة النقطتين (ρ, θ) و $(-\rho, \theta + \pi)$ في $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. حاصل القسمة المقابل هو سطح أملس. الالتفاف يعكس الاتجاه لأن محده يعقوبي يساوي -1 .



اللوحة 27 من

Instruction en la science de perspective,

ل. ه. هونديوس (1625).



سطح حاصل القسمة ليس قابلاً للتوجيه: هذا هو شريط مويوس الشهير⁷⁰. يمكن التعبير عن نفس الشيء بالطريقة الآتية. مجموعة المستقيمتين التي تشمل المبدأ هي دائرة، ويمكن توسيبتها

- إما بميلها t وهو عنصر من المستقيم الإسقاطي الحقيقي $\mathbf{P}_R^1 \simeq \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.
 - وإما بزوايتها θ ، المعرفة حالياً بقياس π .
- ليكن \mathcal{M} فضاء الثنائيات (p, D) حيث p نقطة في المستوي و D مستقيم يمر بالمبدأ، وبالنقطة p . يمكن رؤيته إما على أنه

$$\mathcal{M} = \{((x, y), t) \in \mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R} \cup \{\infty\}) \mid y = tx\}$$

وإما

$$\mathcal{M} = \{((x, y), \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z} \mid x \sin \theta = y \cos \theta\}.$$

يتميز التقديم الأول بوجود معادلة بسيطة للغاية وعيب يتمثل في عدم إظهار \mathcal{M} كسطح أملس بالقرب من $t = \infty$. ومع ذلك، في فكرة ثانية، باستبدال $t' = 1/t$ بـ t ، تصبح المعادلة $x = t'y$ ويختفي العيب. يوضح التقديم الثاني أن هذا هو بالفعل حاصل قسمة دائرة E مغطسة في \mathcal{M} : هذا هو ما يسمى القاسم الاستثنائي. نعرف التطبيق

$$\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

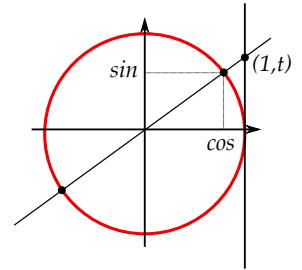
$$((x, y), t) \mapsto (x, y).$$

إنه يحقق بالضبط الخاصيتين المطلوبتين:

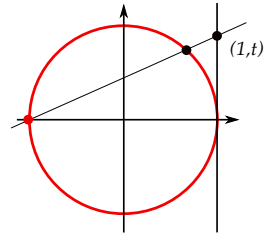
1. Ψ مقتصر على ممتمة القاسم الاستثنائي تفاكل على ممتمة المبدأ في المستوي.
2. Ψ "يقوض" القاسم الاستثنائي إلى المبدأ.

⁷⁰ P. Popescu-Pampu. *La bande que tout le monde connaît. Images des Mathématiques*, 2010.

في مذكراته التي صدرت عام 1895 بعنوان *Analysis Situs*، لم يذكر هنري بوانكاريه شريط مويوس ولكن "La Surface unilatère que tout le monde connaît" (السطح الأحادي الجانب الذي يعرفه الجميع).



دائرة الزوايا مقياس π هي مستقيم إسقاطي حقيقي.



دائرة الزوايا مقياس 2π هي أيضاً مستقيم إسقاطي حقيقي.

يأتي مصطلح القاسم من الهندسة الجبرية وهو أمر مريب لأن القاسم الاستثنائي دائرة مغطسة في \mathcal{M} الذي لا يقسم السطح إلى مركبتين، على عكس نواة الحلقة (أو الطوق).

لهذا السبب نقول إن \mathcal{M} قد تم الحصول عليه من المستوي بتفجير صاعد للمبدأ. على العكس من ذلك، Ψ هو تطبيق تفجير هابط.

نظرًا إلى أننا نريد العمل محليًا، فمن المفيد عادةً الاقتصار على السطح المتراص ذي حد

$$\overline{\mathcal{M}} = \{((x, y), \theta) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}).$$

بوضوح، تم الحصول على $\overline{\mathcal{M}}$ من $[-1, +1] \times [0, \pi]$ ، بعد لصق $(t, 0)$ و

$(-t, \pi)$. هذا هو شريط موبوس المألوف: مستطيل حيث تتم مطابقة ضلعين متقابلين بعد إلى مرة واحدة.

يجب أن يكون واضحًا أن حد $\overline{\mathcal{M}}$ مترابط، نظرًا إلى أنه يتم تحويله هوميوتشكليا إلى حد قرص بواسطة Ψ . يجب أن يكون واضحًا بنفس القدر أن مممة القاسم الاستثنائي في $\overline{\mathcal{M}}$ مترابطة. هذه طريقة معقدة للقول إنه إذا قمنا بفتح الشريط على طول الدائرة الوسطى، فإن النتيجة تكون حلقة (أو طوقا) حقيقية. بالفعل، مممة E هوميومتشكالكة مع القرص المثقوب. أخيرًا، الصورة العكسية لدائرة، لنقل $x^2 + y^2 = 1/2$ ، هي دائرة مغطسة في $\overline{\mathcal{M}}$ ، والتي تفصلها إلى قسمين. الأول حلقة غير ملوية، تم تحويلها إلى $x^2 + y^2 \geq 1/2$ بواسطة Ψ والآخر شريط موبوس أصغر، تم تحويله إلى $x^2 + y^2 \leq 1/2$ بواسطة Ψ .

بعض الصور

يُعتبر شريط موبوس بلا شك واحدا من عدد قليل جدًا من الأشياء الرياضية المشهورة خارج عالم الرياضيات. في علم الخيال، في الفن، في الفلسفة وما إلى ذلك. للمتعة فقط، اسمحو لي أن أقتبس بضع جمل من المحلل النفسي الشهير جاك لاكان⁷¹ في ندوته "L'Étourdit"، في عام 1972 :

Le non-enseignable, je l'ai fait mathème de l'assurer de la fixation de l'opinion vraie, fixation écrite avec un x mais non sans ressource d'équivoque. Ainsi un objet aussi facile à fabriquer que la bande de Moebius en tant qu'elle s'imagine, met à portée de toutes mains ce qui est inimaginable dès que son dire à s'oublier, fait le dit s'endurer. D'où a procédé ma fixation de ce point doxa que

المصطلح استثنائي يأتي أيضًا من الهندسة الجبرية ويصعب كثيرا شرحه. منحنيان عرضيان مركبان في سطح مركب لهما عدد تقاطع موجب. يؤدي تفجير نقطة في سطح مركب إلى إنتاج قاسم استثنائي هو الآن مستقيم إسقاطي مركب. لحساب عدد تقاطعه الذاتي، علينا استخدام التشوهات غير الهولومتشكالكة. تبين أن هذا التقاطع الذاتي يساوي -1 والذي اعتبر مفاجئًا واستثنائيًا من قبل المهندسين الجبريين في الماضي.

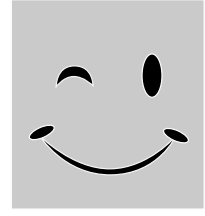


الموقع [Impact Earth](#) يمكنكم من تفجير كوكبنا في أي نقطة. ©

⁷¹ J. Lacan. L'Étourdit. Seuil, 1973.

أنا غير قادر على الترجمة إلى الإنجليزية (أو حتى إلى فرنسية مفهومة).

je n'ai pas dit, je ne le sais pas et ne peux donc - pas plus que FREUD - en rendre compte de ce que j'enseigne, sinon à suivre ses effets dans le discours analytique, effet de sa mathématisation qui ne vient pas d'une machine, mais qui s'avère tenir du machin une fois qu'il l'a produite.



"إلقاء نظرة" هو أنسب من "اقرأ"
في هذه الحالة.

للحصول على تعليقات رائعة (وجادة) على شريط مويوس، أحث القارئ "لإلقاء نظرة" على كتاب ج. سكوت كارتر ⁷².
الشريط أخذ اسمه من اسم مويوس الذي نشره عام 1865، لكن - كالعادة - لم يكن الأول. ليستينش وصف نفس الكائن في عام 1862.
يمكنني بسهولة إنتاج كتاب مليء بأشرطة مويوس، بأشكال وألوان مختلفة إلخ. اسمحو لي أن أقدم هنا عينة صغيرة فقط.
اصنعوا عقدة بسيطة بشريط من الورق وشده. ستحصلون على شيء مثل الذي في الشكل أدناه. عندما تغلقون خراسي الأضلاع المنتظم تكونون قد أنتجتم شريط مويوس.

⁷² J. S. Carter. *How surfaces intersect in space: an introduction to topology*. K & E series on knots and everything 2. World Scientific, 2nd ed edition, 1993.



الفصل الرابع من كتاب الأشكال الطوبولوجية ⁷³ الجميل مكرس لثلاثي الأعمدة المستحيل.

⁷³ G. K. Francis. *A topological picturebook*. Springer-Verlag, 2006

نعتبر قرصًا أو الجزء الداخلي من القطع الناقص في المستوي. للجزء الخارجي طوبولوجيا حلقة. الآن، نتصور هذا القطع الناقص في المستوي الإسقاطي الحقيقي حيث يتعين علينا إضافة المستقيم في اللامنتهي، والذي هو دائرة طوبولوجيًا: نقطة واحدة لكل اتجاه. يتقاطع كل مستقيم في المستوي الإسقاطي مع اللامنتهي في نقطة واحدة بالضبط. يتبوا أن هذا يعني أن مممة القرص في المستوي الإسقاطي هي شريط مويوس.

لا تخلطوا بين المستوي الإسقاطي الحقيقي، الذي يتم الحصول عليه من المستوي \mathbf{R}^2 عن طريق إضافة مستقيم إسقاطي حقيقي (أي دائرة) في اللامنتهي، والمستقيم الإسقاطي المركب، الذي يتم الحصول عليه من \mathbf{C} بإضافة نقطة في اللامنتهي.



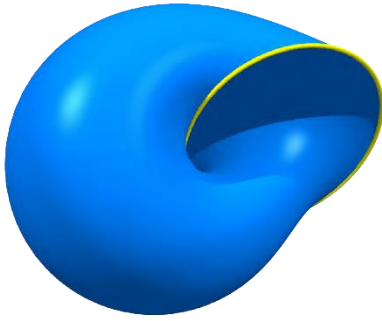
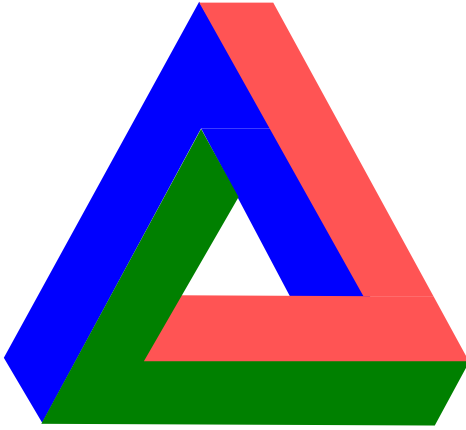
كارينكاتير مويوس، من تأليف
Étienne Lecroart. يمكنكم قراءة
القصة والعودة إلى البداية رأساً على
عقب لتبدأ القصة من جديد!



هذا تكريم من J. Leys ل
J.S.Bach Bach crab cannon
على شريط مويوس (1747)، ل
J. Leys

قد يبدو هذا مضللاً. هل من
الممكن تحقيق ذلك بطريقة تجعله
مصنوعاً من ثلاثة أشباه منحرف
مستوية كما يبدو في الصورة؟ إذا
كانت القطع الثلاث ملتوية، يصف
هذا الكائن شريط مويوس في
الفضاء. إن حده دائرة، كما ينبغي أن
يكون، لكن هذه الدائرة معقودة في
الفضاء: إنها عقدة ثلاثية الوريقات.
هذا يختلف عن الصورة المعتادة التي
يكون فيها الحد غير معقود.



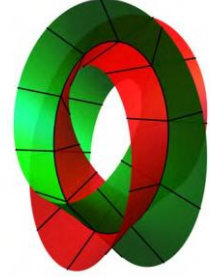


نبدأ من شريط مويوس المعتاد، ونقوم بالتشويه حتى يصبح الحد دائرة مستديرة، نحصل على حلزون مويوس.

هل لاحظتم أن رمز إعادة التدوير هو شريط مويوس؟

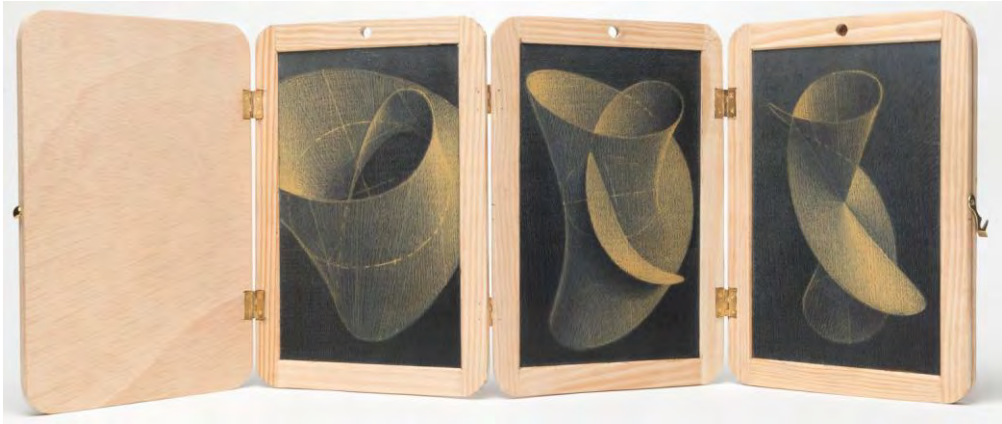


انظروا بعناية إلى المرجل الخاص بأولمبياد ريو 2016. يتكون من دائرة كبيرة مكونة من عدة مفصلات دوارة.



نحت حركي لـ Anthony How

كل مفصلة تحمل أربعة أذرع. ومن ثم، فهذا هو اتحاد قطع كثيرة. تأكدوا من أن هذا يمثل شريطين لموبيوس يتقاطعان على طول نواتهما المشتركة، كما في الهامش. تُظهر الرسومات الآتية تقويض القاسم الاستثنائي في شريط لموبيوس.



تخفيض "موبيوس"،

الصورة النهائية هي مخروط فوق حلقة مغلقة مغموسة في الكرة، بنقطتين مزدوجتين. مخروط فوق دائرة هو قرص، كما كان متوقعًا من تطبيق التفجير الهابط.

crayons de couleur sur ardoises, bois, métal, by Sylvie Pic.

بقطع المخروط بمستو، نجد طريقة ديكارت بحيث تكون معادلة المخروط هي

$$x^3 + y^3 - 3xyz = 0$$

كما في نماذج الأسلاك الآتية.



مخروط من الترتيب الثالث.

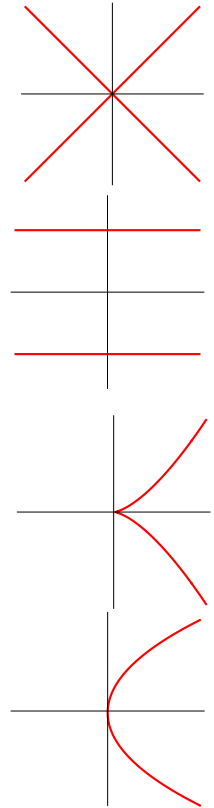
اختبار مجهرنا

هيا بنا نختبر كفاءة مجهرنا Ψ^{-1} .

إذا كانت X أي مجموعة من \mathbf{R}^2 ، فإن محولها التام هو مُغلقة $\Psi^{-1}(X \setminus \{(0,0)\})$ في \mathcal{M} . لنحاول أولاً باستخدام مستقيمين متقاطعين $x^2 - y^2 = 0$. لذا، نضع $y/x = t$ والتي مع $y = \pm x$ تعطي $tx = \pm x$. نظراً إلى أننا نحسب التحويل التام، فنحن نعمل خارج المبدأ ونحصل على $t = \pm 1$. لاحظوا أن $t = \infty$ ليس في محولها التام، كما يمكن أن يُرى بسهولة في الخريطة في $t' = 1/t$. الآن، مُغلقة $t = \pm 1$ في \mathcal{M} تتكون من منحنيين منفصلين. ومن ثم فإن المحول التام لمنحنين أملسين يتقاطعان عرضياً في المبدأ ينتج منحنيين أملسين منفصلين.

ماذا عن نقطة قرنية $y^2 - x^3 = 0$ ؟ هذا يعطي $t^2x^2 - x^3 = 0$ ، والذي يمكن اختصاره بواسطة x^2 بحيث $x = t^2$. لذلك، في الإحداثيين (x, t) ، يكون المحول التام قطعاً مكافئاً أملس، مماساً للقاسم الاستثنائي $(x = 0)$.

الآن، نعتبر $y^2 - x^5 = 0$. المحول التام هو $t^2 = x^3$ وبالتالي فهو نقطة قرنية. من الواضح أن تفجيراً واحداً لن يكون كافياً وعلينا أن نفجر مرة أخرى. بالضبط مثل طريقة خوارزمية نيوتن التي لا تنتهي دائماً في الخطوة الأولى.





ماكس بيل، "الوحدة الثلاثية"، 1948-1949، نحت، MAC / USP، ساو باولو، البرازيل. هل

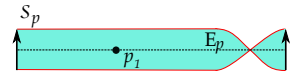
- يشير "الثلاثي" إلى حقيقة أن هذا هو المجموع المترابط لثلاثة مستويات إسقاطية مطروحًا منه قرص؟

قلادات مويوس

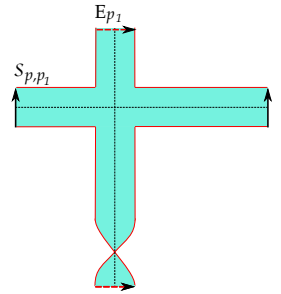
التفجير عدة مرات



من أجل تفجير صاعد لنقطة من سطح ما، نحذف قرصًا حول تلك النقطة، نقوم بتفجير هذا القرص، ونلصق حدّ شريط مويوس على حدّ متممة القرص.



في هذه الصور يجب على المرء أن يلصق السهام المقابلة. هذا شريط مويوس.



تفجير صاعد مرتان.

لقد رأينا كيف نفجر نقطة في المستوي. يمكن تعميم الإنشاء. لتكن p نقطة من سطح أملس S ، نقوم بتفجير S في p ، ينتج عن هذا سطح أملس آخر S_p وتطبيق تفجير هابط $\Psi_p: S_p \rightarrow S$ كما كان من قبل. الصورة العكسية لـ p هي القاسم الاستثنائي E_p : عناصره هي المستقيمت المماسّة في p وتم مطابقتها مع المستقيم الإسقاطي $P^1(T_p(S))$ الذي تم إنشاؤه من المستوي المماس $T_p(S) \perp S$ في p .

خارج القاسم الاستثنائي، Ψ_p تفاكل على $S \setminus \{p\}$.

لنقم بتكرار العملية. نختار نقطة p_1 في القاسم الاستثنائي $E_p = \Psi_p^{-1}(p)$ ونفجر S_p في p_1 . والنتيجة هي سطح أملس S_{p,p_1} وتطبيق التفجير الهابط Ψ_{p_1} من S_p في S_{p,p_1} مع قاسم استثنائي E_{p_1} ، $E_{p_1} \subset S_{p,p_1}$. الصورة العكسية

$(\Psi_p \circ \Psi_{p_1})^{-1}(p)$ تتكوّن من اتحاد E_{p_1} و المحوّل التام لـ E_p بواسطة Ψ_{p_1} . يسمّى هذا الاتحاد القاسم الاستثنائي للتركيب $\Psi_p \circ \Psi_{p_1}: S_{p,p_1} \rightarrow S_p$. خارج هذا القاسم، التطبيق $\Psi_p \circ \Psi_{p_1}$ تفاكل على $S \setminus \{p\}$.

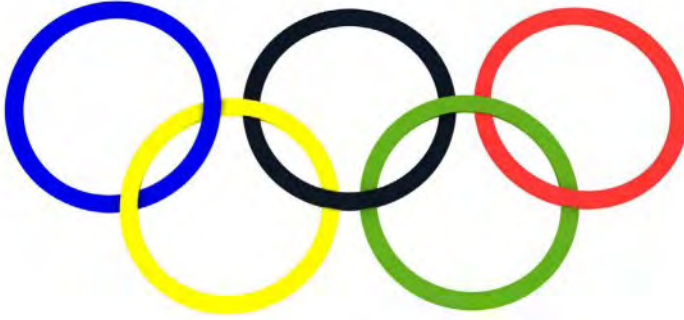
نختار نقطة p_2 في $(\Psi_p \circ \Psi_{p_1})^{-1}(p)$ وتتابع العملية أيّ عدد منته من المرات، "كما يحلو لنا".

النتيجة النهائية هي

• سطح أملس \bar{S} ،

• تطبيق أملس $\bar{\Psi}: \bar{S} \rightarrow S$ ، والذي يرسل تفاكلها $(S \setminus \{p\})^{-1}$ إلى $S \setminus \{p\}$.

لاحظوا على وجه الخصوص أن حد \bar{S} مترابط. الصورة العكسية $\{\bar{p}\}^{-1}$ هي القاسم الاستثنائي. إنه اتحاد منته من الدوائر الممساة المغطسة في \bar{S} . أي اثنتين من هذه الدوائر إما أن تكونا منفصلتين وما متقاطعتين عرضيا في نقطة واحدة. ثلاث دوائر مختلفة لا تتقاطع. الصورة تذكرنا بشعار الألعاب الأولمبية. الفرق هو أن الحلقات الأولمبية منفصلة، على عكس حالتنا حيث تتقاطع بعض الدوائر.

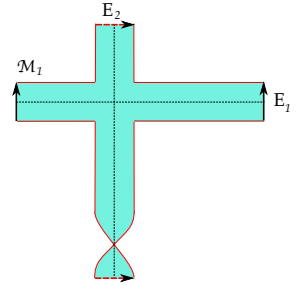


هذه التركيبة من عمليات التفجير الصاعد هي المجهر متعدد العدسات الذي سنستخدمه والذي يمكننا من تحليل جميع النقط المفردة.

المجهر

قبل أن نستخدم مجهرنا، دعونا نفحصه. إذا بدأنا بقرص S ، فإن نتيجة الخطوة الوحيدة في تفجير \bar{S} هي شريط مويوس. سوف نوضح طوبولوجيا \bar{S} في الحالة العامة لعدد منته من عمليات التفجير.

لنبدأ بتفجير (صاعد) من خطوتين. علينا أن نرسم نتيجة تفجير نقطة في شريط مويوس. لنبدأ بشريط لمويوس M يحتوي على القاسم الاستثنائي E كنواة له. كما فعلنا في السابق، نختار نقطة p_1 في E ونفجر M تصاعديا في p_1 . ستكون النتيجة سطحا M_1 يحتوي على دائرتين E_1 و E_2 تتقاطعان في نقطة واحدة. هنا E_1 هو المحول التام لـ E و E_2 هو القاسم الاستثنائي للتفجير الثاني.



لنفترض أن γ حلقة (عُرْوَة) على سطح S . نبدأ بتوجيهه للفضاء المماس لـ S في $\gamma(0)$ وتنبعه على طول γ . عندما تعود الحلقة إلى أصلها، يكون الاتجاه إما هو الأصلي وإما قد تم عكسه. وبناءً على ذلك، سنقول إن γ مُوجَّهة أو غير موجَّهة. شكلياً، يُعرّف هذا تشاكلاً من الزمرة الأساسية لـ S (أو من تماثلها الأول) في $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

لنلق نظرة على شعار الألعاب الأولمبية في ريو دي جانيرو وحلقتها الموجَّهة / غير الموجَّهة. بالعودة إلى شريط موبوس M_1 الذي تم تفجيره، سنرى أن E_1 موجه وأن E_2 غير موجه.

يجب أن تكون حقيقة أن E_2 غير موجَّه واضحة. عندما نجرنا M في p_1 ، قدمنا شريطاً لموبوس نواته E_2 . أما بالنسبة لـ E_1 ، فهو المحوّل التام للنواة E لـ M . من الواضح أن E غير موجه في M لكن هذا لا يعني أن محوّل التام غير موجه أيضاً. بل على العكس تماماً كما سنرى.

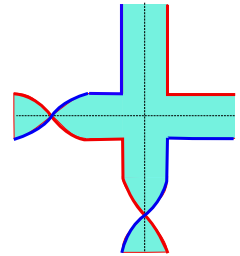
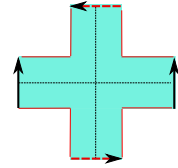
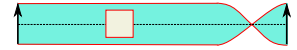
لإنشاء M_1 ، نحفر حفرة في M الأصلي ونلصق شريطاً لموبوس آخر على حده. نظرًا إلى أننا نتعامل مع الطوبولوجيا، يمكننا حفر "حفرة مربعة".

بحدف جوار صغير حلقي في حد M ، يمكننا حتى أن نتخيل أن الثقب المربع يعبر M "من جانب إلى الآخر" (دون أن ننسى أن لشريط لموبوس دائرة حدية واحدة فقط). في هذه الحالة، متممة المربع في M مربع آخر. لذلك يمكن القيام ببناء M_1 بطريقة أخرى. نبدأ بشريط لموبوس، نختار مجالين منفصلين على حده، ونلصق الجانبين المتقابلين من مربع بهذين المجالين. لا يزال هناك سؤال. يمكن لصق الجانبين بطريقتين: مع التواء أو من دونه.

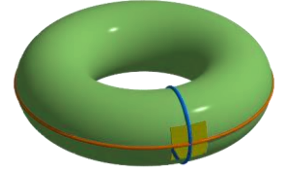
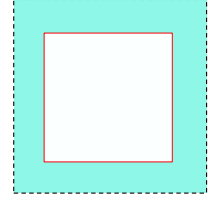
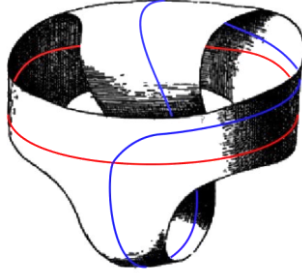
يمكن تمثيل الإنشاء السابق بالطريقة الآتية. لنعتبر صليبا. نلصق الجانبين العلوي والسفلي مع لِي، بحيث يصبح الجزء العمودي من الصليب شريطاً لموبوس. المحور العمودي هو المنحني غير الموجه E_2 .

الآن، علينا أن نلصق الجانبين الأيسر والأيمن للصليب وعلينا أن نقرر ما إذا كان ينبغي لِيه أم لا.

نحاول أولاً مع لِيّة واحدة. حد السطح الناتج غير مترابط: لا يمكن أن يكون سطحنا M_1 . وبالتالي، يجب لصق الجانبين دون التواء: فالمنحني E_1 موجه بالفعل.

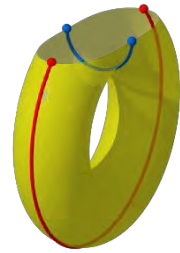


لقد حصلنا على صورة جيدة لـ M_1 . نصحني أحد الأصدقاء بعرض أفضل صورة لـ M_1 ! رسمت باللونين الأحمر والأزرق القاسم الاستثنائي.



قلوب متشابكة

أشجع القارئ على ممارسة الحيل الطوبولوجية الآتية. ابدأوا بصليب، ألصقوا الجوانب المتقابلة بدون لِي. اقطعوا السطح الناتج على طول الصليب المركزي، بمعنى آخر على طول الدائرتين. والنتيجة هي إطار مربع. هل كنتم تخمنتم ذلك؟ تخيلوا طارة في الـ 3 - فضاء واحفروا مربعًا فيها. ثم قوموا بقطعه على طول خط زوال (خط طول) وخط توازي (خط عرض). من الواضح أن ما تبقى هو مربع به فتحة مربعة: إطار مربع.



بشكل مثير للدهشة، هذا المثال للصليب مع مطابقة جانبيين مقابلين تم بالفعل النظر فيه من قبل فاوس تحت اسم حلقة مزدوجة (دوبرلينغ : Doppelring). في ورقته الرائعة Gauss als Geometer، يربط ستاكل⁷⁴ محادثة بين فاوس و موبايوس. يلاحظ فاوس أن لـ Doppelring حدا مترابطا. والأمر الأكثر إثارة للاهتمام هو أنه لاحظ أن هناك قوسين منفصلين يربطان زوجين متصلين من النقط على الحد. أتذكر أن استحالة مثل هذا التشكل في القرص كانت النقطة الحاسمة في إثباته للمبرهنة الأساسية للجبر.

⁷⁴ Stäckel. *Literaturberichte: Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß. Monatsh. Math. Phys.*, 32(1):A5, 1922. Gesammelt von F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger. Heft V: C. F. Gauß als Geometer. In Kommission bei B. G. Teubner in Leipzig.

خذوا نفس الصليب مرة أخرى وأصقوا الجوانب المتقابلة الآن مع التواء. اقطعوا السطح الناتج على طول الدائرتين.

النتيجة هي . . .

حسنًا، هذا يعتمد على كيفية لته. كسطح مجرد معرّف جيدًا: يتكون من مركبتين مترابطين، كل منهما هوميومتشاكله مع حلقة. ومع ذلك، فإن الطريقة التي يتم تغطيسه بها في الفضاء تعتمد على الالتواء. جزّوا!

النتيجة الأكثر إثارة للإعجاب تحدث عندما يكون كلا الجانبين المقابلين من الصليب قد تم ليهما، ولكن بطريقة مختلفة، اليسار واليمين إذا جاز التعبير. يُنتج هذا قلبين متشابهين.

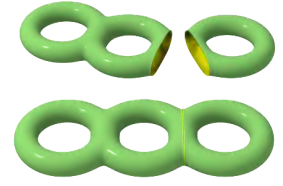
حول هذا الموضوع، يجب على القارئ إلقاء نظرة على عرض تاداشي توكيدا الأشكال غير المتوقعة على اليوتوب (في جزأين).



أخيرًا، نلصق اثنين من الجوانب المتقابلة مع الالتواء دون الجانبين الآخرين، نحصل على شريط مويوس المنفجر المنتظر، بحد مترابط. ماذا يحدث عندما نقطع على طول الدائرتين الاستثنائيتين؟ هذا سهل لأن التفجير هوميومتشاكل خارج القاسم الاستثنائي. سنحصل على شيء هوميومتشاكل مع قرص مثقوب. في الواقع، نحصل أيضًا على إطار مربع. أيضًا، الطريقة التي يتم بها تغطيس هذا الإطار في الفضاء تعتمد على الالتواء. تدربوا على هذه الحيل الطوبوسحرية !

تفجير المزيد من النقط

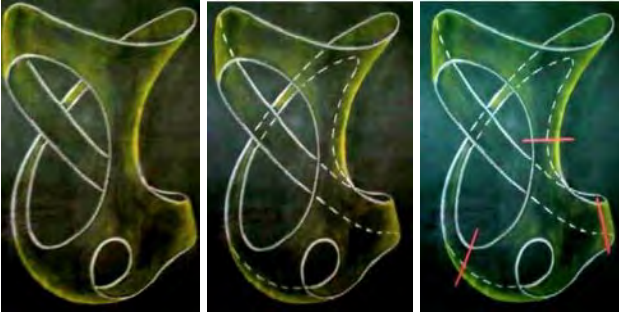
الآن نصف الموقف عندما يتم تفجير المزيد من النقط. من السهل وصف طوبولوجيا السطح الناتج. إن تفجير نقطة ما يعني حفر حفرة في السطح ولصق شريط لمويوس على الحد. على نحو مختلف، فإن عملية التفجير تعادل المجموع المترابط مع مستو إسقاطي.



يُعطى سطحان مترابطان M_1 و M_2 ، مجموعهما المترابط $M_1 \# M_2$ يتم الحصول عليه عن طريق حذف قرص من كل منهما ولصقها على طول الحدين المنشأين حديثًا. ولما كنا لاحظنا بالفعل أنه عندما نحذف قرصًا من مستو إسقاطي، نحصل على شريط لموبيوس، فإن التأثير الطوبولوجي للتفجير هو المجموع المترابط مع مستو إسقاطي.

لذلك، إذا فجرنا قرصًا k - مرة على التوالي، فإن السطح الناتج هو المجموع المترابط لـ k من المستويات الإسقاطية مطروحًا منه قرص. نذكر أن أي سطح متراس غير قابل للتوجيه مبركة حدية وحيدة يكون هوميومورفيًا مع مثل هذا السطح، وأن العدد $1-k$ يُعرف بميزة أويلر- پوانكاري للسطح. انظروا على سبيل المثال إلى الكنايين ⁷⁵ و ⁷⁶. ومع ذلك، فهذا مجرد وصف جزئي للنتيجة حيث لا يزال يتعين علينا وصف موضع القاسم الاستثنائي وطبيعته. هذا الأخير لا يتعلق فقط بـ k ولكن أيضًا باختيارات النقط المتتالية الـ k التي تم تفجيرها.

انظروا إلى منحوتة ماكس بيل الجميلة التي توضح هذا الفصل. تم تخصيص فقرة من مقالة تون مارار ⁷⁷ لتبيان أن هذا النحت يمثل مجموعًا مترابطًا من ثلاثة مستويات إسقاطية (محدوفاً منه قرص). وهذا موضح في الصور الآتية المستخرجة من هذه الورقة.



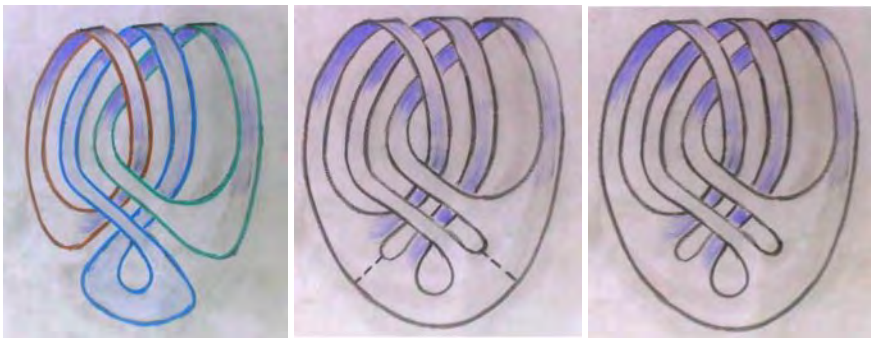
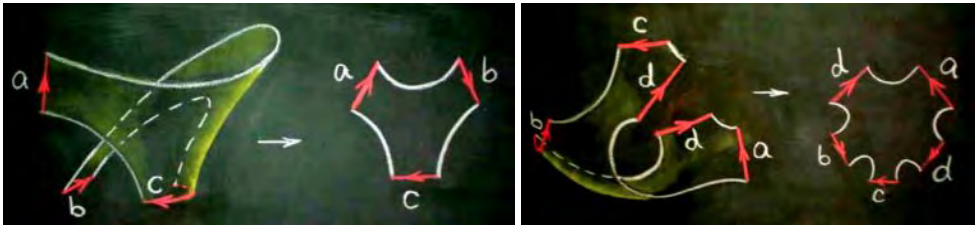
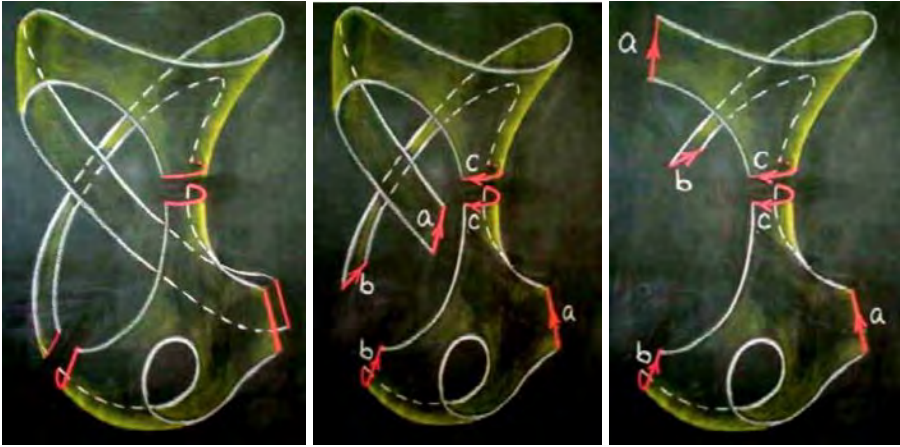
يوجد سؤال توجيه دقيق هنا. يمكن لصق السطحين المثقوبين بطريقتين مختلفتين لأن الدائرة الحدودية لها اتجاهان. ومع ذلك، فإن السطوح القابلة للتوجيه لها هوميومورفيًا عاكسة للاتجاه. تأكدوا من أن هذا يعني أن المجموع المترابط معرف جيدًا بالفعل بين السطوح المترابطة غير الموجهة، سواء كانت قابلة للتوجيه أم لا.

⁷⁵ S. Barr. *Experiments in topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1989. Reprint of the 1964 original.

⁷⁶ V. G. Boltyanskiĭ and V. A. Efremovich. *Intuitive combinatorial topology*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

⁷⁷ T. Marar. [Aspectos topológicos na arte concreta](#), 2004. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, Universidade Federal da Bahia.

تحتوي نفس الورقة على نسخة أخرى من نفس السطح، مستوحاة من كتاب فرانسيس المذكور سابقًا (الصفحة 101).



قلادات القواسم

لا يزال يتعين علينا وصف طوبولوجيا القاسم الاستثنائي داخل مجموع المستويات الإسقاطية المترابطة.

في الخطوة الأولى، لا توجد مفاجأة: فالقاسم هو نواة شريط مويوس.

في الخطوة الثانية، نقوم بتفجير نقطة من شريط مويوس. حالة الاهتمام هي عندما تفجر نقطة من E_1 كما تمت مناقشته من قبل. يفكر الهندسيون الجبريون في المستقيم الإسقاطي كمستقيم . . . ويرسمونه كمستقيم، حتى لو كان هوميومورثيا مع دائرة . . .

عندما نأتي إلى التفجير الثالث، قد نختار النقطة على E_1 أو على E_2 أو على تقاطع E_1 و E_2 . في جميع الحالات، يكون السطح المتفجر مجموعا مترابطا لثلاثة مستويات إسقاطية (مع حذف قرص منه)، أي سطح ماكس بيل. ومع ذلك، فإن موقع القاسم الاستثنائي على هذا السطح ليس هو نفسه. كتمرين، يجب على القارئ أن يحاول (ذهنيا) رسم ثلاثة قواسم استثنائية محتملة، مباشرة على المنحوت.

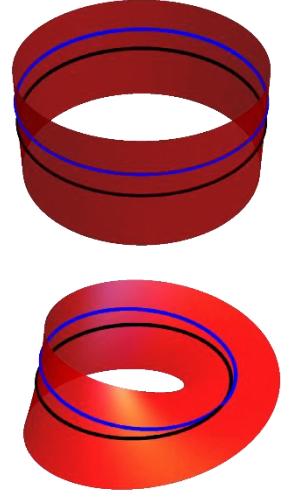
من السهل الآن وصف الوضع العام. توافيقيا، يتم تنظيم العديد من مكونات القاسم الاستثنائي على شكل شجرة.

في كل تفجير، يتم وصل شريط لمويوس جديد بالقلادة السابقة.

ومع ذلك، فإن هذا يغير قابلية التوجيه لدى الشريط الذي يتم وصل الشريط الجديد به. لإثبات ذلك، نعتبر منحنيًا مغلقًا γ على سطح ما S . نشوه قليلاً γ إلى γ' ، عرضي على γ ، ونعدّد عدد نقط التقاطع في $\gamma \cap \gamma'$ مقياس 2. يدعى هذا التقاطع الذاتي ل γ . إنه يساوي 0 أو 1 وفقاً لما إذا كان γ موجهاً أو غير موجه.

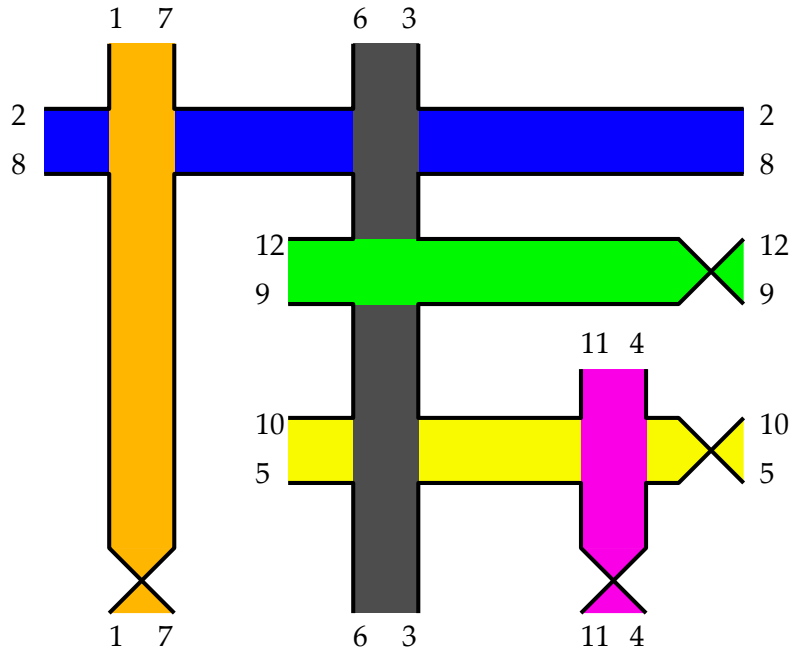
لنقم الآن، بتفجير نقطة p من γ المحتوى في S . نختار γ' الذي يمر أيضاً عبر p ونفجر الصورة في p . المحولان التامان $\bar{\gamma}$ و $\bar{\gamma}'$ لها بالضبط نقط تقاطع أقل من γ و γ' نظراً إلى اختلاف المماسين في p . ويترتب على ذلك أن التقاطع الذاتي ل $\bar{\gamma}$ يساوي التقاطع الذاتي ل γ ناقصاً (أو زائداً، نظراً إلى أننا نحسب مقياس 2!) واحداً.

لنسمحهم، يجب أن نذكر أن المستقيم الإسقاطي على الأعداد المركبة هوميومورثيا مع ال 2-كرة، ومع مجموعة لكانتور بالنسبة إلى الأعداد ال p -رتابية.

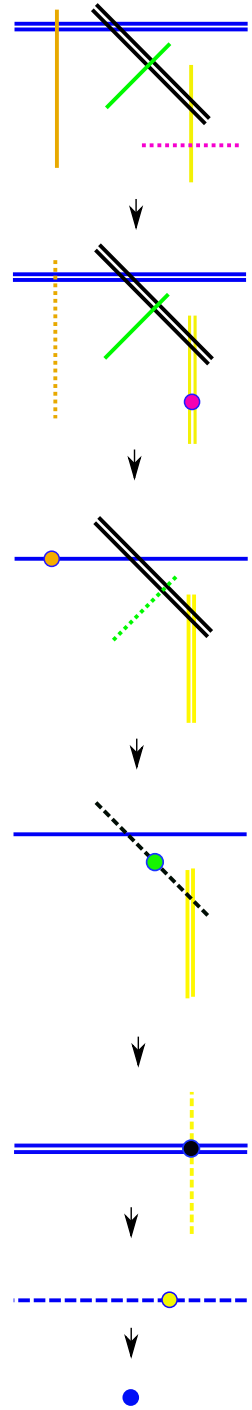


لنعمل على مثال. توضح الصورة في الهامش سلسلة متتالية من ست عمليات تفجير. تمثل النقاط السميكة مراكز التفجيرات. تمثل المستقيمت المستقيمت الإسقاطية (لا تنسوا أنها في الواقع دوائر). المستقيمت المنقطعة تمثل القواسم الجديدة التي تظهر في كل خطوة. وبالتالي فتطبيقات التفجير، ممثلة بأسهم متجهة إلى الأسفل، تقوض هذه المستقيمت المنقطعة إلى قط من نفس اللون. المستقيمت المزدوجة تمثل المكونات الموجهة. في نهاية العملية، يتكون القاسم الاستثنائي من ست دوائر.

يمكننا الآن رسم القلادة المقابلة، المكونة من أربعة أشربة لموبوس وحلقتين. الجواب المتقابلة للقطاعات الستة يجب لصقها كما هو مقترح في الصورة.



يجب عليكم التحقق من أن الحد مترابط بالفعل، كما يجب ان يكون. سيروا حول الحد متبعين الأرقام من 1 إلى 12 ثم عودوا إلى 1.



السبّابة

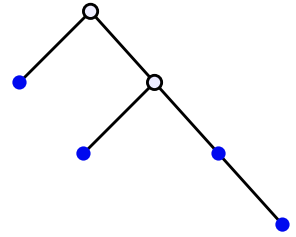
هنا وجهة نظر أخرى للمثال السابق.



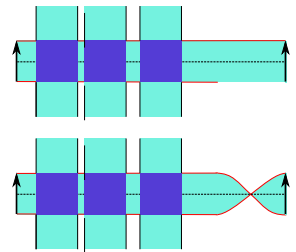
78 B. Ozbagci and P. Popescu-Pampu. *Generalized plumbings and Murasugi sums*. *Arnold Math. J.*, 2(1):69–119, 2016.

قد يقول الطوبولوجي إن هذا السطح تم الحصول عليه بواسطة سبّابة العديد من شرائط موبوس والحلقات. هذه العملية هي بسيطة جدا. افترضوا أن لديكم سطحين S_1 و S_2 لهما حدان غير خاليين. اختاروا تغطيسين i_1 و i_2 من المربع $[-1, 1]^2$ في S_1 و S_2 بطريقة تقع فيها صورتان $(\pm 1) \times [-1, 1]$ و i_1 و i_2 على حدي S_1 و S_2 على التوالي. الآن، من أجل كل (x, y) من $[-1, 1]^2$ ، قوموا بمطابقة $i_1(x, y)$ و $i_2(x, y)$. والنتيجة هي سبّابة S_1 و S_2 على طول i_1 ، i_2 . هذا سطح له حد (وزوايا يمكن تمليسها بسهولة). عودوا إلى ⁷⁸ للحصول على عروض متنوعة حول هذا الإنشاء.

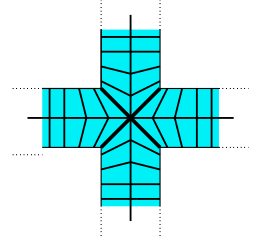
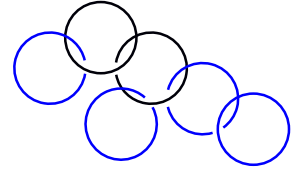
لنبدأ الآن بشجرة مستوية مجذرة. بالنسبة إلى كل عقدة، خذوا حلقة أو شريطا لموبوس. الآن، اسبكوا كل هذه الأشرطة معا وفقاً للمخطط الذي تقدمه الشجرة. يتم سبك كل شريط بجميع الأشرطة المرتبطة بأطفالها في الشجرة، كما في الصورة في الهامش. لاحظوا أن الحلقة وشريط موبوس يقبلان أربعة هوميوتشاكلات تُبادل الجوانب المتقابلة من المربع بحيث يتم تعريف سبّابة مثل هذا الشريط جيداً. النتيجة النهائية لهذه السبّابة هي سطح S له حد.



تقابل النقط الزرقاء أشرطة موبوس والنقط البيضاء الحلقات.



يحتوي كل شريط (حلقة أو شريط لموبوس) على دائرة هي نواته. يعرّف اتحاد هذه الدوائر بيانا E محتوي في S والذي يمكننا تسميته بالقاسم، على الرغم من أن S هذا لم يتم إنشاؤه بالضرورة من خلال سلسلة من عمليات التفجير. يوجد إسقاط π من S على E بحيث تتكون الصورة العكسية $\pi^{-1}(\{x\})$ من قوس واحد إذا كانت x نقطة عادية من E وقوسين متقاطعين في خلاف ذلك. لنرمز بـ S/E إلى الفضاء الطوبولوجي الذي تم الحصول عليه عن طريق تقويض E إلى نقطة واحدة. إذا كانت S نتيجة سلسلة من عمليات التفجير، فنحن نعلم أن S/E قرص مغلق وأن الإسقاط من S على S/E تطبيق تفجير.



تمرين: أثبتوا أن الفضاء S/E هوميومتشاكل مع المحروط الذي أساسه الاتحاد المنفصل لـ k دائرة، حيث k هو عدد المركبات المترابطة لحد S .

على وجه الخصوص، فضاء حاصل القسمة S/E هوميومتشاكل مع قرص إذا فقط إذا كان حد S مترابطا.

يمكننا التمرين الآتي معيارًا بسيطًا يمكننا من التحقق مباشرة من المخطط ما إذا كان حد S مترابطا. هذا أسهل من رسم الصورة على ورقة واتباع الحد بعناية. حل هذا التمرين يتطلب بعض الفهم لتماثل السطوح. لنفترض أن للشجرة n عقدة. نعتبر المصفوفة $n \times n$ المتناظرة A ، ذات المعاملات في $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ والمحددة بالطريقة الآتية. نضع $a_{ii} = 0$ إذا كانت العقدة i حلقة و $a_{ii} = 1$ إذا كانت شريطا لموبوس. إذا كان $i \neq j$ ، نضع $a_{ij} = 1$ إذا كانت العقدتان i و j متجاورتين في الشجرة و 0 في خلاف ذلك.

تمرين: أثبتوا أن حد S مترابط إذا فقط إذا كانت المصفوفة A قابلة للعكس (على $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

إرشاد: تحققوا مما يأتي :

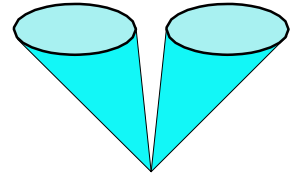
• التباين $E \subset S$ $(E \hookrightarrow S)$ والإسقاط $\pi: S \rightarrow E$ يحددان إيزوتشاكلين عكسيين بين $H_1(S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ و $H_1(E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

• يتم إعطاء أساس لـ $H_1(E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ بواسطة نوى الـ n أشرطة.

• يتم إعطاء شكل التقاطع المتناظر على $H_1(E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ بواسطة المصفوفة A .

• نواة شكل التقاطع هي صورة $H_1(\partial S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ في $H_1(S, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

ألياف الإسقاط $\pi: S \rightarrow E$ لا تخطوا بين S إلى القاسم E مع تطبيق التفجير Ψ من S إلى S/E .



المحروط على دائرتين.



مجهر في عام 1882

حل المفرديات

نستخدم الآن مجهرينا لتحليل طبيعة المفرديات وإثبات مبرهنة ترجع أساسًا إلى ماكس نوتر⁷⁹.

تفجير فرع

نعتبر نقطة مفردة من منحني تحليلي مستو حقيقي معرف بمعادلة $F(x, y) = 0$. نفترض أننا وجدنا فرعًا حقيقيًا لهذا المنحني، أي وجدنا حلاً من الشكل

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y = \sum_{k \geq 1} a_k t^k.$$

لنلق نظرة على المجموعة $I, I \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ ، من الأعداد الصحيحة k بحيث يكون $a_k \neq 0$. يمكننا دائماً افتراض أن القاسم المشترك الأكبر لعناصر I جميعها و m هو 1. وبعبارة أخرى، فإن الزمرة الجزئية لـ \mathbf{Z} المولدة بـ m و I هي \mathbf{Z} .

ليكن $1 \leq \mu$ أصغر عدد صحيح بحيث $a_\mu \neq 0$.

إذا كانت $\mu < m$ ، فإن المتسلسلة y/x "تؤول إلى اللامنتهي" عندما تؤول t إلى 0، وهو ما يعني هندسيًا أن المحور العمودي $x=0$ مماس للفرع في المبدأ.

إذا كان $\mu > m$ ، فإن المتسلسلة y/x "تؤول إلى 0" عندما تؤول t إلى 0، ما يعني هندسيًا أن المحور الأفقي $y=0$ مماس للفرع في المبدأ.

إذا كان $\mu = m$ ، يكون المماس في المبدأ هو المستقيم $y = a_m x$.

حتى الآن، باتباع نيوتن، نظرنا إلى y على أنها "دالة" لـ x .

⁷⁹ M. Noether. *Rationale Ausführungen der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen.* *Math. Ann.*, 23:311–358, 1883.



ماكس نوتر (1844–1921).



نحن الآن مهتمون أكثر بالمنحني $F(x, y) = 0$ لذلك يمكننا تبديل أدوار x و y .
ومن ثمّ يمكننا دائماً افتراض أن $m \leq \mu$. في الواقع، نستطيع أن نُعرف τ كجذر μ أي
لـ $\pm y = \pm \sum_{k \geq \mu} a_k t^k$ بحيث تكون τ متسلسلة قوى في t . نعكس دور x و
 y ليصبح لدينا الآن $y = \tau^m$ و x متسلسلة قوى صحيحة لـ τ .
إذا كان فرعنا مفرداً، أي إذا كان $m < 1$ ، نتابع على النحو الآتي.

1. ليكن β_1 أصغر عدد صحيح في I ليس من مضاعفات m .
2. ليكن β_2 أصغر عدد صحيح في I ليس في الزمرة المولدة بواسطة m و β_1 . نستمر
بهذه الطريقة حتى نحصل على عائلة من الأعداد الصحيحة في I تولّد Z . يعزف هذا
متتالية منتهية من الأعداد الصحيحة $m < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_g$. هذه القائمة هي مميزة
بويوزو للفرع. مرة أخرى، بويوزو ليس مسؤولاً عن هذا التعريف الذي تم تقديمه لاحقاً من
طرف هالفين وسميث⁸⁰.
مسكين بويوزو!

لنلق نظرة على تأثير التفجير على فرعنا. نذكر أنه في الممارسة العملية، يعود ذلك إلى النظر
إلى الإحداثيات (x, y_1) حيث $y_1 = y/x$ هو ميل المستقيم المار عبر المبدأ و
 (x, y) في هذه الإحداثيات (x, y_1) لدينا

$$x = \pm t^m ; y_1 = \sum_{k \geq \mu} a_k t^{k-m}.$$

تعطي القسمة الإقليدية لـ β_1 على m

$$\beta_1 = mq + m_1 \text{ مع } m > m_1 > 0$$

ولدينا

$$x = \pm t^m ; y_1 = a_m + a_{2m}t^m + \dots + a_{qm}t^{(q-1)m} + \sum_{k \geq \beta_1} a_k t^{k-m}.$$

الآن، نسحب من أجل إعادة المفردية إلى المبدأ. بقول مختلف، نضع $y_2 = y_1 - a_m$

$$x = \pm t^m ; y_2 = a_{2m}t^m + \dots + a_{qm}t^{(q-1)m} + \sum_{k \geq \beta_1} a_k t^{k-m}.$$

قد يبدو هذا الإجراء معقداً. إنه على
غرار خوارزمية إقليدس. إذا كان لدينا
عدنان صحيحان موجبان
 $a > b \geq a$ ، نطرح a من b
بحيث يكون لدينا الآن $a, b - a$.
إذا كان $a > b - a \geq a$ نستمر :
 $a, b - 2a$. نواصل ما دام العدد
الصحيح الأول أصغر من الثاني. هذا
ليس شيئاً آخر سوى القسمة الإقليدية
لـ b على a . ثم، نبدل العددين
الصحيحين ونستمر في العملية. تنتهي
الخوارزمية بعد عدد منته من
الخطوات، عندما يكون العدد
الصحيح الثاني يساوي 0. في هذه
الخطوة النهائية، العدد الأول هو القاسم
المشترك الأكبر لـ a و b . على
سبيل المثال

$$(6, 9) \rightarrow (6, 3) \rightarrow (3, 6)$$

$$\rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 0).$$

في وضعنا الأكثر تعقيداً، نتقدم بنفس
الطريقة، ونفجر عدة مرات حسب
الضرورة حتى نتحكم من تبديل أدوار
 x و y ونستمر ...

⁸⁰ E. R. Garcá a Barroso,
P. D. González Pérez, and
P. Popescu-Pampu. *Variations on inversion theorems for Newton-Puiseux series*. *Math. Ann.*, 368(3-4):1359– 1397, 2017.

ويمكننا التفجير والسحب مرة أخرى إذا كان $2 \leq q$. بعد q خطوة، هذا يُعطي

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y_{2q} = \sum_{k \geq \beta_1} a_k t^{k-qm}.$$

نظرا إلى أن $m_1 < m$ ، فإن المحور العمودي مماس لهذا المنحني الأخير في المبدأ. كما كان من قبل، نبادل دور الإحداثيين بحيث

$$y_{2q} = \pm \tau^{m_1} \quad ; \quad x = \sum_{k \geq 1} b_k \tau^k.$$

بتعبير آخر، بعد عدد معين من عمليات التفجير، يكون للمنحني الجديد تعددية $m_1 > m$. بالاستمرار في هذا النهج، وبعد عدد منته من الخطوات، يصير المنحني أملس. وبذلك نكون قد أثبتنا ما يأتي.

مبرهنة. لنفترض أن C فرع من منحني تحليلي $F(x, y) = 0$ في جوار المبدأ. إذن فإن المحول التام لـ C من خلال تعاقب مناسب لعمليات التفجير منحني أملس.

تفجير كل الفروع

في جوار المبدأ، يتكون المنحني $F(x, y) = 0$ من عدة فروع. لقد تعلمنا كيفية إزالة مفرديات كل من هذه الفروع، لكن المنحنيات العديدة التي نحصل عليها قد تكون في وضع نسبي معقد نوعاً ما. المزيد من عمليات التفجير ضرورية لفك الخيوط. باستخدام المبرهنة السابقة، يمكننا إزالة مفردية كل الفروع، واحدة تلو الأخرى. لدينا

– تطبيق تفجير هابط Ψ من سطح S في جوار للمبدأ،

– القاسم الاستثنائي $E \subset S$ تم تحويله إلى المبدأ بواسطة Ψ ، بحيث يكون المحول التام لمنحنينا هو اتحاد عدد معين من المنحنيات الملساء. يتقاطع كل من هذه المنحنيات مع القاسم الاستثنائي في نقطة واحدة.

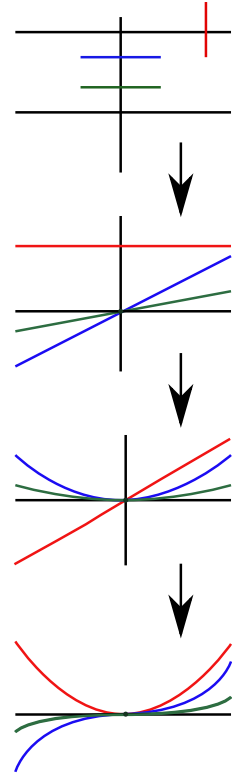
إذا كانت كل هذه النقط مختلفة، فإن عملنا قد انتهى: منحني المفرد $F = 0$ قد تمت "إزالة مفردياته" كاتحاد منفصل لمنحنيات ملساء. المهمة الوحيدة التي لا يزال يتعين علينا القيام بها هي التعامل مع عدد ما من المنحنيات الملساء التي تمر عبر نفس النقطة p في القاسم الاستثنائي. لاحظوا أن بعض هذه المنحنيات قد تكون مماسة للقاسم.

بالمعنى الدقيق للكلمة، قمنا فقط بتعريف تطبيقات التفجير للسطوح الحقيقية. يمكن أيضاً تعريف تطبيقات مماثلة على الأعداد المركبة. في هذه الحالة، نتيجة تعاقب التفجير هو سطح هولومتشاكل (أي ذو بعد مركب 2)، يحتوي على قاسم استثنائي وهو الآن اتحاد من المستقيمات الإسقاطية المركبة المتقاطعة بشكل عرضي. يمكن تعريف عمليات التفجير هذه حتى في سياق الأسطح الجبرية فوق أي حقل. معظم هذا الفصل سوف يتكيف حرفياً مع هذه الحالة العامة.

في البعد 3 أو أكثر، تكون عملية إزالة المفرديات أكثر دقة ونقط التفجير ليست كافية. أثبت **هيروناكا** في عام 1964 أن أي منوعة جبرية على حقل مميزته صفر يمكن إزالة مفردياتها. لقد قيل لي دائماً أن هذا الإثبات هو ضربة معلم من الصعب جداً استيعابها. ومع ذلك، في محاضرات قدمها ج. كولاّر عام 2007 حول حل المفرديات (مطبوعة جامعة برينستون وم.أ.)، كتب أن "التصور بأن إثبات الحل صعب جداً تباعد تدريجي عن الواقع ... من الممكن إثبات الحل في الأسبوعين الأخيرين من بداية دروس في الهندسة الجبرية". لذا، لماذا لا نحاولون قراءة كولاّر؟

قد تنتمي النقطة p إلى مركبة أو مركبتين من مركبات E . نضيف هذه المركبة أو هذه المركبات إلى قائمة المنحنيات المساء التي تمر عبر p . نختار الإحداثيات المحلية (x, y) في جوار p بحيث تكون معادلات المنحنيات المساء $y = f_i(x)$ حيث f_i متسلسلات متقاربة مختلفة.

ثم نفجر مرة أخرى، مقدمين مستقيماً إسقاطياً جديداً. المحوّل التامة للمنحنيات تبقى ملساء وستقطع المركبة الجديدة للقاسم في نقطة تُقابل مشتقات f_i في المبدأ. قد يكون منحنيان متماسين في المبدأ، أي أن اثنين من f_i قد يكون لها نفس المشتق في 0 ، لكننا قد نفجر مرة أخرى. ستفصل هذه العملية بين f_i من خلال بعض من كثيرات حدود تايلور المتعلقة بها. في النهاية، تكون النتيجة مجموعة من المنحنيات المساء المنفصلة والعرضية على القاسم الاستثنائي. يمكننا حتى أن نفترض أن المجموعة النهائية من المنحنيات لا تتقاطع إلا مع القاسم في نقط منتظمة، أي ليس في تقاطع دائرتين. هذه هي مبرهنة نوتر.



المنحنيات الحمراء والزرقاء والخضراء ماسة للقاسم الأسود. ثلاث عمليات تفجير تجعلها عرضية للقاسم (الجديد).



هذا هو انعطاف.

مبرهنة. لنفترض أن C منحن تحليلي في جوار المبدأ. إذن، فإن المحوّل التام لـ C في ظل تعاقب مناسب من عمليات التفجير هو اتحاد منفصل من المنحنيات المساء العرضية على القاسم الاستثنائي.

التحويلات التربيعية (من الدرجة الثانية)

كان ماكس نوتر يعمل في السياق العالمي للمنحنيات الجبرية وليس المفرديات المحلية للمنحنيات التحليلية. كان مجهره مختلفاً قليلاً ويسمى التحويل التربيعي. سمحوا لي أن أقدم زمرة كرمبونا للمستوي الإسقاطي $P^2(K)$ على حقل ما K ⁸¹. هي تتألف من الـ K -أوطوتشاكلات لحقل الدوال الناطقة بمتغيرين $K(x, y)$. مثل هذا الأوطوتشاكل يتم تعريفه تماماً من خلال الدالتين ناطقتين $f(x, y)$ و $g(x, y)$ اللتين هما صورتا x و y . دالتان f, g تُعرفان عنصرًا من زمرة كرمبونا إذا كان التحويل

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

ثنائي التنطيق (أو ناطقاً ثنائياً).

التحويلات الإسقاطية المعرفة بواسطة عناصر $PGL(3, K)$ ، هي أوطوتشاكلات ثنائية التنطيق في المستوي، لكن زمرة كرمبونا أكبر بكثير. وخير مثال على ذلك هو الالتفاف التربيعي

⁸¹S. Cantat. [The Cremonagroup in two variables](#). In *European Congress of Mathematics*, pages 211–225. Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

$$\sigma : (x, y) \mapsto (1/x, 1/y)$$

الذي يمكن رؤيته أيضًا في الإحداثيات المتجانسة $[x : y : z]$ ك

$$\sigma : [x : y : z] \mapsto [yz : zx : xy].$$

إنه يقوّض المستقيم الذي يشمل نقطتين من النقط الثلاث $[1 : 0 : 0]$ ، $[0 : 1 : 0]$ و $[0 : 0 : 1]$ إلى المجموعة أحادية العنصر وهو ليس معرفا في هذه النقط. بعيدًا عن المستقيم الثلاثة، يكون σ تقابلا وحتى التناقا. لاحظوا أيضًا أن $[1 : 1 : 1]$ نقطة ثابتة بالنسبة إلى σ .

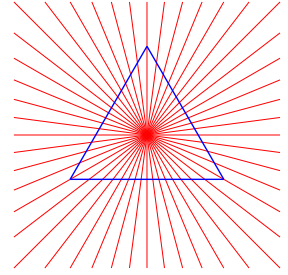
إذا كان $\{A, B, C, M\}$ أساسًا إسقاطيًا في $P^2(K)$ (لا توجد ثلاثة منها على مستقيم واحد)، فهناك تحويل إسقاطي ϕ يرسل هذه النقط إلى $[1 : 0 : 0]$ و $[0 : 1 : 0]$ و $[0 : 0 : 1]$ و $[1 : 1 : 1]$. المرافق $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$ هو التحويل التربيعي المرتبط بالمثلث $\{A, B, C\}$ (والنقطة الثابتة M).

استخدم ماكس نوتر هذه التطبيقات بدلاً من عمليات التفجير. الميزة هي أن كل العملية تتم في المستوي الإسقاطي دون الحاجة إلى إدخال سطح جديد. والعيب هو أن σ يفجر صعودا وهبوطا في نفس الوقت. إنه يقوّض المستقيم ويفجر تصاعديا النقط، بحيث أثناء حل بعض المفرديات، فهو ينشئ أخرى جديدة. ادعى نوتر أن σ و $PGL(3, K)$ ، يولدان زمرة كرمونا كلها. هذا صحيح بالفعل لكن برهانه لم يكن صحيحًا.

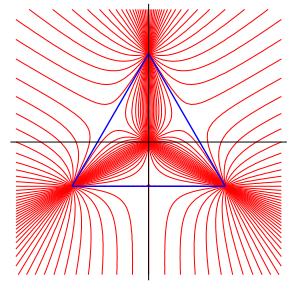
نبدأ بمنحن جبري معرف بواسطة معادلة كثيرة الحدود $P(x, y) = 0$. نختار نقطة مفردة A ثم نختار نقطتين B, C ليستا على المنحني وبحيث تتقاطع المستقيمات AB و BC و CA مع المنحني الجبري بشكل عرضي (باستثناء التقاطع في A بالطبع). بعد ذلك، نعتبر صورة المنحني بواسطة التحويل التربيعي المرفق بـ A و B و C (ونقطة ثابتة M غير ذات صلة). يتم تفجير النقطة A تصاعديا. نقط التقاطع الأخرى للمنحني مع AB ، BC ، CA تنتج فروعا ملساء تتقاطع عرضيا. لذلك، يمكننا التفجير عدة مرات حسب الضرورة، على حساب تقديم نقط متعددة حيث تتقاطع المنحنيات الملساء عرضيا.



لويفي كرمونا (1830–1903).



يحوّل الالتفاف التربيعي حزمة المستقيمات التي تشمل M إلى حزمة مخروطيات تشمل A ، B ، C ، M .



هذه هي الطريقة التي عبر بها توتر عن مبرهنته :

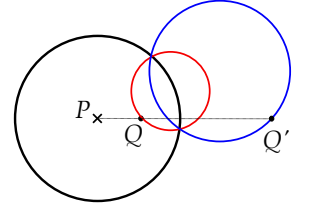
مبرهنة. يمكن تحويل أي منح جبري بواسطة أوطوتشاكل لكرهيمونا مناسب إلى منح آخر تكون مفردياته الوحيدة عادية، أي أنه يتكون من بعض الفروع الملساء التي تتقاطع بشكل عرضي.

هناك التفاف مشهور آخر في المستوي (الحقيقي): التعاكس. قبل سنتين عامًا، كان جميع الدارسين في مدارس التعليم الثانوي على دراية به. كانت الكتب المدرسية مليئة بتارين من الأسلوب الآتي: خذوا المبرهنة المفضلة لديكم في الهندسة المستوية، وقوموا بتحويلها عن طريق تعاكس واحصلوا على مبرهنة جديدة. التعريف بسيط جدا. اختاروا نقطة P في المستوي الإقليدي، تسمى قطب التعاكس. يتم إرسال كل نقطة Q عن طريق التعاكس إلى النقطة Q' بحيث تكون P, Q, Q' على نفس المستقيم وبحيث يكون الجداء $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = 1$. هذا الالتفاف غير مُعرّف في القطب P ، يحوّل الدوائر التي لا تشمل P إلى دوائر، والدوائر التي تشمل P إلى مستقيمت لا تشمل P . إذا كانت P المبدأ في المستوي المركب، فهذا هو مجرد التحويل

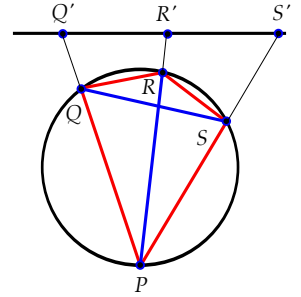
$$C^* \rightarrow C^*, z \mapsto 1/\bar{z}.$$

على سبيل المثال، المبرهنة التي يسميها جميع الأطفال الفرنسيين علاقة شال والتي تنص على أنه من أجل 3 نقط Q', R', S' على مستقيم موجّه، فإن ما يأتي صحيح: $\overline{Q'R'} + \overline{R'S'} = \overline{Q'S'}$. حولوا هذه العلاقة بواسطة تعاكس وستكتشفون مبرهنة بطليموس: "ليكن $PQRS$ رباعي أضلاع محدا مرسوما في دائرة. إذن مجموع جدائي زوجي الضلعين المتقابلين يساوي جداء قطريه".

اتضح أن التعاكس حالة خاصة من التحويلات التربيعية. بالنسبة إلى الرأس الأول A من مثلثنا، نختار النقطة $[0:0:1]$ في $P^2(\mathbf{R})$ ، بعبارة أخرى مبدأ المستوي \mathbf{R}^2 ، أو بعبارة أخرى كذلك النقطة 0 في \mathbf{C} . بالنسبة إلى الرأس الثاني والرأس الثالث، B و C ، نختار ما يسمى بالنقطتين الدوريّتين: تلكم النقطتان المشهورتان بين الدارسين، واللتان هما في نفس الوقت في اللامتتهي وتخيّلان. بتعبير أدق، هما النقطتان $[1:i:0]$ و $[1:-i:0]$ (هي i هي $\sqrt{-1}$). تطلق عليها صفة دوريّتين لأن جميع الدوائر في المستوي الإقليدي تمر عبر هاتين النقطتين. بالنسبة إلى النقطة الثابتة M ، نختار على سبيل المثال النقطة $[1:0:1]$ ، أي النقطة 1 من \mathbf{C} . نشجع القارئ على تبيان أن التحويل التربيعي في هذه الحالة هو مجرد تعاكس. يمكن التحقق من ذلك عن طريق الحساب الأعمى أو باستخدام الهندسة الإسقاطية التقليدية.



$$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = 1.$$



$$\begin{aligned} QR \cdot SP + PQ \cdot RS \\ = PR \cdot QS. \end{aligned}$$

يجب أن نتحدث عن تراكب الدوائر (أي جعلها مركبة)، ولكن هذا التراكب كان دائما ضمنيا في الماضي. النقط الثلاث

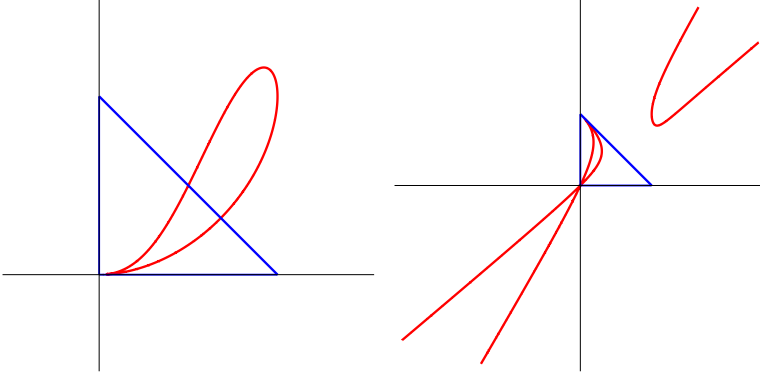
$$[1:i:0], [0:0:1]$$

$$[1:-i:0] \text{ و}$$

هي في $P^2(\mathbf{C})$ وليست في $P^2(\mathbf{R})$ ولكن الالتفاف التربيعي الذي تعرفه في $P^2(\mathbf{C})$ يحفظ $P^2(\mathbf{R})$ ، ويحدث التعاكس في المستوي الإقليدي الحقيقي، الذي يُنظر إليه على أنه ممتمة المستقيم في اللامتتهي في $P^2(\mathbf{R})$. تحققوا من ذلك!

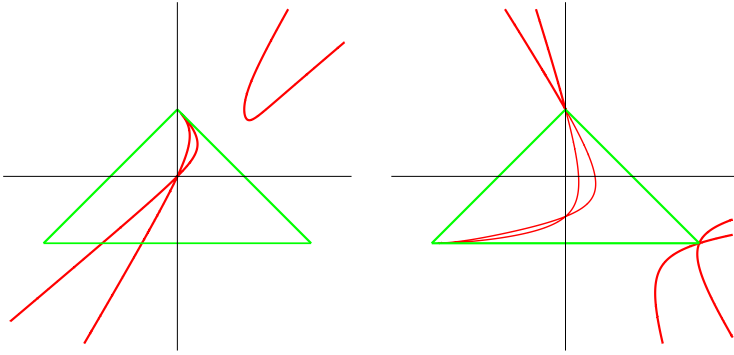
لاحظوا أن صورة مستقيم (عام) عن طريق التحويل التربيعي هي مخروط يمر عبر الرؤوس الثلاثة للمثلث. لاحظوا أيضًا أن أي مخروط يمر عبر النقطتين الدوريتين هو دائرة. استمتعوا بالإثبات.

هيا بنا نعمل على مثال

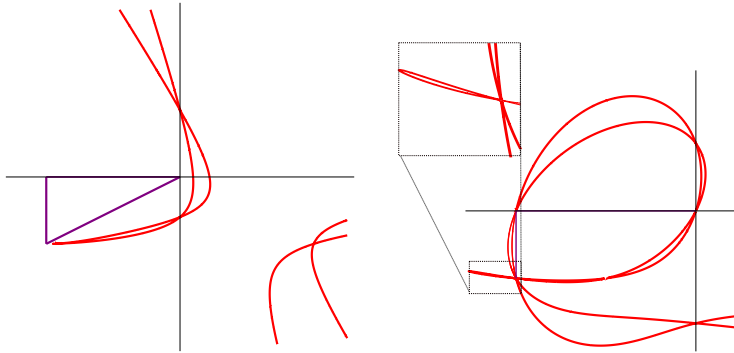


انظروا إلى المنحني المعرف بالمعادلة $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$. هذا مثال على منحنيات أولر المنقارية، والتي تمت مناقشتها سابقًا، مع قرنة من الدرجة الثانية. لنختر مثلثًا (أزرق) برأس واحد في النقطة المفردة وعرضيا بالنسبة إلى المنحني في كل مكان آخر. نجري تحويلًا من الدرجة الثانية. تُظهر النتيجة في الصورة اليمنى أعلاه (التي قمنا بتصغيرها). تقع النقطة المفردة للمنحني المنقاري في الرأس، يتصرف التحويل مثل انفجار صاعد في جوار هذه النقطة. يتم تفجير هذا الرأس صعودًا إلى الجانب المقابل للمثلث. ومع ذلك، فإن المفردة أعمق من أن يتم حلها في الخطوة الأولى. لا يزال المنحني الجديد يحتوي على نقطة مفردة في رأس (آخر). يتم تقويض كل حافة في المثلث إلى الرأس المقابل وهذا يحدث نقطة مزدوجة في المبدأ.

نختار مثلثًا آخر (أكبر أخضر) برأس في النقطة المفردة، كما هو ظاهر في الصفحة الآتية. نطبق مرة أخرى التحويل التربيعي المقابل. يتم عرض النتيجة عن اليمين. لا يزال المنحني الجديد مفردًا في الزاوية اليسرى السفلية في حين أن الرؤوس الأخرى هي نقط مزدوجة عادية.



نختار مثلثًا آخر (أرجواني). يؤدي تحويل تربيعي آخر أخيرًا إلى منحن مفردياته الوحيدة هي التقاطعات العرضية للمنحنيات الملساء.



مبرهنة نوتر جميلة دون منازع، لكن هذه المفرديات العادية ليست بهذه البساطة على أية حال. يوضح التمرين الآتي أن المنحنيات الملساء التي تتقاطع بشكل عرضي لا تزال تحتوي على الكثير من المعلومات.

تمرين (ليس بهذه السهولة). افترضوا أن لديكم عددًا منتهيًا n من المنحنيات التحليلية الملساء التي تتقاطع بشكل عرضي في نقطة واحدة. يتبين أنه من أجل $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ ، يوجد تفاكل تحليلي محلي في المستوى يرسلها إلى n مستقيمًا في المستوى. أثبتوا أن هذا ليس صحيحًا بالضرورة من أجل $n \geq 5$. هل يمكنكم وصف فضاء المقاييس لـ n منحنيًا عرضيًا أملس، أي فضاء حاصل القسمة تحت تفاكلات محلية مختلفة؟

هناك مقارنة أخرى. لنعتبر الفضاء المماس لـ الفضاء الإسقاطي $P^d(K)$ من البعد d على حقل K . "لثؤشيط" هذا الفضاء المماس (نُجعله إسقاطيا) لإنتاج مجموعة متنوعة جبرية من البعد $2d-1$ ، والتي يمكن بالتالي تغطيتها في فضاء إسقاطي ذي بعد أعلى $P^{2(2d-1)+1}(K)$. ليكن C منحنيا جبريا في $P^d(K)$ ، يمكننا النظر إلى مُغلقة (زاريسكي) لمجموعة مستقيماته المماسية في النقط المنتظمة. ينتج عن هذا منحن جبري آخر C_1 في فضاء إسقاطي آخر من البعد d_1 . بتكرار العملية، نحصل أخيراً على منحن أملس C_n مغطس في فضاء إسقاطي ذي بعد عال d_n . نختار الآن إسقاطاً عامّاً لمنحن في $P^2(K)$. الناتج هو منحن \bar{C} وهو أملس مع عدد منته من النقط المزدوجة العادية.

مبرهنة. أي منحن جبري هو مكافئ "ثنائياً تنظيقياً" لمنحن آخر مفردياته الوحيدة هي نقط مزدوجة عادية حيث يتقاطع فرعان أملسان بشكل عرضي.

يمكن للمرء أن يكون متفائلاً ويتوقع أن أي منحن جبري مستو مكافئ ثنائياً تنظيقياً لمنحن مستو أملس، ولكن هذا أبعد ما يكون عن الحقيقة. جنس منحن أملس مستو من الدرجة d هو $(d-1)(d-2)/2$ بحيث أنه إذا كان لمنحن جبري جنس ليس عدداً صحيحاً من هذا الشكل، فإن النقط المزدوجة هي اجبارية.

يمكن للمرء أن يكون أقل تفاؤلاً ويأمل أن يكون أي منحن جبري ممكناً تحويله إلى منحن تكون مفردياته نقطا مزدوجة عادية باستخدام تحويل لـ كرمونا. وا أسفاه! هذا ليس صحيحاً أيضاً. التكافؤ ثنائي التنظيق الذي توفره المبرهنة السابقة يمكن ألا يكون ناتجاً عن طريق بعض تحويلات كرمونا. (انظروا ⁸² صفحة 42).

للحصول على عرض حديث لجميع هذه المفاهيم، أوصي بكتابي وال و دولقاشب ^{83,84} ولنسخة تقليدية، كتاب سمبل وروث ⁸⁵.

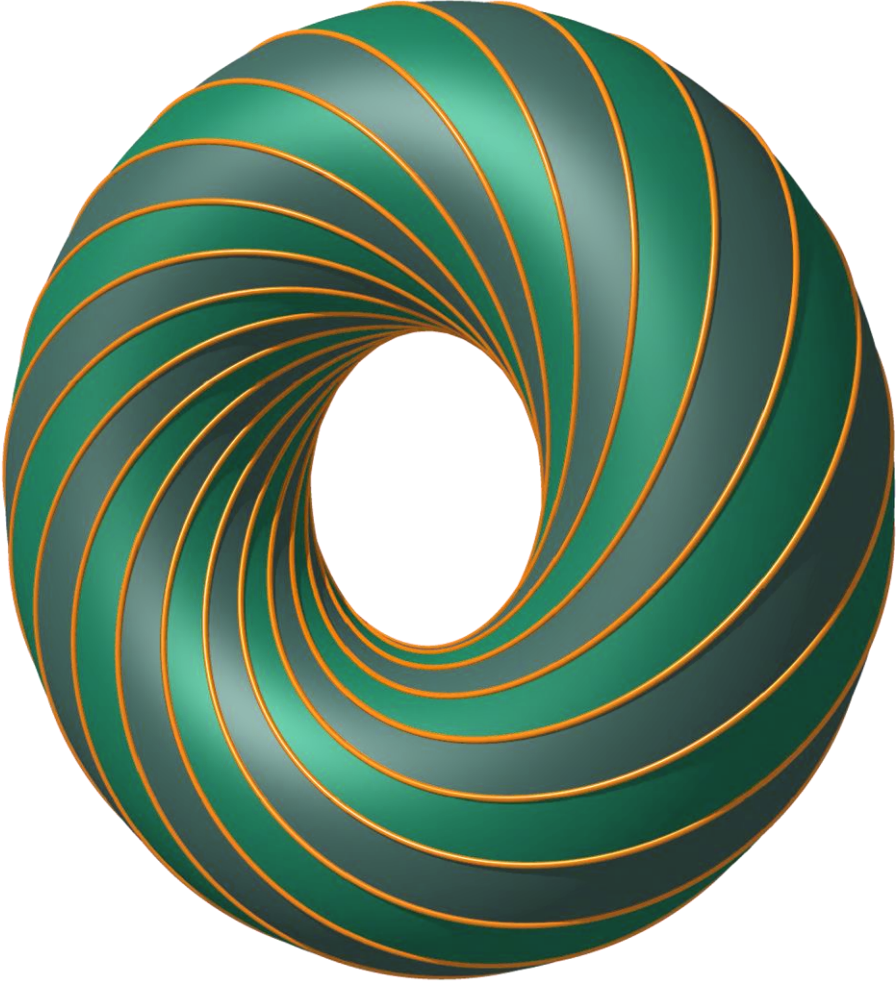
منوعة جبرية إسقاطية ملساء من البعد k يمكن أن يتم تغطيتها، بحكم التعريف، في فضاء إسقاطي ما، ذي بعد ما. إذا قمنا بإسقاطها بشكل عام على فضاء إسقاطي جزئي بعده $2k+1$ ، فإن ذلك يعرف تغطيساً.

⁸² J. Kollár. *Lectures on resolution of singularities*, volume 166 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

⁸³ I. V. Dolgachev. *Classical algebraic geometry. A modern view*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

⁸⁴ C. T. C. Wall. *Singular points of plane curves*, volume 63 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

⁸⁵ J. G. Semple and L. Roth. *Introduction to algebraic geometry*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985. Reprint of the 1949 original.



طارة كليڤورد مليئة بما يسمى دوائر
ڤيلارسو. كل واجدة من هذه الدوائر
هي تقاطع لمستقيم ما في \mathbb{C}^2 (بمر عبر
المبدأ) مع كرة الوحدة \mathbb{S}^3 (ويتم
إسقاطها مجساميا في الـ 3 - فضاء).

ال3- كرة وتلييف هوفيف

علم مركب؟

لقد استغرق الأمر وقتًا طويلاً قبل أن يقبل الرياضياتيون الأعداد المركبة كأعداد غير زائفة. مع صعود الجبر، طالبت الجذور المركبة للمعادلات الحقيقية بإصرار أكثر فأكثر من أجل الاعتراف بها.

هذه كلمات كوليدج في كتابه الرائع⁸⁶ الذي يصف الظهور البطيء للهندسة المركبة في الرياضيات. كما سبق أن رأينا، كان فاوس أحد أهم الرواد، حيث فكر في العدد المركب كنقطة في المستوي. كان تصوير C^2 أكثر صعوبة لأنه رباعي الأبعاد على الأعداد الحقيقية ولم يكن بإمكان سوى الحالمين تخيل البعد الرابع خلال القرن التاسع عشر. تم شرح العديد من المحاولات الفاشلة في كتاب كوليدج.

⁸⁶ J. L. Coolidge. *Geometry of the complex domain*. Clarendon Press, Oxford, 1924.

نموذج على غرار ريمان من مجموعة
فوتينشن للنماذج والأدوات
الرياضياتية.



حتى ريمان بمفهومه الثوري الذي يسمى الآن "سطح ريمان"، كان عليه "رؤيتها" على أنها سطوح في الفضاء الحقيقي ثلاثي الأبعاد، منتشرة على C ومستعرضة لبعض خطوط القطع الغريبة حيث يتقاطع السطح مع نفسه، بنوع من طرق افتراضية.

أقل ما يمكن للمرء أن يقوله هو أن الهندسة على الأعداد المركبة حملت جوًا ما من الغموض. ومع ذلك، أصبح من الواضح بشكل تدريجي أن الهندسة المركبة ليست مركبة على الإطلاق، وأنها مفيدة للغاية لفهم المجال الحقيقي. الاقتباس الآتي لـ بول بينلوپي، عام 1900⁸⁷، هو مثال جيد.

تبيّن أنه بين حقيقتين من المجال الحقيقي، يمر المسار الأسهل والأقصر غالبًا عبر المجال المركب.

في الوقت الحاضر، يتم فهم الهندسة المركبة بشكل أفضل. بشكل عام، هناك نوعان من الأساليب.

الأول هو استخدام الأعداد المركبة بشكل صوري، كعناصر حقل مغلق جبريًا، دون أي محاولة لتصورها. لقد كان هذا فعالًا للغاية في الهندسة الجبرية الحديثة، وبالفعل، فإن الخصائص الجبرية لـ \mathbb{C} قوية بشكل مثير للدهشة. العيب هو أن الأسئلة الأصلية، القادمة من الأعداد الحقيقية، عادة ما تُنسى. مهندس جبري شهير كان مرة يحاضر عن المنوعات الأبلية (المركبة). في نهاية محاضراته، طُرح سؤال حول المنوعات الأبلية الحقيقية. تفاجأ المتحدث واستغرق بعض الوقت قبل أن يجيب بجديّة:

آسف، لم أفكر قط في الحقيقي!

تمثل الطريقة الثانية في رسم الصور والإسقاطات والمقاطع وما إلى ذلك. والأهم من ذلك، يحاول المرء تطوير بعض الحدس للفضاءات ذات بعد عالٍ، بناءً على القياس. لم يعد علماء الطوبولوجيا والهندسة المعاصرون يخشون الأشياء الموجودة في \mathbb{C}^2 بل إنهم يعتبرونها ملموسة جدًا. في هذا الفصل، نحاول تطوير بعض من هذا الحدس. وفقًا لخدعة متداولة على الإنترنت، فإن سوفوس لي يكون قد قال:

الحياة معقدة لأنها تحتوي على جزء حقيقي وجزء تخيلي.

من الصعب تصديق أن رياضياتيا صارما كهذا كان بإمكانه أن يقول مثل هذا الشيء.

⁸⁷ P. Painlevé. *Œuvres de Paul Painlevé. Tome I.* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1973. Analyse des travaux scientifiques, pages 72-73.

"Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe."

الـ 3 - كرة المستديرة

معظم الوقت يرسم المهندسون مستقيماً على السبورة عندما يعنون $P^1(\mathbf{C})$ في $P^2(\mathbf{C})$ ، حتى لو كانوا يعرفون أن $P^1(\mathbf{C})$ كرة (ريمان) ذات بعدين وأن $P^2(\mathbf{C})$ منوعة رباعية الأبعاد غير قابلة للتقليص وليس لها الكثير المشترك مع السبورة.

غالبًا ما يرسمون دائرة في المستوي عندما يقصدون الـ 3-كرة في \mathbf{C}^2 . يرسمون فرعًا حقيقيًا لمنحن $P(x, y) = 0$ على الرغم من أنهم يعرفون أن الطوبولوجيا الفعلية على الأعداد المركبة أغنى بكثير.

نحن نستخدم هذه "الصور الخاطئة" لأنها غالبًا ما تكون الصور الوحيدة للتقريب المحتمل لـ "الواقع" في العالم المركب. هدفنا هو تقديم وصف مرئي قدر الإمكان لجوار نقطة في منحن تحليلي $F(x, y) = 0$ في \mathbf{C}^2 . هنا، x و y عدنان مركبان $x_1 + ix_2$ و $y_1 + iy_2$ حيث x_1, x_2, y_1, y_2 أعداد حقيقية. يتم الحصول على المنحنى في الواقع من خلال معادلتين

$$\Re(F(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)) = \Im(F(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)) = 0$$

في \mathbf{R}^4 ، لذلك من وجهة نظر الأعداد الحقيقية، منحنينا هو سطح. الفكرة الطبيعية للغاية هي أن نجعل منحنينا / سطحنا يتقاطع مع كرة صغيرة ثلاثية الأبعاد نصف قطرها ε ونأمل أن نرى شيئًا أحادي البعد (على الأعداد الحقيقية). لذلك نبدأ بوصف الـ 3-كرة. سيتم تصوير تقاطع المنحنى مع الكرة لاحقًا. هناك عدة طرق لتصوير الـ 3-كرة الواحدية

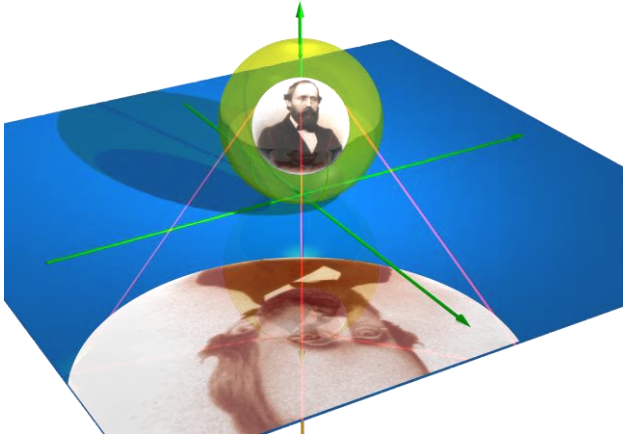
$$\begin{aligned} \mathbf{S}^3 &= \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1\}. \end{aligned}$$

يمكننا أولاً استخدام الإسقاط المجسامي.

نختار على سبيل المثال النقطة $N = (0, 0, 1, 0)$ من \mathbf{R}^4 قطبا شماليا لـ \mathbf{S}^3 ونسقط من N على المستوي المماس في القطب الجنوبي $(0, 0, -1, 0)$ من \mathbf{R}^4 . النقطة (x_1, x_2, y_1, y_2) من \mathbf{S}^3 يتم تحويلها إلى $(u, v, -1, w)$ بحيث تكون النقطة N ، (x_1, x_2, y_1, y_2) ، $(u, v, -1, w)$ على نفس المستقيم. يُعبّر عن ذلك بالعلاقة

$$\Pi: \mathbf{S}^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{R}^3, (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{2x_1}{1-y_1}, \frac{2x_2}{1-y_1}, \frac{2y_2}{1-y_1} \right).$$

إسقاط صورة برنهارد ريمان
مجسامياً.



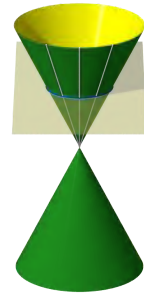
وبالتالي يمكن تمثيل الكرة مطروحًا منها نقطة واحدة على الـ 3-فضاء العادي. ومع ذلك، فقد فُقدت بعض التناظرات لأن القطب الشمالي عشوائي تمامًا. هذه فرصة جيدة لأوصي بالكتاب الشهير⁸⁸ عن الخيال في الهندسة. أوصي أيضًا بفيلم **أبعاد**.
الخصائص الآتية للإسقاط المجسمي معروفة

- الإسقاط امتثالي: تفضله في أي نقطة تشابه.
- صورة دائرة على الـ 3-كرة هي دائرة في الـ 3-فضاء (أو مستقيم إذا كانت الدائرة الأصلية تمرّ عبر القطب الشمالي).

⁸⁸ D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. Translated by P. Néményi.

وفقًا لبعض المؤرخين، تم إنشاء هذه الخصائص (في الحالة ثنائية الأبعاد) بواسطة هيباركوس، الذي التقينا به بالفعل في هذا الكتاب.

الزمرة $SO(4)$ للدورانات الموجبة للكرة S^3 يمكن إذن أن يُنظر إليها على أنها زمرة من التفاضلات الامتثالية المختلفة لـ $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$. زمرة التفاضلات الامتثالية لـ n -كرة هي في الواقع أكبر بكثير من $SO(n+1)$ لأنها غير مترابطة. على سبيل المثال، يمكن تزويد \mathbf{R}^{n+2} بالشكل التربيعي ذي التوقيع $(n+1, 1)$ المعطى بالعلاقة $q = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2$ ، بحيث يمكن تفسير الـ n -كرة على أنها تقاطع المخروط المتناحي $q=0$ مع المستوي الفوقي $x_{n+2}=1$. يكافئ ذلك إمكانية اعتبار الـ n -كرة على أنها فضاء المستقيمت المتناحية.



تُحدث الزمرة غير المتراسة $SO(n+1,1)$ عملاً امتثالياً على الـ n -كرة.
إن الهندسة الامتثالية للكرات غنية جداً.

اسمحوا لي أن أذكر خاصيتين فقط. يتبين أن أي تفاعل امتثالي بين مجموعتين مفتوحتين مترابطتين من كرة بعدها 3 على الأقل هو اقتصار لتفاعل امتثالي عام (مبرهنة ليوفيل). يتناقض هذا بقوة مع حالة البعد 2 حيث تتطابق التفاعلات الامتثالية مع التفاعلات الهولومتشاكلة أو الهولومتشاكلة المضادة، وسيكون المشهد الرياضي أقل جمالاً إذا كانت التطبيقات الهولومتشاكلة ستختصر على أوطوتشاكلات موبوس $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ لكرة ريمان.

إذا كانت الزمرة الامتثالية لمنوعة ريمانية غير متراسة، فإن هذه المنوعة امتثالية مع الكرة أو الفضاء الإقليدي. هذه هي مبرهنة أباطا و لؤلؤن- فبزا.

نحن نحجم عن الاستمرار في هذا الاتجاه لأننا يمكن أن نضع بسهولة ولا نعود من نهتنا الرياضياتية. نوصي بكتاب بديجي⁸⁹ بمثل ما نوصي بنظرته الشاملة (بانوراما) الشاسعة⁹⁰. بالنسبة إلى القارئ المهتم بالعروض القديمة، فإن كتاب كوليديج⁹¹ جميل.

الـ 3 - كرة "المربعة"

نظراً إلى أن $|x|^2 + |y|^2 = 1$ على الـ 3 - كرة، يمكننا تقسيمها إلى جزأين T_1 ، T_2 معرفين بـ

$$T_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{S}^3 \mid |x|^2 \leq 1/2 \right\}, \quad T_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{S}^3 \mid |y|^2 \leq 1/2 \right\}.$$

تقاطع T_1 و T_2 هو طارة كليفورن المثلثة بالتوسيط

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{S}^3, (\theta, \phi) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\phi) \right).$$

بالنسبة إلى T_1 و T_2 ، هما طارتان صلبتان، موسطتان بواسطة جداء لقرص وحدة D^2 في \mathbf{C} ودائرة

$$D^2 \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow T_1 (\subset \mathbf{S}^3), (z, \phi) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z, \sqrt{1 - \frac{|z|^2}{2}} \exp(i\phi) \right)$$

$$D^2 \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow T_2 (\subset \mathbf{S}^3), (\theta, z) \mapsto \left(\sqrt{1 - \frac{|z|^2}{2}} \exp(i\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} z \right).$$



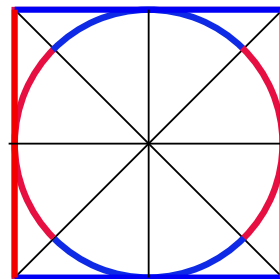
مشهد مجسائي لباريس.

⁸⁹ M. Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

⁹⁰ M. Berger. *Geometry revealed. A Jacob's ladder to modern higher geometry*. Springer, Heidelberg, 2010.

⁹¹ J. L. Coolidge. *A treatise on the circle and the sphere*. Clarendon Press, Oxford, 1916.

تربيع الدائرة ؟



وبالتالي، فإن الـ 3-كرة هي اتحاد طارتين صلبتين، يتم لصقهما على طول حديهما. خطوط الطول في ∂T_1 ، أي الدوائر التي تحد قرصا في T_1 ، ملتصقة بموازيات ∂T_2 ، والتي تحد قرصا في T_2 ، والعكس بالعكس. يمكننا أيضًا استخدام "الكرة المربعة"

$$D^2 \times D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}.$$

يتكون حدها من طارتين صلبتين

$$T_2' = \{|x| = 1 \wedge |y| \leq 1\} \text{ و } T_1' = \{|x| \leq 1, |y| = 1\}$$

باستخدام الإسقاط الشعاعي، يتم مطابقة الطارتين الصلبتين T_2, T_1 ، مع T_2', T_1' ، غالبًا ما يكون استخدام الكرة المربعة أكثر ملاءمة، حيث يمكننا رسم الصور في الطائرة الصلبة دون الحاجة إلى استخدام الإسقاط المحسامي. تعود هذه الفكرة البسيطة والمفيدة للغاية إلى كبلر⁹².

الـ 3-كرة مستديرة جدا

ويليام ثيورستون⁹³، أحد أساتذة الجانج البصري للرياضيات، اعتاد القول إن الـ 3-كرة "أكثر استدارة" من الكرات الأخرى. كانت تدور في ذهنه الحقيقة المهمة المتمثلة في أن الزمرة $SO(n+1)$ ليست زمرة بسيطة إذا وفقط إذا كانت $n=3$ (وبالطبع $n=0, n=1$). هذا مرتبط بما كان يسمى في الأدب القديم توازي كليفورن.

نذكر أن المرباعيات هي تعبيرات شكلية من النوع $q = x_1 + ix_2 + jy_1 + ky_2$ حيث x_1, x_2, y_1, y_2 أعداد حقيقية والرموز الشكلية i, j, k تحقق $jk = -kj = i$ ؛ $ij = -ji = k$ و $ki = -ik = j$ و $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. يُعرّف هذا جبر قسمة غير تبديلي \mathbf{H} . يُعرّف المرافق \bar{q} لـ q على أنه $x_1 - ix_2 - jy_1 - ky_2$ والنظيم $N(q)$ هو الجداء $q\bar{q} = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$. هذا التنظيم ضربي، أي $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$ ومقلوب مرباعي غير منعدم q هو $q^{-1} = \bar{q}/N(q)$.

يترتب على ذلك أنه تتم مطابقة الـ 3-كرة مع زمرة المرباعيات الواحدية $\{q \in \mathbf{H} \mid N(q) = 1\}$. إنه لأحد النجاحات العظيمة للقرن العشرين الرياضي أن يتم إثبات أن الكرات التي يمكن تزويدها ببنية زمرة طوبولوجية هي $\mathbf{S}^0 \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ و $\mathbf{S}^1 = SO(2)$ و \mathbf{S}^3 . نقطة انطلاق جيدة لهذا الموضوع هي أعداد (Numbers)⁹⁴.

لكن ليس هذا هو السبب الوحيد وراء استدارة الـ 3-كرة.

⁹² E. Kähler. über die verzweigung einer algebraischen funktion zweier veränderlichen in der umgebung einer singulären stelle. *Math.*

⁹³ W. P. Thurston. How to see 3-manifolds. *Classical Quantum Gravity*, 15(9):2545-2571, 1998. Topology of the Universe Conference (Cleveland, OH, 1997).



لقطة شاشة من *Knots to*

Narnia وويليام ثيورستون (1946—2012) يظهر أنه عندما يدور حول عقدة، سيصل إلى "مكان آخر". يجب أن تشاهدوا هذا الفيديو الممتاز.

⁹⁴ H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, and R. Remmert. *Numbers*, volume 123 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990.

تمامًا مثل أي زمرة، يمكن اعتبارها متجانسة بطريقتين تبادليتين، باستخدام عمل عن اليمين وعن اليسار. ليكن مربعان واحدان q_1 ، q_2 ، التطبيق $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}, q \mapsto q_1 q q_2$ هو تقايس، ويعرّف عنصراً من $SO(2)$. تبين أن هذا التشاكل من $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ إلى $SO(4)$ غامر وأن نواته تشمل $(1,1) \pm$ فقط. بعبارة أخرى، كل دوران لـ 3-كرة مركب من دوران عن اليسار ودوران عن اليمين يتبادلان. هذا الموقف فريد بالنسبة إلى البعد 3 حيث أن جميع زمر الدورانات الأخرى بسيطة مع استثناء واضح لـ $SO(2)$.

تلييف هوف

يمكننا الآن أن نبدأ وصفنا لطوبولوجيا المنحنيات الجبرية في \mathbf{C}^2 ونبدأ بأبسط منححن ممكن: المستقيم.

لنلق نظرة على تقاطع المستقيمين $x=0$ و $y=0$ مع كرة الوحدة. تحت الإسقاط المجسائي، حيث يمر المستقيم $x=0$ بالقطب الشمالي، فإن صورته هي ببساطة مستقيم عمودي. المستقيم الآخر $y=0$ يُسقط على دائرة "تدور حول المستقيم العمودي $x=0$ ".

في تحليلنا إلى طارتين صلبتين، يصبح $x=0$ الدائرة $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}) \times \{0\}$ وهي نواة T_1 في المقابل، $y=0$ تصبح الدائرة $\{0\} \times (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$ وهي نواة T_2 . لاحظوا أن هاتين الدائرتين مرتبطتان.

يقطع المستقيم $y=x$ الكرة في دائرة محتواة في T_1 و T_2 : ليست خط زوال ولا موازياً بل صنف ترادفها هو $(1,1)$ في كل من T_1 و T_2 .

كل هذه البنية موصوفة إجمالياً من قبل ما يسمى بتلييف هوف. كل نقطة (x, y) من المستوي المثقوب $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ، تنتمي إلى مستقيم مركّب وحيد يمر عبر المبدأ، وهذا يعني أنه يعرّف عنصراً من $P^1(\mathbf{C})$. بمعنى آخر، لمستقيم عبر المبدأ معادلة $y = \lambda x$ حيث ينتمي λ إلى $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ ، المطابق مع كرة ريمان، أو مع الـ 2-كرة \mathbf{S}^2 . يعرّف ذلك تطبيقاً

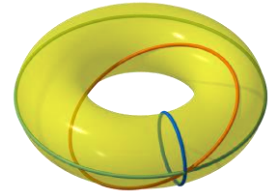
$$\pi: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$$

أليافه دوائر وهي تقاطعات مستقيمت مركبة مع دائرة. كل ليفتين مرتبطتان.

تكون زمرة (غير التافهة) بسيطة إذا لم تحتو على زمرة جزئية فعلية مميّزة. من المعتاد أن نقول إن زمرة لـ لي بسيطة إذا كانت كل زمرة جزئية مميزة منها منقطعة أو مفتوحة. هذا يكفي القول إن جبر لي المرفق بها بسيط، أي لا يحتوي على مثالي فعلي. الزمرة الجزئية المميزة غير الفعلية الوحيدة المناسبة لـ $SO(n)$ (من أجل $n \neq 1$) هي $\{\pm Id\}$ بالنسبة إلى n زوجي، بحيث تكون $SO(n)$ غير بسيطة كزمرة بالنسبة إلى n زوجي، لكنها بسيطة كزمرة لـ لي.

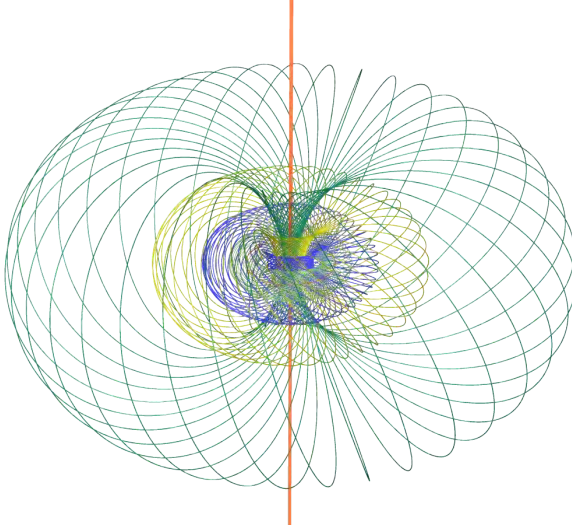


Heinz Hopf (1894–1971) should not be confused with Eberhard Hopf (1902–1983) (the only mathematician who moved from the US to Germany in 1936?).



خط زوال، ومواز، و $(1,1)$ - دائرة على طارة.

فيما يأتي بعض الصور من تليف هويف، تحت الإسقاط المجسامي، المستخرجة من أبعاد.



بالطبع هذا التطبيق لم يخترعه هويف! مساهمته كانت إظهار أنه ليس مترادفاً مع تطبيق ثابت، لكن هذه قصة أخرى.

تليف هويف: كل دائرة هي ليفة لـ π . الصورة العكسية لدائرة بواسطة π هي طارة كليفورد، والتي هي اتحاد ألياف (من نفس اللون في الصورة).

ما هي النسخة الحقيقية من تليف هويف؟ إنها موجودة لكنها مخبئة للآمال لبعض الشيء. كل نقطة (x, y) من $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ تنتمي إلى مستقيم وحيد يمر بالمبدأ، وتعرّف عنصراً من $P^1(\mathbf{R})$. مثل هذا المستقيم من الشكل $y = \lambda x$ حيث λ ينتمي إلى $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ هو كرة ذات بعد واحد، أي دائرة S^1 . يعرف ذلك التطبيق

$$\pi : S^1 \rightarrow S^1$$

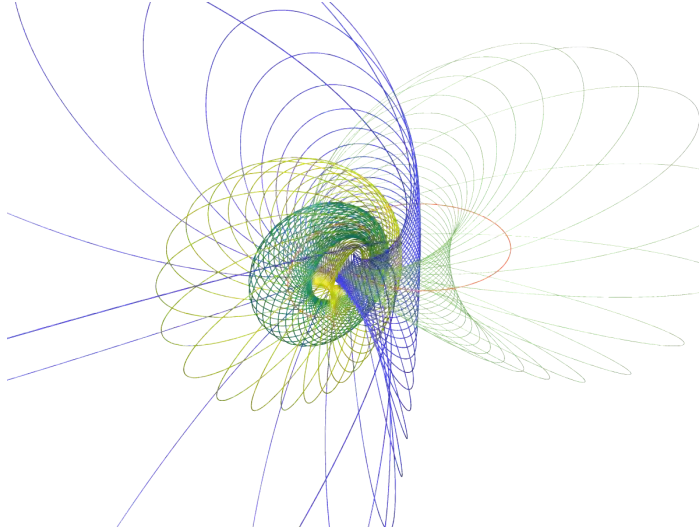
الذي أليافه S^0 ، تقاطعات مستقيمت حقيمية مع دائرة الوحدة. هذا مجرد عملية الضرب في 2 في \mathbf{R}/\mathbf{Z} . لا تنسوا أن الكرة ذات البعد صفر هي زوج من النقط.

روابط هويف

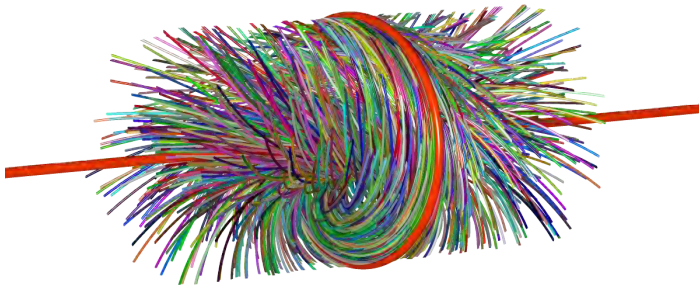
ألياف هويف هي مجرد دائرة مستديرة في الكرة، لذا لا يوجد الكثير ليقال عنها. هذا ليس صحيحاً تماماً: هندسة فضاء الدوائر في الـ 3-فضاء رائعة. انظروا في كتاب سبسيل⁹⁵ الحديث أو كتاب بلاشك⁹⁶.

⁹⁵ T. E. Cecil. *Lie sphere geometry. With applications to submanifolds.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

⁹⁶ W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Band I. Elementare Differentialgeometrie.* Dover Publications, New York, N. Y., 1945. 3d ed.



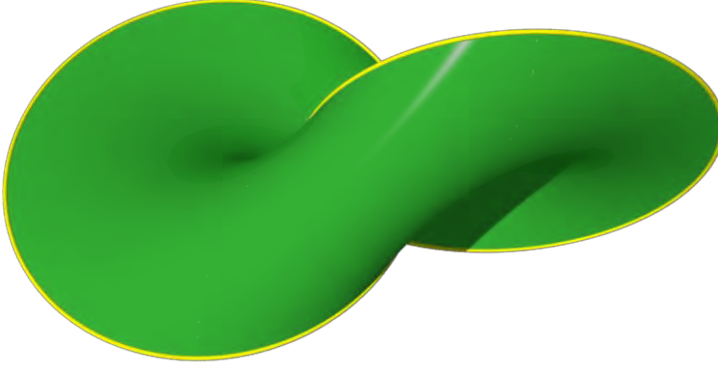
نفس الصورة كالتي أعلاه، بعد دوران ال
3-كرة، والذي يتطابق مع تطبيق امتثالي
على $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.



دوائر هوفيف في جوار إحداها، مُسقطه
كستقيم في الفضاء (باللون الأحمر).
أخبرني أحد قرائي أنه يرى هذه الصورة
"مرعبة". هل تتفقون معه؟

تعد دائرتان لهويف أكثر تشويقًا نظرًا إلى أنها تحددان أبسط ارتباط غير تافه. لاحظوا أنه على الرغم من ارتباطهما، فإن الدائرتين تحدان حلقة. بالفعل، انظروا إلى الصورة العكسية عن طريق تلييف هوييف لقوس يربط النقطتين: إنها حلقة.

○ دائرتان لهويف تحدان حلقة.

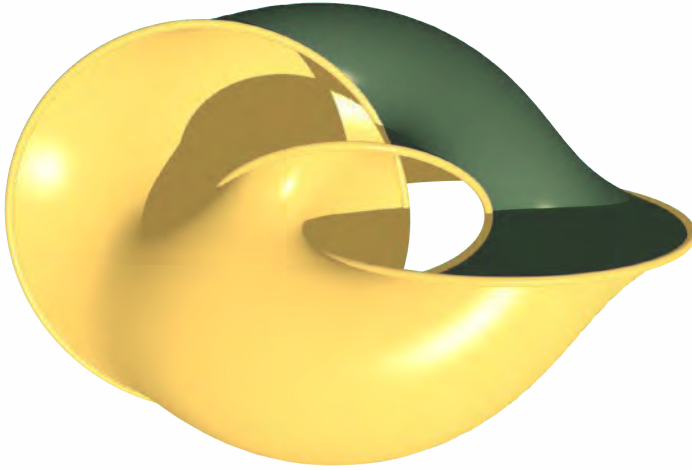


ثلاث دوائر لهويف (أو أكثر) تعطي رابطا لهويف. كل مركبة هي دائرة وأي مركبتين مرتبطتان مرة واحدة. من السهل العثور على سطح قابل للتوجيه به مثل هذا الرابط كحد. بالفعل، ليكن n عددا مركبا $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ وكثير الحدود

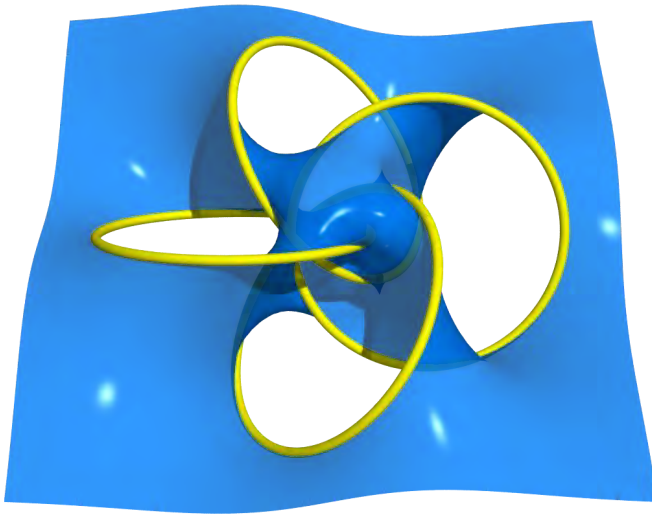
$$F(x, y) = (y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x) \cdots (y - \lambda_n x).$$

تقاطع الـ 3-كرة مع مجموعة الثنائيات (x, y) بحيث يكون $F(x, y)$ عددا حقيقيا موجبا هو سطح حده يتكون من n دائرة لهويف. كل هذا سيتم تعميمه بشكل كبير في الفصول الآتية.

• ثلاث دوائر لهويڤ تحد سطحاً.



• أربع دوائر لهويڤ تحد سطحاً.



هذا الجزء طبعاً ليس ضرورياً لباقي الكتاب

دانتى، الكومبديا الإلهية (La Divina Commedia) وال 3-كرة

لقد أكد مارك بيترسون⁹⁷ بأن كون دانتى، كما هو موصوف في الكومبديا الإلهية، هوميومنتشاكل مع ال 3-كرة. على الرغم من أنني لست مقتنعاً تماماً بأنه "من الواضح أن دانتى اخترع مفهوم المنوعة"⁹⁸، فإن هذه الرؤية الكونية تعجبني. إنها تجيب على الأقل عن سؤال طرحناه جميعاً على والدينا عندما كنا أطفالاً: ماذا يحدث عندما نصل إلى حدود الكون؟ حسناً، عالم دانتى هو 3-منوعة متراسة دون حد!

⁹⁷ M. A. Peterson. [Dante and the 3-sphere](#). *American Journal of Physics*, 47:1031-1035, 1979.

⁹⁸ M. A. Peterson. The geometry of *paradise*. *Math. Intelligencer*, 30(4):14-19, 2008.



◉ (1888) نقش فلانماري (Flammarion).

◉ نظام مركزية الأرض لأرسطو - بطليموس.

اسمحوا لي أن أذكر أن العالم الموروث من اليونانيين القدماء منته⁹⁹. في الأساس، في نظام أرسطو وبتليموس، الأرض ثابتة في مركز الكون وتحيط بها سبع كرات سماوية، كل منها يحمل "كوكبا": القمر، عطارد، الزهرة، الشمس، المريخ، المشتري وزحل. الكرة الثامنة تحمل النجوم الثابتة. أخيراً، الكرة التاسعة، وتسمى المحرك الأول (Primum Mobile)، تعمل كحاوية للنظام الكامل وتولّد حركة الكرات الأخرى. وبالتالي، فإن العالم المحسوس هو كرة ثلاثية الأبعاد، حدها هو المحرك الأول. ما وراء هذا الحد يبدأ عالم ما يسمى عليين أو السماء العليا (Empyrean) الذي طبيعته ليست واضحة تماماً. وفقاً لأرسطو¹⁰⁰ "من الواضح أنه لا [يحتوي] على فضاء ولا فراغ ولا زمن."

⁹⁹ A. Koyré. *From the Closed World to the Infinite Universe*. Johns Hopkins University Press, 1957.

بالطبع القمر والشمس ليسا كوكبين لكنهما يدوران حول الأرض ... في نظام مركزية الأرض.

¹⁰⁰ Aristotle. *On the Heavens*, volume I, 9, 278b-279a. transl. by J. L. Stocks.

الكومبديا الإلهية هي قصيدة طويلة كتبت عام 1320 م تقدم وصفاً رائعاً للعالم المسيحي في القرن الرابع عشر¹⁰¹. يجبرنا دانتي عن رحلته عبر الجحيم، المطهر والفردوس، كرمز لخلاص النفوس. في الجزء الأخير، الفردوس، تساعد عروس شعره بياتريس على زيارة الكرات المساوية التسع على التتابع. عندما يصل إلى المحرك الأول، يمكنه التفكير في العالم من حده، مع وجود الأرض الصغيرة في المركز. فجأة، عاد إلى الوراثة واكتشف أن لعلين نفس بنية العالم المحسوس. وهو يتألف من نفس عدد الكرات والتي تتمركز الآن في الإله. هذه الكرات الملائكية، المتناظرة مع الأجرام السماوية، لها الأسماء الآتية (الانتقال من الإله إلى المحرك الأول): سيرافيم، الشيرويم، العروش، الهيمنة، الفضائل، السلطات، الرئيسيات، رؤساء الملائكة، الملائكة. وبالتالي، فإن عالم دانتي هو اتحاد ثلاث كرات ملتصقة على طول المحرك الأول. لذلك، فهي 3-كرة!

انظروا¹⁰² للحصول على مناقشة أعمق بكثير حول رؤية القرون الوسطى للكون و¹⁰³ لمزيد من المعلومات حول الشعر والرياضيات.



¹⁰¹ Dante Alighieri. *Divina Commedia*. الطبعة الرقمية، جامعة كولومبيا. هناك العديد من الطباعات والترجمات. أوصي بإصدار 2017 الجميل هذا، مع ترجمة وتعليقات باللغة الإنجليزية.

¹⁰² J. Grzybowski. *Cosmological and Philosophical World of Dante Alighieri: "The Divine Comedy"*. Peter Lang GmbH, 1st new edition, 2015.

¹⁰³ R. Osserman. *Poetry of the universe, From the Divine Comedy to Riemann and Einstein*. Anchor, 1995.

Rosa Celeste: دانتي وبياتريس
يقدقان في أعلى جنة، عليلين (نقش
ش. دوري).

الأبيات الأخيرة للكومبديا:

"All'alta fantasia qui mancò
possa ; ma già volgeva il mio
disiro e il velle, l'amor che move
il sole e l'altre stelle."

"إلى الخيال العالي هنا فشلت القوة ؛
لكن رغبتني وإرادتي قد تدرجتنا بالفعل
- حتى كعجالة تتحرك بالتساوي - بالحب
الذي يحرك الشمس والنجوم الأخرى."



صفحة من كتاب ميلنور المفتوح
مرفقة بالمنحني $y^2 - x^3 = 0$.

القرنة وثلاثية الوريقات

الغرض الفضفاض من نزهتنا هو وصف طوبولوجيا مفرديات المنحنيات التحليلية الحقيقية. كما أوضحنا في وقت سابق، اختصاراً على المجال المركب قد يسمح بإلقاء بعض الضوء على مناقشتنا "الحقيقية". على أي حال، في هذا الكتاب نحن مهتمون بالمسارات الجانبية أكثر من الاهتمام باختصارات. للحصول على وصف كامل لطوبولوجيا مفرديات المنحنيات الجبرية المركبة، أوصي بإلحاح بالكتاب ذي الـ 721 صفحة¹⁰⁴ الممتاز لبريسكورن وكنورر لكن:

كتاب صغير يبعث على الاطمئنان (Un petit livre est rassurant)

كما كتب ج. طانوري (Jules Tannery) في مقدمة موجزة جدا وجميلة¹⁰⁵ لنظرية قالوا. باتباع هذه النصيحة، سنقتصر على السمات الأساسية للنظرية. هدفنا الوحيد في هذا الفصل هو إقناع القارئ بأن الطوبولوجيا المحلية لمفردية في المجال المركب غنية بشكل لا يصدق.

رابط المفردية

فكرة قطع منحن تحليلي مركب $F(x, y) = 0$ بكرة صغيرة

$$S_\varepsilon^3 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2 \right\}$$

ربما تكون قديمة جداً. تعود الورقة الأولى التي تشرح هذا الإنشاء إلى برونر¹⁰⁶، والتي نُشرت في عام 1928، بعد فكرة قدمها مستشاره للدكتورا بيرتينشر في عام 1905. انظروا¹⁰⁷ للحصول على عرض مُلهم للتطور التاريخي لهذه الأفكار.

¹⁰⁴E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.

¹⁰⁵H. Vogt. *Leçons sur la résolution algébrique des équations*. Librairie Nony, 1895.

¹⁰⁶K. Brauner. Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderliche. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6(1):1-55, 1928.

¹⁰⁷M. Epple. *Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory*. *Historia Math.*, 22(4):371-401, 1995.

من المهم أن نتذكر أن منحنيًا على الأعداد المركبة له بعد 1 على \mathbf{C} وبالتالي البعد 2 على \mathbf{R} ، بحيث يكون المنحني المركب سطحًا حقيقيًا. هذه التوازن الثابت بين المنحنيات والسطوح هو واحد من أسرار النظرية.

قد نظرنا بالفعل إلى أبسط حالة $F(x, y) = y - \lambda x$ ، قادتنا إلى تلييف هوفب.

ننظر الآن إلى المثال المهم الثاني: المفردية القرنية، المعرفة بـ $F(x, y) = y^2 - x^3$. كيف نختار الشعاع الصغير ϵ ؟ هل يمكننا استخدام سطح فوقى آخر ، مثل شبيه ناقص ؟ الجواب هو أنه في ظل افتراضات معتدلة للغاية ، فإن كل هذه التقاطعات تحدد نفس الكائن الطوبولوجي ، إلى هوميوتشاكلات مقربة. الحالة $y^2 - x^3 = 0$ بسيطة بشكل خاص. ليكن السيل الخطي الآتي على \mathbf{C}^2 :

$$\phi^t(x, y) = (e^{2t}x, e^{3t}y) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

الفضاء \mathcal{O} لمدارات ϕ^t في $\mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ هوميومتشاكل مع \mathbf{S}^3 . في الواقع ، على طول هذا المدار ، يتزايد المعيار $|x|^2 + |y|^2$ بشكل تام ويتقاطع كل مدار مع الكرة مرة واحدة بالضبط. يمكن استخدام نفس الحجة مع شبيه ناقص متركز في المبدأ ، أو مع "كرتنا المربعة" $\max(|x|, |y|) = \epsilon$ ، أو مع العديد من السطوح الفوقية الأخرى.

لاحظوا الآن أن السيل ϕ^t يحافظ على منحنينا الذي معادلته $y^2 - x^3 = 0$ ، بحيث يجدد المنحني بشكل قانوني مجموعة جزئية K من \mathcal{O} . بمطابقة \mathcal{O} مع \mathbf{S}^3_ϵ ، ندرك أنه ، هوميوتشاكلات مقربة ، تقاطع المنحني مع \mathbf{S}^3_ϵ مستقل بالفعل عن ϵ ويمكننا أيضًا استخدام الكرة المربعة.

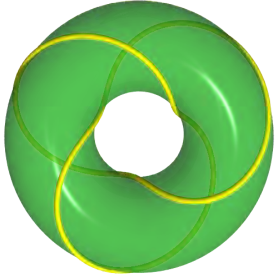
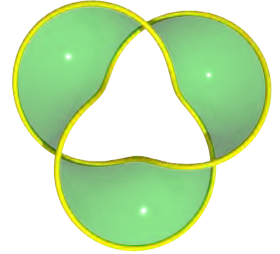
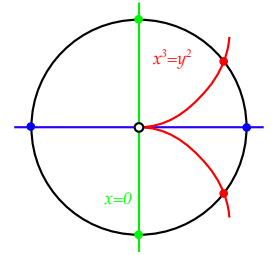
لذلك ، دعونا تقطع $y^2 - x^3 = 0$ مع $\max(|x|, |y|) = \epsilon$ ، إذا كان $\epsilon < 1$ ، فها هو توسيط بواسطة θ ، $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ،

$$x = \epsilon \exp(2i\theta) \quad ; \quad y = \epsilon^{3/2} \exp(3i\theta)$$

في الطارة الصلبة (حيث $|x| = \epsilon$ و $|y| \leq \epsilon$). هذه هي عقدة ثلاثية الوريقات ، التي تُرى على أنها عقدة الطارة (3, 2) : يتم رسمها على طارة قياسية دورانية في الـ 3 - فضاء وتدور ثلاث مرات حول خط الزوال بينما تدور مرتين حول الموازي.

هناك العديد من الكتب الممتازة عن طوبولوجيا العقد. أوصي بـ "الكتاب الصغير" لـ سوسينسكي¹⁰⁸ والكتاب المرئي للغاية لكوفمان.

لفهم طوبولوجيا المنحني القرني $y^2 - x^3 = 0$ في جلة صغيرة $\epsilon^2 \leq |x|^2 + |y|^2$ ، يكفي ملاحظة أن جميع الكرات متحدة المركز تقطع المنحني في مثل ثلاثية الوريقات هذه. يتبع ذلك أنه في جلة صغيرة ، فإن منحنينا يكون هوميومتشاكلًا مع المخروط الطوبولوجي على عقدة ثلاثية الوريقات. ثلاثية الوريقات هي دائرة (مغطسة بطريقة معقودة).

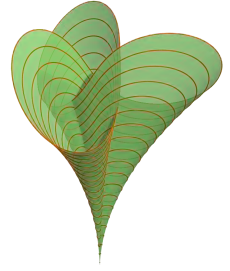


● عقدة ثلاثية الوريقات

108 A. Sossinsky. Knots. Mathematics with a twist. Harvard University Press Cambridge, MA, 2002.

109 L. H. Kauffman. On knots, volume 115 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.

لذا فإن المخروط قرص مغطس بطريقة مخادعة في الـ 4-فضاء. على الأعداد المركبة، يكون المنحني أملس طوبولوجيًا، أي أنه هوميومورفيكًا محليًا مع القرص، لكن تغطيس هذا القرص في \mathbf{C}^2 معقود. هذه ظاهرة نموذجية يمكن اكتشافها على الأعداد المركبة والتي هي غير مرئية على الأعداد الحقيقية، لأن المنحني الحقيقي $y^2 - x^3 = 0$ ، وفي الواقع كل فرع من منحني تحليلي حقيقي، هوميومورفيكًا محليًا مع مستقيم في المستوي: هذا ما سميناه سابقًا ادعاء فاوس.



تليف ميلنور

صورة محلية لفرع (تم إسقاطه في الـ 3-فضاء حيث الفرع ليس مغطسًا).

هيا بنا نصف منحنيًا قُرنيًا بمزيد من التفصيل ونبين حالة خاصة جدًا لمبرهنة ميلنور العامة التي سنقدمها لاحقًا.

ليكن التطبيق

$$\mu: \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{C} ; (x, y) \mapsto y^2 - x^3.$$



الصورة العكسية للصفر هي عقدة ثلاثية الوريقات. نريد أن ننظر إلى الصورة العكسية Σ_θ ليُصف مستقيم ينطلق من المبدأ، والذي معادلته $\arg(z) = \theta$ حيث $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. بعبارة أخرى، نحن ننظر إلى ألياف التطبيق $\arg \circ \mu$ المعرفة على متممة عقدة ثلاثية الوريقات والذي قيمه في $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

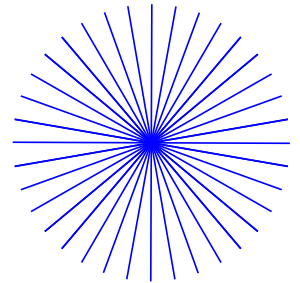
من السهل أن نرى أن $\arg \circ \mu$ غمر. في الواقع، السيل

$$\psi^s(x, y) = (e^{2is}x, e^{3is}y)$$

يحافظ على الكرات ويحقق العلاقة $\arg(\mu \circ \psi^s) = \arg(\mu) + 6s$. يترتب على ذلك أن حقل الأشعة المرتبط بـ ψ^s ليس في نواة تفاضل $\arg \circ \mu$. لاحظوا أن ψ^s يبادل الألياف Σ_θ .

في جوار عقدة ثلاثية الوريقات، الوضع سهل التحليل جدًا. لا يزال من الممكن استخدام كرتنا المربعة، لأن $\arg \circ \mu$ لا متغير تحت ϕ' ونحن في الواقع نعمل في فضاء المدارات \mathcal{O} . نقوم بتوسيط جوار لثلاثية الوريقات بالثنائيات (α, ζ) حيث $\alpha \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ و ζ عدد مركب صغير:

$$x = \varepsilon \exp(2\pi i \alpha) ; y = \varepsilon^{3/2} (\exp(3\pi i \alpha) + \exp(-3i \alpha) \zeta).$$



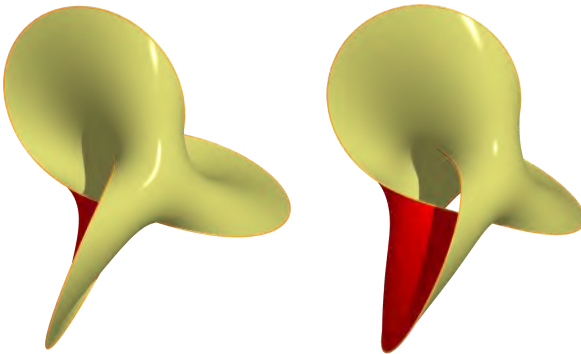
أصاف مستقيمت شعاعية مع عمدات ثابتة.

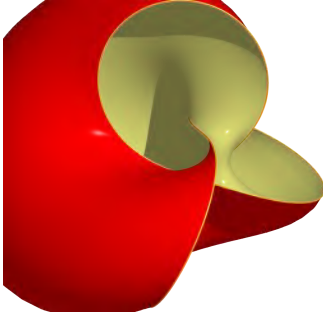
في هذه الإحداثيات، $\arg \circ \mu$ يساوي $\arg(z)$ للترتيب الأول. ويترتب على ذلك أنه في جوار لثلاثية الوريقات، فإن الـ Σ_0 هي سطوح تنصرف مثل صفحات كتاب حول رابطها.



كتاب غريب يتم فيه ترتيب الصفحات بشكل دوري ودون صفحة أولى. كتاب أحلام تقرأونه إلى الأبد. على الأقل الصفحات قابلة للتوجيه.

سأقول إن عقدة ثلاثية الوريقات مُليّفة أو إن ممتها ألياف فوق الدائرة. الألياف صفحات منفصلة تتخذ كل مُغلقاتها في الـ 3-كرة العقدة كحد مشترك. لاحظوا أن صفحة واحدة تمر عبر القطب الشمالي في الـ 3-كرة، وهي مركز الإسقاط المجسائي. هذه الصفحة، عند إسقاطها على الـ 3-فضاء الإقليدي، ليست متراسة.





بعض الصفحات.

الامتداد الأوحده

السييل $\psi^s(x, y) = (e^{2is}x, e^{3is}y)$ بيدل صفحات كتابنا بتعبير أدق، ψ^s يحوّل الصفحة Σ_θ إلى الصفحة $\Sigma_{\theta+6s}$. لاحظوا أن $\psi^{2\pi}$ هو الوحدة وأن $\psi^{\pi/3}$ يحفظ إيجابيا كل صفحة، ومن ثمّ يتم إحداث هوميوتشاكل في كل صفحة من الترتيب 6، وهو ما يسمى الامتداد الأوحده (monodromy) للقرنة.



هدفنا الآن هو وصف طوبولوجيا الصفحات وعمل الامتداد الأوحده.

بحكم التعريف، الصفحة Σ هي مجموعة (x, y) في \mathbf{S}^3 بحيث يقع العدد المركب $y^2 - x^3$ على نصف مستقيم، على سبيل المثال المحور الحقيقي الموجب \mathbf{R}_+ كجزء من \mathbf{C} . ليكن C المنحني الجبري المعرف بواسطة $y^2 - x^3 = 1$ في \mathbf{C}^2 . فكروا في الـ 3-كرة كفضاء مدارات السيل $\phi'(x, y) = (e^{2t}x, e^{3t}y)$ الذي يعمل على $\{0, 0\}$ في \mathbf{C}^2 . يحدد السطحان الحقيقيان Σ و C نفس الكائن في فضاء المدارات هذا، لذلك تتعامل مع C .
عمل الامتداد الأوحده يتوافق مع

$$C \rightarrow C ; (x, y) \mapsto (\omega^2 x, \omega^3 y)$$

حيث $\omega = \exp(2i\pi/6)$ -6 جذر بدائي للواحد.

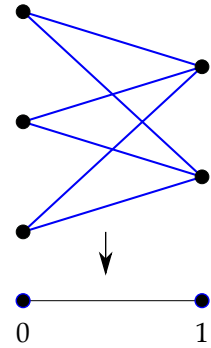
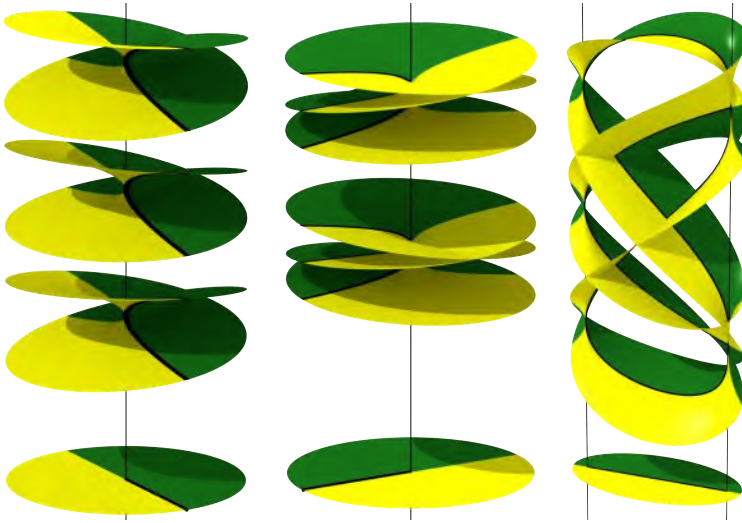
من السهل وصف طوبولوجيا C ... إذا كنتم تعرفون شيئاً عن جنس (أو مُصنّف) سطوح ريمان / المنحنيات الجبرية. في $P^2(\mathbf{C})$ ، المنحني التكعيبي المتجانس $y^2z - x^3 = z^3$ هو منحني ناقصي أملس يتقاطع ثلاث مرات مع مستقيم اللامتتهي في النقطة $[0 : 1 : 0]$. "ومن ثمّ" يكون المنحني التآلفي C هوميومتشاكلًا مع طائرة مثقوبة مرة واحدة.

بطريقة أكثر واقعية، يمكن للمرء أن يتصرف بالطريقة الآتية. نضع $Y = y^2 = 1 + x^3$ بحيث يكون التطبيق $(x, y) \mapsto Y((x, y) \in C)$ ، غطاء متفرعا ست مرات لـ C ، متفرعا في 0 و 1، بترتيب 2 و 3.

ارسموا قوسًا في المستوي المركب يربط $Y = 0$ و $Y = 1$. إنه يرتفع إلى ستة أقواس في C .

فوق $Y = 0$ ، توجد 3 نقط، حيث تندمج الأقواس الستة في 3 مجموعات من 2. فوق قرص صغير متمركز في 0، توجد 3 لوحات مزدوجة، كما هو الحال في الجزء الأيسر من الصورة الآتية. فوق $Y = 1$ ، كما في الشكل الثاني، هناك نقطتان، حيث تندمج الأقواس في مجموعتين من 3.

النقط $(-1, 0)$ و $(\exp(2i\pi/6), 0)$ يتم تحويلها إلى 0 ويتم تحويل النقطتين $(0, -1)$ و $(0, 1)$ إلى 1.



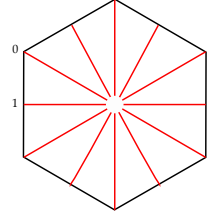
نظرًا إلى أنه من المستحيل الرسم في رباعي الأبعاد C^2 ، فهذه الصور تمثل رسمًا بيانيًا لتوفيقية مناسبة للجزأين الحقيقي والتخيلي لـ $\sqrt{Y} + \sqrt[3]{1-Y}$.

يتم تمثيل توافقيات الأقواس الستة في الهامش عن اليمين.

عندما تقطع C على طول ثلاثة أقواس، من $-\infty$ إلى 0، من 0 إلى 1، ومن 1 إلى ∞ ، فنحن نحلل C إلى مثلثين حيث يكون الجزء التخيلي موجبًا أو سالبًا (أصفر وأخضر في الصورة). هذه بالفعل مثلثات ذات رؤوس في 0 و 1 و ∞ في C ، هذا يُنبئ في المجمل 18 قوسًا، و $12 = 6 \times 2$ مثلثًا.



طريقة أخرى لرؤية نفس الصورة هي الآتية. نطابق الجوانب المتقابلة من سداسي منتظم عن طريق الانسحابات. هذا يعزف طارة. بعد حذف المركز، نحصل على طارة مثقوبة. من مركز السداسي، نرسم القطع الست التي تتجه إلى الرؤوس والارتفاعات الستة على الأضلاع. انقسمت طارتنا الآن إلى 12 مثلثًا، بإجمالي 18 ضلعًا. تعمل الجذور الستة للوحدة من خلال دورانات على السداسي (المثقوب)، مما يبذل ترتيب المثلثات تمامًا كما في حالة C .



العرض الأكثر اقتصادا لطاردة من مربع هو المعتاد أكثر ولكن هذا العرض مع السداسي أجمل. لاحظوا أن الأضلاع الستة تعزف ثلاثة أقواس في الطارة وأن الرؤوس الستة تعزف نقطتين في هذه الطارة.

في المحصلة، كل صفحة من صفحات الكتاب المرتبطة بالقرنة هي طارة مثقوبة على النحو الوارد أعلاه، والامتداد الأوسع هو مجرد دوران بنسبة $1/6$ من دورة كاملة.

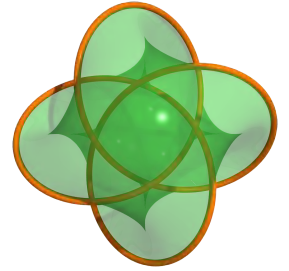
عقد الطارة

يمتد معظم ما تمت رؤيته في القرنة $y^2 = x^3$ إلى منحن عام $F(x, y) = 0$. سيتطلب هذا بعض العمل، لكن هناك مجموعة أمثلة واحدة على الأقل حيث لا يوجد عمل إضافي. لنفترض أن p ، q عدنان صحيحان موجبان أوليان نسبيًا، ولننظر إلى المنحني $y^p - x^q = 0$. يمكننا افتراض $q > p$. تمامًا كما في السابق، لننظر إلى التقاطع مع الكرة المربعة.

$$x = \varepsilon \exp(ip\theta) ; y = \varepsilon^{q/p} \exp(iq\theta).$$

هذه (p, q) عقدة طارة $K_{p,q}$ ، مرسومة على طارة قياسية في ال-3 فضاء، تدور p مرة حول الموازي و q مرة حول خط الطول.

للسبب نفسه بالضبط، يوجد تحليل كتاب مفتوح وتلبيف فوق الدائرة. أي صفحة تكون هوميومورفية مع المنحني الجبري التآلفي $y^p - x^q = 1$ ، الذي يمكن وصف طوبولوجيا بنفس الطريقة. نضع $Y = y^p$ وننظر إلى هذا المنحني على أنه منتشر على Y ، متفرع على 0 و 1 . على نقطة Y مختلفة عن 0 ، 1 ، توجد pq نقطة. على 0 (على التوالي على 1)، لا يوجد سوى q (على التوالي p) نقطة، ولكن تعددية كل منها p (على التوالي q). نستبدل بالسداسي $-pq$ مضاعفا والوضع هو نفسه. هناك $2pq$ مثلثا (pq) لكل لون) و $3pq$ حافة. يوجد p رأسا فوق 0 و q فوق 1 وواحد فوق اللانتهية.



● (3, 4) عقدة طارة.

هذا يعطي عددا لـ أويلر - يونكارى يساوي

$$p + q + 1 - 3pq + 2pq = 2 - 2 \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

كل صفحة هي الآن سطح مثقوب من الجنس $(p-1)(q-1)/2$.

أقدم الآن إثباتا على حقيقة أساسية: الطوبولوجيا تستعيد جزءا كبيرا من المنحني الجبري $y^p = x^q$.

مبرهنة. إذا كان تشاكل للـ 3-كرة يرسل عقدة الطارة (p_1, q_1) إلى (p_2, q_2) ، فإن المجموعتين $\{p_1, q_1\}$ و $\{p_2, q_2\}$ متساويتان.

سيطلب البرهان بعض الطوبولوجيا الجبرية الأساسية. من طوبولوجيا عقد الطارة، نقوم بإنشاء أداة جبرية ستمكننا من إعادة إنشاء p, q .

تتم عقدة الطارة (p, q) في الـ 3-كرة هي 3-منوعة مفتوحة. لا متغيرها الأكثر بدائية هو زمريتها الأساسية، ويرمز إليها بـ $\Gamma_{p,q}$. النقطة الأساسية في ذلك هي استخراج p و q جبريا من هذه الزمرة. سنثبت أن Γ_{p_1, q_1} إيزومتشاكل مع Γ_{p_2, q_2} فقط إذا كان $\{p_1, q_1\} = \{p_2, q_2\}$.

لاحظوا أولاً أن التطبيق $\arg \mu = \arg(y^p - x^q)$ من ممتمة عقدة الطارة (p, q) في الـ 3-كرة إلى $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ يحدث تشاكلا غامرا

$$\lambda : \Gamma_{p,q} \rightarrow \pi_1(\mathbf{S}^1) = \mathbf{Z}$$

بين الزمرتين الأساسيتين. بالفعل، نعتبر الحلقة الآتية في كرة الوحدة المعرفة من أجل $t \in [0, 1]$ بـ

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}(1+\zeta(t))}{2|1+\zeta(t)|} \exp(2ip\pi t) ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(2iq\pi t).$$

من أجل قيم صغيرة لـ ζ ، هذه حلقة صغيرة تدور حول العقدة (p, q) . عمدة μ في هذه الحلقة قريبة من

$$\pi + \arg \zeta(t) + 2\pi pqt$$

بحيث نتمكن من اختيار $\zeta(t) = \varepsilon \exp(i(1-2pqt)\pi)$ للتأكد من أن صورة هذه الحلقة بواسطة λ هي 1.

في الخطوة الأولى، نظهر أن هذا التشاكل، إلى إشارة مقربة، هو الغمر الوحيد لـ $\Gamma_{p,q}$ على \mathbf{Z} . ويترتب على ذلك أن نواة λ تتعلق فقط بـ طوبولوجيا العقدة.

زعمت في المقدمة أنني حاولت تأليف كتاب يكون بإمكانه فهمه شخصيا لو كنت دارسا جامعيا في مرحلة التدرج. أخشى ألا يكون هذا هو الحال في نهاية هذا الفصل. إذا كان هذا غامضا جدًا، فما عليكم سوى تخطيه!



نتشجع المبتدئين بقوة على إلقاء نظرة على موقع رائع لهتري پول دو سان جريفي مكرس لـ [Analysis Situs](#)

في الخطوة الثانية، نقوم بتحليل مؤابلة (أي التحويل إلى آبلية) نواة λ ، نبين أنها زمرة آبل حرة مولدة بشكل منته، ونجد مرتبتها. سيمكننا ذلك من استرداد $\{p, q\}$ من الزمرة $\Gamma_{p,q}$ ، كما هو مطلوب.

يمكن شرح الخطوة الأولى بعدة طرق، أكثر أو أقل تعقيدًا، معظمها يعتمد على ما يسمى ثنوية ليهشبتش. لنفترض أن منوعة مغلقة قابلة للتوجيه X ، على سبيل المثال دائرة، مغطسة في كرة، من البعد 3 على سبيل المثال. إذن لا يعتمد تماثل ممتمة X على الطريقة التي يتم بها تغطيس X في الكرة. على وجه الخصوص، فإن تماثل ممتمة عقدة في الـ 3-كرة هو نفسه كما في حالة عقدة نافهة، لذلك فإن هذا التماثل هو ببساطة إيزومتشاكل مع \mathbf{Z} في الدرجة 1.

يمكننا تقديم نفس الحقيقة بالطريقة الآتية. لنكن γ حلقة ملساء في $\mathbf{S}^3 \setminus K_{p,q}$. نظرًا إلى أن الكرة مترابطة ببساطة، فإن γ هي حد لتطبيق أملس $\mathbf{S}^3 \rightarrow D$ والذي قد لا يكون تغطيسا. نضع هذا القرص في وضع عام مع $K_{p,q}$ ، بحيث تكون التقاطعات بين $K_{p,q}$ و D عرضية. نقوم بحساب عدد التقاطعات بين القرص D و $K_{p,q}$ حيث العد جبري، مع مراعاة الاتجاهات. هذا العدد هو عدد الربط $lk(\gamma)$. اتضح أنه يعتمد فقط على صنف التماثل لـ γ في $\mathbf{S}^3 \setminus K_{p,q}$. هذا يأتي من حقيقة أن السطح الذي ليس له حد في \mathbf{S}^3 له تقاطع جبري نافه مع أي منحن مغلق.

لذلك فهو يعرف تشاكلا

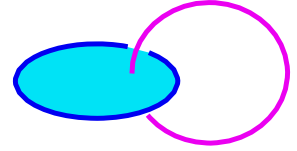
$$lk : H_1(\mathbf{S}^3 \setminus K(p, q), \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$$

والذي هو غامر. الآن، إذا كانت γ في نواة lk ، فهذا يعني أنه يمكن أن تكون علامتا + و - في التقاطع مقترنتين. نحفر ثقبًا في D ، حول نقط التقاطع، ونربط حدودها في أزواج مع الأنايب، من أجل بناء سطح يبقى حده γ ولا يتقاطع مع $K(p, q)$ مرة أخرى. لذلك فإن عناصر نواة lk متماثلة مع الصفر. بمعنى آخر lk إيزومتشاكل. نذكر أخيرًا أن زمرة التماثل الأولى هي مؤابلة الزمرة الأساسية، بحيث يمكن تحليل أي تشاكل $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus K) \rightarrow \mathbf{Z}$ إلى عوامل من خلال lk . ويترتب على ذلك على وجه الخصوص أن lk يتطابق (إلى إشارة مقرية) مع المعرف سابقا λ . هذه أول خطوة.

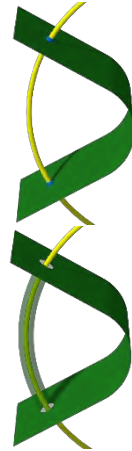
أي تطبيق من \mathbf{S}^1 إلى \mathbf{S}^3 يحدد إلى قرص الوحدة D^2 . إذا كان هذا الامتداد تغطيسا، فإن γ عقدة نافهة. ومع ذلك، فإن أي عقدة هي حد سطح مغطس موجه (من جنس أعلى) : يسمى هذا سطح سايفرت.

لاحظوا أن ممتمة دائرة غير معقودة في الـ 3-كرة هوميومتشاكله مع $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^2$.

بتعبير أدق هذا هو عدد الارتباط لـ γ و $K_{p,q}$. ستم مناقشة هذا لاحقًا في هذا الكتاب.



عدد الربط.



إزالة نقطتي تقاطع.

ننتقل الآن إلى الخطوة الثانية. ل نرمز إلى نواة lk بـ $G(p, q)$. فهي إذن الزمرة الأساسية لتغطية ل قالوا ل $K(p, q) \setminus S^3$ والتي تكون زمرة أطوتشاكلاتها دورية غير منتبهة $Z = \Gamma_{p, q} / \ker lk$. من الواضح أن هذه التغطية هي الجداء $\Sigma \times \mathbf{R}$ لصفحة مع \mathbf{R} وزمرة التحويلات مولدة ببساطة بواسطة

$$\Sigma \times \mathbf{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbf{R} ; (p, t) \mapsto (M(p), t + 2\pi)$$

حيث يشير M إلى تطبيق الامتداد الأوحد. ويترتب على ذلك أن $G(p, q)$ هي الزمرة الأساسية للصفحة Σ . لقد وصفنا بالفعل طوبولوجيا الصفحة. نظرًا إلى أن $G(p, q)$ ليست آبلية، فقد يكون من الأسهل جعلها آبلية. نشير بواسطة $H(p, q)$ إلى هذه المؤابلة، والتي هي ليست أكثر من التائل الأول للصفحة.

هيا بنا نصف هذه الزمرة الآبلية $H(p, q)$ والعمل على M . في Σ يوجد بيان يحتوي على pq قوسا، تم الحصول عليه برفع القوس الذي يربط بين 0 و 1. فهو يحتوي على q رأسا فوق 0 و p رأسا فوق 1. نذكر أن Σ يتم الحصول عليه من سطح مغلق مُمثلث عن طريق حذف رأس مشترك لجميع المثلثات. لذلك، يمكن أن يتشوه السطح المتقوب Σ إلى اتحاد كل الحافات المقابلة لهذا الرأس وهو بياننا مع pq حافة. عادة ما يسمى هذا البيان التام الشطرائي (أو ذا الفرعين). هذا ينتج 1- مركبا بسيطا جدا والذي يحسب $H(p, q)$.

يتم توليد الزمرة الآبلية المكونة من ال 1- سلاسل بحرية بواسطة الأقواس $c_{i, j}$ حيث $i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ و $j \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. الزمرة الآبلية لل 0- سلاسل يتم إنشاؤها بواسطة p نقطة a_i و q نقط b_j حيث $i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ و $j \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. عامل الحد ∂ يرسل $c_{i, j}$ إلى $b_j - a_i$. أخيرا، الامتداد الأوحد $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ يعمل بطريقة واضحة على الدليلين i, j .

التائل $H(p, q)$ يتناسب مع المتتالية التامة

$$0 \longrightarrow H(p, q) \longrightarrow \mathbf{Z}^p \otimes \mathbf{Z}^q \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}^p \oplus \mathbf{Z}^q \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

وهو المتساوي التغير بالنسبة إلى أعمال $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ في كل مستوى. يرتبط المولد M من الامتداد الأوحد بعمل (1,1). بتوتير بواسطة \mathbf{R} للحصول على فضاء شعاعي وتطبيقات خطية، يتبع أن بعد $H(p, q) \otimes \mathbf{R}$ هو $(p+q) - 1$ أي $(p-1)(q-1)$.

نذكر أن p و q أوليان في ما بينهما.



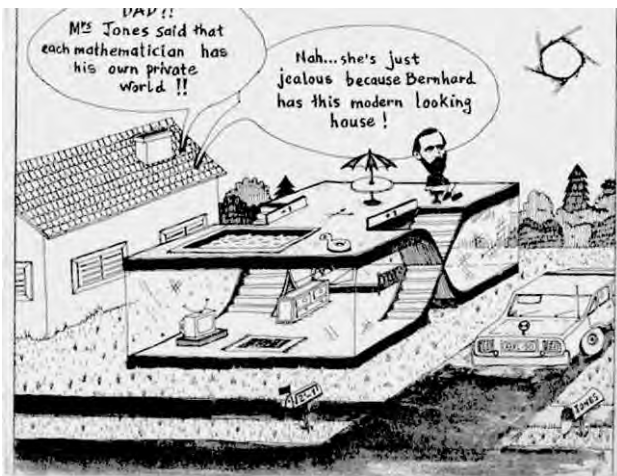
يمكن حساب كثير الحدود المميز للعمل $M_* \downarrow M$ على $H(p, q)$ باستخدام المتتالية التامة:

$$P(X) = \frac{(X^{pq} - 1)(X - 1)}{(X^p - 1)(X^q - 1)}.$$

لاحظوا أن جذور P ، القيم الذاتية لـ M_* ، هي الجذور الـ pq -اية للعدد واحد باستثناء الجذور الـ p -اية والجذور الـ q -اية وإضافة 1. من هذا الطيف، يمكن استخراج قيم p و q .

تم إثبات المبرهنة. من الزمرة الأساسية Γ من (متممة) العقدة $K(p, q)$ نقوم بإنشاء زمرتها المشتقة الأولى $\Gamma_1 = [\Gamma, \Gamma]$ ، وهي أيضًا، كما رأينا، نواة lk . ثم نجعل Γ_1 آبلية ونحدد الزمرة $\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1]$. نعتبر الآن عنصرا g في Γ مع $lk(g) = \pm 1$ والمراقبة بواسطة g على $\mathbf{R} \otimes (\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1])$. يمكن الحصول على قيم p ، q من القيم الذاتية لهذا التطبيق الخطي. \square

هذه الحيلة الجبرية هي في الواقع تقنية عامة وقوية للغاية ولا تقتصر على العقد. لتكن Γ زمرة، ننظر إلى عمل مؤابلة $\Gamma_{ab} = \Gamma/\Gamma_1 = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ بالمراقبة على مؤابلة $\mathbf{R} \otimes (\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1])$. يحدد هذا عائلة من الأوطوتشاكلات المتبادلة والتي تكون أصناف المراقبة فيها لا متغيرات الزمرة Γ . نتكلم عن مقياس ألكسندر لـ Γ . وهذا أحد أكثر اللا متغيرات بدائية في زمرة.



على موقع André Nachbin.



قمة پويزو.



فيكتور بوزو، أخيراً!

ظهر اسم بوزو بالفعل عدة مرات في هذا الكتاب. قد يكون القارئ حريصاً على معرفة ما فعله بالفعل. لسوء الحظ، فإن "مبرهنة بوزو المعروفة جداً" لا تعود إليه ولكن، كما رأينا، لنيوتن، مع بعض المساعدة اللاحقة من كرامر. يمكن للمرء أن يجادل بأنه لا نيوتن ولا كرامر قد أثبتت تقارب المتسلسلة المرتبطة ولكن يمكن إثبات هذا التقارب بسهولة، على سبيل المثال باستخدام حساب النهايات لكوشي.

ومع ذلك، تعامل بوزو مع مشكلة البنية المحلية للمفردات بطريقة مختلفة تماماً وكانت مساهمته أساسية. في هذا الفصل نود أن نوضح وجهة نظره. لسوء الحظ، سيكون من غير المجدي التمسك بعرضه الأصلي.

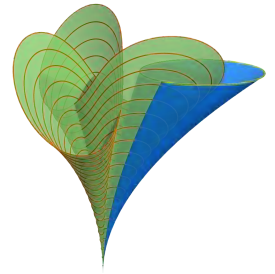
مصير غريب لعالم رياضيات: إنه "مشهور" بمبرهنة كانت معروفة قبله بزمن طويل ونحن نفهمها اليوم أفضل بكثير مما فعل، باستخدام التقنيات التي جاءت بعده بوقت طويل. لحسن الحظ، فإن بوزو أكثر شهرة بين متسلقي الجبال لأن أعلى قمة في جبل بيليو (3946 م)، في Massif des Écrins، تسمى قمة بوزو. وصل إلى هذه القمة في 9 أغسطس 1848. لسوء الحظ، ليس من المؤكد حتى أن ذلك كان "سابقة" منذ أن ادعى النقيب دوراند أنه وصل إلى القمة قبل 18 عامًا. الثانية الأبدية؟



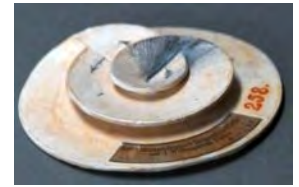
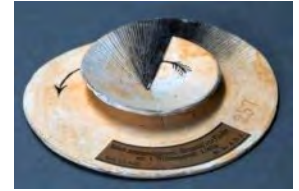
فيكتور بوزو (1820–1883)

المقاربة الطوبولوجية لـ بويرو

لنذكر بما يسمى عادة مبرهنة بويرو.



يمكن ربط فرعين.



نودجان من مجموعة فوتيشن للناذج والأدوات الرياضية التي على القارئ أن يزورها بالتأكد.

110 V. Puiseux. *Recherches sur les fonctions algébriques.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 15:365-480, 1850

لا تنسوا أن كل هذا النقاش محلي، لذلك عندما أكتب "لا تنعدم"، أعني "لا تنعدم في جوار ما للمبدأ".

مرة أخرى لا تفوتوا *Analysis Situs* لهنري بول دوسان جريجيه المتاح على الخط.

مبرهنة. لتكن $F(x, y)$ دالة هولومتشاكلية غير منعدمة معرفة في جوار المبدأ في C^2 بحيث $F(0, 0) = 0$. إذن يوجد عدد منته من الدوال الهولومتشاكلية g_1, \dots, g_n المعرفة في جوار 0 في C وعدد من الأعداد الصحيحة الموجبة m_1, \dots, m_n بحيث يكون المنحني $F(x, y) = 0$ ، مرة أخرى في جوار $(0, 0)$ ، اتحاد n فرعاً $(t^{m_i}, g_i(t))$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) (زائداً، ربما، محور الترتيب) علاوة على ذلك، هذه الفروع متباينة ولا تتقاطع إلا في المبدأ.

لقد ناقشنا بالفعل إثباتات في ما قبل بويرو، وهو إثبات جبري بالروح للغاية، حيث يجد المرء أولاً المتسلسلة الشكلية g_i قبل إثبات أنها تتقارب. اقترح بويرو نهجاً طوبولوجياً¹¹⁰ في عام 1850، مباشرة قبل الأوراق العظيمة التي كتبها ريمان لتقديم الأفكار الطوبولوجية في الهندسة الجبرية. لذلك يجب أن "نسأله" لأنه، بالطبع، لا يستطيع التعبير عن نفسه بلغة سطوح ريمان.

اسمحوا لي أن أرسم الإثبات الطوبولوجي هذا. نعتبر أولاً $F(0, y)$. إذا كانت هذه منعدمة تطابقياً، فيمكن قسمة F على قوة ما لـ x دون تغيير المشكلة. لذلك يمكننا أن نفترض أن تقويم $F(0, y)$ (ويسمى أيضاً التعددية) هو عدد صحيح موجب $0 < m$. على وجه الخصوص لـ $F(0, y)$ صفر منعزل في المبدأ (تعدديته m). نختار عدداً $0 < \varepsilon$ بحيث يكون 0 هو الجذر الوحيد لـ $F(0, y)$ في $|y| \leq \varepsilon$. من خلال حجة استمرارية بسيطة، يوجد $0 < \eta$ بحيث لا يوجد جذر لـ $F(x, y) = 0$ في الطارة الصلبة $\{(x, y) \mid |x| \leq \eta; |y| = \varepsilon\}$. بقسمة x و y على ε و η ، نفترض أن $\varepsilon = \eta = 1$.

دعونا الآن نضع بعض الافتراضات التي سيتم تحليلها بالتفصيل لاحقاً. نفترض أن المشتق الجزئي $\partial F / \partial y$ لا ينعدم على المنحني $F(x, y) = 0$ إلا في المبدأ. لنشر بـ C^* إلى المنحني المثقوب

$$\{(x, y) \in C^2 \mid (x, y) \neq (0, 0); F(x, y) = 0; |x| \leq 1; |y| \leq 1\}.$$

التأكيد الرئيسي هو أن إسقاط C^* على القرص المثقوب $D^* = \{x \mid |x| \leq 1\} \setminus \{0\}$ هو تطبيق تغطية.

اسمحو لي أن أذكر بسرعة تعريف تطبيقات التغطية وكيف أنها تختلف عن الهوميوتشاكلات المحلية. تطبيق مستمر $p : X \rightarrow Y$ هو هوميوتشاكل محلي (يسمى أحيانًا تطبيقًا حامدًا (étale)) إذا كان لكل نقطة في X جوار مفتوح U بحيث يكون $p(U)$ مفتوحًا ويكون اقتصار p على U هوميوتشاكلًا على $p(U)$.

التطبيق المستمر $p : X \rightarrow Y$ هو تطبيق تغطية إذا كان لكل نقطة في Y جوار مفتوح V بحيث يكون $p^{-1}(V)$ اتحادًا منفصلاً لمجموعات مفتوحة U_i بحيث يكون اقتصار p على أي من الـ U_i هوميوتشاكلًا على V .

من الواضح أن أي تطبيق تغطية هو هوميوتشاكل محلي، لكن أمثلة بسيطة تظهر أن العكس ليس على العموم صحيحًا. يستطيع المرء أن يظهر بسهولة أن الهوميوتشاكل المحلي هو فضاء تغطية إذا كان ذلك فعليًا.

هيا بنا نظهر الآن تأكيدنا على أن C^* تغطية للقرص المثقوب. حقيقة أن الإسقاط هوميوتشاكل محلي يتبع مباشرة من افتراضنا أن $\partial F/\partial y$ لا يعدم على C^* ومن مبرهنة الدالة الضمنية. إن فعالية الإسقاط واضحة أيضًا لأن متتالية من النقط على C^* تفر من مجموعة متراسة إذا فقط إذا كانت تتقارب نحو المبدأ.

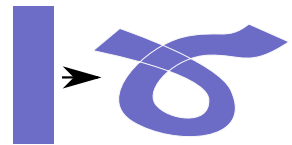
المبرهنة الرئيسية لنظرية تغطية الفضاء هي أن فضاءات التغطية المترابطة لفضاء (متربط محليًا ببساطة) مترابط موصوفة، إلى إيزوتشاكلات مقربة، من قبل الزمر الجزئية للزمرة الأساسية. على سبيل المثال، فضاءات التغطية المترابطة لـ D^* إيزومتشاكل مع تطبيق القوة $x \mapsto x^m$ من D^* في D^* من أجل عدد صحيح $1 \leq m$ ، أو مع التطبيق الأسّي المركب المقصر على نصف المستوي $0 \geq \Re(x)$.

نختار مركبة مترابطة C_0^* لـ C . نظرًا إلى أن للتغطية $C_0^* \rightarrow D^*$ أليافًا منتهية، فهي إيزومتشاكل مع تغطية $x \mapsto x^m$ من D^* في D^* . وتعبير آخر، يوجد هوميوتشاكل

$$\phi : D^* \rightarrow C_0^* ; x \mapsto ((x^m, g(x))).$$

من الواضح أن هذا الـ ϕ هولومتشاكل على القرص المثقوب ونحن لا يزال يتعين علينا تبيان أنه يمتد كدالة هولومتشاكل على القرص. هذا يتبع من مبرهنة الامتداد لريمان: أي دالة هولومتشاكل ومحدودة على القرص المثقوب هي هولومتشاكل على القرص كله.

تم تقديم كلمة étale من طرف المهندسين الجبريين الفرنسيين. وهي تعني "مستقر" وكثيرًا ما تستخدم لوصف سطح البحر، عندما يكون في حالة سكون.



تطبيق حامد وليس تغطية.

يكون تطبيق فعليًا إذا كانت الصورة العكسية لمجموعة متراسة متراسة. بالطبع العكس ليس صحيحًا وقد يكون تطبيق تغطية غير فعلي (على سبيل المثال

$$(\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1 ; t \mapsto \exp(it))$$

في الواقع، استخدم پويزو تغطيات ضمنية عندما وصف بعض الحلقات متبوعة بـ x حول المبدأ والتبديلة المرتبطة بقيمة y التي تحقق $F(x, y) = 0$.

مفارقة تاريخية أخرى!

تم إثبات المبرهنة، على افتراض أن المشتق الجزئي $\partial F/\partial y$ لا ينعدم على المنحني المتقرب $F(x, y) = 0$ ، وهو ما ستم مناقشته في الفقرة الآتية.

جذور بسيطة

تندعم دالة هولومتشاكلة لمتغير مركب واحد y ومشتقتها في وقت واحد في نقطة ما y_0 إذا فقط إذا كان هذا الصفر مضاعفًا. لذلك علينا أن نبين أنه في مبرهنة بويزو، يمكن للمرء دائماً أن يفترض أن لـ F خاصية أنه، بالنسبة لـ x_0 صغير وغير منعدم، لا توجد جذور متعددة صغيرة لـ $F(x_0, y) = 0$.

اتضح أن بويزو لم يعتبر دوال هولومتشاكلة عامة $F(x, y)$ لكن كثيرات حدود في x و y . في هذه الحالة، من السهل التعامل مع جذور متعددة وفي الواقع يرفض بويزو المشكلة في جملة واحدة (في ورقة من 135 صفحة). لنكن أكثر حذرا منه.

نعتبر كثير الحدود F كعنصر من $\mathbf{C}[x][y]$. يمكن أن ننظر إلى هذا الـ F على أنه كثير حدود في متغير واحد y مع معاملات في حلقة عاملية. يمكننا كتابة F كجاء لعوامل غير قابلة للاختزال بحيث يكون المنحني $F(x, y) = 0$ اتحاد المنحنيات المرتبطة بهذه العوامل غير القابلة للاختزال. لذلك يمكننا أن نفترض أن F غير قابل للاختزال.

نفترض الآن أن هناك متتالية (x_k, y_k) تتقارب إلى $(0, 0)$ مع $x_k \neq 0$ بحيث يكون y_k جذراً متعددًا لـ $F(x_k, y) = 0$. إذن مميز كثير الحدود $F(x_k, y)$ يساوي 0. وعليه فإن مميز F كعنصر من $\mathbf{C}[x]$ ينعدم تطابقاً لأنه يحتوي على عدد غير منته من الجذور. إذا انعدم مميز كثير حدود P ، فإن لكثير الحدود هذا ولمشتقاته عاملاً مشتركاً. وهذا مستحيل إذا كان P غير قابل للاختزال.

ومن ثم، إذا كان F غير قابل للاختزال في $\mathbf{C}[x][y]$ ، وإذا كان x صغيراً وغير منعدم، فإن $F(x, y) = 0$ ليس لها جذر متعدد صغير كمعادلة في y . هذا هو المكون الذي كان مفقوداً لإثبات نظرية بويزو، لمعادلة كثيرة الحدود $F(x, y) = 0$.

بالنسبة إلى دالة هولومتشاكلة عامة $F(x, y)$ (والتي، مرة أخرى، لم يعتبرها بويزو) لا يزال هناك بعض العمل الذي يتعين علينا القيام به.

مميز كثير حدود هو ناتج كثير الحدود هذا ومشتقه.

مبرهنة الإعداد لـ فايرشتراس

لقد التقينا بالفعل بمبرهنة الإعداد لـ فايرشتراس التي أثبتناها أولاً في سياق المتسلسلة الشكلية قبل تأسيس التقارب. الهدف الآن هو إثبات نفس المبرهنة باستخدام التحليل المركب.
لنذكر بهذا العرض.

مبرهنة. لتكن $F(x, y)$ دالة هولومتشاكلة، غير منعدمة، معرفة على جوار للمبدأ في C^2 . إذن توجد m دالة هولومتشاكلة $a_0(x), \dots, a_{m-1}(x)$ مُعرّفة في جوار لـ 0 في C ، دالة هولومتشاكلة $U(x, y)$ لا تنعدم في المبدأ، وعدد صحيح $0 \leq r$ ، بحيث يكون

$$F(x, y) = x^r U(x, y) (y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x)).$$



كارل فايرشتراس (1815–1897)

هذه المبرهنة هي بالضبط ما هو مطلوب. فهي تنص على أنه، إلى دوال غير منعدمة مقربة، يمكننا دائماً افتراض أن الدالة F قيد الدراسة هي كثير حدود في المتغير y ، بمعاملات في الحلقة $C\{x\}$ للمتسلسلات في x والمتقاربة. الإثبات السابق لـ پويزو (حيث يمكننا دائماً افتراض أن $\partial F/\partial y$ لا ينعدم تطابقاً على المنحني، باستثناء المبدأ) يمكن إذن إعادة إنتاجه بكلمة بكلمة (باستبدال حلقة المتسلسلات المتقاربة بحلقة كثيرات الحدود في x). وبذلك يتم إثبات مبرهنة پويزو باستخدام مبرهنة فايرشتراس.

تقدم الآن إثبات فايرشتراس التحليلي القياسي.

نفترض، بعد قسمة F على x^r ما، أن $F(x, y)$ لا تنعدم من أجل $|x| \leq 1$ و $|y| = 1$. عند تثبيت x بـ $|x| \leq 1$ ، فإن الدالة $F(x, y) \mapsto y$ تقبل عدداً منتهياً من الأصفار $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ في قرص الوحدة، معدودة بالتعددية. تكمن الصعوبة الرئيسية في أنه من المستحيل اختيار هذه الدوال $y_i(x)$ كدوال هولومتشاكلة لـ x ، أو حتى مستمرة، على وجه التحديد بسبب تعدد القيم لـ $y(x)$ الضمنية في $F(x, y) = 0$. ومع ذلك، سنبتين أن جميع الدوال المتناظرة لـ $y_i(x)$ هي بالفعل دوال هولومتشاكلة لـ x .

يستخدم الإثبات الأبسط علاقة كوشي. لنقوم

$$s_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=1} \frac{y^k F'_y(x, y)}{F(x, y)} dy.$$

راسب $y^k F'_y(x, y)/F(x, y)$ كدالة لـ y ، في أحد الجذور $y_i(x)$ ، هو القوة الـ k -اية، $y_i(x)^k$ بحيث يكون $s_k(x)$ مجموع القوى الـ k -اية للجذور. يبين التكامل بوضوح أن $s_k(x)$ دالة هولومتشاكلية لـ x .

نظرًا إلى أن الـ s_k يولد الدوال المتناظرة، فإن كل الدوال المتناظرة لـ $y_i(x)$ ، هي دوال هولومتشاكلية لـ x ، ولا سيما الدوال التناظرية الأولية $a_i(x)$. حسب مبرهنة فييت، كثير الحدود

$$y^m - a_{m-1}(x)y^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1}a_1(x)y + (-1)^m a_0(x)$$

ينعدم في نفس النقط تمامًا مثل F وبنفس التعدديات، بحيث لا ينعدم حاصل القسمة $\mathcal{U}(x, y)$.

□ مبرهنة الإعداد لـ فايرشتراس ومبرهنة بوزو تم إثباتهما.

من أثبت مبرهنة الإعداد لـ فايرشتراس؟

كان ينبغي أن يكون القارئ قد تخمن بالفعل أن الإجابة البسيطة عن هذا السؤال هي بالتأكيد ليس فايرشتراس. يعرف مؤرخو الرياضيات جيدًا أن أسئلة مثل "من أثبت هذا أولاً؟" هي أسئلة ساذجة للغاية، وغالبًا ما تخطئ الهدف. ومع ذلك، من المثير للاهتمام ملاحظة أن اثنين من الرياضياتيين المهمين في القرن العشرين، هنري كارطّا (Henri Cartan) ¹¹¹ و كارل سيغل ¹¹²، كتبنا بالتفصيل أوراقًا تحاول الكشف عن تطور الأفكار حول هذه المبرهنة. ومع ذلك، فإن أوراقها ليست متقاربة تمامًا. اسمحو لي فقط أن أذكر بعض الخطوات.

– حقيقة أن الدوال المتناظرة للجذور لمعادلة هولومتشاكلية $F(x, y) = 0$ حيث y هو المجهول و x وسيط، تتعلق هولوتشاكلية بـ x كانت معروفة لدى كوشي عام 1831 مع الإثبات الذي قدمناه.

– نشر فايرشتراس برهانه في عام 1886 ولكنه ذكر في حاشية أنه كان يحاضر حول هذه المبرهنة منذ 1860. ليس من المستغرب أنه تجنب قدر الإمكان استخدام رواسب كوشي، ولكن ليس بالكامل، وعمل مع المتسلسلات. برهانه جبري جزئيًا فقط.

– أثبت بوانكاري المبرهنة في أطروحته عام 1879، دون ذكر لكوشي.

¹¹¹H. Cartan. Sur le théorème de préparation de Weierstrass. In Festschr. Gedächtnisfeier K. Weierstrass, pages 155–168. Westdeutscher Verlag, Cologne, 1966.

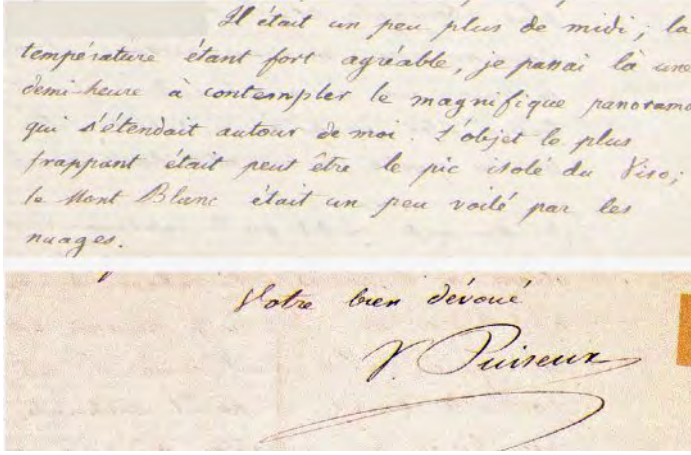
¹¹²C. L. Siegel. Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstrass. In Number Theory and Analysis (Papers in Honor of Edmund Landau), pages 297–306. Plenum, New York, 1969.

كالعادة، كلمة "برهان" يجب أخذها في كتابات پوانكاري بعناية كبيرة، وهذا صحيح بشكل خاص في هذه الورقة المبكرة. بعد ذلك بكثير، على سبيل المثال في كتابه "طرق جديدة"، أشار إلى أطروحته، دون تقديم إثبات أفضل ودون ذكر فيرشتراس. من المثير للاهتمام أن هنري كارطاً، أحد الآباء المؤسسين لبورباكي، لم يذكر پوانكاري في ورقته.

- في عام 1905، قدم لاسكر¹¹³ برهاناً جبرياً كاملاً واستخرج نتائج جبرية لحلقات المتسلسلات الشكلية والمقاربة.

- يؤكد سيثل أيضاً وفقاً له أن الإثبات الأقصر يرجع إلى ستيكنبيرثر¹¹⁴ في عام 1887. للحصول على عرض حديث وأولي للمبرهنة، انظروا كتاب إيبلينى¹¹⁵. للحصول على وصف دقيق للعديد من الأشكال المختلفة للمبرهنة والتعليقات التاريخية الإضافية، عودوا إلى فرووبرت وربمبتر¹¹⁶.

لا يمكن أن أختتم هذا الفصل دون الإشارة إلى أن هناك نسخة من هذه المبرهنة للدوال من الصنف C^∞ ، تخمها طوم وأثبتها مالفرانج¹¹⁷. لكن هذه قصة أخرى...¹¹⁸



من رسالة لبيكتور پويزو يصف رحلته الاستكشافية إلى جبل پيليو: "أتأمل المشهد الرائع من حولي".

كان من الممكن أن يكون بيكتور پويزو نموذجاً لكاسپار ديهيد فيرديش عندما رسم "المتجول فوق بحر الضباب" (Wanderer above the sea of fog)، لكن رحلة پيليو حدثت بعد 30 عاماً!

¹¹³E. Lasker. *Zur Theorie der Moduln und Ideale*. *Math. Ann.*, 60(1):20-116, 1905.

¹¹⁴L. Stickelberger. *Ueber einen Satz des Herrn Noether*. *Math. Ann.*, 30(3):401-409, 1887.

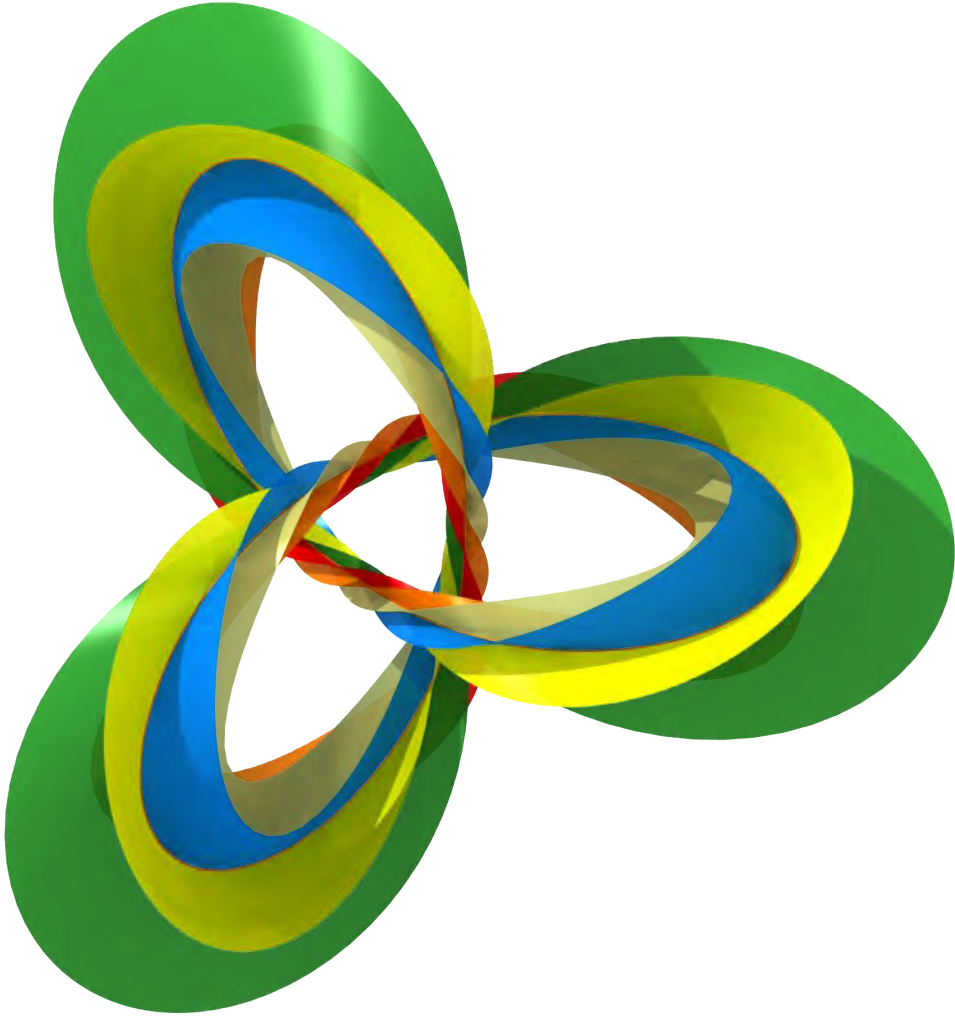
¹¹⁵W. Ebeling. *Functions of several complex variables and their singularities*. GSM083. AMS, 2007.

¹¹⁶R. R. H. Grauert. *Analytische Stellenalgebren*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 176. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.

¹¹⁷B. Malgrange. *Ideals of differentiable functions*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1967.

¹¹⁸V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Classification of critical points, caustics and wave fronts*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2012. , Reprint of the 1985 edition.

"Il était un peu plus de midi, la température étant fort agréable, je passai là une demi-heure à contempler le magnifique panorama qui s'étendait autour de moi. L'objet le plus frappant était peut-être le pic isolé du Viso; le Mont Blanc était un peu voilé par les nuages."



○ ألياف ميلنور لـ $x^3 - y^2$.

جاك ميلنور وتليفه

عندما أدخل مكتبة رياضياتية، أو عندما أتقل عبر المجلات الرياضياتية، أو ببساطة عندما أتصفح فوغل، غالبًا ما يغمري اتساع عالم الرياضيات. حتى الموضوعات التي قد تبدو مجهرية للشخص العادي، مثل طوبولوجيا المنحنيات الجبرية، فهي في الواقع مناطق ضخمة يمكن أن يتطلب استكشافها عدة أعمار بسهولة. يمكن أن يكون هذا الشعور محبطًا أو مسيئًا، اعتمادًا على مزاجي 😊. في هذا الكتاب الصغير، أفضل ما يمكنني فعله هو وصف مثال واحد مهم، لذكر بعض النتائج الرئيسية، والإشارة إلى بعض الكتب (الطويلة) التي تقترح مناقشة كاملة لحالة الفن. على أي حال، يجب التأكيد على كتاب واحد على أنه جوهرة ويجب أن يقرأه جميع الدارسين المهتمين بهذا الموضوع: النقط المفردة للسطوح الفوقية المركبة¹¹⁹ الذي ألفه ميلنور، وهو أستاذ كبير في فن كتابة الرياضيات.

مثال



انظروا إلى المنحني

$$F(x, y) = -x^{10} + x^9 + 6x^8y - 3x^6y^2 + 2x^5y^3 + 3x^3y^4 - y^6 = 0.$$

لم يتم اختيار هذه الدالة F بشكل عشوائي. أي معادلة $F = 0$ يمكن حلها باستخدام متسلسلات بويرؤ.

في هذا المثال، نغش ونبدأ من الحل

$$y = x^{3/2} + x^{5/3}$$

جون ميلنور.

غالبًا ما يتفاجأ الناطقون بلغات أخرى، كالفرنسية على سبيل المثال، عندما يعلمون أن جاك هو لقب لجون. الترجمة الإنجليزية لجاك هي جيمس.

¹¹⁹J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968

يمكن استخدام حجة ماثلة لـ "الكرة المربعة". عودوا إلى ¹²⁰ للحصول على توضيح للأخطاء المحتملة التي يمكن أن يرتكبها مبتدئ ساذج.

¹²⁰ F. Deloup. The fundamental group of the circle is trivial. Amer. Math. Monthly, 112(5):417-425, 2005.

لنرمز بـ K_F إلى هذه العقدة. سنستخدم الكرة المربعة المناسبة $\varepsilon = \max(|x|, |y|)$. يقع التقاطع مع المنحني في الحلقة الصلبة $\varepsilon = |x|$ و $|y| \leq \varepsilon$ ، بحيث يكون $|t| = \varepsilon^{1/6}$. هيا بنا لنعيد القياس ونضع $X = x/\varepsilon$ و $Y = y/\varepsilon$. على وجه الخصوص، تكون X في دائرة الوحدة و Y في قرص الوحدة. إذا كانت $t = \varepsilon^{1/6} \tau$ نحصل على

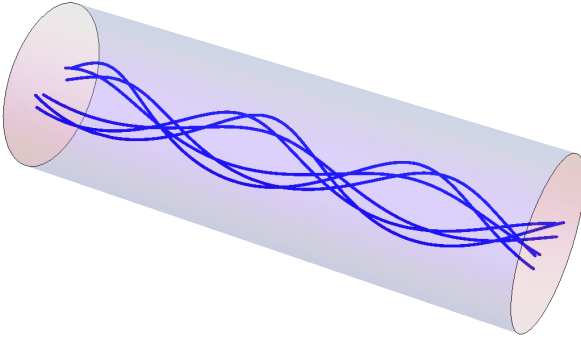
$$X = \tau^6 ; Y = \varepsilon^{1/2} \tau^9 + \varepsilon^{2/3} \tau^{10}$$

حيث τ تمسح دائرة الوحدة. في جميع الصور الآتية، يتم رسم الحلقة الصلبة $S^1 \times D^2$ على أنها الأسطوانة $[0, 2\pi[\times D^2$ ، ويجب لصق الوجهين $\{0\} \times D^2$ و $\{2\pi\} \times D^2$.

من أجل كل X على دائرة الوحدة، هناك ست قيم لـ Y بالضبط، تختلف بضرب τ في جذر سداسي للعدد واحد. نقول إن العقدة K_F في شكل ضفيرة: تتقاطع بشكل عرضي مع القرصين $D^2 \times \{*\}$. بالتجول حول الدائرة، يتم تبديل هذه النقاط الست بطريقة سليمة وصفها الآن.



خذوا وقتكم ! انظروا إلى الصور في هذا الفصل بعناية كبيرة. هذا ليس سهلاً.



لاحظوا أن $\varepsilon^{2/3}$ صغير مقارنة بـ $\varepsilon^{1/2}$ من أجل ε صغير. لاحظوا أيضًا أن $\varepsilon^{1/2} \tau^9$ يأخذ قيمتين فقط عندما يُضرب τ في جذر سداسي للعدد واحد. العقدة المرتبطة بـ

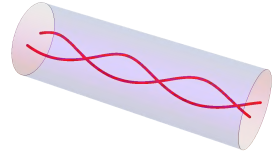
$$X = \tau^6 ; Y_0 = \varepsilon^{1/2} \tau^9$$

هي ببساطة صديقتنا ثلاثية الوريقات $x^3 = y^2$.

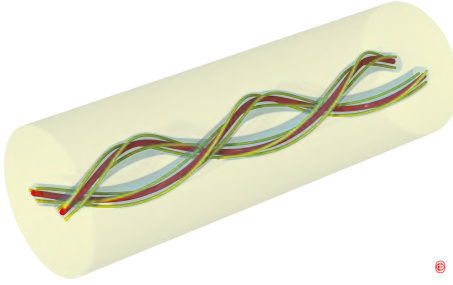
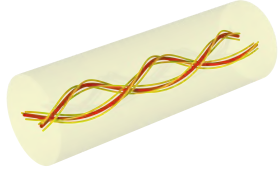
عندما تدور X حول الدائرة، فإن النقطتين المقابلتين في $\{X\} \times D^2$ تدوران بثلاثة أنصاف لفات، مما ينتج عقدة ثلاثية الوريقات.

ليكن $Y = \varepsilon^{1/2} \tau^9 + \varepsilon^{2/3} \tau^{10} = Y_0 + Y_1$ لاحظوا أن

$$X = \tau^6 ; Y_1 = \varepsilon^{2/3} \tau^{10}$$



تعيينان ثلاث قيم (صغيرة جدًا) لـ Y_1 لكل قيمة لـ X على دائرة الوحدة. ومن ثم، فإن النقط الست Y على كل قرص $\{*\} \times D^2$ ، تأتي في مجموعتين من ثلاث نقط. بمعنى آخر، تكمن العقدة K_F في جوار أنبوبي رفيع من عقدة ثلاثية الوريقات وتتقاطع مع الأقرص الصغيرة العرضية لثلاثية الوريقات في ثلاث نقط.



يمكن توسيط هذا الجوار الأنبوبي لثلاثية الوريقات بالطريقة الآتية.
 $(\mu, \zeta) \mapsto (X = \mu^2, Y = \varepsilon^{1/2} \mu^3 - 2\varepsilon^{2/3} \mu^{-3} \zeta)$
 حيث $(\mu, \zeta) \in S^1 \times D^2$.

المعامل 2 أمام $\varepsilon^{2/3} \mu^{-3}$ ليس مهمًا: دوره الوحيد هو إعطاء سكاة كافية للأنبوب حتى يحوي عقدةتنا.

الدائرة $S^1 \times \{0\}$ ، نواة هذه الطارة الصلبة، تُحوّل إلى عقدة ثلاثية الوريقات. قد يتساءل المرء لماذا اخترنا $\varepsilon^{1/2} \mu^3 - 2\varepsilon^{2/3} \mu^{-3} \zeta$ وليس مجرد $\varepsilon^{1/2} \mu^3 + 2\varepsilon^{2/3} \zeta$ والذي سيكون أيضًا توسيطًا. النقطة المهمة هي أنه مع اختيار الإحداثيات هذا، في هذا الجوار الأنبوبي، فإن $x^3 - y^2$ يساوي

$$\varepsilon^3 (\mu^2)^3 - \varepsilon^2 (\varepsilon^{1/2} \mu^3 - 2\varepsilon^{2/3} \mu^{-3} \zeta)^2$$

وهو من الترتيب $\varepsilon^{19/6}$ من أجل ζ صغير، بحيث تكون عمدة $x^3 - y^2$ قريبة من عمدة ζ . لذلك فإن ألياف ميلنور لـ $x^3 - y^2 = 0$ في الجوار الأنبوبي قريبة من الصفحات $\arg \zeta = c$ حيث c ثابت.

في هذه الإحداثيات، يمكننا ربط العبارتين

$$\varepsilon^{1/2} \tau^9 + \varepsilon^{2/3} \tau^{10} \text{ و } \varepsilon^{1/2} \mu^3 - 2\varepsilon^{2/3} \mu^{-3}$$

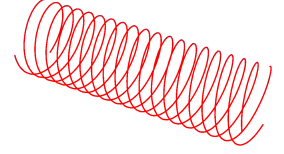
لـ Y . باستخدام $\mu = \tau^3$ تكون عقدتنا K_F صورة التطبيق

$$S^1 \rightarrow S^1 \times D^2 \quad ; \quad \tau \mapsto \left(\tau^3, -\frac{1}{2} \tau^{19} \right).$$

هذه الـ $(19, 3)$ -عقدة الطارة.

قد يبدو هذا الـ 19 غريبًا. لاحظوا أن هناك هوميوتشاكلًا من الحلقة الصلبة $S^1 \times D^2$ يحوّل الـ $(19, 3)$ -عقدة الطارة إلى الـ $(19 - 3k, 3)$ -عقدة الطارة من أجل أي k (على سبيل المثال إلى الـ $(1, 3)$ -عقدة، والتي هي أبسط بكثير) ولكنّ هوميوتشاكلًا كهذا لا يمكن أن يكون (مترادفًا مع) التطبيق المطابق على الحد ولا يمكن تمديده إلى كل الكرة.

يترتب على ذلك أنه يتم الحصول على K_F عن طريق إدخال $(19, 3)$ -عقدة طارة في جوار $(3, 2)$ -عقدة طارة. هذا مثال نموذجي على عقدة طارة متكررة. يطلق عليها في بعض الأحيان اسم عقد الحبل لأنها تشبه بناء الحبال المصنوعة من خيوط ملتوية مضفرة معًا، أو أقمرا اصطناعية تدور حول الكواكب التي تدور حول الشمس.



⊙

بالفعل، التطبيق

$$(\tau, \zeta) \mapsto (\tau, \tau^k \zeta)$$

هو هوميوتشاكل يلوي الطارة الصلبة.



تلييف ميلنور

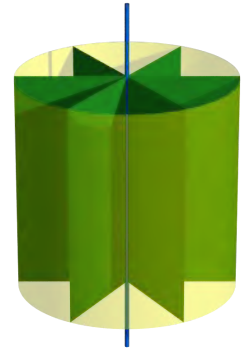
في حالة ثلاثية الوريقات، تملأ سطوح المستوى لـ $\arg(x^3 - y^2)$ مقيمة العقدة كصفحات كتاب تجليده ثلاثية الوريقات. وصفنا طوبولوجيا تلك الصفحات بأنها طارة مثقوبة.

أظهر ميلنور في كتابه الأساسي الصادر عام 1968 أن هذه حقيقة عامة. لقد أثبت بالفعل مبرهنة في كل الأبعاد، لكننا تقتصر على حالة البعد 2 (المركبة).

مبرهنة. لتكن $F(x, y)$ دالة هولومورفية، مختصرة، غير منعدمة، معرفة في جوار المبدأ في \mathbb{C}^2 بحيث يكون $F(0, 0) = 0$. إذا كان $0 < \varepsilon$ صغيراً بدرجة كافية، فإن:
 - المنحني $F(x, y) = 0$ يتقاطع مع الكرات الصغيرة العرضية S_ε^3 على طول رابط ما $L_\varepsilon \subset S_\varepsilon^3$ ، الذي تكون طوبولوجياه مستقلة عن ε .
 - التطبيق

$$S_\varepsilon^3 \setminus L_\varepsilon \rightarrow S^1 ; (x, y) \mapsto \arg(F(x, y)) = \frac{F(x, y)}{|F(x, y)|}$$

تلييف تافه محلياً. مُغلقات الألياف هي سطوح متراسة جميع حدودها تتطابق مع L_ε . في جوار أنبوبي للرباط، تبدو وكأنها كتاب مفتوح: الألياف هي حاصل ضرب محلي لقطعة شعاعية في D^2 وقطعة.



هذه المبرهنة هي الأداة الأساسية في الدراسة المحلية للمفرديات. ومع ذلك، لا بد لي من الاعتراف أنني لفترة طويلة، لم أنظر إلى برهانه وكنت مقتنعاً بطريقة ما أنه يجب أن يكون أولياً ومباشراً. لدينا تطبيق طبيعي جداً للدائرة؛ لماذا لا يكون تلييفاً؟ كنت مخطئاً والإثبات مرن إلى حد ما. المثير للدهشة هو أن الكتب التي تتناول هذا السؤال من نوعين. النوع الأول، الذي يصل إلى النقطة الرئيسية للإثبات، بطريقة سرية للغاية، يكتب فقط "انظروا ميلنور، الفصل 2". النوع الثاني، الذي يصل إلى نفس النقطة الرئيسية، ما عليكم سوى نسخ محتوى "ميلنور، الفصل 2" كلمة بكلمة تقريباً. بالفعل، كلاهما على حق ومن الصعب القيام بكتابة أفضل مما كتب "ميلنور، الفصل 2". هدفي هنا ليس الابتكار ولكن إعطاء بعض الحدس حول هذه المبرهنة.

لاحظوا أولاً أن المبرهنة صحيحة وأولية في البعد 1. لتكن $f(x)$ دالة غير منعدمة معرفة في جوار المبدأ في \mathbb{C} وبحيث يكون $f(0) = 0$. نكتب $f(x) = ax^m + \dots$ مع $a \neq 0$ وننظر إلى التطبيق

$$S_\varepsilon^1 \rightarrow S^1 ; x \mapsto \arg(f(x)) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

من الواضح أن هذا تطبيق تغطية من أجل ε صغير بما يكفي. في الواقع، هذا قريب في طوبولوجيا \mathbf{C}^1 من تطبيق التغطية $\arg(x)^m \arg(a)$. $x \mapsto$

بعد هذه الحالة التافهة، دعونا نفكر في المنحني $F(x, y) = 0$. نفترض أن F مختصرة بحيث لا تنعدم $\partial F / \partial y$ على $F = 0$ (باستثناء المبدأ). بدلاً من استخدام الكرة المستديرة، سنستخدم الكرة المربعة $\varepsilon = \max(|x|, |y|)$. من أجل التبسيط، نفترض أن منحنيًا يتقاطع فقط مع الطارة الصلبة T_1 المحددة بواسطة $|x| = \varepsilon$ ، $|y| < \varepsilon$. نريد أن نوضح أولاً أن عمدة $F(x, y)$ ، مقتصرة على الطارة الصلبة، غمر (خارج $F = 0$). بعبارة أخرى، لتكن (x, y) نقطة في T_1 ، نحن نبحث عن منحى مماثل في T_1 بحيث لا يكون مشتق $\arg F$ منعدماً. كمحاولة أولى، يمكننا تجربة منحى رأسي، بتثبيت x . ثم تتغير $F(x, y)$ وفقاً للمشتق الجزئي $\partial F / \partial y$ بحيث تكون $\arg F$ بالفعل غمراً، على الأقل خارج المحل الصفري لـ $\partial F / \partial y$.

الآن، المحل الصفري $\partial F / \partial y(x, y) = 0$ هذا، هو منح آخر، لا يتقاطع مع $F = 0$ إلا في المبدأ. يمكن أن يُوسَّط هذا المنحني الجديد على طريقة بويرو (à la Puiseux)، بواسطة $x = t^m$ و $y = f(t)$. من خلال حالتنا أحادية البعد التافهة، إن التطبيق

$$\mathbf{S}_{\varepsilon/m}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1 ; t \mapsto \arg F(t^m, f(t))$$

هو تطبيق تغطية. لذلك، بالنسبة إلى النقط حيث $\partial F / \partial y(x, y) = 0$ ، وجدنا منحى آخر لا ينعدم مشتق العمدة فيه.

هذه الحجة بالتأكيد ليست إثباتاً كاملاً لمبرهنة ميلنور لعدة أسباب.

الأول هو أننا استخدمنا كرة مربعة بدلاً من واحدة مستديرة: هذا ليس خطيراً ويمكن أن تتكيف الحجة بسهولة مع الكرة المستديرة.

والثاني هو أن الغمر لا يكون بالضرورة تلييفاً، دون بعض افتراضات التراص على الألياف. علينا دراسة البنية المحلية لغمرنا بالقرب من الرابط L_ε ، $L_\varepsilon \subset \mathbf{S}_\varepsilon^3$. هذا ليس بالأمر الصعب. النقطة الأساسية هي أنه إذا كانت $F(x, y) = 0$ ، وإذا أخذنا بعض المستقيمت المركبة في \mathbf{C}^2 والتي تمر عبر (x, y) والعرضية للمنحني، فيمكننا تطبيق الحالة أحادية البعد البسيطة لتحليل العمدة $\arg F$ في جوار (x, y) للحصول على الصورة المحلية حول الرابط.

يمكن أن تكون عمدة العدد المركب غير المنعدم z معرفة بعدة طرق. يمكن أن تكون عنصرًا من $[0, 2\pi[$ أو من $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ، أو $|z|/z$ ، في ما يأتي، نختار دائماً الطريقة الأكثر ملاءمة. نعتقد أن هذا لن يخلق صعوبات.

لاحظوا أن عرضنا البسيط يقتصر على حالة البعد 2، وأن مبرهنة ميلنور تبقى صحيحة في أي بعد.

للحصول على عرض ممتاز، أُحيل إلى ميلنور، الفصل 2 ©.

ألياف ميلنور في مثالنا

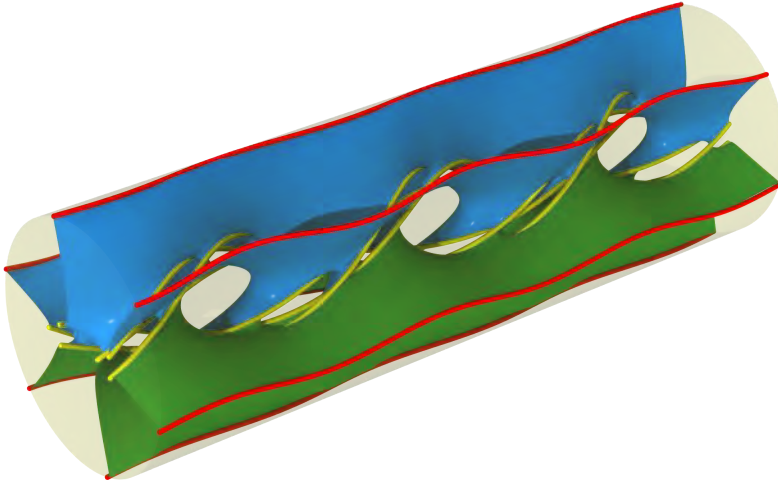
لنعد إلى مثالنا

$$F(x, y) = x^9 - x^{10} + 6x^8y - 3x^6y^2 + 2x^5y^3 + 3x^3y^4 - y^6 = 0.$$

يتقاطع المنحني $F(x, y) = 0$ مع كرة صغيرة على طول عقدة هي تابعة لعقدة ثلاثية الوريقات. نرغب في وصف طوبولوجيا ألياف ميلنور $\arg F(x, y) = c$ ثابت). إذا طلبت من حاسوبي رسم إحدى هذه الألياف، فإن الصورة الناتجة هي الآتية.



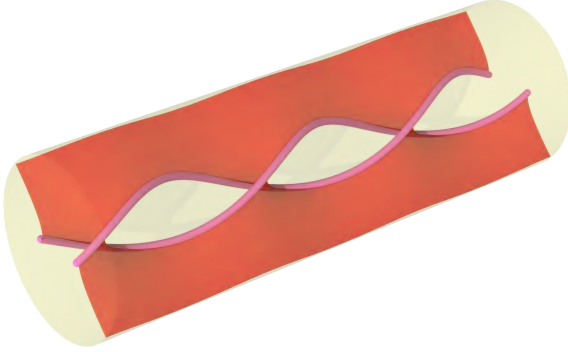
تتطلب نهاية هذا الفصل اهتمامًا كبيرًا، على الرغم من أنه ليس ضروريًا لبقية الكتاب.



هذا معقد ويتطلب تحليلًا دقيقًا. نُنوه على الأقل أن هذا السطح يتقاطع مع حد الطارة الصلبة على طول 6 منحنيات (باللون الأحمر). العقدة، ممثلة باللون الأصفر، هي أيضًا مركب حدي. يُظهر اللونان الأزرق والأخضر للوجهين أن هذا السطح قابل للتوجيه. خذوا بعين الاعتبار أن هناك 7 مركبات حدية في الطارة الصلبة.

كي نفهم هذه الصورة، لنلق نظرة أولاً على ألياف ميلنور لـ (p, q) منحني $x^p - y^q = 0$ ، حيث p و q أوليان نسبيًا (مع $p > q$).

نحن نعلم أن هناك سطوحا من الجنس $(p-1)(q-1)/2$ مع إزالة قرص. لنلق نظرة على موقعها بالنسبة إلى كرتنا المربعة $\max(|x|, |y|) = \varepsilon$. نظرا إلى أن $q < p$ فإن التقاطع مع $x^p - y^q = 0$ يقع في الطارة الصلبة T_1 المحددة بواسطة $|x| = \varepsilon$. على الطارة الحدية $|x| = \varepsilon$ و $|y| = \varepsilon$ ، تكون قيمة $x^p - y^q$ قريبة جدًا من y^q وعمدة $x^p - y^q$ تساوي تقريبًا q مرة عمدة y . ويتذب على ذلك أن ليفة ميلنور من $x^p - y^q$ تتقاطع مع حد T_1 على طول q منحني قريب جدًا من q موازيا.



ليفة ميلنور من عقدة ثلاثية الوريقات، منظور إليها على أنها $(2, 3)$ -عقدة طارة. حد السطح هو العقدة وتقاطعها مع حد الاسطوانة يتكون من موازيين. ◉

للسبب نفسه، على الطارة الأخرى T_2 المحددة بواسطة $|y| = \varepsilon$ ، تتطابق ليفة ميلنور تقريبًا مع q قرصا حيث عمدة y تأخذ q قيمة ونصف x قرصا شعاعه ε . بمعنى آخر، تقاطع ليفة ميلنور من $x^p - y^q$ مع T_1 هو سطح من الجنس $(p-1)(q-1)/2$ حيث تمت إزالة $1+q$ قرصا. حد القرص الأول الذي تمت إزالته هو عقدة الطارة، الموجودة داخل T_1 وال q قرصا الأخرى حدودها q دائرة على حد T_1 .

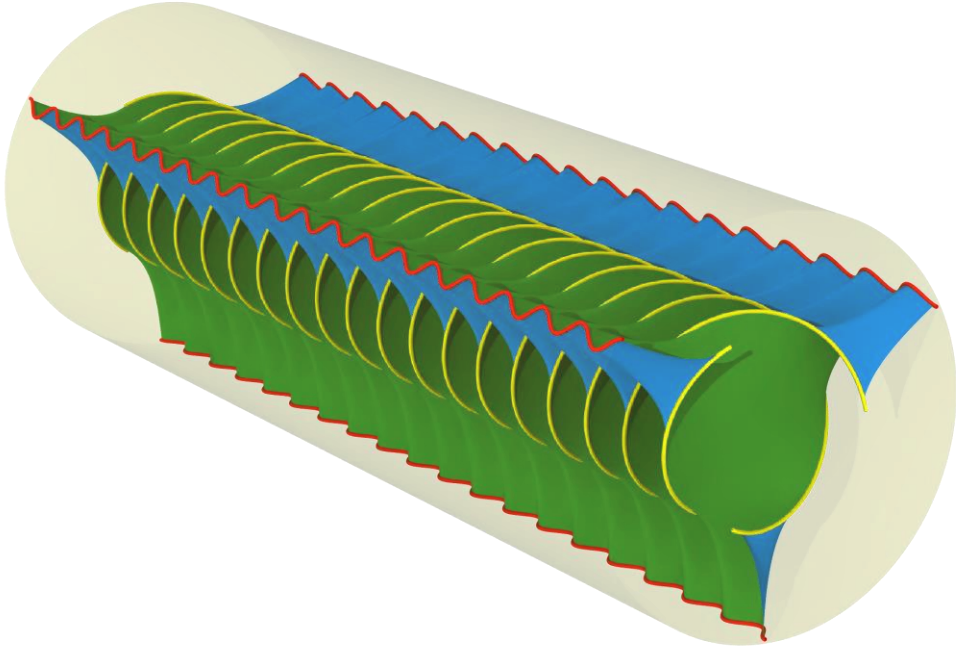
لنعد الآن إلى مثالنا الأكثر تعقيدًا والمحدد بواسطة $F(x, y) = 0$.

نستخرج الحدود المهيمنة في مضلع نيوتن لنحصل على

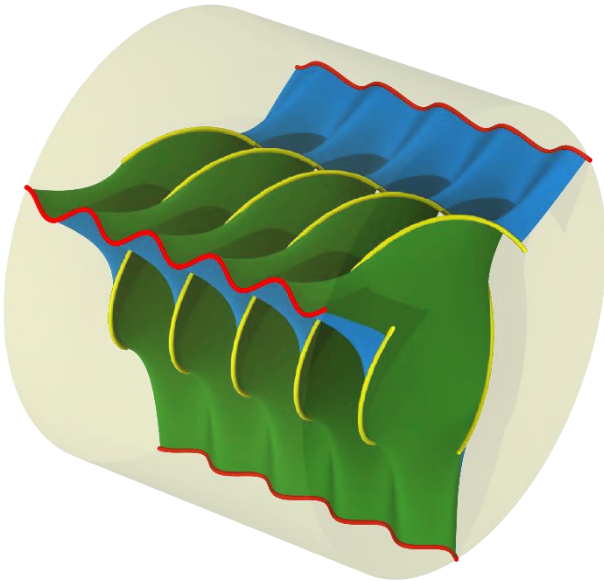
$$F(x, y) = (x^3 - y^2)^3 - x^{10} + 6x^8y + 2x^5y^3.$$

تذكروا أننا بنينا جوارا أنبويًا T_ε لعقدة ثلاثية الوريقات، متوسطًا بـ (μ, ζ) حيث

$$(\mu, \zeta) \in \mathbf{S}^1 \times D^2 \text{، وحيث } x^3 - y^2 \text{ من الترتيب } \zeta \varepsilon^{19/6}.$$



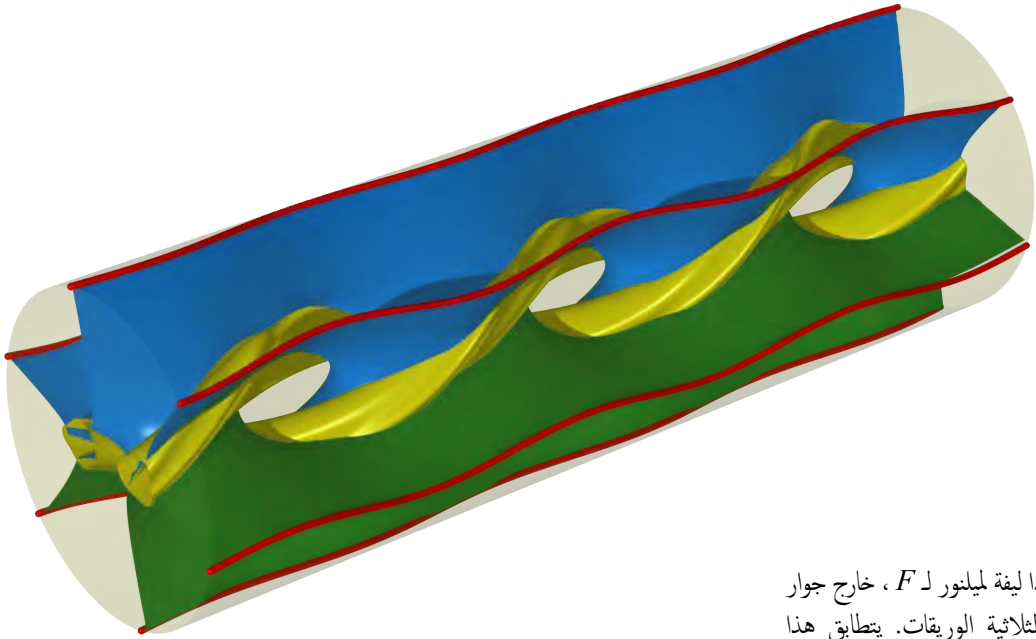
ليفة لميلنور من (3,19) - عقدة طارة. حد السطح هو العقدة (باللون الأصفر) ويتكون تقاطعها مع حد الأسطوانة من 3 موازيات (باللون الأحمر).



هذه شريحة صغيرة لفهم الصورة السابقة بشكل أفضل. يُظهر اللون الأزرق والأخضر أن السطح قابل للتوجيه بالفعل.

على حد هذه الطارة الصلبة حيث $|\zeta|=1$ ، لدينا $|(x^3 - y^2)^3| \approx 64\varepsilon^{57/6}$ ، و $|x| \leq \varepsilon$ ، $|y| \leq \varepsilon$ ، بحيث يكون $F(x, y)/(x^3 - y^2)^3$ ، قريباً جداً من 1، وعمدة $F(x, y)$ قريبة من $\arg(\zeta)^3$. على وجه الخصوص، تكون كل ليفة لميلنور من F على حد T_ε قريبة جداً من ثلاثة موازيات مع $\arg \zeta = c$ حيث c ثابت.

وهذا ينطبق أيضاً على خارج T_ε : كل ليفة لميلنور من F خارج T_ε قريبة جداً من ثلاثة ألياف لميلنور من $x^3 - y^2 = 0$. لا تنسوا أن ألياف ميلنور من $x^3 - y^2 = 0$ هي طارات مثقوبة. تتكون تقاطعاتها مع T_2 من قرصين. يحتوي تقاطعها مع T_1 على ثلاث مركبات حدودية، اثنتان منها على حد T_1 والثالثة هي العقدة نفسها. هذا في الواقع ما يمكن رؤيته إذا أخفيما ما بداخل T_ε .



يمثل هذا ليفة لميلنور لـ F ، خارج جوار أنبوبي لثلاثية الوريقات. يتطابق هذا السطح تقريباً مع 3 ألياف لميلنور من $x^3 - y^2$.

◦

الجزء الداخلي من T_ε هو عالم الـ (3, 19) عقدة التي يتم إدخالها في الأنبوب. هيا بنا نؤم $F(x, y) = F(\varepsilon X, \varepsilon Y)$ داخل الأنبوب في الإحداثيين (ζ, μ) :

$$F(\varepsilon\mu^2, \varepsilon^{3/2}\mu^3 - 2\varepsilon^{5/3}\mu^{-3}\zeta).$$

هذا يندرج بالضبط على $\mu^{19} = -\frac{1}{2} \zeta$ ، إلى الترتيب الأول.

لذلك فإن ليفة ميلنور من F ، داخل T_ε ، قريبة من ليفة ميلنور من $x^{19} = y^3$. إنها سطح جنسه $18 = (19-1)(3-1)/2$ مع إزالة 4 أقراص. أحد الحدود هو حدّ عقدتنا، كما ينبغي أن يكون، والثلاثة الأخرى هي ثلاث موازيات على حد T_ε . باختصار، إن ليفة ميلنور من $F(x, y) = 0$ هوميومورفية مع سطح مغلق قابل للتوجيه من الجنس 18 يقوم فيه المرء بثلاثة مجاميع مترابطة مع طارة، ومن أجله يستطيع المرء أخيراً إزالة قرص. إنه سطح من الجنس 21. معقد للغاية.

سيكون باقي هذا الفصل غامضاً جداً: لا يمكنني إعطاء أكثر من لمحة عن النظرية.

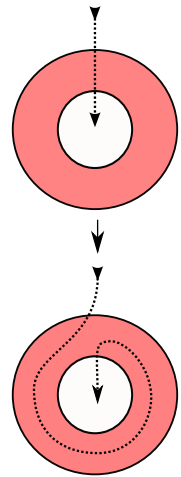
تقوم بتقسيم متممة K_F على طول إحدى ألياف ميلنور ولتكن Σ ، نحصل على جداء $\Sigma \times [0, 1]$. من أجل إعادة بناء متممة العقدة، يجب لصق $\Sigma \times \{0\}$ بـ $\Sigma \times \{1\}$ باستخدام تفاعل ما لـ Σ . هذا التفاعل، المحدد جيداً إلى صونية مقرية، يسمى الامتداد الأوحده للعقدة. عمل الامتداد الأوحده على التائل الأول له كثير حدود مميز وهو كثير حدود ألكسندر للعقدة. في مثلنا، يمكن وصف كل شيء بطريقة ملموسة إلى حد ما.

اسمحوا لي فقط أن أعطي النتيجة. يحتوي سطحنا Σ على ثلاثة منحنيات مغلقة γ_i ، $i \in \{1, 2, 3\}$ ، والتي قمنا على طولها بتنفيذ المجموع المترابط. تقطع على طول الـ γ_i لنحصل على أربع مركبات S_i ، حيث S سطح من الجنس 18 ناقصاً 4 أقراص وكل من الـ S_i هو طارة مثقوبة. تطبيق امتداد أوحده \mathbb{Z} يحفظ المنحنيات γ_i وهو قتل أو تي دهن (Dehn) في حلقة ما، حول هذه المنحنيات. هذا يعني أن \mathbb{Z} بجوار هذه المنحنيات يبدو مثل الصورة الموجودة في الهامش. يدل هذا على أن عمل الامتداد الأوحده على التائل دوري، لكن هذا لن يكون صحيحاً في الترادف. المنحنيات γ_i متماثلة مع الصفر ولكنها ليست مترادفة مع الصفر.

إذا قطعنا Σ على طول الـ γ_i ، فإننا نجد الامتدادات الأوحده لـ $x^3 - y^2$ ، ثلاث مرات، ولـ $x^{19} - y^3$ مرة واحدة. ويترتب على ذلك أن كثير حدود ألكسندر هو جداء مكعب كثير الحدود لـ $x^3 - y^2$ وكثير الحدود لـ $x^{19} - y^3$. لذلك، نحصل على:

$$\frac{(X^6 - 1)^3 (X - 1)^3 (X^{57} - 1)(X - 1)}{(X^2 - 1)^3 (X^3 - 1)^3 (X^{19} - 1)(X^3 - 1)}$$

بالفعل، إن تليف ميلنور في متممة ليفة واحدة هو تليف على $[0, 1]$ ، وبالتالي فهو تليف تافه نظراً إلى أن $[0, 1]$ قابل للتقليص.



لتي دهن. الهوميومورفياكل هذا هو التطبيق المطابق على حد الحلقة، يحفظ الدوائر متحدة المركز، ويلويها كما هو موضح.

والذي يساوي

$$(1 - X + X^2)3(1 - X + X^3 - X^4 + X^6 - X^7 + X^9 - X^{10} + X^{12} - X^{13} + X^{15} - X^{16} + X^{18} - X^{20} + X^{21} - X^{23} + X^{24} - X^{26} + X^{27} - X^{29} + X^{30} - X^{32} + X^{33} - X^{35} + X^{36}).$$

الحالة العامة

اسمحوا لي أن أذكر فقط أهم النتائج.

تكون العقد المرتبطة بفرع من منح دائماً عقد طارة متكررة.

العقدتان المرتبطتان بمنحنيين غير قابلين للاختزال $F_1(x, y) = 0$ و $F_2(x, y) = 0$ متكافئتان طوبولوجياً من خلال هوموتشاكل لـ 3-كرة إذا وفقط إذا كان الفرعين المرتبطين نفس لا متغير بويزو المميز. في الواقع، يميز المرء هذه العقد باستخدام كثيرات حدود ألكسندر. تم إثبات ذلك منذ زمن طويل في حالة العقد وحتى في حالة المنحنيات ذات الفرعين. الحقيقة الماثلة، بالنسبة للمنحنيات غير القابلة للاختزال، والتي تنتج روابط تتكون من عدة عقد منفصلة، تم تأسيسها مؤخرًا.

تم وصف الامتداد الأوحده المرتبط بالمنحنيات العامة بشكل جميل من قبل أكاميو¹²¹. أود أن أقول إن الوضع الآن مفهوم جيداً.

من الحكمة إيقاف رحلتنا هنا إذا أردنا الاستمرار في نزهتنا: هناك مواقع أخرى تستحق الزيارة. ومع ذلك، سأفهم تماماً بعض الإحباط من القارئ المضطر للعودة عن مسار يبدو جميلاً (وهو كذلك).

لمزيد مزيد مزيد (هكذا) من المعلومات حول هذا الموضوع، مع منظور تاريخي، يجب على القارئ أن يُلقي نظرة على ما هو عرض واف رائع من قبل [بيير](#)¹²² وعلى الذي تم ذكره بالفعل¹²³.

¹²¹N. A'Campo. *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes*. *Invent. Math.*, 20:147-169, 1973.

¹²²C. Weber. On the topology of singularities. In *Singularities II*, volume 475 of *Contemp. Math.*, pages 217-251. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

¹²³E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.



النقش الشهير مبلينكوليا لدورر (1514) (Melencolia by Dürer).

متعدد الرؤوس ليس K_5 ! أوصي بمقال فونتر زيفلر في صحيفة *The Guardian*

[Dürer's polyhedron: five theories that explain Melencolia's crazy cube.](#) ◉

تجميعي السطوح ل هيباركوس - شرودر - تاماري - سطاتيف

سننسى المنحنيات التحليلية لبعض الوقت ونعود للأشجار والكلمات والتوافقيات. يوجد قاموس طبيعي بين الأنواع الثلاثة الآتية من الأشياء.



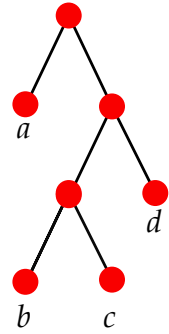
• أشجار ثنائية مستوية مجذرة ذات n ورقة.

• تقويسات (وضع أقواس) ثنائية على كلمة طولها n .

• تجزئة مضلع محدب ذي $(n+1)$ حافة (يسمى أحدها الجذر) إلى n مثلثا.

نموذج ل K_5 .

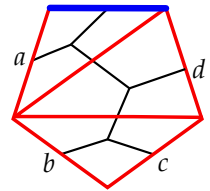
تم توضيح هذا من خلال الصور الموجودة في الهامش. لقد كنا محتمين أيضًا بالأشجار المستوية المجذرة ذات n ورقة بحيث يكون لكل عقدة داخلية طفلان على الأقل. ترتبط هذه الأشجار بتقويسات شرودر على كلمة طولها n والتي ليست بالضرورة ثنائية. بمفردات الأقطار على مضلع محدب من $(n+1)$ ضلعا، هي تتوافق مع مجموعات من k من الأقطار غير المتقاطعة، مع $0 \leq k \leq n$. عدد هذه الأشياء هو عدد هيباركوس- شرودر ال- n (الصغير).



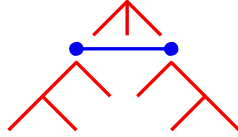
$a((bc)d)$

متعدد رؤوس مجرد

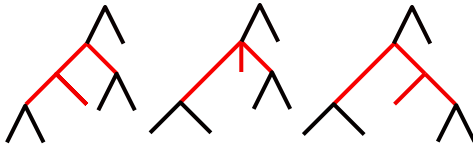
سنقوم ببناء متتالية من متعددات الرؤوس K_n ، من البعد $n-2$ ، تسمى تجميعيات السطوح.



نرسم مجالاً ونقوم بوسمه بالشجرة المجذرة الوحيدة بجذر واحد له 3 أطفال ولا توجد عقدة أخرى. نقوم بوسم نهايته بالشجرتين الثنائيتين المستويتين المجذرتين بـ 3 أوراق. نحصل على الشكل الآتي. هذا هو K_3 : مجرد مجال.



من المغربي جداً ربط شجرتين ثنائيتين بحافة إذا انتقل المرء من واحدة إلى الأخرى من خلال انتقال محلي، كما هو مقترح في الصورة السابقة. إذا اكتشفتم في بعض الأشجار الثنائية شجرة جزئية ذات 3 أوراق، فإنكم تحذفونها وتستبدلون بها الشجرة الأخرى ذات 3 أوراق: لقد حددتم حافة في تجميعي السطوح.

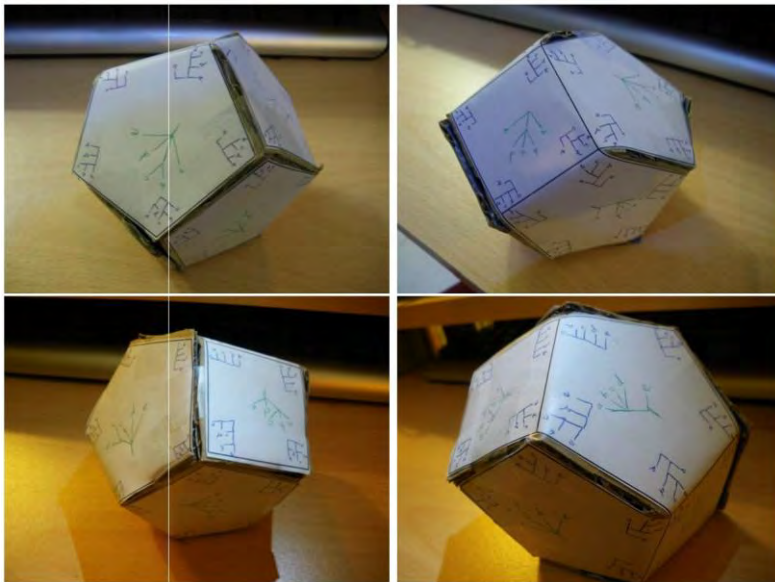
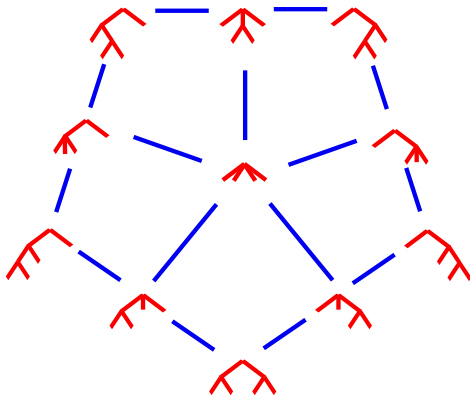


هنا بنا نرسم صورة بالنسبة إلى $n = 4$. هناك 5 أشجار ثنائية بـ 4 أوراق. نضعها في رؤوس خماسي أضلاع. يتم وسم الحواف الخمس بواسطة 5 أشجار مستوية بأربع أوراق وعقدة واحدة من 3 أطفال. هناك شجرة مستوية أخرى لها جذر واحد له 4 أطفال. نضعها في وسط الخماسي، كوسم للوجه ثنائي البعد للخماسي. هذا هو K_4 .

يوحي هذا إلى أنه يمكن للمرء تعريف متعدد رؤوس من البعد $n-2$ والذي يتم وسم رؤوسه بواسطة الأشجار الثنائية ذات n ورقة، والذي تم وسم حوافه بواسطة الأشجار التي تحتوي على عقدة واحدة مكونة من 3 أطفال، وهكذا، والذي تم وسم وجهه الوحيد ذي البعد الأعلى (من البعد $n-2$) بواسطة شجرة واحدة ذات جذر واحد و n من الأطفال (تسمى عادةً تويجاً).

بالانتقال إلى $n = 5$ ، لا يزال بإمكاننا رسم صورة.

اتضح أنه من الممكن بالفعل بناء مثل متعدد الرؤوس هذا من أجل جميع قيم n . المشكلة الأولى هي إعطاء تعريف دقيق لكلمة متعدد الرؤوس في سياق توافيقي.



قد يرغب المرء في تعريف مستوحى من حدسنا الهندسي من متعدد الرؤوس في فضاء إقليدي، والذي لا يأخذ بعين الاعتبار التغطيس في فضاء ما.

هناك مفهوم واضح المعالم لمتعدد سطوح توافيقي، وجوهه قطع ومثلثات وبُسط بشكل عام. نبدأ بمجموعة V من النقط تسمى الرؤوس ونختار بعض المجموعات الجزئية من V والتي تسمى الوجوه بشرط واحد فقط: مجموعة جزئية من وجه يجب أن تكون وجهًا. إذا كان وجه يحتوي على $k+1$ عنصرا، نقول إنه بسيط بعده k . هذا تعريف سهل إلى حد ما ولكنه لا يناسب حالتنا. على سبيل المثال، يحتوي متعدد الرؤوس من البعد 3، K_5 أعلاه على وجوه ثنائية البعد وهي مربعات أو خاسيات وليست مثلثات.

هناك بالفعل عدة تعريفات توافيقية (غير متكافئة) لمتعددات الرؤوس المجردة لكننا لن نستخدمها لأن متعدد الرؤوس الخاص بنا سيتحقق في النهاية كشيء هندسي في فضاء إقليدي. ومع ذلك، يجب على الأقل أن يتكون متعدد رؤوس مجرد من وجوه لها بعد ما، ويجب أن يكون هناك ترتيب جزئي ما بين الوجوه، بما يتوافق مع الفكرة البديهية للتجاور. لذلك، سنكتفي بتعريف مجموعة مرتبة جزئيا K_n ارتفاعها $n-2$. هذا سهل للغاية للتبسيط، نختار مضلعا محدا Π_{n+1} في المستوي $(n+1)$ رأسا، لكن الإنشاء الآتي مستقل عن اختيار هذا المضلع. نختار أيضا ضلعا واحدا من المضلع يسمى جذرا.

ارتفاع مجموعة مرتبة جزئيا هو عدد عناصر مجموعة جزئية أكبرية مرتبة تماما ناقصا 1.

وجه من البعد d لـ K_n هو بالتعريف مجموعة F بـ $n-2-d$ قطرا غير متقاطع في Π_{n+1} . علاقة الجوار يتم تعريفها باستخدام الاحتواء العكسي: نقول إن وجهما مرتبطا بمجموعة جزئية F_1 هو وجه جزئي لـ F_2 إذا كان $F_2 \subset F_1$. على سبيل المثال، رؤوس K_n ذات البعد 0، تتوافق مع تجزئة Π_{n+1} إلى $(n-1)$ مثلثا بواسطة $n-2$ قطرا. باستخدام الجذر، ترتبط هذه الرؤوس بأشجار ثنائية مستوية، كما هو مطلوب.

يرتبط وجه تمام بعده q من K_n بشجرة مستوية مجذرة ذات n ورقة لها q عقدة داخلية بالضبط (تختلف عن الجذر والأوراق)، أو، على نحو مكافئ، لها q حافة داخلية. إذا رأينا من "وجهة نظر الشجرة"، يمكن أن نقول إن الوجه المرتبط بشجرة T_1 هو وجه جزئي من وجه مرتبط بـ T_2 إذا حصلنا على T_2 من T_1 عن طريق تقويض بعض الحواف.

في الوقت الحالي، قمنا فقط بتعريف بعض المجموعات المرتبة بشكل جزئي. لن يكون من الصعب التحقق من أن هذا يلبي البديهيات التي تحدد متعددات الرؤوس المجردة ... التي اخترنا عدم توضيحها. هذا هو تجميعي السطوح ل هيباركوس - شرودر - تاماري - سطاشيف.

قليل من التاريخ

كالعادة، يكاد يكون من المستحيل إعطاء اسم واحد لشيء رياضي. كما نعلم، قام كتلان بحساب عدد رؤوس K_n وأحصى هيباركوس وشرودر وجوهه. عرّف دوپ تاماري (برنارد تيتلر سابقاً) الشيء التوافيقي في عام 1951 في أطروحته. نقتح قراءة الفصل الأول من "Tamari memorial Festschrift" ¹²⁴ للحصول على وصف لدوافعه وسيرته الذاتية ("زهة" في ألمانيا، فلسطين، فرنسا، ...، البرازيل وهولندا و عبر القرن العشرين). يتعلم المرء على سبيل المثال أنه

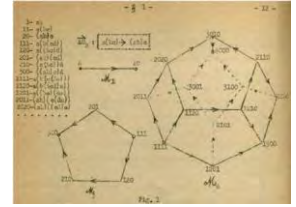
بعد عام 1948 على الأقل، عارض تاماري المظالم التي ارتكبتها الإسرائيليون ضد الفلسطينيين، وكذلك التمييز ضد المهاجرين اليهود من دول الشرق الأوسط، ولم تكن هذه الآراء مقبولة على نطاق واسع في تلك الأيام.

في عام 1963، عرّف ج. سطاشيف الشيء نفسه، أيضاً في أطروحته، ولكن في سياق طوبولوجي مختلف تماماً، ستم مناقشته ببعض التفصيل في الفصل الآتي. لم يكن على علم بعمل تاماري السابق. تُظهر الصورة الموجودة في الهامش متعدد الرؤوس المنحني من ورقته الأصلية.

كان إنشاء متعدد رؤوس محذب في فضاء إقليدي ما سؤالاً طبيعياً للغاية. وفقاً لحكاية طريفة، جاء ميلنور لحضور مناقشة دكتورا سطاشيف بنموذج من الورق المقوى لـ K_5 . صاغ كآني الاسم تجميعي السطوح (Associahedron) الذي سأل حايما ما إذا كان هناك متعدد رؤوس محذب هندسي (غير مجرد) في \mathbf{R}^n والذي يحقق K_{n-2} . قدم حايما إنشاءً في عام 1984 لكنه لم ينشره.

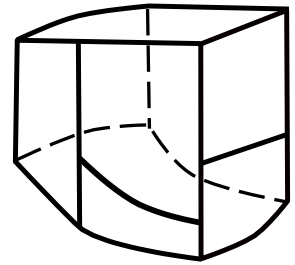


دوپ تاماري (1911-2006).



رسم من أطروحة تاماري.

¹²⁴ F. Müller-Hoissen, J. M. Pallo, and J. Stasheff, editors. *Associahedra, Tamari lattices and related structures. Tamari memorial Festschrift, volume 299 of Progress in Mathematical Physics.* Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.



رسم من قبل سطاشيف

تم نشر إنشاء من قبل لي (Lee) في عام 1989. وقدم العديد من المؤلفين إنشاءات أخرى. راجعوا الفصل المقابل لسيدالوس وزيفلر في تأبين (Festschrift) تاماري.

125 J.-L. Loday. Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3):267-278, 2004.

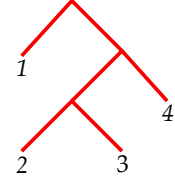
إنشاء لودي

نصف الآن إنشاءً جميلاً يرجع إلى جان لوي لودي¹²⁵ في عام 2004، لمتعدد رؤوس محدب في فضاء إقليدي والذي تحقق وجوهه (بالمعنى الهندسي) على وجه التحديد التوافقيات الخاصة بتجميعي السطوح لهيباركوس وشريكه.

لتكن T شجرة ثنائية مجذرة مستوية بـ n ورقة معتبرة كأنها رأس في K_n . نقوم بوسم الأوراق من 1 إلى n ، من اليسار إلى اليمين. من أجل كل زوج $\{i, j\}$ من الأوراق نرمز بـ $i \vee j$ إلى عقدة T التي هي أصغر سلف مشترك لكل من i و j . من أجل كل عدد صحيح i ، حيث $1 \leq i \leq n-1$ ، نعتبر العقدة $i \vee (i+1)$ ونرمز بـ $v_l(i)$ (على التوالي) لعدد الأوراق السليمة المتفرعة منها على طول فرعها الأيسر (الأيمن على التوالي). نرفق بالشجرة T النقطة

$$M(T) = (v_l(1)v_r(1), v_l(2)v_r(2), \dots, v_l(n-1)v_r(n-1))$$

في \mathbf{R}^{n-1} .



$$v_l(3) = 2 \quad v_r(3) = 1$$

$$M(T) = (3, 1, 2)$$

مبرهنة. الغلاف المحدب لمجموعة النقط $M(T)$ ، حيث تمسح T جميع الأشجار الثنائية المجذرة المستوية، هو متعدد رؤوس محدب توافيقته هي بالضبط توافيقية تجميعي السطوح لهيباركوس-شرودر-تاماري-سطاشيف.

دعونا نظهر أولاً أن جميع النقط $M(T)$ تقع على المستوي الفوقي في \mathbf{R}^{n-1} والذي معادلته

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

إحدى طرق إثبات ذلك هي حساب عدد الثلاثيات (a, b, v) حيث a, b, v ورقتان مع $v = a \vee b$. نظرًا إلى أن v يتم تحديده بواسطة a, b فإن هذا العدد يساوي عدد الأزواج $\{a, b\}$ ، $a < b$ ، والذي يساوي $n(n-1)/2$. بحساب نفس العدد وفقًا للعقدة v ، نحصل على مجموع الـ $v_l(i)v_r(i)$ من $i=1$ إلى $i=n-1$. وهذا يثبت الادعاء. \square

لإثبات مبرهنة لودبي، نحدد أولاً الوجوه ذات تمام البعد 1 في K_n . يتم رسمها بواسطة أشجار (غير ثنائية) لها عقدة داخلية واحدة. يتم تحديدها من خلال عددين صحيحين $1 \leq p < p+q-1 \leq n$ ويتم الحصول عليها عن طريق تطعيم q -تؤجج في الرأس الـ p من الـ $(n-q+1)$ -تؤجج. المجموعة $F_{p,q}$ لرؤوس هذا الوجه هي مجموعة الأشجار الثنائية (المستوية المجذرة) التي يتم الحصول عليها عن طريق تطعيم أي شجرة ثنائية مستوية مجذرة ذات q ورقة إلى الورقة المرقمة p في أي شجرة (ثنائية مستوية مجذرة) ذات $(n-q+1)$ ورقة.

يمكن للمرء أن يعبر عن نفس الشيء بطريقة مختلفة. تنتمي شجرة ثنائية T إلى $F_{p,q}$ إذا وفقط إذا كانت الأوراق $\{p, \dots, p+q-1\}$ هي أحفاد عقدة واحدة.

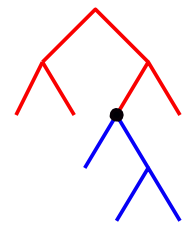
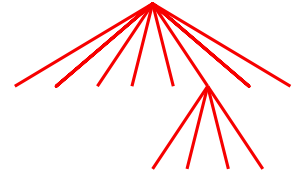
نعرف دالة خطية $l_{p,q}$ على \mathbf{R}^{n-1} بـ

$$l_{p,q}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_p + x_{p+1} + \dots + x_{p+q-1}.$$

لنحسب $l_{p,q}(M(T))$ عندما تكون T رأساً في الوجه $F_{p,q}$ الذي تمام بعده 1. نحن نعلم أن T تطعيم لشجرة ثنائية مستوية مجذرة T_1 ذات q ورقة على الورقة المرقمة بـ p على شجرة (ثنائية مجذرة مستوية) ما T_0 ذات $n-q+1$ ورقة. من الواضح أن الإحداثي i لـ $M(T)$ ، من أجل $p \leq i \leq p+q-1$ ، هو الإحداثي الـ $(i-p)$ لـ $M(T_1)$ من \mathbf{R}^{q-1} بحيث أن $l_{p,q}(T) = q(q-1)/2$ كما رأينا سابقاً.

نفترض الآن أن T ليست في $F_{p,q}$ ، لذلك توجد على الأقل ورقة i في المجال $\{p, \dots, p+q-1\}$ بحيث يكون لـ $i \vee (i+1)$ سليل خارجه. أثناء حساب $l_{p,q}(M(T))$ ، يحصل المرء على $q(q-1)/2$ إذا كان يحسب فقط أحفاد $i \vee (i+1)$ التي تقع داخل المجال $\{p, \dots, p+q-1\}$. أي سليل يقع خارج المجال $\{p, \dots, p+q-1\}$ ينتج عنه مجموع أكبر. تم إثبات المبرهنة. بالفعل، من أجل كل وجه $F_{p,q}$ تمام بعده 1 من K_n ، تكون الدالة التالفية $l_{p,q} - q(q-1)/2$ منعدمة على كل $M(T)$ من أجل جميع الرؤوس T لـ $F_{p,q}$ وموجبة على كل $M(T)$ من أجل الرؤوس T لـ K_n التي ليست في $F_{p,q}$. بعبارة أخرى، وجدنا دوالاً تالفية داعمة (أو حاملة) تُظهر صراحة أن غلاف النقط $M(T)$ المحدب، بالفعل، توافقية متعدد الرؤوس المجرد الذي يتعلق الأمر به.

شرح جان لوي لودبي اكتشاف هذا التغطيس في ورقة لطيفة موجودة على الخط 126. كثيراً ما استخدم الاسم المستعار فيوم وليام زينبيل بسبب إعجاب به لاينيز.



C.I.R.M.

Centre International de Rencontres Mathématiques



2
0
0
5

Associatdre 83

هذه هي بطاقة التهنئة لموسم CIRM لعام 2005، والتي تمثل K_5 . حتى أنهم أنتجوا قميصاً.



جان لوي لودبي (1946-2012) محاضرا حول تجميعي السطوح.

126 J.-L. Loday. Comment j'ai trouvé l'associaèdre.



" شجرة الكرز "

من Cherry and Maple.

طلاء ملون من ورق رقائق الذهب

.(1592)



جيم سطاتشيف وفضاءات الحلقات

ليست هناك حاجة للتذكير بأهمية الزمر في الرياضيات بشكل عام والطوبولوجيا بشكل خاص. تتمثل إحدى المشكلات في أن هذا المفهوم دقيق نوعًا ما في نظرية الترادف كما هو موضح في هذا الفصل.

نذكر أن تطبيقين مستمرين f_0 و f_1 من X إلى Y مترادفان إذا وُجد تطبيق مستمر $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$ (يسمى ترادفا) بحيث يكون $F(x,0) = f_0(x)$ و $F(x,1) = f_1(x)$. يكون لفضاءين طوبولوجيين X ، Y نفس نوع الترادف، إذا وُجد تكافؤًا ترادف $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow X$ ، أي تطبيقان بحيث يكون $f \circ g$ و $g \circ f$ مترادفين مع التطبيق المطابق. تدرس نظرية الترادف فئة الترادف التي تكون أشياءؤها الفضاءات الطوبولوجية وسهامها أصناف ترادف التطبيقات.

كمثال تافه، لا يمكن أن يكون مجال مغلق مترادفا مع زمرة طوبولوجية نظرًا إلى أن مجموعة طرفيه ثابتة تحت أي هوميوتشاكل في حين أن أي زمرة تعمل بشكل متعدد على نفسها من خلال الانسحابات. ومع ذلك، فإن المجال قابل للتقليص: له نفس نوع الترادف كنقطة، وهي زمرة (تافهة). طرح جيم سطاتشيف في أطروحته عام 1961 (المنشورة في عام 1963¹²⁷)، السؤال حول تحديد أي الفضاءات لها نوع ترادف زمرة طوبولوجية.

الزمر الطوبولوجية، الحزْم الرئيسية

في هذا الجزء، نقدم لمحة موجزة جدًا عن دور الزمر الطوبولوجية في نظرية الترادف. هدفنا الوحيد هو تقديم ما يكفي من المصطلحات والحقائق الأساسية لتمكين من شرح مساهمة سطاتشيف.



جيم سطاتشيف.



انعطاف! بالمعنى الدقيق للكلمة، هذا الفصل ليس ضروريًا لبقية الكتاب. سيكون بمثابة دافع لمفهوم العمولات، وهي أيضًا ليست ضرورية، ولكنها تلقي بعض الضوء على الصورة الإجمالية. ربما يكون هذا هو الجزء الأكثر صعوبة في نهتنا.

¹²⁷J. D. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces. I, II.* *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275-292; *ibid.*, 108:293-312, 1963

مرة أخرى، هذا ميدان شاسع ويجب أن أشير إلى الكتب الممتازة، على سبيل المثال، كتاب . . . ميلنور و سطاتشيف¹²⁸ الذي يعالج ما يسمى بالأصناف المميزة.

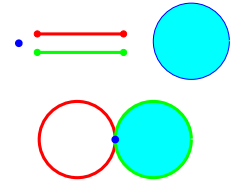
لنفترض أن G زمرة طوبولوجية، أي زمرة مجهزة بطوبولوجيا، بطريقة تجعل التركيب والتطبيق العكسي مستمرين. G -حزمة رئيسية هي عمل حر لـ G على فضاء X مع "حاصل قسمة جيد" B . كل نقطة في X يجب أن يكون لها جوار G -لا متغير هوميومورفيك مع الجداء $U \times G$ حيث الـ G -عمل هو مجرد العمل عن طريق الانسحابات في العامل الثاني. في كثير من الأحيان، من الأنسب التفكير في الحزمة على أنها تطبيق الإسقاط $p: X \rightarrow B$ على الفضاء B لـ G -مدارات. تكون G -حزمة $p': X' \rightarrow B$ إيزومورفية مع p إذا وجد هوميومورفيك G -متساوي التغير بين X و X' يُحدث التطبيق المطابق على B . نقول إن الفضاء الكلي X فوق الأساس B وإن الصورة العكسية لنقطة بواسطة p ، وهي G -مدار، ليفة.

في هذه المرحلة، يجب أن نكون حذرين للغاية بشأن هذا النوع من الفضاءات الطوبولوجية التي سيتم استخدامها. يجب أن تكون هاوسدورف ولا ينبغي أن تكون مرصية جدا. عادة، يتقيد المرء بدراسة الـ CW -مركبات. ليس في نيتنا إعطاء وصف تفصيلي دقيق لهذه الفضاءات. سنذكر فقط أن مثل هذا الفضاء X هو بحكم التعريف اتحاد متزايد لفضاءات جزئية $Sk_n(X)$ ، تسمى هياكله الـ n -اية. يتم الحصول على الهيكل الـ $(n+1)$ -اي $Sk_{n+1}(X)$ من $Sk_n(X)$ عن طريق لصق بعض الجلات B^{n+1} ذات الأبعاد $(n+1)$ على طول بعض "التطبيقات الرابطة" $u: \partial B^{n+1} \rightarrow Sk_n(X)$. يعتبر كتاب هاتشر¹²⁹ (المتاح مجاناً على الخط) مرجعاً ممتازاً.

الحزم الرئيسية هي أشياء أساسية في الطوبولوجيا (التفاضلية). على سبيل المثال، لتكن المتنوعة المساء M من البعد m ، ننظر إلى الفضاء $Fr(M)$ للثنائيات (x, f) ، حيث x نقطة من M و f معلم في x ، أي أساس في الفضاء المماس $T_x(M)$. يوجد عمل حر واضح للزمرة الخطية $GL(m, \mathbf{R})$ على $Fr(M)$ والتطبيق p الذي يرسل (x, f) من $Fr(M)$ إلى x من M حزمة رئيسية. لتكن G -حزمة رئيسية $p: X \rightarrow B$ وتطبيق $i: B_1 \rightarrow B$ ، يمكننا أن نسحب p إلى الخلف لإنتاج حزمة رئيسية $p_1: X_1 \rightarrow B_1$. شكليا، X_1 هو الفضاء الجزئي لـ $B_1 \times X$ الذي يتكون من الثنائيات (b_1, x) بحيث $i(b_1) = p(x)$ و $p_1(b_1, x) = b_1$. على سبيل المثال، إذا كان i احتواء، فإن p_1 هو اقتصار على "ما هو أعلى من $i(B_1)$ في X ".

128 J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. *Annals of Mathematics Studies*, No. 76.

تقليديا، في سياق الحزم الرئيسية تعمل الزمر عن اليمين.



خذوا نقطة واحدة ومجالين وقرصا. ألصقوا نقط نهايات المجالين بالنقطة. هذا ينتج شكل ثمانية. ألصقوا حد القرص بإحدى مركبتي ثمانية. تحصلون على مثال بسيط جدا لـ CW -مركب. بالطبع، بشكل عام، لصاق التطبيقات قد يكون أكثر تعقيداً.

129 A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

هنا مثال مهم. ليكن $Gr_{k,n}$ فضاء الفضاءات الجزئية الخطية ذات البعد k في \mathbf{R}^n . هذا الفضاء منوع متراسة، تسمى منوعة فراسانية. توجد حزمة تحصيل حاصل $GL(k, \mathbf{R})$ فوق $Gr_{k,n}$ ، تتكون ليفتها فوق فضاء جزئي ما من أساسات هذا الفضاء الجزئي. إذا كانت منوعة من البعد k مغموسة في \mathbf{R}^n ، فإن تفاضل هذا الغمس يعطي تطبيقاً من M في $Gr_{k,n}$. إن السحب إلى الخلف للحزمة تحصيل الحاصل $GL(k, \mathbf{R})$ فوق $Gr_{k,n}$ إيزومتشاكل مع حزمة المعالم لـ M . لنذكر بحقيقتين هامتين تتعلقان بالحزم الرئيسية.

– تكون أي حزمة ذات أساس قابل للتقليص B تافهة (قابلة للتفويه)، أي إيزومتشاكل مع $B \times G$. عودوا إلى ¹³⁰ لتاريخ هذه المبرهنة.

– إذا كان i ، i' من B_1 في B مترادفين، فإن الحزمتين الرئيسيتين المسحوبتين إلى الخلف p_1 ، p'_1 لـ p بواسطة i ، i' إيزومتشاكلتان.

توضح هاتان الخاصيتان أن مجموعة أصناف الإيزومتشاكلات لـ G -حزم الرئيسية على فضاء ما B تتعلق فقط بنوع ترادف B ، وتعزف دالاً مخالفاً للتغير على فئة الترادف.

تصنيف الفضاءات

تسمى G -حزمة رئيسية $p_G: E(G) \rightarrow B(G)$ كونية إذا كانت كل G -حزمة رئيسية $p: X \rightarrow B$ إيزومتشاكل مع السحب إلى الخلف p_G بواسطة تطبيق ما $i: B \rightarrow B(G)$ والذي هو وحيد إلى ترادف مقرب. لاحقاً، سنقوم برسم إثبات للآتي.

مبرهنة. من أجل كل زمرة طوبولوجية G ، توجد حزمة ألياف كونية $p_G: E(G) \rightarrow B(G)$.

بمعنى آخر، يوجد تقابل طبيعي بين :

– (أصناف إيزومتشاكلات) الـ G -حزم الرئيسية فوق فضاء B .

– أصناف ترادف $[B, B(G)]$ للتطبيقات من B في $B(G)$. نقول إن $B(G)$ هو الفضاء المصنّف لـ G . هيا بنا نصف مثالين مهمين. نفترض أولاً أن G زمرة متقطعة. في مثل هذا الوضع، لا تكون G -حزمة رئيسية أكثر من تطبيق تغطية زمرة لقالوا هي G .

¹³⁰M. Audin. [Publier sous l'Occupation. I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences. Rev. Histoire Math., 15\(1\):7-57, 2009.](#)



متتاليات طيفية ومدارات عمل الزمر، لـ أ. فومنكو.

يتم وصف فضاءات تغطية الفضاء B بواسطة زمرة جزئية من زمرة الأساسية. في هذه الحالة $B(G)$ هو فضاء أيلنبرغ-ماكليين $K(G,1)$: زمرة الأساسية هي G وغطاؤها الكوني $E(G)$ قابل للتقليص (بتعبير آخر، جميع زمرة الترادف الأعلى لـ $K(G,1)$ تافهة). أي G -قالوا تغطية لفضاء ما B تكافئ صنف ترادف من التطبيقات $B \rightarrow K(G,1)$.

ملاحظة مهمة. من أجل تحديد الزمرة الأساسية لفضاء X ، نحتاج إلى نقطة أساس x من X . ترميز مثل $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ يعني أن $f(x) = y$. عند مناقشة ترادف التطبيقات، يجب أن نذكر صراحة ما إذا كان هذا الترادف يحافظ على النقطة الأساسية أم لا. ينبغي لنا . . . ولكننا لن فعل! وهذا يعني جملاً طويلة وتقنية، وكما لاحظ القارئ بالفعل، فإن هذا الكتاب ليس موسوعة كاملة. نأمل أن يغفر القارئ هذا النقص في الدقة.

كمثال ثان، نعتبر الزمرة $U(1)$ للأعداد المركبة ذات الطويلة 1. من أجل كل n ، يوجد عمل لـ $U(1)$ على كرة الوحدة S^{2n-1} في C^n . يعمل العنصر ω على (z_1, \dots, z_n) لإنتاج $(\omega z_1, \dots, \omega z_n)$. هذا يعرف $U(1)$ -حزمة رئيسية

$$p_n: S^{2n-1} \rightarrow CP^n$$

فوق الفضاء الإسقاطي المركب. كل هذه الكرات والفضاءات الإسقاطية متداخلة بشكل طبيعي، مغطسة (z_1, \dots, z_n) إلى $(z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$ ، حيث تتمكن من تعريف $U(1)$ -حزمة رئيسية يكون فضاؤها الكلي هو الكرة ذات البعد اللامنتهي وأساسها هو الفضاء الإسقاطي اللامنتهي البعد

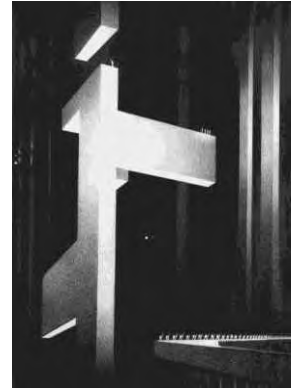
$$p_\infty: S^\infty \rightarrow CP^\infty.$$

سنرى أن هذه هي الحزمة الكونية لـ $G = U(1)$. النقطة الرئيسية هي الآتية.

قضية. تكون G -حزمة كونية إذا وفقط إذا كان فضاؤها الكلي قابلاً للتقليص.

إثبات هذه الحقيقة الأساسية هو مثال نموذجي على نظرية العوائق. نبدأ بـ G -حزمة $p_G: E(G) \rightarrow B(G)$ بحيث تكون $E(G)$ قابلة للتقليص ولنظهر أنها كونية. نعتبر G -حزمة أخرى $p: E \rightarrow B$ ونريد أن نبيّن أن هذا هو سحب إلى الخلف لـ p_G بواسطة تطبيق $i: B \rightarrow B(G)$.

للتعرف أكثر على نظرية تغطية الفضاءات، عودوا إلى كتاب هاتشر، أو موقع التحليل.



متعددات السطوح وسلاسل بسيطة 1973. أ. فومنكو.

نحن ننشئ i على هيكل B (والتي، كما هي دائماً، CW-مركبات)، عن طريق الاستقراء على أبعادها. في كل خطوة، هناك بعض التطبيقات المستمرة التي يجب أن تُمدد وقابلية تقليص $E(G)$ هي بالضبط ما هو مطلوب لهذا الإنشاء. راجعوا كتاب ميلنور وسطاشيف للحصول على التفاصيل ولائيات العكس.

في مثال $U(1)$ فضاء التصنيف $B(U(1))$ هو CP^∞ لأن الكرة ذات البعد اللامنتهي قابلة للتقليص بالفعل.

إنشاء ربط ميلنور

إن إنشاء ميلنور لـ $B(G)$ جميل وسهل¹³¹. أي زمرة طوبولوجية G تعمل بحرية على نفسها ولكن بالطبع لا يُشترط أن تكون الزمرة قابلة للتقليص. لذلك، يتعين علينا فرض القابلية للتقليص، والحفاظ على عمل زمرة حر. لنفترض أن $E(G)$ هو البسيط على G . أي عنصر من $E(G)$ هو بحكم التعريف توفيقية مرجحية شكلية منتية لعناصر من G ، أي أنه مجموع شكلي

$$\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k$$

حيث $0 \leq \lambda_i$ و $\sum \lambda_i = 1$. هذا الفضاء محدب، وبالتالي قابل للتقليص، وهو مجهز بعمل حر من G . إسقاط $E(G)$ على حاصل القسمة $B(G)$ هو إذن فضاء تصنيف. وهذا كل شيء!

يجب أن نكون أكثر حذرا في تعريف $E(G)$. نبدأ باتحاد منفصل لجُداءات $G^{n+1} \times \Delta_n$ حيث

$$\Delta_n = \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mid (\lambda_i \geq 0) \wedge \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

هو البسيط القياسي. بعد ذلك، ندخل علاقة تكافؤ "واضحة" ناتجة عن

$$G^{n+1} \times \Delta_n \longrightarrow G^n \times \Delta_{n-1}$$

$$\begin{aligned} & ((g_0, \dots, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n), (\lambda_0, \dots, \lambda_i, 0, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)) \\ & \equiv ((g_0, \dots, g_i, g_{i+2}, \dots, g_n), (\lambda_0, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)) \end{aligned}$$

ونعرف $E(G)$ على أنه فضاء حاصل القسمة. هذا هو إنشاء ربط ميلنور. يأتي الاسم من حقيقة أنه تم إنشاء "روابط افتراضية"، بربط النقط في G .

تحققوا من كل شيء بأنفسكم، دون فتح الكثير من الكتب الموصى بها! لماذا الكرة S^∞ قابلة للتقليص؟



فضاءات خلوية لـ E . فومنكو.

¹³¹J. Milnor. [Construction of universal bundles. II.](#) *Ann. of Math.* (2), 63:430–436, 1956.

الحلقات وتركيبها



مركبات بسيطة 1973 لـ أ. فومنكو

ليكن B فضاء و \star نقطة أساس فيه، فضاء الحلقات المؤسّسة $\Omega(B, \star)$ هو فضاء ... الحلقات المؤسّسة \odot ، أي التطبيقات المستمرة $\gamma: [0, 1] \rightarrow B$ بحيث $\gamma(0) = \gamma(1) = \star$ ، والمجهز بالطوبولوجيا المفتوحة المتراسة. لتكن γ_1, γ_2 حلقتين مؤسستين، يمكن أن تكونا متعاقبتين. أحد التعريفات الممكنة هو وضع $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \gamma_1(2t)$ من أجل $0 \leq t \leq 1/2$ و $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \gamma_1(2t-1)$ من أجل $1/2 \leq t \leq 1$. تركيب التطبيقات هذا

$$\Omega(B, \star) \times \Omega(B, \star) \rightarrow \Omega(B, \star)$$

هو بالتأكيد ليس تجميعياً. في التركيب $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ نسير على طول γ_1 عندما يكون $t \in [0, 1/4]$ ، ثم على طول γ_2 عندما يكون $t \in [1/4, 1/2]$ وأخيراً على طول γ_3 عندما يكون $t \in [1/2, 1]$. ليس هذا هو نفس المسار $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ على الرغم من أن هاتين الحلقتين مترادفتان.

عند تغيير التعريفات قليلاً، نحصل على فضاء حلقات تجميعي فعلياً، وليس فقط إلى ترادف مقرب. هيا بنا نستخدم ما يسمى حلقات مور. تتكون مثل هذه الحلقة من عدد $0 \leq l$ (يُنظر إليه وكأنه طول ما) ومن تطبيق مستمر $\gamma: \mathbf{R}_+ \rightarrow B$ بحيث $\gamma(0) = \star$ و $\gamma(t) = \star$ من أجل $l \leq t$. توجد طوبولوجيا طبيعية على فضاء هذه الحلقات الفاخرة، المُشار إليه بـ $\Omega_M(B, \star)$ ، والذي له نفس نوع الترادف مثل $\Omega(B, \star)$. ليكن (l_1, γ_1) و (l_2, γ_2) ، يتم تعريف تركيبها على أنه $(l_1 + l_2, \tilde{\gamma})$ حيث $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(t)$ من أجل $l_1 \geq t$ و $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_2(t - l_1)$ من أجل $l_1 \leq t$. من الواضح أن هذا تجميعي.

هناك حيلة أخرى، أقل شهرة، للحصول على فضاء آخر، يبقى من نفس نوع الترادف مثل $\Omega(B, \star)$ وهو الآن زمرة طوبولوجية. يرجع هذا إلى ميلنور (encore lui!) وهو موصوف في كتاب¹³² لسطاشيف. نفترض افتراضاً بسيطاً جداً: B هو التصور الهندسي لمركب بسيط مع عدد قابل للعد من الوجوه. نعرف زمرة $G(B)$ بالطريقة الآتية. نبدأ بالاتحاد المنفصل للجلّات B^n من أجل $0 \leq n$. نفكر في عنصر من B^n كمسار منقطع b_1, \dots, b_n مع n من الخطوات، حيث تقفز نقطة من نقطة إلى أخرى بدلاً من اتباع مسار مستمر. لنعتبر علاقة التكافؤ

$$(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n) \equiv (b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

إذا كان $b_i = b_{i+1}$ أو $b_{i-1} = b_i$

132 J. Stasheff. *H-spaces from a homotopy point of view*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 161. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

المركب البسيط هو مفهوم توافقي. هو يتكون من مجموعة V تسمى عناصرها الرؤوس، وعائلة من المجموعات الجزئية المنتهية من V والتي تسمى عناصرها الوجوه. البديهية الوحيدة هي أن مجموعة جزئية غير خالية من وجه هي وجه. من أجل أي مركب بسيط، يوجد فضاء طوبولوجي مرتبط به يسمى تصوره الهندسي. إنه يتكون من دوال $t: V \rightarrow [0, 1]$ بحيث

$$\sum_{x \in V} t(x) = 1$$

وبحيث يكون $\{x \mid t(x) \neq 0\}$ وجهاً.

في فضاء حاصل القسمة، نعرف $G(B)$ كفضاء الجزئي للأصناف التي لها ممثل (b_1, \dots, b_n) بحيث يكون $b_1 = b_n = *$ وبحيث يكون أي عنصرين متتاليين b_i و b_{i+1} في نفس البسيط (بحيث يمكننا وصلها، ذهنيًا، بقطعة). بنية الزمرة هي مجرد التعاقب. إنه تمرين بسيط للتحقق من أن هذه زمرة طوبولوجية بالفعل، لها نفس نوع الترادف مثل فضاء الحلقات $\Omega(B, *)$.

حسنًا، هذا الإنشاء ليس بهذا التعقيد، ولكن يجب أن نضع في الحسبان أن الزمرة التي تم إنتاجها ضخمة إلى حد ما، حتى لو كان B بسيطًا جدًا. نادرا ما تستخدم هذه الزمرة "في الممارسة الفعلية".

على أية حال، يجب أن نتذكر أن الفضاء $(B, *)$ يحدد $\Omega(B, *)$ مفيدا مجهزا بتطبيق تعاقب، ليس تجميعيا ولكن يمكن تحويله إلى قانون تجميعي أو حتى إلى زمرة طوبولوجية، على حساب بعض الالتواءات الطوبولوجية. ملاحظة أخيرة في هذا الجزء :

قضية. لأي زمرة طوبولوجية G نفس نوع الترادف مثل فضاء الحلقات لفضائها المصنّف.

تقوم فقط بإدراج الكلمات الرئيسية في الإثبات لتوضيح نوع من الرياضات المطلوبة في هذا الجزء من الطوبولوجيا. إذا كان (X, x) فضاء مُنقَطًا، يتم الحصول على تعليقه $S(X, x)$ من $X \times [0, 1]$ عن طريق تقويض $X \times \{0\}$ ، $X \times \{1\}$ و $[0, 1] \times \{x\}$ إلى نقطة واحدة. يكفي تطبيق ما من $S(X, x)$ في فضاء آخر (Y, y) تطبيقًا من (X, x) في فضاء الحلقات $\Omega(Y, y)$. القضايا الآتية متكافئة.

- صنف ترادف التطبيقات من (X, x) في $\Omega(B(G), e)$ (هو وحدة G) ،
- صنف ترادف التطبيقات من $S(X, x)$ في $(B(G), e)$ ،
- صنف الإيزوتشاكلات لـ G -حزمة فوق $X \times [0, 1]$ تم تنفيذها فوق $X \times \{0\}$ و $X \times \{1\}$ و $[0, 1] \times \{x\}$
- مسار G -حزم p_i على X والإيزوتشاكلات بين p_1 و p_0 مع الحزمة التافهة $X \times G$.

لاحظوا أنه من أجل حزمة مُتَقَهة $X \rightarrow X \times G$ ، فإن التنفيها الأخرى يتم إعطاؤها ببساطة عن طريق التطبيقات $X \rightarrow G$. بالفعل، الإيزوتشاكل من $X \times G \rightarrow X$ في نفسه يرسل (b, g) إلى $(b, u(g)g)$ من أجل $u : B \rightarrow G$. لذلك فإن أصناف ترادف التطبيقات من (X, x) في $\Omega(B(G), e)$ في تقابلات قياسية مع أصناف ترادف التطبيقات من (X, x) في (G, e) . □



فضاء ألياف لـ A . فومنكو. ©

لاحظوا أن حقيقة أن الانسحابات عن اليمين وعن اليسار تتبادل ليست أكثر من كونها خاصية التجميعية.

مبرهنة سطاشيف حول الـ H - فضاءات

يُطلق على الفضاء (X, \star) اسم الـ H - فضاء (أو الـ h - فضاءات إن شئنا) إذا كانت مزودة بـ "ضرب"

$$m_2 : X \times X \rightarrow X$$

$$m_2(x, \star) = m_2(\star, x) = x$$

بحيث يكون السؤال الذي درسه سطاشيف يسمى مشكلة التعرف. هل من الممكن أن نقرر من X و m_2 ما إذا كان هناك فضاء ما Y وتكافؤ ترادف ما من (X, x) في فضاء حلقات $\Omega(Y, y)$ والذي يحول m_2 إلى تعاقب الحلقات $\Omega(Y, y)$ ؟ هذا يكافئ التعرف على الزمر الطوبولوجية بين الـ H - فضاءات، إلى ترادف مقرب. هذا بالفعل سؤال أساسي:

ما هو المفهوم الصحيح للزمرة في فئة الترادف؟

كما يكون القارئ قد ضمن بالتأكيد، الإجابة التي قدمها سطاشيف ستشمل تجميعي السطوح الذي تم تقديمه في الفصل السابق.

نفترض أن (X, x) بالفعل نوع ترادف فضاء حلقات $\Omega(Y, y)$ وأن m_2 مترادف مع التعاقب. من الملائم استخدام فضاء حلقات مور $\Omega_M(Y, y)$ مع تعاقبه التجميعي μ . يجب أن يكون التطبيقان

$$X^3 \rightarrow X \quad ; \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto m_2(m_2(x_1, x_2), x_3)$$

$$X^3 \rightarrow X \quad ; \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto m_2(x_1, m_2(x_2, x_3))$$

مترادفين حيث أن μ تجميعية. هذا الشرط ليس بالضرورة محققا. إذا حدث هذا، فإن الـ H - فضاء يكون تجميعيا إلى ترادف مقرب ونقول إن الـ H - فضاء (X, m_2) الـ A_1 - فضاء. الترادف في هذه الحالة هو تطبيق من $X^3 \times [0, 1]$ في X ويجب اعتبار العامل $[0, 1]$ على أنه تجميعي السطوح K_3 . أربعة حدود تحدد خمسة تطبيقات $X \rightarrow X^4$ مرتبطة بالأشجار الخمس الثنائية المستوية المجذرة بأربع أوراق. يمكن رؤية هذه الأشجار الخمس على أنها رؤوس خماسي K_4 . في الخطوة السابقة، اعتبرنا خمسة تطبيقات $X \rightarrow X^4 \times [0, 1]$.

هذه التطبيقات تتفق على حدودها وتعرف تطبيقا $X \rightarrow X^4 \times K_4$.

H هذه تكريما لـ Heinz Hopf وليس لـ Homotopy (الترادف).



Anti-Dürer - من الدورة - حوار مع مؤلفي القرن السادس عشر 1975، من قبل أ. فومنكو.

إذا كان لـ X نوع ترادف فضاء حلقات (Y, Ω_M) ، مع الضرب التجميعي الفعلي μ ، فإن على هذا التطبيق أن يتمدد إلى الخماسي كله $X \rightarrow X^4 \times K_4$. إذا حدث هذا، فإننا نقول إن X ، A_2 -فضاء.

يجب أن يكون واضحاً أن هذه الصورة تستمر في كل الأبعاد. يمكننا أخيراً تأسيس مبرهنة سطاشيف.

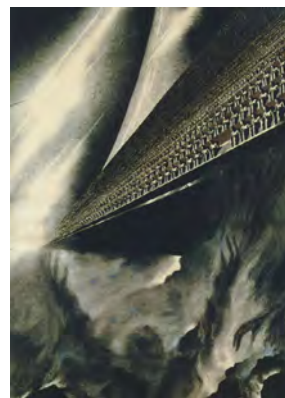
مبرهنة. يكون H -فضاء $X \rightarrow X \times X \rightarrow X$ مكافئاً ترادفياً لفضاء حلقات ما إذا وفقط إذا كان A_∞ -فضاء، أي إذا كانت هناك تطبيقات متماسكة $X^n \times K_n \rightarrow X$ متلائمة مع وجوه تجميعي السطوح $(1 \leq n)$.

الشرط اللازم واضح الآن. الجزء الأكثر إثارة للاهتمام من المبرهنة هو بالطبع الشرط الكافي، والذي لن نثبتته في الجزء القادم من الفصل.

لنبدأ بـ A_∞ -فضاء X ، مع تطبيقات متلائمة $X^n \times K_n \rightarrow X$ ، وهدفنا هو إنتاج فضاء Y له فضاء حلقات من نفس نوع الترادف لـ X . نحن نعلم أن لـ $(Y, \Omega(Y))$ له نفس نوع ترادف زمرة طوبولوجية G ، والتي بدورها، لها نوع ترادف $(Y, \Omega(Y, \star))$. لذلك، من المغري اختيار $Y = B(G)$ ، لكننا لا نعرف G .

نحن نعرف فقط مجموعة التطبيقات $X^n \times K_n \rightarrow X$ والتي هي نوع من البديل لبنية زمرة. وبالتالي، فإن استراتيجيتنا واضحة. يتعين علينا تكيف إنشاء رطب ميلنور لـ $B(G)$ إلى A_∞ -بني أكثر عمومية. تم تنفيذ هذا المشروع من قبل سطاشيف.

بدلاً من البدء بالاتحاد المنفصل لـ $G^{n+1} \times \Delta_n$ ومطابقة النقط وفقاً لعلاقة تكافؤ "واضحة"، نبدأ باتحاد منفصل لـ $X^n \times K_n$ ونعرف علاقة تكافؤ "واضحة" في هذا الاتحاد المنفصل. سيُنتج هذا فضاءً $B(X)$ وهو فضاء التصنيف لـ A_∞ -فضاء X . "الشيء الوحيد الذي لا يزال يتعين علينا تبيانه" هو أنه، كما هو متوقع، فإن فضاء الحلقات لـ $B(X)$ هو حل لمشكلتنا: أي فكّ حلقات لـ X . هذا ليس بالأمر السهل وقد أثبت سطاشيف ذلك ببعض الفرضيات الإضافية (الثانوية) حول طوبولوجيا X .



طريقة فضاءات كيلينغ في الطوبولوجيا الترادفية لـ A_∞ فومنكو.

أشجار الكرز

من أجل الحصول على بعض الحدس وراء هذا الـ $B(X)$ ، دعونا نصف بإيجاز أشجار الكرز التي قدمها بوردمان وفوت¹³³. نعتبر شجرة ثنائية مستوية مجذرة ذات n ورقة. إذا كانت الـ $n-2$ حافة الداخلية مجهزة بطول في $[0,1]$ ، نحصل على شجرة مترية. فضاء الأشجار المترية هذا يعرف مكعباً $[0,1]^{n-2}$ من أجل كل شجرة ثنائية.

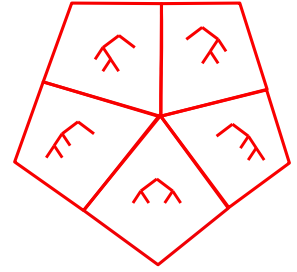
إذا كان طول واحدة أو أكثر من الحواف الداخلية 0، فإن هذه الحواف يمكن تقويضها أي طيها والنتيجة هي شجرة مستوية مجذرة، والتي لم تعد ثنائية، ولكن لا يزال لحوافها الداخلية طول. ينتج عن هذا بعض المطابقات على طول حد تلك المكعبات. تحدد مجموعة هذه الأشجار المترية تحليلاً مكعباً لـ K_n . لذلك يمكن اعتبار K_n فضاءً من الأشجار المترية. على سبيل المثال، يتحلل الخماسي إلى خمسة مربعات. يتيح لنا عرض K_n هذا كفضاء من الأشجار المترية تحديد تطبيقات التطعيم i_{k_1, \dots, k_n}

$$K_n \times (K_{k_1} \times K_{k_2} \times \dots \times K_{k_n}) \rightarrow K_{k_1 + \dots + k_n}.$$

ما علينا سوى إرفاق الأشجار المترية بأوراق شجرة مترية ما. الآن، نريد تصوير $K_n \times X^n$. ببساطة تخيلوا أن كل واحدة من أوراق أشجارنا المترية تحمل عنصراً من X ، معتبراً أنه كرز. هذه شجرة كرز: شجرة مترية على أوراقها كرز.

يمكن وصف فضاء التصنيف $B(X)$ باستخدام هذا المصطلح. لنفترض أن شجرة كرز T تحتوي على حافة e وهي نمت بالكامل بطول 1. عندما تقطع على طول e ، تتحلل الشجرة T إلى شجرتين متريتين. لنشر T_1 إلى الجزء الذي يتكون من أحفاد نقطة نهاية e : هذه شجرة كرز بـ $n \geq k$ ورقة. الشجرة الأخرى، T_0 ، التي تحتوي على جذر T ، ليست شجرة كرز تماماً لأن الورقة التي تم إنشاؤها حديثاً، في نقطة بداية e ، غير مزودة بكرز. يمكننا الآن تقويم m_k على شجرة الكرز T_1 وإيداع النتيجة ككرز جديدة على ورقة T_0 التي كانت تنتظر كرزها. تنتج عن هذا شجرة كرز جديدة. بحكم التعريف، فإن فضاء التصنيف $B(X)$ هو حاصل قسمة فضاء أشجار الكرز من خلال عملية القطع هذه للحواف النامية بالكامل وتطبيق m_k كما هو موضح.

¹³³J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.



لن نبين أن لفضاء الحلقات $B(X)$ نوعٌ ترادف X . لا بد لنا من الاعتراف أن المراجع التي قدمناها تحتوي على إثباتات ولكنها بالتأكيد ليست سهلة القراءة. © المرجع الأكثر قراءة والذي أعرفه هو ¹³⁴.

¹³⁴E. Hoefel, M. Livernet, and J. Stasheff. [A \$\infty\$ -actions and recognition of relative loop spaces](#). 2013.





شجرة مُضفَّرَة،
هل توضّح عَمولة؟

العمولات

اسمحو لي أن أبدأ هذا الفصل باقتباس من بيتر مبي¹³⁵.

The name 'operad' is a word that I coined myself, spending a week thinking about nothing else. Besides having a nice ring to it, the name is meant to bring to mind both operations and monads. [...] What I did not foresee was just how flexible the notion would be, how many essentially different mathematical contexts there are in which it would play a natural role, how many philosophically different ways it could be exploited.

اسم "عمولة" (Operad) هي الكلمة التي صغتها بنفسي، وأنا أقضي الأسبوع لا أفكر في أي شيء آخر. بالإضافة إلى وجود نبرة جميلة في هذا الاسم، فإن القصد منه هو أن يجلب إلى الذهن كلا من كلمتي عمليات وموناد (عملية بعامل واحد) [...]. ما لم أتوقعه هو مدى المرونة التي سيكون عليها المفهوم، كم من السياقات الرياضية الأساسية المختلفة التي من شأنها أن يلعب فيها دورًا طبيعيًا، كم طريقة مختلفة فلسفياً يمكن استغلالها.

وفقاً لويكيبيديا، هناك سبب آخر لهذا الاسم هو أن والدة مبي كانت مغنية أوبرا. تقريباً مثل كل المفاهيم التي التقينا بها حتى الآن، كانت العمولات "موجودة" قبل ولادتها بكثير¹³⁶، أو بقول أفضل، قبل أن يتم تعميمها. يهدف تعريف مبي إلى تغليف العديد من أنواع العمليات، يذكرنا معظمها بتطعيم الأشجار الذي واجهنا بالفعل.

135 J.P. May. Operads, algebras and modules. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences* (Hartford, CT/Luminy, 1995), volume 202 of *Contemp. Math.*, pages 15-31. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

الزمرة هي أكثر بكثير من مجرد مجموعة مزودة بتطبيق ضرب يحقق بعض البديهيات. توجد الزمر فقط من خلال تمثيلاتها باعتبارها أوطوتشاكلات "لشيء ما". بالطريقة نفسها، توجد العمولات فقط من خلال تمثيلاتها ولن نقضي الكثير من الوقت في التعريفات المجردة.

136 J. Stasheff. The pre- history of operads. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences* (Hartford, CT/Luminy, 1995), volume 202 of *Contemp. Math.*, pages 9-14. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

تتكون العمولات من

- مجموعات \mathcal{O}_n من أجل $0 \leq n$ ينظر إليها كعمليات n -اية.
- عنصر 1 في \mathcal{O}_1 يسمى الوحدة،
- من أجل كل n, k_1, \dots, k_n ، عملية عمولة، أي تطبيق

$$\mathcal{O}_n \times (\mathcal{O}_{k_1} \times \mathcal{O}_{k_2} \times \dots \times \mathcal{O}_{k_n}) \rightarrow \mathcal{O}_{k_1+k_2+\dots+k_n}$$

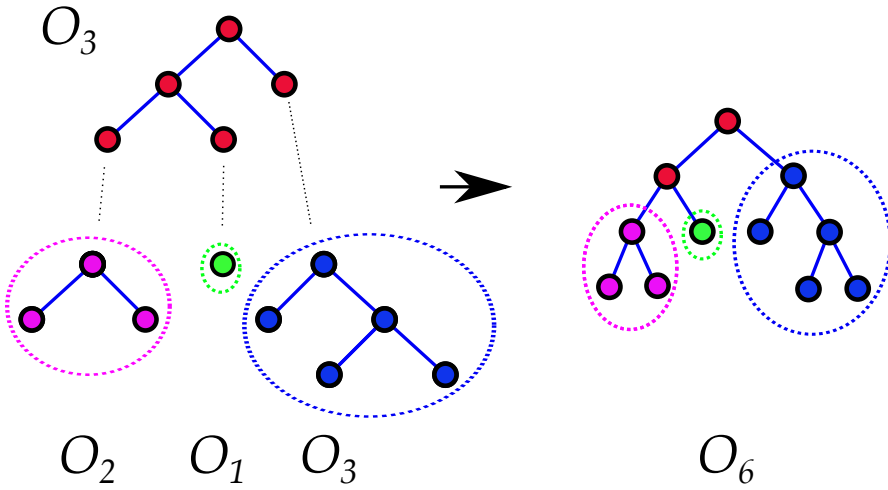
يحقق بعض البديهيات.

في محاضرة عن تدريس الرياضيات، ينتقد ب. أرنولد بشدة المقاربة البديهية لنظرية الزمر، كما هي تدرس عادة في فرنسا. وأنا أتفق معه تماماً.

لا أريد تدوين الصيغ التي تعبر عن هذه البديهيّات لأنني شخصياً لن أتمكن من قراءة الصيغ التي كتبتها. أفضل أولاً إعطاء مثال (ربما يكون القارئ قد خمنه بالفعل) قبل وصف البديهيّات بالكلمات.

يتم إعطاء المثال من خلال الأشجار الثنائية المستوية المجذرة. نرمز بـ O_n إلى مجموعة الأشجار الثنائية المستوية المجذرة ذات n ورقة، ولتكن 1 الشجرة بورقة واحدة والتي تكون في نفس الوقت الجذر. تعرّف عملية التطعيم التي استخدمناها عدة مرات المثال الأسهل على العمولات.

علمنا علماء الحاسوب أن بعض التقابلات القابلة للحساب $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ يسهل تقويمها ولها تقابلات عكسية معقدة للغاية. عادة ما تكون كتابة الصيغة سهلة وقد يكون فهمها معقداً بشكل رهيب.



الآن، ما هي البديهيّات لعمولة عامة؟ تطعيم 1 على شجرة ما لا يغير الشجرة. إذا كنا قد قمنا بتطعيم B ما على شجرة A ما، ثم تطعيم C على النتيجة، كان يمكننا أيضاً تطعيم C على B وتطعيم النتيجة على A . بديهيّات العمولة ليست أكثر من ذلك، تُستبدل بكلمة التطعيم عملية العمولة. شرط وحدة ما ونوع من التجميعية.

بالطبع، يمكننا أيضاً تطعيم الأشجار المستوية المجذرة التي ليست بالضرورة ثنائية. على سبيل المثال، يمكننا استخدام الأشجار المشدّبة، أي الأشجار المستوية المجذرة بحيث يكون لكل عقدة داخلية طفلان على الأقل. يُنتج هذا عمولة هيباركوس-شرودر-تاماري-سطاشيف.

للحصول على مقدمة من صفحتين عن العمولات، انظروا¹³⁷. على عرض من 27 صفحة، انظروا¹³⁸. للحصول على أحدث كتاب من 634 صفحة حول نفس الموضوع، انظروا¹³⁹. هنا مثال آخر لعمولة ساذجة. نختار مجموعة E ونعرف O_n على أنها مجموعة التطبيقات $E^n \rightarrow E$. في هذا المثال، 1 هو الوحدة، ويتم تقديم عمليات العمولة ببساطة بواسطة الاستبدال. إذا كان لديكم تطبيق $f: E^n \rightarrow E$ و n تطبيقاً $f_i: E^{k_i} \rightarrow E$ ، ما عليكم سوى استبدال f_i بـ x_i في $f(x_1, \dots, x_n)$ للحصول على تطبيق $E^{k_1+\dots+k_n} \rightarrow E$. يحقق هذا البدييات التي لم نكتبها... هذه العمولة يتم الإشارة إليها بـ $End(E)$.

جبرٌ (بنية جبر) على عمولة O (وتسمى أيضاً تمثيلاً) هو مجموعة E وتطبيق عملية عمولة من O في $End(E)$. بتعبير آخر، كل عنصر من عناصر O_n يتم تجسيده كعملية n -اية $E^n \rightarrow E$ بطريقة ملائمة.

يمكننا العمل في العديد من الفئات المختلفة. بدلا من المجموعات، يمكننا استخدام الفضاءات الطوبولوجية، أنواع الترادف، الفضاءات الشعاعية وما إلى ذلك. الآن نصف أمثلة للعمولات أكثر إثارة للاهتمام. أمثلة أكثر تأتي في الفصول القادمة.

137 J. Stasheff. [What is ... an operad?](#) *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(6):630–631, 2004.

138 F. Chapoton. [Operads and algebraic combinatorics of trees](#), journal = *Sém. Lothar. Combin.* 58:Art. B58c, 27, 2007/08.

139 J.-L. Loday and B. Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.

التبديلات

نذكر من بداية هذا الكتاب أننا درسنا بعض الأسئلة التوافقية التي تتعلق بالتعرف على الأنماط. هذا يتناسب بشكل جيد مع العمولة الآتية. O_n هي مجموعة التبديلات لـ $\{1, \dots, n\}$. كتبنا "مجموعة" ولم نكتب "زمرة" لأننا لن نركب هذه التبديلات. بدلاً من ذلك، نفكر في التبديلة على أنها ترتيب كلي على $\{1, \dots, n\}$. لتكن الترتيب الكلية $\sigma_1, \sigma, \dots, \sigma_n$ على $\{1, \dots, n\}$ و $\{1, \dots, k_1\}, \dots, \{1, \dots, k_n\}$. نكتب $\{1, \dots, k_1 + \dots + k_n\}$ كاتحاد منفصل لـ n من المجالات المتتابة من الأحجام k_1, k_2, \dots, k_n . نرتب هذه المجالات وفقاً لـ σ وداخل المجال الـ i ، نرتب العناصر وفقاً للترتيب σ_i . ينتج عن هذا ترتيب كلي طبيعي في $\{1, \dots, k_1 + \dots + k_n\}$. من الواضح أن عمليات التطعيم هذه على الترتيب تلبي بدييات العمولة.

في هذه الحالة، نقول إن العمولة متناظرة. في كثير من الأحيان، يتم حذف صفة "تناظرية".
أدعو القارئ إلى تحديد أيّ من الأمثلة السابقة تناظري.

جدوا بأنفسكم التعريف الصحيح!

مكعبات صغيرة وسطاشيف مرة أخرى

نذكر بتفسير تجميعيات السطوح K_n على أنها فضاءات من الأشجار المترية، حيث يكون لكل حافة داخلية طول في $[0,1]$. تطعم هذه الأشجار ينتج تطبيقات

$$K_n \times (K_{k_1} \times K_{k_2} \times \dots \times K_{k_n}) \rightarrow K_{k_1 + \dots + k_n}.$$

بعبارة أخرى، فإن الطبيعة الحقيقية لمتتالية متعددات الرؤوس K_n هي تلك الخاصة بعمولة: عمولة سطاشبف. إنها عمولة طوبولوجية حيث يُنظر إلى O_n الآن على أنه فضاء طوبولوجي.

جبراً على K_n هو بالتعريف عائلة من التطبيقات من $K_n \times X^n$ في X والذي يعرف هوميوتشاكل عمولة. بوضوح، تم إعداد جميع التعريفات بطريقة يكون فيها شرط عمولة الهوميوتشاكل متطابقاً مع تعريف الـ A_∞ -فضاء. يمكن إذن إعادة صياغة مبرهنة سطاشبف.

مبرهنة. يكافئ H -فضاء $X \rightarrow X \times X$: m_2 ترادفياً فضاء حلقات إذا فقط إذا امتد كجبر على عمولة سطاشبف.

حول أيضا بوردمان وپوت هذا الادعاء بطريقة أخرى وأدخلوا عمولات المكعبات الصغيرة. نختار بعداً ما $1 \leq d$ ونعرف عمولة طوبولوجية Cub_d بالطريقة الآتية.

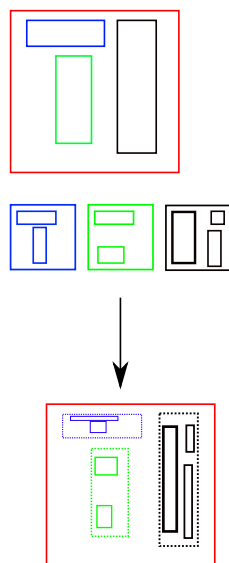
- $Cub_d(n)$ هو فضاء الـ n -قوائم (c_1, c_2, \dots, c_n) من التغطيسات $[0,1]^d \rightarrow [0,1]^d$ بحيث تكون دواخل الصور منفصلة. يجب أن يكون الـ c_i تآلفياً وبأكثر دقة، من الشكل

$$c_i(x_1, \dots, x_d) = (\alpha_{i1}x_1 + \beta_{i1}, \dots, \alpha_{id}x_d + \beta_{id}) \quad (\alpha_{ij} > 0).$$

- عمليات العمولة

$$Cub_d(n) \times (Cub_d(k_1) \times \dots \times Cub_d(k_n)) \rightarrow Cub_d(k_1 + \dots + k_n)$$

"واضحة". ببساطة أدخلوا المكعبات كما في الشكل.



إذا كان (Y, \star) فضاء طوبولوجيا (في الواقع، كالعادة، CW - مركَّبًا) فإن d -فضاء الحلقات $\Omega^d(Y, \star)$ هو فضاء التطبيقات المستمرة (المنقطة) من الـ d -كرة إلى Y . يمكننا أيضًا تعريف $\Omega^d(Y, \star)$ على أنه فضاء التطبيقات $Y \rightarrow [0, 1]^d$ التي ترسل حدّ المكعب إلى نقطة الأساس.

يُظهر d -فضاء الحلقات لـ Y بشكل طبيعي كجبر فوق عمولة المكعبات الصغيرة. عمليات العمولة

$$\text{Cub}_d(n) \times \Omega^d(Y, \star)^n \rightarrow \Omega^d(Y, \star)$$

"واضحة". نعتبر n مكعبًا صغيرًا (c_1, c_2, \dots, c_n) و n عنصرًا $Y \rightarrow [0, 1]^d$: γ_i من $\Omega^d(Y, \star)$ ، نعرّف تطبيقًا من $[0, 1]^d$ إلى Y . داخل صورة c_i ، نستخدم مركّب c_i و γ_i وخارجهما نستخدم الدالة الثابتة التي ترسل كل شيء إلى نقطة الأساس.

في مراجعةٍ لكتاب ماركل وشنيدر وسطاشيف حول العمولات ¹⁴⁰، يشرح جون بايز أحد دوافع العمولات.

معظم منطري الترادف سوف يبيعون بكل سرور أرواحهم لكي يتمكنوا من حساب زمر الترادف لفضاء كفي.

بالفعل، قام كل من بوردمان، فوت ¹⁴¹ ومبني ¹⁴² بتعميم مبرهنة التعرّف لسطاشيف.

مبرهنة. إذا كان فضاء مترابط X جبراً على عمولة المكعبات الصغيرة Cub_d ، فإنه يكافئ ترادفياً d -فضاء الحلقات لـ $\Omega^d(Y)$ لفضاء ما Y .

المزيد من العمولات

أعتقد أن قارئ الشاب قد فهم أن العمولات تَحُدُّث في كل مكان تقريبًا في الرياضيات، على مستوى تأسيسي. ربما تجعل هذه العمومية الكبيرة النظرية مجردة زيادة شيئًا ما على اللزوم؟

يشكو بعض الرياضياتيين من أن الزمرة الحرة هي أيضًا مجردة بما يكفي لتكون زمرة وأنها مجرد حفنة من الكلمات!

¹⁴⁰M. Markl, S. Shnider, and J. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

¹⁴¹J. M. Boardman and R. M. Vogt. [Homotopy-everything H-spaces](#). *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:1117–1122, 1968.

¹⁴²J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer Verlag, Berlin-New York, 1972. *Lectures Notes in Mathematics*, Vol. 271

لإنهاء هذا الفصل المفاهيمي، اسمحوا لي أن أقدم المزيد من الأمثلة. ندخل علاقة في برنامج رياضيائي، على سبيل المثال، العلاقة الآتية في ماثماتيكا.

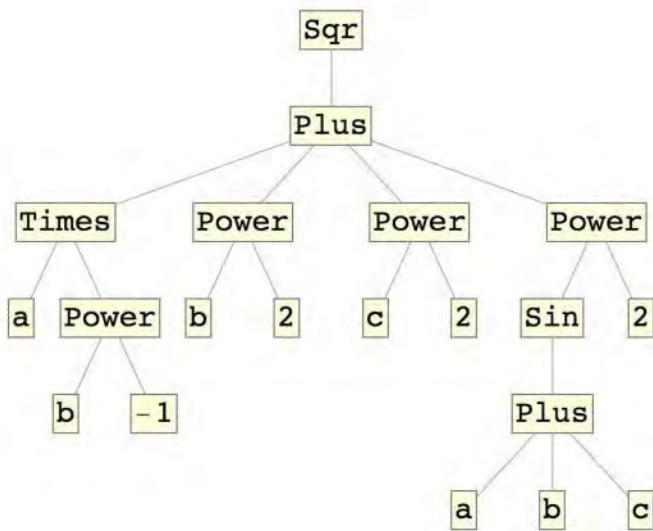
$$\text{Sqrt}[\text{Sin}[a + b + c]^2 + b^2 + c^2 + a/b]$$

$$\sqrt{\frac{a}{b} + b^2 + c^2 + \text{Sin}[a + b + c]^2}$$

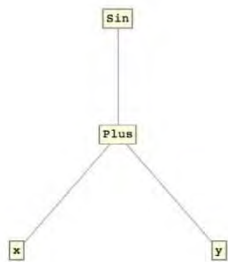
إذا كنتم تريدون أن تعرفوا كيف "يفهم" حاسوبكم هذه العلاقة، فما عليكم سوى كتابة ما يأتي.

```
TreeForm[Sqrt[Sin[a + b + c]^2 + b^2 + c^2 + a/b]]
```

تصلون على شجرة.



يتم وسم العقد بواسطة عوامل التشغيل، والتي يمكن أن تكون n -اية من أجل كل n . الأوراق هي "ذرات". لذلك فإن لغة برنامج مثل ماثماتيكا هي في الواقع عمولة. لاحظوا مع ذلك أن هذه العمولة ليست حرة. على سبيل المثال، الشكل الشجري لـ $\sin(x + y)$ هو الشجرة الموجودة في الهامش.



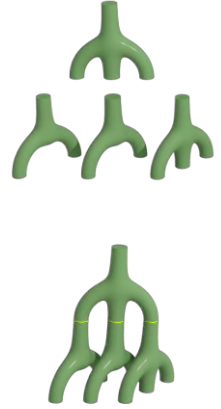
إذا استبدلت a بـ x و $\pi - a$ بـ y وإذا طلبت مرة أخرى الشجرة المقابلة:

TreeForm[Sin[x + y] /. x -> a /. y -> Pi - a]

أحصل على الشجرة النافهة مع عقدة واحدة فقط موسومة بـ 0. "تعرف" ماثماتيكا أن $\sin(\pi) = 0$ بحيث تنهار الشجرة. بعبارة أخرى، يتم تعريف عمولة ماثماتيكا من خلال مولدات وعلاقات والتي هي مُبَيَّنَة أي مبنية داخل الجهاز. يُسَمَّح للمستخدم بإضافة القواعد المحلية والعمل في حاصل القسمة المقابل للعمولة.

توفر سطوح ريمان مصدرًا جيدًا آخر للعمولات. افترضوا أن لديكم سطحي ريمان Σ_1 و Σ_2 ذوي حدّ. لاحظوا أن أي سطح لريمان موجّه بشكل قانوني وأن هذا يحدث توجيهًا على الحدّ. افترضوا أن لديكم تفاكلًا عاكسًا للاتجاه f بين دائرة S_1 محتواة في الحد $\partial\Sigma_1$ ودائرة S_2 محتواة في $\partial\Sigma_2$. ألصقوا السطحين على طول f وستنتجون سطحًا جديدًا (موجّهًا!).

يتضح أن هذا السطح الجديد هو سطح لريمان بشكل قانوني، أي أنه مُجهَّز ببنية منوعة هولومتشاكلية من البعد 1. من السهل معرفة هذا إذا كان f تحليليًا حقيقيًا لأنه في هذه الحالة يمكن أن يمتدّ إلى تفاكل هولومتشاكل بين الحلقات الصغيرة، والتي يمكن استخدامها لتعريف بنية هولومتشاكلية على السطح الملصق. يمكنكم أيضًا لصق سطوح ريمان على طول تفاكلات غير تحليلية، لكن هذا ليس مهمًا في سياقنا.



لصق سطوح ريمان.

استخدام عملية اللصق هذه، تعرّف عمولة. عنصر من O_n هو صنف إيزوتشاكل لسطح لريمان متراص مع $(n+1)$ مركبة حدودية موسومة، إحداها تُدعى داخلة وال n الأخرى خارجة. علاوة على ذلك، كل مركبة حدودية مجهزة بتفاكل مع الدائرة. يعطي لصق السطوح على طول حدودها، كما هو الحال في لعبة اللبّاقو، مثالاً على عمولة.

يمكن تطبيق العديد من الأدوال (من دالّ) على العمولات من أجل إنتاج المزيد من العمولات. على سبيل المثال، انظروا إلى العمولة $Cub_2(n)$ للمربعات الصغيرة. يحتوي $Cub_2(n)$ على نوع ترادف فضاء n نقطة متميزة في مربع. تسمى زمرتها الأساسية PB_n زمرة الضفائر الصّرفة.

يتكون عنصر من PB_n من عدد n من المربعات الصغيرة المرقمة 1، 2، ...، n في مربع (أو قرص) والتي تتحرك على طول n حلقة دون تقاطع بعضها مع الأخرى. في نهاية الحلقات، عادت المربعات إلى مواضعها الأولية وهذه الخاصية الأخيرة هي المقصودة من كلمة صِرفة.

باستخدام الزمر الأساسية، نحصل على التطبيقات

$$PB_n \times (PB_{k_1} \times \dots \times PB_{k_n}) \rightarrow PB_{k_1 + \dots + k_n}$$

ونحصل على زمرة عمولات. هذا ليس معقدا جدا. يؤدي عنصر من PB_n إلى ظهور عدد n من الأنابيب في الأسطوانة $[0,1] \times [0,1]^2$. تتكون بنية العمولة من إدخال الأنابيب في الأنابيب.

لا يوجد سبب لنقتصر على البعد 2 وعلى الزمر الأساسية. ليكن X فضاء طوبولوجيا و n عددا صحيحا، ما يسمى بفضاء التشكل $X^{[n]}$ يُعرّف بأنه فضاء الـ n -قوائم من النقط المتمايزة في X . إذا كان X قرصا ثنائي البعد، يتضح أن الغلاف الكوني لهذا الفضاء قابل للتقليص بحيث تكون زمرة الأساسية، من وجهة نظر الترادف، هي فقط المثيرة للاهتمام: هذه هي زمرة الصفائر الصرفة التي قدمناها للتو. ومع ذلك، إذا كان X جلة ذات بعد عال، فإن $X^{[n]}$ مترابط ببساطة ونشعر بالإغراء لوصف طوبولوجياها. على سبيل المثال، إذا كان $X = \mathbf{R}^3$ و $n = 2$ ، فإن الإجابة سهلة: يتم تحديد نقطتين متمايزتين x, y تمامًا في الفضاء من خلال منتصفيهما $(x+y)/2$ والشعاع غير المنعدم $x-y$. لذلك فإن لـ $(\mathbf{R}^3)^{[2]}$ نفس نوع ترادف الـ 2-كرة. الوضع أكثر تعقيدًا بالنسبة إلى $n = 3$: الأجسام الثلاثة في الفضاء ...

النهج الجيد هو دراسة ترادف هذه الفضاءات أو تماثلها المقابل ليس فرادى، من أجل كل n ، ولكن بشكل إجمالي: التماثل المقابل لعمولة المكعب الصغير.

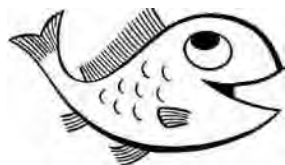
نحث القارئ على قراءة الورقة التي يسهل فهمها جيدا¹⁴³ والتي يمكن أن تكون بمثابة بوابة دخول لنظرية العمولات. سوف تتعلمون، على سبيل المثال، أن "تماثل عمولة الـ d -مكعبات الصغيرة هو عمولة بُوَاش (Poisson) من الدرجة d (مهما كان معنى ذلك).

يتطلب تعريف الزمرة الأساسية نقطة أساس. لذلك، لتعريف PB_n ، يجب على المرء أن يختار مجموعة من n - إيات النقط المتمايزة في المربع، "كنقطة بداية" لصفائنا. نقتح أن يجد القارئ بنفسه هذه النقط الأساسية من أجل تحديد تطبيقات العمولات بشكل صحيح.

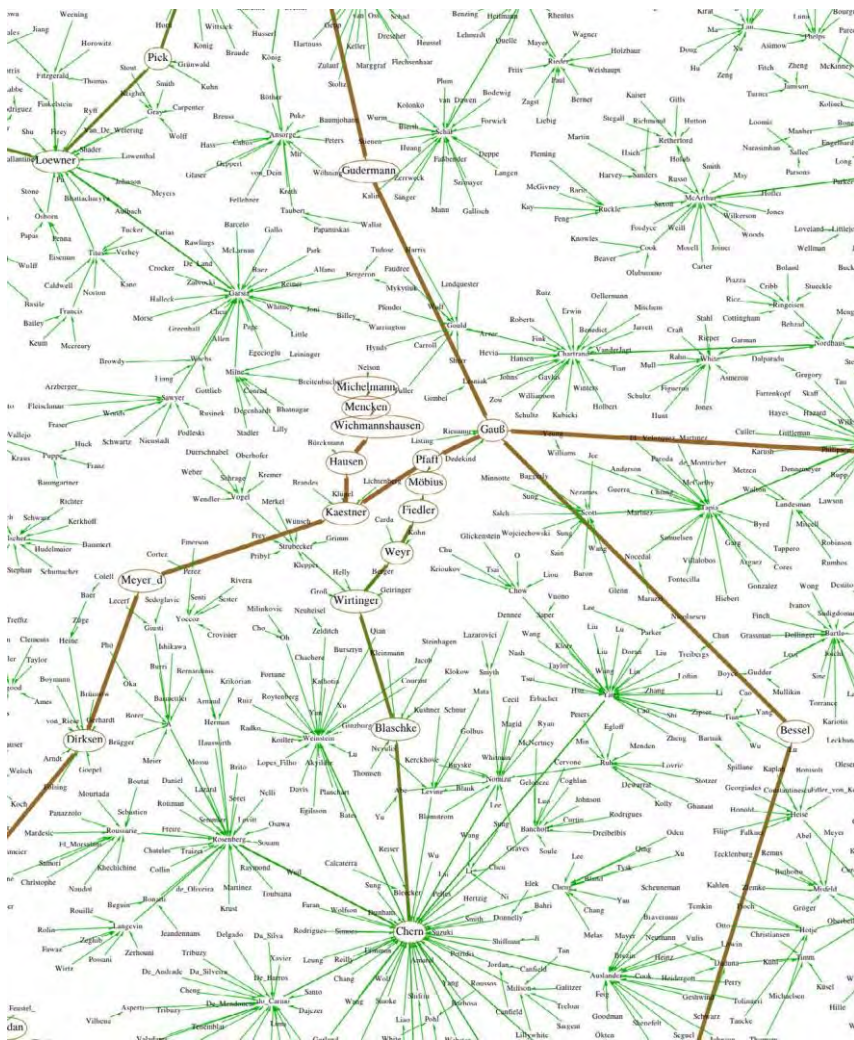


● ثلاثة مربعات صغيرة تتبع حلقة.

¹⁴³ D. P. Sinha. The (non-equivariant) homology of the little disks operad. In OPERADS 2009, volume 26 of Sémin. Congr., pages 253–279. Soc. Math. France, Paris, 2013.



● عمولة بُوَاش.



هذا منظر محلي، متركز في فاوس، لـ "شجرة رياضياتيين" حيث يربط المرء بين رياضياتيين إذا كان أحدهما مستشاراً للآخر.

العمولات المفردة

نعود إلى مناقشتنا الأولية حول الموضوع النسبي لبيانات عائلة من كثيرات الحدود.

عمولة كثيرات الحدود الحقيقية

لتكن (P_1, P_2, \dots, P_n) و (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) - قائمتين من كثيرات الحدود المتمايزة في $\mathbf{R}[x]$ تنعدم في المبدأ.

نقول إنها متكافئة طوبولوجيًا إذا كانت الـ n - قائمتان من الأعداد الحقيقية $(P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x))$ و $(Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x))$ ، من أجل القيم الصغيرة غير المنعدمة لـ x ، مرتبتين بنفس الطريقة. لتكن $Pol_{\mathbf{R}}(n)$ المجموعة (المنتهية) لأصناف التكافؤ لمثل هذه الـ n - قوائم. هيا بنا ننشئ بنية عمولة بسيطة للغاية

على $Pol_{\mathbf{R}}(n)$.

نفترض أن لدينا

• (P_1, P_2, \dots, P_n) (ممثل لـ) عنصر من $Pol_{\mathbf{R}}(n)$ ،

• من أجل كل $i \in \{1, \dots, n\}$ ، عنصرًا من $Pol_{\mathbf{R}}(k_i)$ معطى بواسطة (صنف) $(P_{i,1}, \dots, P_{i,k_i})$.

نريد تطعيم الـ $P_{i,j}$ على الـ P_i . نعتبر فقط كثيرات الحدود الـ $k_1 + \dots + k_n$

$$P_i(x) + x^{2N} P_{i,j}(x) \quad (1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq k_i)$$

وفق الترتيب المعجمي لـ (i, j) ، حيث N عدد صحيح كبير إلى حد ما.

قد تكون بعض التفسيرات مفيدة. دور x^{2N} هو للتأكد من أن الحدود التي تمت إضافتها

إلى P_i هي أصغر بكثير من الفروق $P_i - P_j$ ($i \neq j$).



جذور أو فروع؟

(Rio Preguiças, Brazil).



جذور وفروع (هونش كونش).

لضمان هذه الخاصية، يكفي اختيار $2N$ أكبر من كل الـ $v(P_i - P_j)$ ($i \neq j$).
 بتحديد i ، تكون بيانات كثيرات الحدود $P_i(x) + x^{2N} P_{i,j}(x)$ الـ k_i قريبة جداً من بيان P_i . يستلزم الأس الزوجي $2N$ أنه، مع تحديد i ، يكون الترتيب بين الـ $P_i(x) + x^{2N} P_{i,j}(x)$ هو نفس الترتيب بين الـ $P_{i,j}(x)$. طوبولوجياً، تم تحويل بيانات الـ P_i إلى بعض الأوتاد الرقيقة التي تم فيها إدراج الـ $P_{i,j}(x)$.
 يجب أن يكون واضحاً أن هذا معرف جيداً ويعطي بنية عمولة على الـ $Pol_{\mathbf{R}}(n)$. هذه عمولة متناظرة لأنه يمكن إجراء تبديلات على كثيرات الحدود (P_1, P_2, \dots, P_n) .
 يجب أن يكون واضحاً بنفس القدر، من الفصول الأولى من هذا الكتاب، أن هذه العمولة قريبة جداً من عمولة التبديلات القابلة للفصل (غير المتناظرة).

عمولة كثيرات الحدود المركبة

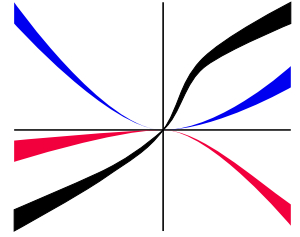
هيا بنا نلعب لعبة ماثلة مع كثيرات الحدود المركبة. إذا كانت (P_1, P_2, \dots, P_n) ، n - قائمة من كثيرات الحدود المتمايزة في $\mathbf{C}[x]$ ، تنعدم في المبدأ، فإننا ننظر إلى الحلقات الآتية في \mathbf{C} (من أجل $n \geq i \geq 1$):

$$\gamma_i : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} ; \theta \mapsto P_i(\varepsilon \exp(\sqrt{-1}\theta)).$$

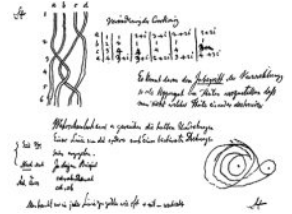
نختار ε صغيراً جداً. إذن من أجل كل θ تكون النقط $\gamma_1(\theta)$ ، $\gamma_2(\theta)$ ، ... متمايزة. هذا يعرّف حلقة في فضاء الـ n - قوائم من النقط المتمايزة في المستوي، أي عنصراً من زمرة الضفائر الصّرفة PB_n . لكي نكون دقيقين، يجب أن نتحدث عن صنف المرافقة لضفيرة صرفة، نظرًا إلى أن النقط الابتدائية $\gamma_i(0)$ يمكن أن تكون في أي مكان ويتطلب تعريف زمرة الضفائر الصرفة نقطة أساسية. صنف المرافقة هذا مستقل عن اختيار ε الصغير.

نقول إن (P_1, P_2, \dots, P_n) و (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) متكافئتان طوبولوجياً إذا كانت الضفائر المقابلة مترافقة في PB_n . نرمز بـ $Pol_{\mathbf{C}}(n)$ إلى مجموعة أصناف التكافؤ. ندكر أن زمر الضفائر الصرفة تعرّف أحد أمثلتنا للعمولات، حيث تتكون العمليات من إدخال الضفائر في الجوارات الأنبوية من خيوط ضفيرة معينة. يوحى هذا إلى أن $Pol_{\mathbf{C}}(n)$ يمكن أن تكون عمولة جزئية من PB_n . هذه بالفعل هي الحالة التي أعرضها الآن.

ندكر أن $v(P)$ يشير إلى تقويم P .



هل يمكنكم أن تجدوا علاقة واضحة بين العمولات؟



مخطوط غير منشور لفاوس يبدأ فيه الدراسة الطوبولوجية للضفائر.

هل هذا مكافئ لوجود هوميوتمشاكل محلي لـ \mathbf{C}^2 في جوار المبدأ يرسل كل منحني مركب $P_i = 0$ إلى المنحني المركب $Q_i = 0$ ؟

نحن نعلم أن $\exp(-v(P_i - P_j))$ تعرف مسافة فوق مترية على $\{P_1, \dots, P_n\}$ التي يمكن ترميزها بواسطة شجرة مجذرة. الجذر يتوافق مع المجموعة الكاملة $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. أطفاله هم أصناف التكافؤ للعلاقة $v(P_i - P_j) \geq 2$. إلخ. حتى نصل إلى المجموعات الأحادية $\{P_i\}$ وهي الأوراق الموسومة بـ 1, 2, ..., n. هناك نوعان من الاختلافات الرئيسية في حالة كثيرات الحدود الحقيقية.

- لا توجد بنية ترتيب طبيعية على العقد، لذلك فإن شجرتنا ليست مستوية (على أية حال، معظم الأشجار في الطبيعة ليست مستوية).

- في الحالة الحقيقية، قمنا ببعض التقليم على الشجرة. نحن فعلنا ذلك لأنه على سبيل المثال، الثنائيات $(0, x)$ و $(0, x^3)$ متكافئتان طوبولوجيًا على الأعداد الحقيقية: x و x^3 لها نفس الإشارة. لكن هذا لم يعد صحيحًا بعد الآن في المجال المركب: الضفيرة المرتبطة بـ $(0, x^3)$ تدور 3 مرات على عكس $(0, x)$ التي تدور مرة واحدة فقط عندما يصف x حد قرص صغير متركز في 0.

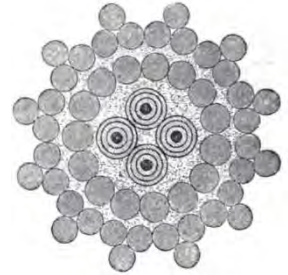
تعطي النتيجة (البسيطة) الآتية وصفًا دقيقًا لـ $Pol_C(n)$.

مبرهنة. تكون n -قائمتان من كثيرات الحدود المركبة (P_1, P_2, \dots, P_n) و (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) متكافئتين طوبولوجيًا إذا وفقط إذا عزفتنا نفس الشجرة المجذرة، أو بطريقة مكافئة، إذا كان $v(P_i - P_j) = v(Q_i - Q_j)$ من أجل كل i, j .

لنظهر أولاً أن الشجرة تحدد الضفيرة. نبدأ من الجذر وننزل p حافة حتى نصل إلى العقدة الأولى ذات $2 \leq q$ طفلًا. هذا يعني أن كثيرات حدود تيتلر الـ p -اية لجميع الـ P_i متساوية وأن هناك q كثير حدود تيتلر $(p+1)$ -ايا مختلفًا. إذا كان t_p يشير إلى كثير حدود تيتلر الـ p -اي هذا، فإننا نطرح t_p من جميع الـ P_i دون تغيير الضفيرة المقابلة. لذلك، فإن (P_1, P_2, \dots, P_n) تأتي في q مجموعة، حيث نضع في نفس المجموعة اثنين من الـ P_i بنفس كثير حدود تيتلر من الترتيب $(p+1)$ ، من الشكل $a_\nu x^{p+1}$ من أجل $\nu = 1, \dots, \nu = q$ ، حيث جميع الـ a_ν أعداد مركبة متميزة. عندما يصف x دائرة شعاعها ε ، تصف هذه الـ q نقطة $a_\nu x^{p+1}$ دوائر صغيرة تحت نفس الدوران الصلب وتدور بمقدار $p+1$ لفة كاملة. (صنف المرافقة لـ) هذه الضفيرة في PB_q تتعلق فقط بـ q و p وليس بموضع الـ a_ν : لدينا q نقطة والتي تدور ببساطة في تكتل وتصف $p+1$ دورة كاملة.



شجرة غير مستوية في
the Jardim Botânico, Rio de Janeiro.



كابيل تلغراف بحري بريطاني- هولندي
من عام 1858 ومقطعه العرضي. •

حول كل $a_p \varepsilon^{p+1} \exp(\sqrt{-1}(p+1)\theta)$ نرسم قرصًا صغيرًا يحتوي على كل ال
 $P_i(\varepsilon \exp(\sqrt{-1}\theta))$ مع كثيرات حدود تينلر ال $(p+1)$ - اية $a_p x^{p+1}$. نواصل
 العملية داخل كلٍّ من هذه الأقراص، مع تقسيم كل مجموعة مرة أخرى وفق كثيرات
 حدود تينلر من الترتيب الأعلى.

الاستنتاج هو أن الضفيرة مثل النظام الشمسي تتحرك على طول أفلاك التدوير أو
 التداوير، على غرار هيبباركوس. تتكون من مجموعة من q قرصًا صغيرًا تدور بشكل صلب
 بـ $p+1$ دورة. داخل كل قرص، الصورة متشابهة. وهكذا، حتى نصل إلى ال $\gamma_i(\theta)$.
 يتم إعطاء كل هذه الأعداد p ، q ، بالنسبة إلى جميع هذه الأقراص، من خلال
 توافقيات الشجرة، بحيث يتم تحديد الضفيرة (دائمًا إلى مرافقة مخرية) فعلا بواسطة
 الشجرة، بطريقة ملموسة للغاية.

أشرح الآن كيفية إنشاء شجرة من الضفيرة.

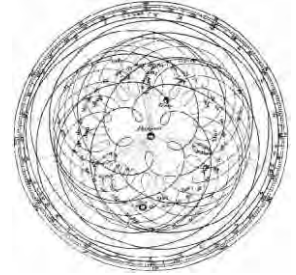
نختار عددين صحيحين i, j ، $1 \leq i < j \leq n$. ضفيرة صرقة في PB_n هي صنف
 ترادف حلقة من n نقطة متميزة (x_1, \dots, x_n) في المستوي. نسي كل النقط باستثناء
 x_i و x_j : يعرف ذلك تشاكلا من PB_n في PB_2 ، من أجل كل i, j . بنية
 PB_2 بسيطة جدا: فهي إيزومتشاكله مع \mathbf{Z} . عندما تتحرك نقطتان مختلفتان وتعودان
 إلى موقعيهما الأصليين، يكون الشعاع $x_i - x_j$ حلقة في المستوي المثقوب وله مؤشر
 بالنسبة إلى 0. هذا هو الإيزوتشاكل بين PB_2 و \mathbf{Z} . يعرف هذا $n(n-1)/2$
 تشاكلا $ik_{i,j}: PB_n \rightarrow \mathbf{Z}$ والذي يعبر ببساطة عن عدد دورات $x_i - x_j$. إن
 لضفيرتين مترافقتين نفس الصورة بواسطة $ik_{i,j}$.

لنعد إلى ضفيرتنا المعرفة بال γ_i . عندما نُقوم $ik_{i,j}$ على هذه الضفيرة، فإننا نحسب عدد
 دورات $P_i(x) - P_j(x)$ عندما يدور x حول حد قرص صغير متركز في المبدأ. من
 الواضح أن هذا هو التقويم $v(P_i - P_j)$. ومن ثم، يمكن قراءة التقويمات
 $v(P_i - P_j)$ من صنف الترافق للضفيرة. حسب الرغبة. □

على العكس من ذلك، نعتبر شجرة مجذرة ذات n ورقة، من السهل إنشاء n كثير
 حدود بحيث تكون الشجرة التي ترتبط بها هي الشجرة المعطاة.

أشجارنا غير مستوية. ومع ذلك، فإن الأشجار غير المستوية المجذرة يمكن تطعيمها بمجرد
 وسم أوراقها من 1 إلى n . لتكن T شجرة مجذرة ذات n ورقة، موسومة بـ 1، ...،
 n و شجرة T_1, \dots, T_n ، يمكننا تطعيم T_i على الورقة المرقمة i من T . وهذا
 يعرف عمولة الأشجار المجذرة غير المستوية الموسومة.

هو مرة أخرى!



الحركة الظاهرة للشمس وعطارد
والزهرة من الأرض.



ضفيرة صرقة بثلاثة خيوط.

لذلك، تعرّف عملية التطعيم هذه بنية عمولة طبيعية على $Pol_C(n)$. علاوة على ذلك، تُظهر المناقشة السابقة أن $Pol_C(n)$ عمولة جزئية من عمولة الضفائر الصّرفة. يمكننا وصف هذه البنية بالعلاقات، مباشرة بمفردات كثيرات الحدود. لتكن (P_1, \dots, P_n) قائمة، نعرّف

$$\delta_i = \max_{j \neq i} v(P_i - P_j).$$

يتم تعريف عمل عمولة (P_1, \dots, P_n) على عائلة $(P_{i;j})$ ، $(n \geq i \geq 1)$ و $(k_i \geq j \geq 1)$ بـ $(k_1 + \dots + k_n)$ - قائمة من كثيرات الحدود (بترتيب معجمي) $(k_i \geq j \geq 1)$ و $(n \geq i \geq 1)$ $P_i(x) + x^{\delta_i} P_{i;j}(x)$.

في الخلاصة، إن $Pol_C(n)$ إيزومتشاكله مع عمولة الأشجار المجردة غير المستوية الموسومة وتظهر كعمولة جزئية من عمولة الضفائر الصّرفة PB_n .

عمولة مرتبطة بمنحنيات مفردة معقدة

بالنسبة لاثنين من كثيرات الحدود المركبة $P_i(x)$ و $P_j(x)$ تنعدم في 0 ، يُطلق على التقويم $v(P_i - P_j)$ أيضًا اسم تعددية تقاطع المنحنيين الأملسين $y = P_i(x)$ و $y = P_j(x)$ في المبدأ. لا عجب في هذا المصطلح لأن هذا هو الحاصل بالفعل، بالمعنى المعتاد للكلمة، تعددية الجذر $0 \leq (P_j - P_i)(x) = 0$. يمكن أيضًا إعادة تفسير الفقرة السابقة بالطريقة الآتية.

المنحنيات $y - P_i(x) = 0$ ملساء في C^2 . تقطع عرضيًا كرة صغيرة S^3_ϵ في عقدة تافهة. نظرنا إلى هذه العقدة في الكرة المربعة $\epsilon = \max(|x|, |y|)$ وقد أشرنا إليها بـ γ_i . تبين أن عدد ربط γ_i و γ_j هو ليس أكثر من تعددية تقاطعها. هذا تفسير طوبولوجي للتعددية.

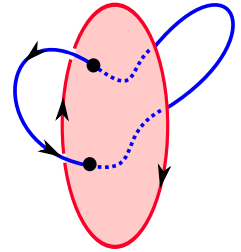
عدد الربط بين عقدتين موجهتين k_1, k_2 في S^3 مُعرّف بالطريقة الآتية. نختار سطحًا مغطسًا موجهاً يكون حده الوجه k_1 ونعدّد عدد التقاطع (الجبري) لهذا السطح مع k_2 .

هذه عمولة متناظرة لأنه يمكن تبديل كثيرات الحدود.

δ_i هو المستوى الذي يتم عنده ربط الورقة P_i بالشجرة.

تأكدوا من أن هذا التعريف يحقق تطعيم الأشجار الموسومة المرتبطة، كما هو مطلوب.

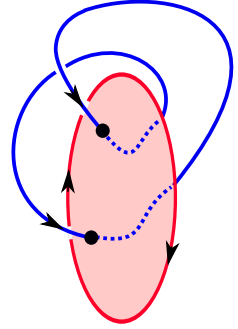
يتناول الفصلان الأخيران من هذا الكتاب عدد الربط بمزيد من التفصيل.



عدد الربط هنا هو

$$1 - 1 = 0.$$

في حالتنا البسيطة، نعتبر رابط المنحني الأملس $y - P_i(x) = 0$ في الـ 3-كرة كحد لأحد ألياف ميلنور فيها، حيث $y - P_i(x)$ حقيقي وموجب. من أجل حساب عدد الربط بين المنحنيين $y - P_i(x) = 0$ و $y - P_j(x) = 0$ في الـ 3-كرة، علينا حساب التقاطع (الجبري) للعقدة $y - P_j(x) = 0$ مع ليفة ميلنور $y - P_i(x)$ ، التي تنتمي إلى \mathbf{R}_+ . الآن $(P_j - P_i)(x) = ax^{v(P_i - P_j)} + \dots$ ، بحيث تتقاطع العقدة الثانية مع ليفة ميلنور بالضبط $v(P_i - P_j)$ مرة (يجب على المرء التحقق من أن التقاطعات موجبة). ويتربط على ذلك أن عدد الربط بين γ_i و γ_j هو بالفعل التعددية $v(P_i - P_j)$.



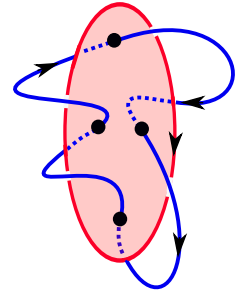
عدد الربط = 1 + 1 = 2.

اتضح أن معظم ما قيل صحيح بالنسبة إلى فروع المنحنيات غير الملساء. لنفترض أن $F(x, y) = 0$ منحني مفرد تحليلي مركب، يُفترض أنه مختصر، وله n فرعاً. نكتب $F = F_1 \dots F_n$ ، تحليل إلى عوامل غير قابلة للاختزال. كل فرع $F_i = 0$ يقبل توسيلاً لـ بويرز

$$t \mapsto (t^{m_i}, g_i(t)), t \in \mathbf{C}.$$

العدد الصحيح m_i هو ترتيب الفرع. تقاطع كل فرع مع كرة صغيرة هو عقدة k_i ، وهي ليست تافهة إذا لم يكن الفرع أملس. عدد الربط m_{ij} لـ k_i و k_j هو تعددية تقاطع الفرعين. يمكن للقارئ أن ينظر إلى هذا كتعريف، إذا كان عقله موجهًا طوبولوجيًا. إذا كان يفضل الجبر، يمكنه المضي قدمًا بالطريقة الآتية. إدراج توسيط فرع في معادلة الآخر والنظر إلى تعددية الصفر $t = 0$ لـ

$$t \mapsto F_j(t^{m_i}, g_i(t)), t \in \mathbf{C}.$$



عدد الربط = 4.

لاحظوا التشابه بين التعريفين: "التعددية الجبرية لتقاطع فرعين" و "عدد ربط" عقديتين. كلاهما يبدو غير تناظري لكنهما في الحقيقة تناظريان.

يتضح أن تعددية التقاطع m_{ij} بين الفروع لها دائماً الخصائص الهامة التي لاحظناها بالنسبة إلى المنحنيات الملساء.

- m_{ij} هو عدد صحيح موجب. هذا سهل.
- الـ $m_{ij} / m_i m_j$ تحقق نوعًا من المتباينة فوق المترية. بعبارة أخرى، أيًا كان $0 < \epsilon$ ، تكون العلاقة $m_{ij} / m_i m_j \geq \epsilon$ علاقة تكافؤ في $\{1, \dots, n\}$ كي تتمكن من إنشاء

هل يمكنكم إثبات أن الفرع يحدد عقدة تافهة إذا فقط إذا كان الفرع أملس؟

شجرة، كما كان من قبل (باستثناء أن أطوال الحواف ليست أعدادا صحيحة ولكنها أعداد ناطقة).

البند الثاني يرجع إلى بلوسكي¹⁴⁴ في عام 1985. عودوا إلى¹⁴⁵ لعرض حديث وتطبيق و¹⁴⁶ لتعميم مسهب.

يمكننا الآن بناء عمولة المنحنيات المفردة المركبة. في الواقع، كما كان من قبل، نحتاج الآن إلى وضع وسوم على فروع منحنينا $y = P_1(x), \dots, y = P_n(x)$ (حيث الـ P_i هي الآن متسلسلة بويزو $(g_i(x^{1/m_i}))$). بعبارة أخرى، نحن نعتبر مجموعة الـ n قوائم من متسلسلات بويزو المتمايزة والمشار إليها بـ $Curv_n$ ، كمنحنيات مركبة ذات فروع موسومة. نعرف الآن بنية عمولة على الـ $Curv_n$ ، تمامًا كما فعلنا مع كثيرات الحدود. نعرف الأعداد الناطقة الموجبة $\delta_1, \dots, \delta_n$ ، المرتبطة بـ (P_1, \dots, P_n) من $Curv_n$ بواسطة

$$\delta_i = \max_{j \neq i} v(P_i - P_j)$$

حيث v حاليا هو الأس الناطق الأدنى لحد غير تافه من متسلسلة بويزو. لتكن العناصر المعطاة من $Curvk_1, \dots, Curvk_n$ ، والمعرفة بمتسلسلات بويزو $P_{i,j}$ من أجل $n \geq i \geq 1$ و $k_i \geq j \geq 1$ ، يمكننا بناء عنصر $Curv_{k_1+\dots+k_n}$ على أنه الـ $(k_1 + \dots + k_n)$ - قائمة

$$P_i(x) + x^{\delta_i} P_{i,j}(x) \quad (1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq k_i)$$

وفق الترتيب المعجمي. نعرف بذلك عمولة (متناظرة).

تمرين. تقاطع $F(x, y) = 0$ مع $|x| = \varepsilon$ يعرف ضفيرة، والتي لن تكون ضفيرة صرفة بعد الآن. بالفعل، يقطع كل فرع $x = \varepsilon$ عددًا من المرات يساوي ترتيبها الخاص m_i . على عكس الحالة السابقة، فإن العقدة التي يحددها كل فرع ليست تافهة. اجثوا عن نسخة طوبولوجية من العمولة السابقة. بكلمات أخرى، جدوا علاقة تكافؤ طبيعية بين المنحنيات $F(x, y) = 0$ (مع فروع موسومة) بمفردات الضفائر المرتبطة التي تعرفها. يجب أن تكون علاقة التكافؤ هذه بحيث تعمل العمولة بالفعل على فئات التكافؤ.

144 A. Płoski. Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 33(11-12):601-605 (1985), 1985.

145 I. Abío, M. Alberich-Carramiñana, and V. González-Alonso. The ultrametric space of plane branches. *Comm. Algebra*, 39(11):4206-4220, 2011

146 E. García Barroso P. González Pérez, and P. Popescu-Pampu. Ultra-on arborescent singularities. 2016



ضفيرة "غير صرفة" بثلاثة خيوط.



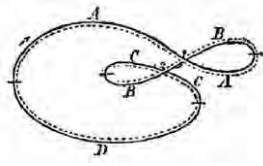
فاوس عام 1840.

ويعود قاوس : المنحنيات في المستوي

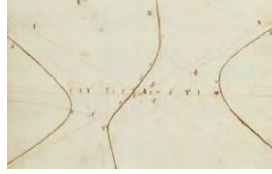
استمتع العديد من الرياضياتيين الكبار، في الماضي أو في الحاضر، برسم المنحنيات أو يستمتعون بها. كاختبار موجز، أرفق هنا بعض الصور ويجب على القارئ أن يَحْتَمِن مؤلفيها.



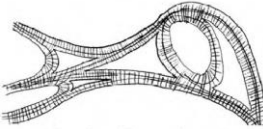
انعطاف! أحب هذا الفصل،
لكنه مستقل تمامًا عن باقي
أجزاء الكتاب.



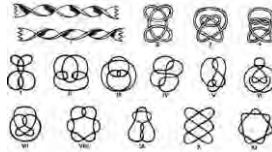
1



2



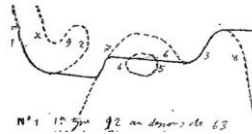
3



4



5



6

الحل: في الصفحة الآتية.

كلمات فاوس

في هذا الفصل سنراجع سؤالاً جميلاً طرحه فاوس حول المنحنيات في المستوي. نذكر أن أول إثبات له للمبرهنة الأساسية للجبر يستند إلى السلوك الكيفي للمنحنيات داخل قرص.

يحتوي المجلد 8 من Gauss's Werke على بضع صفحات¹⁴⁷ (صفحة 272 و 282-286) على منحنيات مغموسة في المستوي. يجب أن نكون حذرين: هذه هي ما يسمى Nachlasse، ملاحظات ظلت غير منشورة خلال حياة فاوس. لا تنسوا شعاره Pauca sed matura (قليل، لكنه واضح). لا ينبغي اعتبار هذه الصفحات منشورا فعلياً ولكن يجب اعتبارها أشبه بمسودة خاصة.

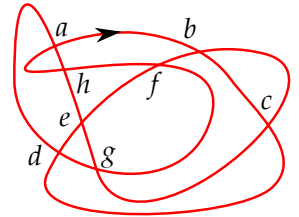
ارسموا منحنيًا موجهاً عاماً مغلقاً مغموساً $i: S^1 \rightarrow R^2$ في المستوي. كلمة عام تعني أن النقاط المتعددة هي نقط مضاعفة فقط مع مُراسين مختلفين. نقوم بوسم النقاط المزدوجة بالرموز a_1, \dots, a_n (التي أطلق عليها فاوس اسم Knoten أي عقدة). بالالتفاف حول المنحني، نقوم بالمرور مرتين في كل من هذه الـ a_i وهذا يعرّف كلمة دورية بطول $2n$ يظهر فيها كل من الـ a_i مرتين. لذلك فإن المنحني المغلق يعرّف مخططاً وترياً مع وتر واحد لكل a_i .

السؤال الذي طرحه فاوس هو التعرف على أي المخططات الوترية تنشأ من بعض المنحنيات المستوية. يسرد أولاً كل الاحتمالات من أجل $n \geq 8$ باليد! ثم يجد شرطاً لازماً. كتابة الكلمة على دائرة بين تكرارين لبعض الـ a_i ، يجب أن يكون هناك عدد زوجي من الأحرف. في المثال في الهامش، يقوم الوتر d بتحويل الدائرة إلى مجالين يشملان 6 و 8 أحرف على التوالي.

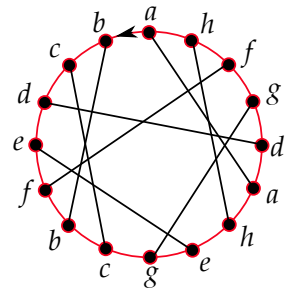
يدعي بعض المؤلفين المعاصرين أن هذا كان تخميناً لـ فاوس وأنه لا يستطيع إثبات ذلك. يا له من عدم احترام! يبدو واضحاً بالنسبة لي أن فاوس يستطيع أن يثبت ذلك ولم يأخذ الوقت لتدوينه في دفتر ملاحظاته الخاص.

إحدى المبرهنات الأولى في الطوبولوجيا، التي عرفها فاوس في رسالة الدكتوراه، كما لاحظنا بالفعل، هي أن منحنيين مغلقين في المستوي ومتقاطعين عرضياً، يكون لهما عدد زوجي من نقط التقاطع. أحد البراهين الممكنة هو تحريك المنحني الأول، من خلال سبيل عام

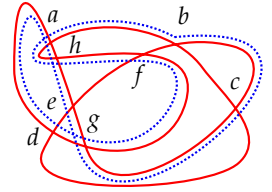
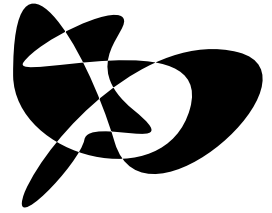
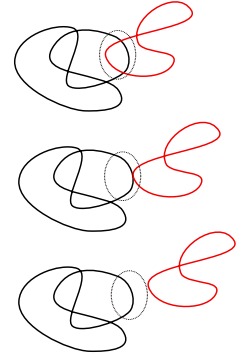
147C. F. Gauß. Werke. Band VIII. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973. Reprint of the 1900 original.



abcdefghijklgh



من انسحاباتٍ بحيث أنه في نهاية الحركة، لن تكون هناك نقطة تقاطع. ثم ندرس كيف تظهر نقط التقاطع أو تختفي في الوضعيات العامة. ليس من الصعب أن نرى بشكل عام أن النقط تظهر أو تختفي في أزواج.



هناك حقيقة وثيقة الصلة تمت ملاحظتها من قبل جميع التلاميذ وهم يرسمون شعارات عابثة أثناء دروس الرياضيات المملة. إذا قتم برسم منحني عام مغلق في المستوي، فإن المركبات المترابطة للمتمة يمكن تلوينها باللونين الأسود والأبيض كما هو الحال في رقعة الشطرنج. ما عليكم سوى استخدام اللون الأبيض للمركبة الموجودة في اللامنتهي والنسبة إلى مركبة أخرى، قوموا بوصلها باللامنتهي بواسطة قوس عام ولون أبيض إذا تقاطع هذا القوس مع المنحني المغلق في عدد زوجي من النقط، والأسود بخلاف ذلك. هذا متماسك بسبب الملاحظة السابقة.

الآن، شرط فاوس اللازم هو نتيجة طبيعية سهلة. أي وتر يقسم الدائرة إلى مجالين I_1 و I_2 يحددان منحنيين مغلقين في المستوي، على سبيل المثال، γ_1 و γ_2 ، ينطلقان من نفس النقطة. نحرك هذين المنحنيين قليلاً لجعلها عرضيين. عدد الأحرف في I_1 يساوي عدد نقط التقاطع بين γ_1 و γ_2 بالإضافة إلى ضعف عدد التقاطع الذاتي لـ γ_1 . لذلك فهو زوجي. في الصورة الموجودة في الهامش، تمت إزاحة إحدى الحلقتين من b إلى b' قليلاً وتظهر كحلقة زرقاء منقطة. هذا الشرط اللازم ليس كافياً كما كان يعرف فاوس جيداً.

كلمات فاوس المؤشّرة

تم حل مشكلة فاوس عدة مرات، بطرق مختلفة، في مجتمعات رياضية مختلفة، بشكل أساسي طوبولوجي أو توافقي. يتوافق هذا مع اقتباس بوانكاري:

[...] il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus.

[...] لم تعد هناك مشكلات محلولة وأخرى لم يتم حلها، توجد فقط مشكلات محلولة أكثر أو أقل.

سنصف حلين فقط. لنقدم أولاً حلاً لمشكلة أبسط، باستخدام حجة طوبولوجية، بمزج ¹⁴⁸ و ¹⁴⁹ و ¹⁵⁰. إذا كان المستوي موجهًا، فإن كل نقطة مزدوجة في المنحني العام تحدد شعاعين مماسين، بحيث يكون أحدهما "الأول" والآخر "الثاني".

¹⁴⁸N. Chaves and C. Weber. Plombages de rubans et problème des mots de Gauss. *Exposition. Math.*, 12(1):53-77, 1994.

¹⁴⁹G. Cairns and D. M. Elton. The planarity problem for signed Gauss words. *J. Knot Theory Ramifications*, 2(4):359-367, 1993.

¹⁵⁰G. Cairns and D. M. Elton. The planarity problem. II. *J. Knot Theory Ramifications*, 5(2):137-144, 1996.

بالالتفاف حول المنحني، عندما نلتقي بنقطة مزدوجة، فإننا نؤشر بعلامة + إذا مررنا عبر الفرع الأول وعلامة - بخلاف ذلك. ومن ثم، فإن الكلمة الدورية مُرتبة الآن بالعلامات أو الأساس ± 1 . كل حرف يتكرر مرتين، مع اختلاف الإشارات. بطريقة مكافئة، يمكننا التفكير في مخطط وتري موجه حيث ينتقل كل وتر، على سبيل المثال، من طرفه + إلى طرفه - . مشكلة فاوس المؤشّرة (التي لم يدرسها فاوس) هي الآتية. إذا أعطي المرء مثل هذه الكلمة المؤشّرة، هل يمكنه أن يقرر ما إذا كانت مرتبطة بمنحن عام ما في المستوي؟ من أجل كل رمز a_1, a_2, \dots, a_n نرسم صليبيًا، كما في الهامش. لكل صليب جانبان للدخول وجانبان للخروج. لكل صليب ذراعان، موسومان بـ + و - .

تحدد كلمة دورية مؤشّرة w بطريقة وحيدة طريقة للصق كل جانب للخروج من كل صليب إلى جانب للدخول لصليب آخر. نتيجة عملية اللصق هذه هي سطح موجه S مع حد يحوي منحنيًا موجهًا مغموسًا γ . بالتفاف حول هذا المنحني، نقرأ بدقة الكلمة المؤشّرة w . إذا كان S مستويًا بحيث يمكن تغطيسه في المستوي، تكون مشكلتنا قد حلت لأننا أنشأنا منحنيًا في المستوي.

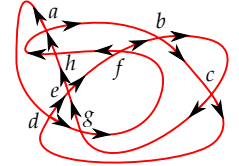
في المقابل، إذا كانت الكلمة تأتي من منحني مغموس في المستوي، فمن الواضح أن جورا ما من صورته هو اتحاد الصلبان المجمع كما في S .

لذلك، يمكن تحقيق w من خلال منحني مغمور إذا فقط إذا كان S مستويًا.

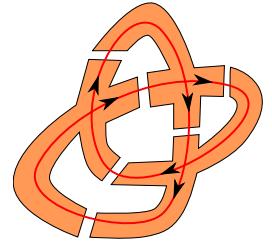
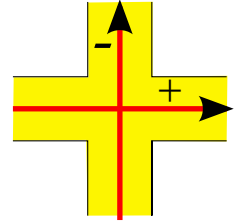
بالنسبة إلى بقية هذا الفصل، بعض الإلمام بأساسيات نظرية تماثل السطوح ضرورية. هذه فرصة جيدة للتوصية بالكتاب المرئي لفومنكو¹⁵¹. عند فتح هذا الكتاب، سيفهم القارئ على الفور لماذا أنا أحبه. كتاب قياسي أكثر لـ ماسي، الوصول إليه سهل جدا¹⁵².

لنفترض أن k هو عدد مركّبات حد S . لنفترض أن \hat{S} هو السطح الذي تم الحصول عليه من S عن طريق لصق قرص بكلّ من مركّبات حده. يمتلك السطح S نوع ترادف بيان ذي n رأسًا و $2n$ حافة. ومن ثم، فإن مميزة أويلر - پوانكاري لـ \hat{S} هي $n - 2n + k$. يتم تصنيف السطوح الموجهة المتراصة دون حد وفق مميزة أويلر - پوانكاري. كنتيجة طبيعية، يكون S مستويًا إذا فقط إذا كان $k - n = 2$.

هذا يعطي خوارزمية بسيطة جدا لتقرير ما إذا كانت w ممكنة التحقيق.



$$a^+b^+c^+d^+e^+f^+b^-c^+g^+e^-h^+a^-d^+g^+f^-h^-$$



¹⁵¹A. Fomenko. *Visual geometry and topology*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the Russian by Marianna V. Tsaplina.

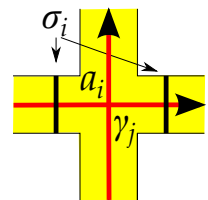
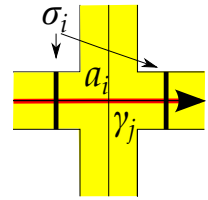
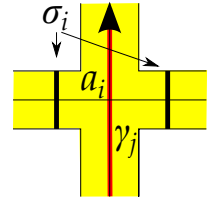
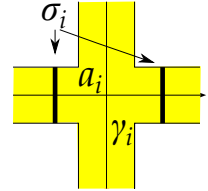
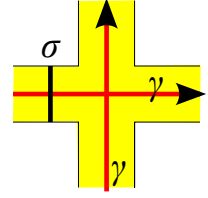
¹⁵²W. S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991

نبدأ بـ w ونلصق الصليبيين ونحسب عدد مركبات الحد: يجب أن يكون $n+2$. يرجع هذا أساسًا إلى كارتر¹⁵³.

نقدم الآن وجهة نظر أخرى. تأتي من تصنيف السطوح الموجهة المتراسة ذات حد بحيث يكون هذا السطح مستويًا إذا فقط إذا تقاطع أي منحنيين مغلقين عرضيين في عدد زوجي من النقط. بالفعل، بمجرد أن يكون جنس السطح أكبر من أو يساوي 1، فإنه يحتوي على طارة مثقوبة تحتوي على منحنيين يتقاطعان بالضبط في نقطة واحدة. ومن ثم، للتحقق مما إذا كان جنس S هو 0، يكفي إيجاد أساس لتماثله $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ مقياس 2، وحساب التقاطع.

توجد طريقة سهلة للعثور على أساس $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. كملاحظة أولية، لاحظوا أن ثنائية (a^+, a^-) من النقط على الدائرة الموجهة تحدد مجالًا مفتوحًا، عندما نساغر في الاتجاه الموجب من a^+ إلى a^- . سنتقول إن عناصر هذا المجال بين a^+ و a^- . ومع ذلك كونوا حذرين: يتم تغيير هذا المجال إلى ممتمة إذا تم تبديل النقطتين.

المنحني الأصلي γ مرسوم على S وبالتالي فهو يعزف صنف تماثل $[\gamma]$. علاوة على ذلك، من أجل كل $i \in \{1, \dots, n\}$ ، يحدد المجال من a_i^+ إلى a_i^- على الدائرة حلقة γ_i على S وصنف تماثل $[\gamma_i]$ في $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. لاحظوا أنه عندما يدخل γ_i في صليب، فإنه لا يغير الاتجاه باستثناء الصليب المسمى a_i ، حيث يدور عن اليمين. بتعبير مختلف، يكون تقاطع γ_i مع صليب مختلف عن المسمى a_i إما خاليًا، وإما قطعة مستقيم، وإما قطعتين متعامدتين.



توطئة. تعرّف الأصناف $[\gamma]$ ، $[\gamma_i]_{1 \leq i \leq n}$ أساساً لـ $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

يحتوي السطح S على نوع ترادف بيان مترابط ذي n رأساً و $2n$ حافة. مميزة أو يملر - يونكاربي هي $-n$ وتساوي 1 ناقص رتبة $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. وبالتالي هذه الرتبة هي $(n+1)$. من أجل إثبات التوطئة علينا فقط تبيان أن $[\gamma]$ ، $[\gamma_i]_{1 \leq i \leq n}$ مستقلة خطياً في $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

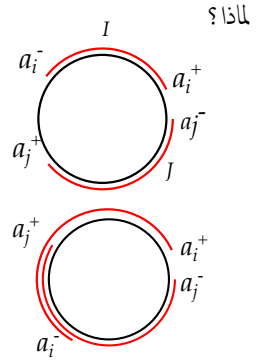
أي قوس σ في S تقطعتا طرفيه على حد S يُعرّف شكلاً خطياً في $H_1(S; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$: ما عليكم سوى حساب نقط التقاطع مع σ (دائماً مقياس 2). على سبيل المثال، اختاروا σ في صليب ما، مثل ما هو في الهامش.

من الواضح أن γ تتقاطع مع σ في نقطة واحدة فقط بحيث لا تكون $[\gamma]$ تافهة. في الصليب المرتبط بالحرف a_i ، لنفترض أن σ_i هو مجموع المنحنيين الموضحين في الهامش. تقاطع σ_i مع γ_j يساوي 0 إذا كانت $i \neq j$ و 1 إذا كانت $i = j$. تقاطع γ و σ_i هو 0. لذلك يمكن للمرء استخدام الـ $n+1$ شكلاً خطياً σ_i و σ لتبيان أن $[\gamma]$ ، $[\gamma_i]_{1 \leq i \leq n}$ مستقلة خطياً وتكون التوطئة قد أُثبتت. □

الآن، يكون للسطح S جنس يساوي 0 إذا فقط إذا كانت أعداد تقاطع الحلقات γ_i ، γ كلها تساوي 0، مقياس 2.

نلاحظ أن التقاطع الذاتي لأي منحن مغلق على أي سطح قابل للتوجيه هو 0 (فوق \mathbb{Z} وبالتالى فوق $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

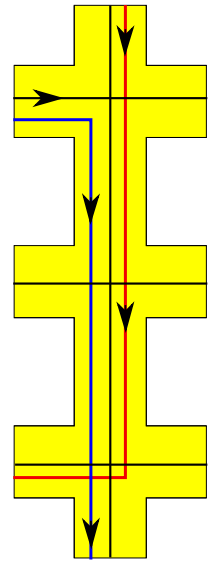
هيا بنا نحسب عدد تقاطع γ و γ_i ، المشار إليه بـ $\gamma_i \cdot \gamma$. لجعلها عرضيين، نحرك γ قليلاً عن يمينها للحصول على منحن γ' يكون عرضياً مع γ_i . لا تنسوا أن السطح S والحلقات γ_i موجهة. ويترتب على ذلك أن عدد تقاطع γ و γ_i هو عدد الأحرف بين a_i^- و a_i^+ . نستعيد شرط فاوس اللازم. نفترض من الآن فصاعداً أنه محقق.



هيا بنا نحسب عدد التقاطع مقياس لـ 2 γ_i و γ_j والذي نرمز إليه بـ $\gamma_i \cdot \gamma_j$. إذا كانت الأحرف a_i^\pm و a_j^\pm غير مرتبطة، يوجد مجالان منفصلان I و J في الدائرة (أو في الكلمة الدورية) نقط طرفيها هي a_i^- و a_i^+ و a_j^- و a_j^+ على التوالي. نظرًا إلى إمكانية استبدال $\gamma_i - \gamma_j$ في حساب عدد التقاطع، فإنه يترتب على ذلك، في هذه الحالة غير المرتبطة، أن $\gamma_i \cdot \gamma_j$ هو عدد الأحرف في الكلمة مع تكرار واحد في I والثاني في J . وهذا هو إذن شرط شفعية ثان، لازم لإمكانية تحقيق w .

إذا كانت الأحرف a_i^\pm و a_j^\pm مرتبطة، فإن الحلقتين γ_i و γ_j ليستا عرضيتين لأنهما تتطابقان على مجال غير تافهة. نحرك γ_i إلى اليمين قليلاً، لإنتاج γ'_i ، ونحرك γ_j إلى اليسار، للحصول على γ'_j . المنحنيان γ'_i و γ'_j هما الآن متوازيان على هذا الجزء المشترك. نحسب الآن عدد تقاطع γ'_i و γ'_j . انظروا الى الصورة.

هناك تقاطع واحد في الصليب a_j ولا شيء في الصليب a_i . التقاطعات الأخرى تتوافق مع الأحرف بين a_i^- و a_i^+ والتي يقع تكرارها الثاني بين a_j^+ و a_j^- . ومن ثم،



فعندما تكون a_i^\pm و a_j^\pm مرتبطة يكون عدد التقاطع $\gamma_i \cdot \gamma_j$ مساويا لـ 1 مضافا إليه عدد الأحرف بين a_i^+ و a_i^- التي يكون تكرارها الآخر بين a_j^+ و a_j^- . لذلك، نحصل على إجابة بسيطة جدًا عن مشكلة فاوس المؤشّرة.

بطريقة مكافئة، يمكن أن يُعبّر عن الشرطين اللازمين الأولين بالخططات الوترية 1/ كل وتر يتقاطع مع عدد زوجي من الأوتار. 2/ بالنسبة إلى وترين غير متقاطعين، يكون عدد الأوتار التي تقطعها زوجيًا.

مبرهنة. تكون كلمة مؤشّرة لفاوس قابلة للتحقق من خلال منحني مستوي مغموس إذا وفقط إذا تم استيفاء الشروط الآتية.

1. من أجل كل حرف a_i ، يوجد عدد زوجي من الأحرف بين a_i^+ و a_i^- (شرط الشفعية لفاوس).
2. من أجل كل i ، j بحيث لا تكون الأحرف a_i^\pm و a_j^\pm مرتبطة، ليكن J, I المجالين المنفصلين اللذين تكون نقط أطرافهما $a_i^+, a_i^-, a_j^+, a_j^-$ (باستثناء هذه النقط). عدد الأحرف في الكلمة ذات التكرار الأول في I والآخر في J هو عدد زوجي.
3. من أجل كل i ، j بحيث تكون الأحرف a_i^\pm و a_j^\pm مرتبطة، يكون عدد الأحرف بين a_i^+ و a_i^- التي يكون تكرارها الآخر بين a_j^+ و a_j^- فرديًا.

مشكلة فاوس

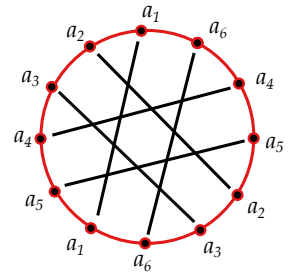
لنعد إلى المشكلة الأصلية: الكلمات غير المؤشّرة. بالطبع، يمكننا الغش وتجربة كل الـ 2^n طريقة لاختيار الإشارات على الكلمة. قد يستغرق ذلك وقتًا طويلًا للغاية. حتى القوة الحاسوبية لفاوس كان من الممكن أن تتعرض للهزيمة بـ 2^n . علاوة على ذلك، لن يكون هذا مُنوّرا جدًا.

لاحظوا أن معيار الشفعية لفاوس مستقل عن الإشارات. الشرط الثاني، في حالة عدم ارتباط a_i^\pm و a_j^\pm ، هو أيضًا مستقل عن الإشارات.

لذلك نفترض أن كليهما محقق بالنسبة إلى كلمة غير مؤشّرة w . اسمحوا لي أن أقدم ما يسمى البيان المتشابك $G(w)$. رؤوسه هي الأعداد الصحيحة 1، ...، n أو الأوتار a_i ، وهناك حافة بين وترين إذا هما تقاطعا.

ها هو مثال من ورقة كبرنس ووليتون

$$w = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_1 a_6 a_3 a_2 a_5 a_4 a_6.$$



يتحقق المرء بسهولة من استيفاء شرط الشفعية لفاوس وكذلك الشرط الثاني في الحالة غير المرتبطة.

البيان المتشابه ممثل في الهامش.

نختار كلمة مؤشرة \bar{w} والتي تكون الكلمة غير المؤشرة المرتبطة بها w ، على سبيل المثال

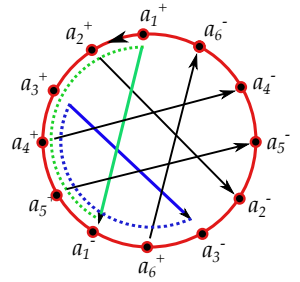
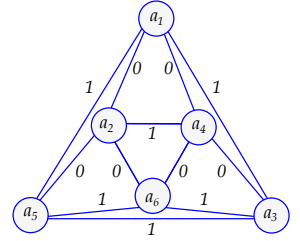
$$\bar{w} = a_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4^+ a_5^- a_6^- a_3^- a_2^- a_5^- a_4^- a_6^-.$$

نظرًا إلى أننا عدنا إلى الكلمات المؤشرة، فنحن نعرف كيفية حساب أعداد التقاطع $\gamma_i \cdot \gamma_j$ للحلقات المرتبطة. يعرّف هذا عنصرا $f(e)$ من $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ لكل حافة e من $G(w)$. على سبيل المثال، يتقاطع الوتران 1 و 3 في صورة الهامش، لا يوجد حرف في المجال من a_1^+ إلى a_1^- (باللون الأخضر المنقط) الذي يكون تكراره الآخر بين a_3^+ و a_3^- (باللون الأزرق المنقط). لذلك فإن $\gamma_1 \cdot \gamma_3$ يساوي $0+1$ و نكتب 1 على الحافة التي تربط a_1 و a_3 في البيان. نظرًا إلى أننا نرى 1 على بعض الحواف في مثالنا، فإن هذه الكلمة المؤشرة لا يمكن تحقيقها من خلال منحني مغموس في المستوي.

علينا الآن أن نُقرر ما إذا كان يمكن أن يكون هناك تغيير ذكي في الإشارات الموجودة في الأحرف بحيث يمكن رسم جميع الحواف بـ 0.

يمكن اعتبار هذا الوسم $f(e)$ بمثابة -1- سلسلة مقابلة f (قيّمها في $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) في البيان، ومن ثمّ -1- دورة مقابلة (نظرًا لعدم وجود -2- وجوه في البيان). لنفحص كيف تتغير هذه الدورة المقابلة عندما يتم تعديل الإشارات الموجودة على \bar{w} . يتم تحديد تغيير للإشارات بواسطة دالة u من $\{1, \dots, n\}$ في $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ، يمكننا التفكير فيها على أنها -0- سلسلة مقابلة في بياننا. ندعي أن ال -1- دورة المقابلة الجديدة f' على $G(w)$ ، بعد تغيير الإشارات المرتبطة بـ u ، تساوي ببساطة $f + du$ ، حيث du هو الحد المقابل لـ u . ال du هذا، الذي يتم تقويمه على حافة e هو من خلال التعريف، الفرق (أو المجموع لأننا نعمل بقياس 2) بين قيمتي u في تقطعي النهاية لـ e .

لنبدأ بتغيير إشارة حرف واحد فقط، على سبيل المثال a_k . من أجل كل i ، j بحيث يتم ربط الأحرف a_i^\pm و a_j^\pm ، أي من أجل كل حافة من البيان $G(w)$ ، علينا مقارنة عددي تقاطع، للكلمتين المؤشرتين \bar{w} ، \bar{w}' اللتين تختلف إشارتهما فقط في الحرف k . من الواضح أن عددي التقاطع هذين متساويان إذا كانت k مختلفة عن i و j . اتضح أنها يختلفان بـ 1 (مقياس 2)، عندما يكون $k = i$ أو $k = j$. على سبيل المثال، إذا كان $k = i$ ، فعليًا مقارنة:



1/ عدد الحروف بين a_i^- و a_i^+ الذي يقع تكرارها الآخر بين a_j^- و a_j^+ و

2/ عدد الحروف بين a_i^- و a_i^+ التي يقع تكرارها الآخر بين a_j^- و a_j^+ .

مقياس 2، هذا الفرق هو عدد الحروف بين a_j^- و a_j^+ ، التي تختلف عن a_i . هذا العدد فردي لأننا افترضنا أن شرط شفعية فاوس و a_i^\pm و a_j^\pm مرتبطة. ومن ثم، فإن تأثير تغيير الإشارات على حرف وحيد a_k هو تغيير الوسوم بمقدار 1 على حواف $G(w)$ مع a_k كنقطة نهاية، وليس تغيير الوسوم الأخرى. إذن، فإن العلاقة $f' = f + du$ صحيحة في هذه الحالة البسيطة. ومنه تأتي الحالة العامة حيث يمكننا تغيير الإشارات واحدة تلو الأخرى.

نتيجة لذلك، فإن الشيء المحدد جيدًا، بصرف النظر عن الإشارات، هو صنف التماثل المقابل لـ f في $H^1(G(w); \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. هذا الصنف يساوي صفرًا إذا فقط إذا كانت الدورة المقابلة تساوي صفرًا من أجل اختيار للإشارات، أي إذا فقط إذا كانت الكلمة غير المؤشرة w قابلةً للتحقيق من خلال منحني عام مغموس في المستوي. أخيرًا، إن صنف تماثل مقابل في بيان تافه إذا فقط إذا كان صفرًا عند تقويمه على الدورات. هذا يعطي خوارزمية فعالة جدًا. نختار أي كلمة مؤشرة \bar{w} ، نحسب الـ -1 دورة المقابلة، ونجمع قيمها على الدورات في البيان المتشابه.

في مثلنا، تعطي الدورة $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$ في $G(w)$ مجموعًا إيجابيًا يساوي 1 بحيث لا يمكن تحقيق الكلمة غير المؤشرة w بواسطة منحني مغموس في المستوي. انظروا¹⁵⁴ لتاريخ المشكلة حتى عام 1972 و¹⁵⁵ لكتاب أحدث.

جنس مخطط وتري

ليكن w مخططًا يحتوي على n وترًا. نأخذ حلقة ونلصق n شريطًا على حدها وفقًا لـ w ، كما في شكل الصفحة الآتية. نحصل على سطح $S(w)$ ذي حد، والذي له جنس (وهو حسب التعريف جنس السطح المغلق الذي تم الحصول عليه بعد لصق أقراص على كل مركبة حدية): هذا هو الجنس $g(w)$ للمخطط التوري. هناك طريقة لطيفة لحساب هذا الجنس، تعود إلى موران¹⁵⁶. نعتبر المصفوفة $n \times n$



انعطاف في انعطاف.

¹⁵⁴B. Grünbaum. *Arrangements and spreads*. American Mathematical Society Providence, R.I., 1972. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 10.

¹⁵⁵C. Godsil and G. Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.

¹⁵⁶G. Moran. *Chords in a circle and linear algebra over GF(2)*. *J. Combin. Theory Ser. A*, 37(3):239–247, 1984.

التي تكون معاملاتها a_{ij} في $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ مساوية لـ 1 إذا كان تكرار a_i مرتبطين بتكراري a_j و 0 في خلاف ذلك. هذه هي مصفوفة الوقوع مقياس 2 للبيان المتشابه.

مبرهنة. جنس مخطط وتري هو نصف رتبة مصفوفة الوقوع مقياس 2 للبيان المتشابه.

الإثبات الذي قدمه موران ملتبس إلى حد ما ولكن يمكن تقديمه بطريقة أبسط. يمكن رؤية الأوتار كأقواس في $\mathcal{S}(w)$.

يمكن أيضًا رؤية هذه الأوتار كأقواس في الـ 2-قرص.

نلصق القرص و $\mathcal{S}(w)$ على طول الدائرة الخارجية للحصول على سطح $\mathcal{S}'(w)$. نحدد النسختان من كل وتر الحلقات b_1, \dots, b_n المولدة لتماثل $\mathcal{S}'(w)$. في هذا الأساس، يكون تقاطع b_i و b_j هو 0 إذا كان i و j لا يرتبطان و 1 إذا ارتبطا. نقوم الآن بلصق k من الأقراص على طول المركبات الحدية لـ $\mathcal{S}'(w)$ من أجل إنتاج سطح مغلق موجه $\hat{\mathcal{S}}(w)$. يُنتج تغطيس $\mathcal{S}'(w)$ في $\hat{\mathcal{S}}(w)$ غمرا في التماثل الأول مقياس 2. بالفعل، يمكن ترديد أي حلقة في $\hat{\mathcal{S}}(w)$ بعيدًا عن الأقراص التي تمت إضافتها. ومع ذلك، فإن هذا التغطيس لا يحدث تباينًا في التماثل. في الواقع، عندما نلصق أقراصًا على طول الحد، نغيب مركبات الحد في التماثل لأنها الآن . . . حدود الأقراص. ومع ذلك، فإن أي عنصر في النواة موجود في نواة شكل تقاطع على $\mathcal{S}(w)$ لأنه متماثل مع مجموعة من المنحنيات الموازية للحد. يترتب على ذلك أن شكل التقاطع على $\mathcal{S}'(w)$ مقياس نواته، إيزومتشاكل مع شكل تقاطع $\hat{\mathcal{S}}(w)$. بالنسبة إلى سطح موجه مغلق جنسه g ، يكون شكل التقاطع غير منحلّ من الرتبة $2g$. □



مبرهنة لـ لوفاس وماركس

هناك حل مختلف لمشكلة فاوس. تتناسب بشكل جيد جدا مع وصفنا للتبديلات القابلة للفصل كذلك التي تتجنب النمطين 3142 و 2413. ومن المثير للاهتمام، أن هذه المبرهنة تم نشرها بدون إثبات¹⁵⁷. آمل أن يستمتع القارئ بالعثور على الإثبات بنفسه.

¹⁵⁷L. Lovász and M. L. Marx. A forbidden substructure characterization of Gauss codes. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 38(1-2):115-119, 1976.

نعتبر منحنيًا مستويًا عامًا مغموسًا، هناك طريقتان لحذف نقطة مزدوجة معينة، موضحتان في الهامش. في الأولى، ينقسم المنحني إلى مركبتين، حتى تتمكن من اختيار إحدهما. من وجهة نظر توافقية، هاتان العمليتان يمكن التعبير عنها بالطريقة الآتية.

- بدءًا من كلمة $w = aUaV$ ، نحذف a ونعتبر الكلمة UV^{-1} (تم كتابة جميع الكلمات دوريًا).

- بدءًا من كلمة $w = aUaV$ ، نحذف a وكلّ الحروف التي تظهر في V . لذلك، تُنتج كل كلمة w بعض الكلمات الأخرى بأقل حروف. تُظهر الصور في الهامش أن الكلمات الجديدة قابلة للتحقيق إذا كانت الأولى كذلك. نستمر ونتيح كلمات جديدة أقصر. يقال إن هذه الكلمات الأقصر محتواة في الكلمة الأولى w .

مبرهنة. تكون كلمة لفاوس قابلة للتحقيق إذا وفقط إذا كانت لا تحتوي على الكلمة $a_1a_2 \dots a_n a_1a_2 \dots a_n$ من أجل n زوجي.

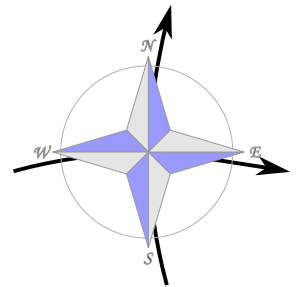
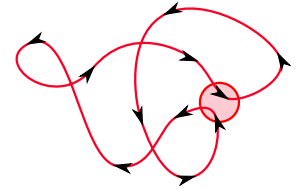
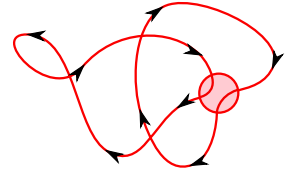
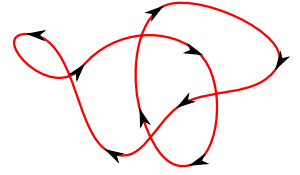
لاحظوا أن البيان المتشابه لـ $a_1a_2 \dots a_n a_1a_2 \dots a_n$ هو البيان الكامل على n رأسًا.

عمولة فاوسية

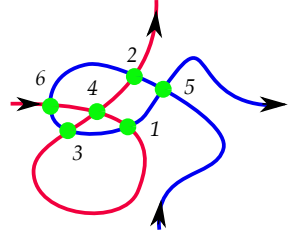
نعرّف بنية عمولة على مجموعة كلمات فاوس. بتعبير أدق، سوف نتعامل مع منحنيات عامة موجهة ومعلمة مغموسة في المستوي $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$. تعني كلمة عامة كما كان من قبل أن النقط المتعددة هي فقط نقط مزدوجة ذات مماسين مختلفين. أما كلمة معلمة فهي تعني أننا اخترنا إحدى النقط المزدوجة كنقطة "بداية" وأن النقط المزدوجة المتبقية هي موسومة من 1 إلى n .

نظرا إلى أن المستوي ومنحنينا موجهان، فإن أي نقطة مزدوجة تحدد وردة بوصلة: يمكن وسم نقط التقاطع الأربع مع دائرة صغيرة حول النقطة بالاتجاهات الأساسية.

إذا تم إرسال نقطة البداية المعلمة إلى اللا منتهي عن طريق التعاكس، نحصل على صورة مكونة من منحنين طويلين موجهين، γ_r, γ_b من \mathbf{R} في \mathbf{R}^2 (أزرق وأحمر) بالخصائص الآتية.



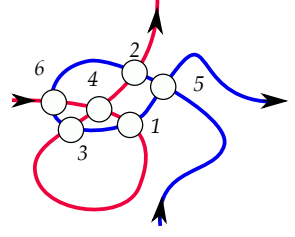
• المنحنى γ_b (γ_r على التوالي) الأزرق (الأحمر على التوالي) ينتقل من الجنوب إلى الشرق (من الغرب إلى الشمال على التوالي). بتعبير أدق $\gamma_b(t)$ يساوي it من أجل القيم السالبة الكبيرة (بالقيمة المطلقة) لـ t و t من أجل القيم الموجبة الكبيرة لـ t و it على التوالي)



عنصر من Γ_6 .

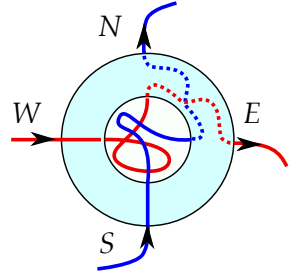
• γ_r و γ_b مغموسان والنقط المتعددة الوحيدة في اتحادهما نقط مزدوجة عرضية موسومة بـ $1, \dots, n$.

نرمز بـ Γ_n إلى مجموعة أزواج المنحنيات التي تستوفي هاتين الخاصتين وتكون لهما n نقطة مزدوجة، إلى تفاكل حافظ للاتجاه مقرب، في المستوي.



هناك بنية عمولة طبيعية على اتحاد الـ Γ_n . نأخذ ثنائية (γ_b, γ_r) من المنحنيات ذات اللون الأزرق والأحمر على النحو الوارد أعلاه مع n نقطة مزدوجة.

نختار n ثنائية من المنحنيات ذات اللون الأزرق والأحمر $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$ (من أجل $i=1, \dots, n$)، لها k_1, k_2, \dots, k_n نقطة مزدوجة. نحفر أقراصا صغيرة حول النقط المزدوجة لـ (γ_b, γ_r) . نريد إدخال الـ $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$ في القرص ذي الوسم i ، مع احترام الاتجاهات الأساسية. ومع ذلك، فهذا غير ممكن. عندما نحفر حفرة، فإن المنحنيات الزرقاء تنتقل من الجنوب إلى الشمال والمنحنيات الحمراء تنتقل من الغرب إلى الشرق، بحيث لا يكون هذا متاسكاً مع السلوك جنوب-شرق وغرب-شمال للمنحنيات الزرقاء والحمراء $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$ التي نريد إدراجها. من السهل تجاوز هذه المشكلة. قبل إدخال $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$ يكفي أولاً إدخال حلقة قياسية تحتوي على أقواس موجّهة نحو الشمال والشرق.



نتيجة عملية القص واللصق هذه زوج من المنحنيات بـ $k_1 + \dots + k_n$ نقطة مزدوجة. هذه هي العمولة القاوسية (التناظرية). هل يمكنكم إيجاد نظام مولّد؟ علاقات بين المولدات؟ لاختتام هذا الفصل ببعض الافتتاحيات الواسعة، أوصي بالكتاب¹⁵⁸ وهو مقدمة رائعة ومفهومة لثوابت (لا متغيرات) عقد فاسيلييف، حيث تلعب المخططات التورية دورًا حاسمًا.

158 S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev knot invariants*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.



حرف كانجي لكلمة "شجرة".

المخططات الوترية التحليلية :

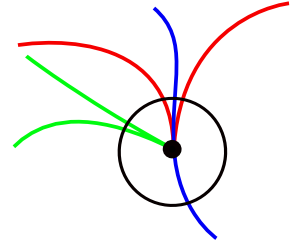
خوارزمية

في هذا الفصل، نصل إلى أحد أهدافنا: الوصف الخوارزمي للمخططات الوترية التي تحدث في جوار لنقطة مفردة لمنحن تحليلي حقيقي مستوي.

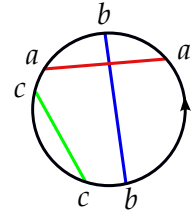
تذكروا أن مثل هذا المنحني يتقاطع مع دائرة صغيرة حول نقطة مفردة في عدد زوجي من النقط التي تأتي في أزواج، كل زوج مرتبط بفرع حقيقي.

يمكن للمرء أن يفكر في هذه البنية على أنها كلمة دورية بطول $2n$ يظهر فيها كل حرف مرتين بالضبط (حيث أسماء الحروف غير ذات صلة). كي نكون أكثر حذرا (ودقة)، سنناقش التفافات خالية من النقط الثابتة على $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$ إلى مرافقة مقربة عن طريق التبديلات الدورية. يمكننا أيضًا رسم n وترا في دائرة.

العدد الإجمالي للمخططات الوترية هذه بطول $2n$ تمت دراستها في العديد من الأوراق. انظروا على سبيل المثال ¹⁵⁹ مع دوافع قوية من نظرية العقد. ستكون المشكلة سهلة إذا كنا، بدلاً من الكلمة الدورية، نبحث عن كلمات قياسية (غير دورية) بطول $2n$ يظهر فيها كل حرف مرتين بالضبط والتي تكون فيها أسماء الحروف غير ذات صلة. بالفعل، كتبوا الحرف الأول من الكلمة ثم اختاروا أيًا من المواقع الـ $2n-1$ المتبقية للحرف الآخر المطابق للحرف الأول، ثم كتبوا الحرف الثاني في أول مكان غير مشغول متاح واختاروا الحرف الآخر المتطابق في أي من المواقع الـ $2n-3$ المتبقية وهكذا. لذلك فإن العدد الإجمالي لهذه الكلمات هو $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$. كل من هذه الأعداد يسمى في بعض الأحيان العامل المزدوج ويرمز له بـ $(2n-1)!!$.



منحن بثلاثة فروع.



أحياناً أ حذف كلمة "الوترية" من "المخطط الوترية".

¹⁵⁹A. Stoimenow. [On the number of chord diagrams.](#) *Discrete Math.*, 218(1-3):209-233, 2000

انظروا¹⁶⁰ للحصول على عرض لخصائصه التوافقية. قد يكون من المغري أن نقسم $(2n-1)!!$ على $2n$ لنأخذ في الحسبان التبديلات الدورية، لكن ربما يكون لبعض الكلمات تناظراتٌ وهذا هو السبب في أن التوافقيات أكثر دقة. على أية حال، يُستنتج من هذه الاعتبارات أن عدد المخططات التورية ذات الطول $2n$ ينمو بشكل فوق-أسّي بالنسبة إلى n .

سنرى أن هناك نسبةً ضئيلةً جدًا من المخططات التورية التحليلية، بمعنى أنها مرتبطة بمفردية ما لمنحنٍ تحليلي مستوي.

شرط لازم

تذكروا أننا أظهرنا في الفصل الأول من هذا الكتاب أنه من أجل كل تبديلة قابلة للفصل، يوجد عدنان صحيحان متتابعان مع صورتين متتابعتين. كانت هذه النقطة الأساسية التي مكنتنا من إنتاج خوارزمية تحدد ما إذا كانت تبديلةً قابلةً للفصل. نُثبت الآن وجود خاصية مماثلة للمخططات التورية التحليلية.

قول إن وترًا في مخطط منعزلٍ إذا كان يصل نقطتين متتابعتين من المخطط كما في الصورة الموجودة أدناه عن اليسار. يكون وتران متوازيين (على التوالي، ضد متوازيين) إذا كانا كما في الصورة الثانية (على التوالي، الثالثة)، أي إذا كان الحرفان المقابلان a ، b يظهران في الكلمة الدورية على المنوال $\dots ab \dots ba \dots$ (على التوالي، $\dots ab \dots ab \dots$). أخيرًا، يشكل وتران، كما في الصورة الرابعة، مذرة $(\dots a \dots bab \dots)$.

160D. Callan. A combinatorial survey of identities for the double factorial. 2009.

حذار! العامل المزدوج $(2n-1)!!$ لا هو عاملي العامل ولا هو علامة تعجب!

استخدموا علاقة "ستيرلنغ" لإثبات أن $(2n-1)!!$ يكفي

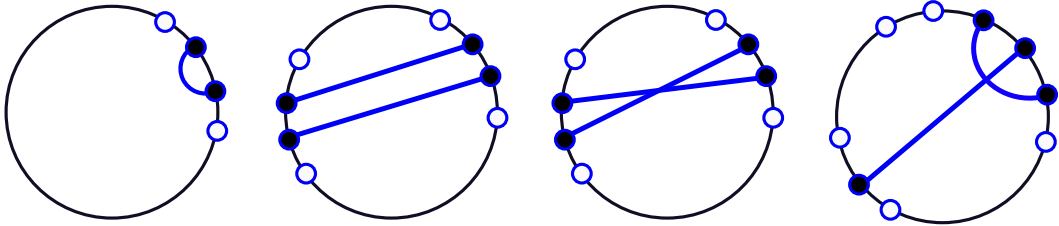
$$\sqrt{2} (2/e)^n e^{n \log n}$$

عندما n إلى اللامتناهي. إذن $(2n-1)!!$ ينمو بالفعل بشكل فوق-أسّي، ولكن ليس أسرع أكثر. على سبيل المثال،

يكون صغيرًا عند مقارنته بـ $C\lambda^{n+\varepsilon}$ من أجل أي ε موجب تمامًا أي λ أكبر تمامًا من 1.

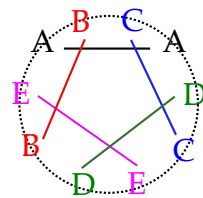
© بعض المبرهنات أو التوطئات مشهورة إلى حد أنه يبدو محظورا استخدام كلمات مثل "مبرهنة A، B" (Cartan)، أو "التوطئة الأساسية" (Ngo).

توطئة أساسية ©. يحتوي أي مخطط ورتي تحليلي على وتر منعزل، على زوج من وترين متوازيين أو ضد متواز، أو على مذرة.



نلاحظ أن هذا يستلزم على الفور المبرهنة التي أسسناها في المقدمة.

مبرهنة. لا يوجد منحني تحليلي مفرد في المستوي يتكوّن من خمسة فروع تتقاطع مع دائرة صغيرة كما في الصورة في الهامش.



خمس فروع مستحيلة.

لنفجّر صعوداً

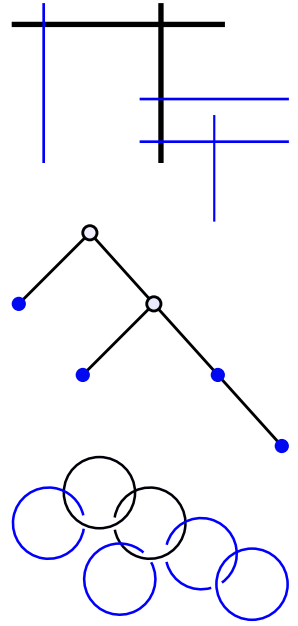


كويبو (Quipu) أو ذات العُقَد جميلة:
جهاز بخيوط معقودة تم استخدامه
بواسطة الإنكا لتسجيل المعلومات
الإحصائية. مثل تفجير صاعد لمستقيم
إسقاطي؟

(Centro Mallqui,
Leymebamba, Peru)

نبدأ بنقطة مفردة ما من منحن تحليلي في المستوي (الحقيقي). نفجّر صعوداً أول مرة. والنتيجة هي منحن في شريط ما لمويوس، والتي تكون نقطها المفردة على القاسم الاستثنائي، وهو نواة الشريط. إذا سارت الأمور على ما يرام، فإن النقطة المفردة تنفلق إلى عدة نقط مفردة، ويُفترض أنها أبسط. لنقم الآن بتفجير صاعد لكل منها. يمكن أن يحدث أنه بعد انفجار واحد، لا تزال هناك نقطة مفردة وحيدة على القاسم. نقوم عندئذ بتفجيرها مرة ثانية. نواصل عملية التفجير الصاعد عدة مرات حسب الضرورة. نحن نعلم أنه بعد مرور بعض الوقت، سيتم حل المفردة. هذا يعني أن التحويل الفعلي للمنحني الأولي هو الآن مجموعة لـ n من المنحنيات التحليلية المساء المنفصلة والتي تقطع بشكل عرضي القاسم الاستثنائي.

هذا القاسم الاستثنائي هو اتحاد لمستقيمت إسقاطية حقيقية والتي هي دوائر تتقاطع بشكل عرضي. تأملوا البيان الذي تكون رؤوسه هذه المستقيمت الإسقاطية وحيث تربط حافة رأسين إذا تقاطع المستقيمان الإسقاطيان. هذا البيان هو شجرة كما يمكن رؤيتها بسهولة عن طريق الاستقراء. بالفعل، في العملية الاستقرائية لإزالة المفرديات، في كل خطوة نقوم بتفجير صاعد لنقطة يمكن أن تكون إما نقطة ملساء للقاسم الاستثنائي، أو تقاطع مستقيمت إسقاطيين. في الحالة الأولى، يتم تطعيم ورقة جديدة بشجرة وفي الحالة الثانية، يتم تقسيم حافة إلى حافتين. يمكن اختيار المستقيم الإسقاطي الأول، الآتي من التفجير الأول الصاعد، ليكون جذر هذه الشجرة.

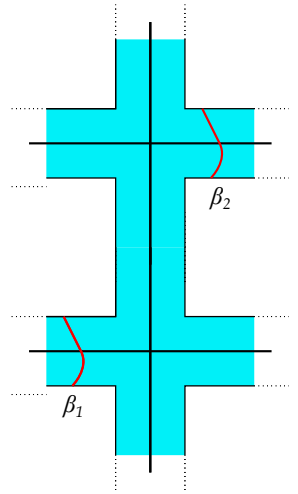


سيكون من الملائم إجراء تفجير صاعد مرة أخرى لكل من الـ n نقطة على القاسم الاستثنائي، إذا لزم الأمر، يتم إدخال مستقيمت إسقاطية جديدة، من أجل التأكد من أنه في نهاية المعالجة، يحتوي كل مستقيم إسقاطي على نقطة واحدة على الأكثر من المحوّل الفعلي. يمكننا حتى أن نفترض أن تلك المركبات من القاسم والتي تلتقي المحوّل الفعلي هي أوراق شجرة إزالة المفرديات.

لنلخص. ليكن C منحنيًا تحليليًا معرفًا في جوار لـ $(0, 0)$ في \mathbf{R}^2 ممثلًا بالمعادلة $F(x, y) = 0$ ، نستطيع إنشاء الأشياء الآتية.

• سطح S ذو حد مترابط موجهه.

• قاسم استثنائي E ، $E \subset S$ ، يتكون من عدد معين من الدوائر التي تتقاطع بشكل عرضي، كل اثنتين تتقاطعان على الأكثر مرة واحدة. بيان التقاطع المرتبط هو شجرة مجذرة. التغطيس $E \subset S$ هو تكافؤ ترادف.



• اتحاد منفصل منته \hat{C} من الأقواس التحليلية الملساء β_1, \dots, β_n في S تقطع E عرضيًا. تقاطع \hat{C} مع مركبة لـ E يكون خاليًا إذا لم تكن هذه المركبة ورقة من الشجرة، وتحتوي على نقطة واحدة على الأكثر إذا كانت ورقة. نستطيع أن نفترض علاوة على ذلك أن \hat{C} عرضي على حد S وأن كل قوس β_i يتقاطع مع الحد في نقطتين.

• تطبيق تفجير هابط تحليلي $\Psi: S \rightarrow \mathbf{R}^2$ ، يقوّض E إلى المبدأ، والذي هو تفاكل من $S \setminus E$ في قرص صغير مثقوب، والذي يقوّض \hat{C} إلى منحنيًا المفرد C .

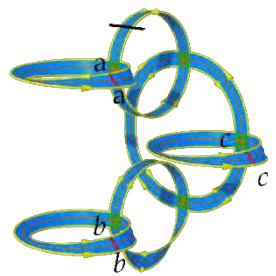
ندكر أن كل حلقة في S يمكن أن تكون موجّهة أو غير موجّهة. ليكن γ منحنياً مغلقاً مغموساً في سطح، ويمر مرة واحدة من خلال نقطة x . عندما نقوم بتفجير صاعد للسطح في x ، فإن التقاطع الناتج مقياس 2 للمحوّل الفعلي لـ γ (في السطح المنفجر صعوداً) يساوي التقاطع الناتج لـ γ (في السطح الأصلي) زائداً 1. في الإنشاء الاستقرائي، عندما يظهر مستقيم إسقاطي لأول مرة في القاسم الاستثنائي، فهو نواة شريط لموبيوس تقاطعه الناتج 1. لاحقاً، قد يتم تفجير بعض تقطه صعوداً. كل من هذه التفجيرات تبديل حالة التوجيه / التوجيه المغاير لإحدى مركبات القاسم. الصور السابقة في الهامش (ستة مستقيمت، شجرة بستة رؤوس وست دوائر) يتوافق مع نفس المثال الذي تم تحليله في الفصل المتعلق بالقلائد: تم الحصول عليه بعد ست عمليات تفجير صاعد. أشرنا باللون الأزرق إلى المركبات التي تتوافق مع شرائط موبيوس.

بعض مركبات E تتقاطع مع منحنى إزالة المفرديات \hat{C} : إنها تعرّف بعض الأوراق في شجرة إزالة المفرديات. لنسم تلك الأوراق بالملونة.

لاحظوا أن بعض الأوراق قد تكون غير ملونة.

لاحظوا أنه إذا اخترنا توجيهها ما لكل مركبة من E ، فإن الشجرة المقابلة مستوية بحيث أن أطفال أي عقدة مرتبون خطياً. يؤدي تغيير الاتجاه إلى عكس هذا الترتيب.

مثال



انظروا إلى القلادة في الهامش. هذه هي نفس الشيء الذي تمت مناقشته بالفعل في الفصل الخاص بقلائد موبيوس. أنتجت ست عمليات تفجير صاعد ستة شرائط، اثنان قابلان للتوجيه وأربعة غير قابلة للتوجيه. يتكون القاسم الاستثنائي من التوى الست للأشرطة الستة. يتكون المنحنى المزال المفرديات من ثلاثة أقواس حمراء، موسومة بـ a ، b ، c ، كل منها يقطع حدّ S في نقطتين. في الأعلى، نرى المحوّل الفعلي لمحور γ باللون الأسود. بالالتفاف حول حدّ S يمكننا أن نقرأ المخطط الوترية التحليلي المقابل. فقط تتبع السهم وقرأ $abacbc$. يجب أن نعترف أنه ليس من السهل اتباع الأسهم!

إثبات التوطئة الأساسية

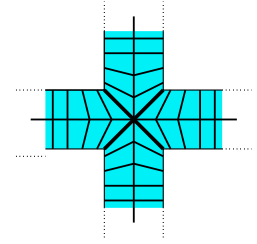
أول ملاحظة تافهة هي أن عملية حذف وتر في مخطط تحليلي تحوِّله إلى مخطط تحليلي آخر. هذا يتوافق مع حذف فرع.

نبدأ بمخطط وتر w مرتبط بمفردة منحني تحليلي مستوي. نعتبر شجرة إزالة المفرديات كما كان من قبل. يوجد إسقاط π للسطح S على القاسم الاستثنائي E وهو تكافؤٍ ترادف. من أجل كل نقطة x من E ، الليفة $\pi^{-1}(x)$ هي قوس يربط نقطتين من الحدِّ إذا كانت x نقطة منتظمة، وصليب إذا كانت x تقاطع دائرتين.

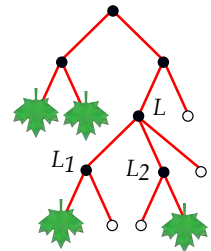
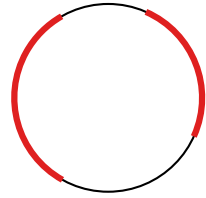
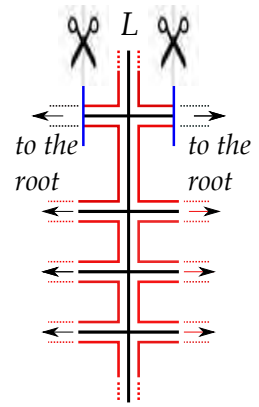
لتكن L عقدة من الشجرة، أي أحد المستقيمات الإسقاطية التي تشكل القاسم الاستثنائي E . هناك سلسلة فريدة من العقد تنتقل من L إلى الجذر. نقوم بقص قوسين منفصلين في S كما في الشكل، بغرض فصل L عن الجذر في S . تعمل نقط النهاية الأربع لهذه الأقواس على تحليل الدائرة الحدية في S إلى أربعة مجالات. اثنان منها (باللون الأحمر) يتوافقان مع "ما هو موجود في L أو أسفل L " في الشجرة. بالالتفاف حول حد S وقراءة المخطط الوترى، نجد بالتالي مجالين منفصلين من الأحرف، أسفل L ، يكون اتحادهما مستقرًا تحت الالتفاف الذي يرسل كل تكرارات حرف إلى التكرار الآخر. لاحظوا أن هذين المجالين يمكن أن يكونا خاليين إذا لم تكن هناك ورقة ملونة أسفل L . إذا كانت هناك ورقة ملونة أسفل L ، فإن أحد المجالين على الأقل يكون غير خالٍ، ولكن يمكن أن تكون الحالة أن واحدا فقط يكون غير خالٍ.

في المحصلة، كل عقدة L في الشجرة تحدد مخططًا وترًا $w(L)$ وهو مخطط جزئي من المخطط الأصلي w وهو "متربط" بمعنى أن أحرفه تشكل مجالًا أو مجالين في w .

فكروا في شجرة مجذرة على أنها شجرة أنساب، الجذر هو العضو المؤسس للأسرة. كل عقدة لديها عدد معين من الأحفاد وبعضهم أوراق ملونة. ليكن L أحد أصغر أفراد الأسرة والذي له ورقتان ملونتان على الأقل كحفيدين. بين أطفال L ، لتكن L_1, \dots, L_k قائمة أولئك الذين لهم سليل ملون واحد على الأقل (مرتبة بهذه الطريقة على طول L). لدينا $2 \leq k$ لأنه في خلاف ذلك سيكون لأحد أطفال L سليلان ملونان على الأقل. للسبب نفسه، لكل L_i سليل ملون وحيد.

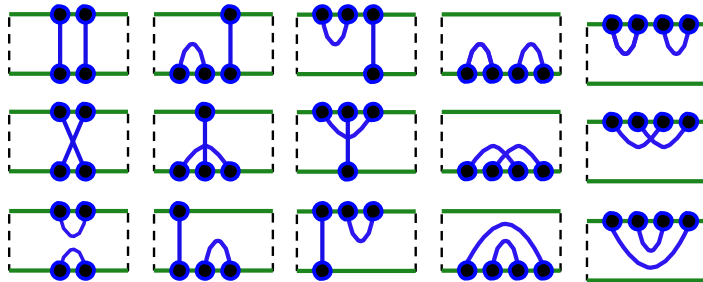
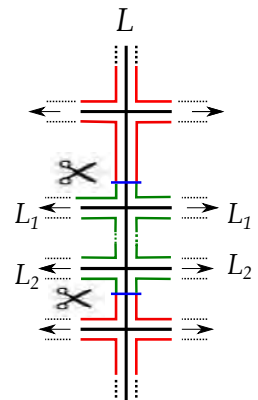


ألياف π . لا تخلطوا بين π من S إلى القاسم E مع Ψ (من S إلى قرص) والذي يفجر هبوطا E إلى نقطة.



الأوراق الملونة خضراء!

الآن تقطع السطح S كما في الشكل في الهامش، فاصليين بين L_1 و L_2 من الجذر ومن جميع الأوراق الملونة الأخرى. كما كان من قبل، يحدّد هذا مجالين (أخضرين) على حدّ S يحتوي اتحادهما على أربع نقاط بالضبط من مخططنا الأولي، مرتبطة بوترين. وتران في مجالين يمكن تنظيمهما بالطرق الخمس عشرة الآتية.



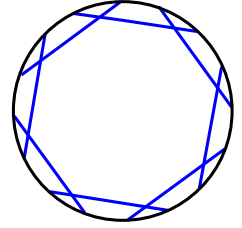
في كل حالة، هناك وتر منعزل، أو مذراة، أو زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية. هذه نهاية إثبات التوطئة الأساسية.

□

المزيد من المخططات غير التحليلية

لقد لاحظنا أن حذف بعض الحروف في مخطط وترتي تحليلي يُنتج مخططًا تحليليًا آخر. لنقل إن مخططًا غير تحليلي أساسي إذا كان غير تحليلي ولكنه يصبح تحليليًا بمجرد حذف وتر واحد. من الواضح أن مخططًا وترتي يكون تحليليًا إذا فقط إذا لم يحتو على مخطط وترتي غير تحليلي أساسي. نذكر أن تبديلة تكون قابلة للفصل إذا فقط إذا لم تحتو على تبديلة كوتنسببيتش $(2, 4, 1, 3)$ أو تبديلتها العكسية $(3, 1, 4, 2)$ ، بحيث في هذه الحالة لا يوجد سوى تبديلتين أساسيتين غير قابلتين للفصل. الوضع أكثر تعقيدًا في حالة المخططات الوترية.

مبرهنة. يوجد عدد غير منته من المخططات الوترية الأساسية غير التحليلية.



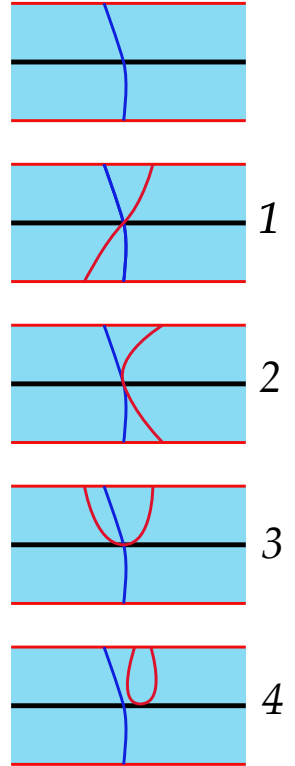
ها هو هنا مثال ستم الإشارة إليه بواسطة C_n ($5 \leq n$). لنعبر النقطة الـ $2n$ من مرتبة بطريقة طبيعية على دائرة. المخطط الوتري يُقرن $2k$ و $2k+3$ من أجل $k=1, \dots, k=n$. بالنسبة إلى $n=5$ ، هذا هو مثالنا السابق على مخطط غير تحليلي بخمسة أوتار. هذا المخطط C_n ($5 \leq n$) ليس تحليليًا لنفس السبب كما في الحالة $n=5$. لا يزال يتعين علينا تبيان أنه إذا تم حذف حرف واحد، فإن المخطط المتبقي يكون تحليليًا. من أجل ذلك، نحتاج إلى شرط تحليلية كافٍ. سيتم توفير ذلك من خلال خوارزمية بسيطة للغاية تحدد ما إذا كان مخطط وتري تحليليًا.

مبرهنة. تقرر الخوارزمية الآتية ما إذا كان مخطط وتري تحليليًا:

1. إذا لم يكن هناك وتر منعزل، ولا مذرأة، ولا زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية، فإن المخطط ليس تحليليًا.
2. إذا كان هناك وترٌّ منعزل، تقوم بحذفه وتتابع. إذا كانت هناك مذرأة، نحذف "الوتر الصغير" ونحتفظ بالمقبض. إن كان هناك زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية، نحذف أحدهما وتتابع.
3. إذا انتهى بنا الأمر إلى المخطط الخالي، فإن المخطط الأصلي كان تحليليًا.

الإثبات سهل. علينا أن نبين أنه إذا كان w مخططًا وإذا كان \bar{w} هو المخطط الجديد بوتر أقل والذي تم الحصول عليه بعد خطوة واحدة من الخوارزمية، فإن w يكون تحليليًا إذا كان \bar{w} تحليليًا. العكس سهل: إذا كان w تحليليًا، فإن \bar{w} أيضًا تحليلي لأنه يتوافق مع حذف فرع. علينا الآن إضافة فرع إضافي (هكذا).

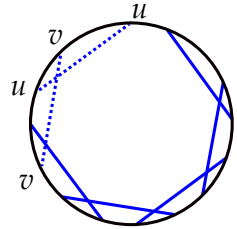
نختار إزالة مفردة نقطة مفردة ما على سطح S . يتوافق وتر مع قوس أملس γ (باللون الأزرق في الهامش) يربط بين تقطعتين على الحد، عرضي على القاسم في نقطة ما x . نضيف منحنيا تحليليا جديدًا أملس (أحمر) γ' في S ، عرضيا أيضًا على القاسم، قريبًا جدًا من γ وعرضيا على γ ، كما في 1/. يُنتج التفجير الداخلي لـ S ، نقطة مفردة جديدة بفرع واحد إضافي آخر. من الواضح أن المخطط الجديد يحتوي على وتر واحد إضافي آخر موازٍ للوتر الأولي أو ضد مواز له، اعتمادًا على التوجيهين على الحد. نختار الآن γ' كما في 2/. بتناس تربيعي مع γ في x وسنحصل على الوضع الموازي أو ضد الموازي الآخر.



إذا كنتم ترغبون في إنشاء مذرة بمقبض معين، فقط أضيفوا منحنيًا أملس γ' قريبًا من γ مع تماس تربيعي مع القاسم كما في 3.

أخيرًا، إذا كنتم تريدون إضافة وتر منعزل مباشرةً بعد حرف معين، تصرفوا كما في 4. □

هيا بنا نختبر خوارزمتنا على المخطط السابق على C_n ($5 \leq n$). بحذف وتر واحد، نحصل على سلسلة غير دورية من $n-1$ وتر. الوتران الأولان u, v يحددان مذرة، لذلك يمكننا حذف الوتر الأول ونستمر إلى أن يكون هناك وتر واحد متبق فقط. هذا المخطط هو إذن تحليلي. يوجد بالفعل عدد غير منته من المخططات غير التحليلية الأساسية.



بحاسوب

من أجل حساب المخططات الوترية التحليلية، هيا بنا نستخدم حاسوبًا للاختبار من أجل القيم الصغيرة لـ n . هذا سهل. نقوم أولاً بتسجيل جميع الكلمات الممكنة ذات الطول $2n$ والتي يظهر فيها كل حرف مرتين. الدقة الوحيدة هي مراعاة الطابع الدوري للكلمة قيد الدراسة. ها هي النتيجة من أجل $n \geq 7$. في الجدول الآتي:

n	2	3	4	5	6	7
الكلمات	3	15	105	945	10395	135135
المخططات الوترية	2	5	18	105	902	9749
إلى تناظر مقرب	2	5	17	79	554	5283

- الكلمات تعني "الكلمات ذات الطول $2n$ التي يتكرر فيها كل حرف مرتين". عدد هذه الكلمات هو العامل المزدوج لـ $2n-1$.
- المخططات الوترية، كما حددناها، هي كلمات إلى تبديلات دورية مقرّبة.
- صورة مخطط وترى بتناظر بالنسبة إلى مستقيم ما هي مخطط آخر، والذي قد يكون نفس المخطط أو لا يكون. المفردات "إلى تناظر مقرب" تحسب عدد الكلمات بتقريب إلى التبديلات ثنائية السطوح هذه.

موسوعة المتتاليات الصحيحة على الخط, A007769, A054499, A279207, A279208.

أضاف نيل سلون آخر متتاليتين بناءً على نسخة أولية من هذا الكتاب.

ثم نحسب عدد المخططات التحليلية. مبدئيًا هذا ليس صعبًا، باستخدام الخوارزمية التي تم وصفها سابقًا. النتيجة هي:

n	2	3	4	5	6	7
المخططات التحليلية	2	5	18	102	817	7641
إلى تناظر مقرب	2	5	17	76	499	4132

يترتب على ذلك أنه بالنسبة إلى $4 \geq n$ ، تكون جميع المخططات تحليلية. من بين المخططات الـ 105 ذات 5 أوتار، الأمثلة الثلاثة الموجودة في الهامش فقط هي التي ليست تحليلية.

المخطط الأول مألوف بالفعل، تحت الاسم C_5 . لرمز إلى الأخرى بواسطة \otimes و \otimes . لم يكن من الصعب بالنسبة لي تخمين الأول ولكن يجب أن أعترف أنني لم أجد الاثنين الآخرين باليد ولكن باستخدام حاسوب.

من بين الـ 902 مخططًا ذات 6 أوتار، يوجد 85 مخططًا غير تحليلي. ومع ذلك، فإن عدم تحليلية معظمها يرجع إلى حقيقة أن أحد مخططاتها الجزئية ليس تحليليًا. من بين المخططات ذات 6 أوتار يوجد فقط اثنان أساسيان: وهما غير تحليليين وجميع مخططاتها الجزئية تحليلية. لاحظوا أن الأول هو العضو C_6 من عائلة المخططات الأساسية اللامتناهية C_n . هو يقابل $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ حيث كل عدد زوجي k (مقياس 12) مرتبط بـ $k+3$ (مقياس 12). ستم الإشارة إلى الثاني بواسطة \otimes .

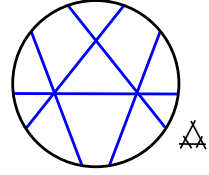
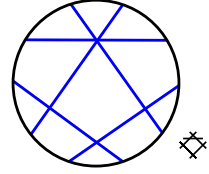
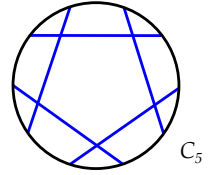
من بين الـ 9749 مخططًا ذات 7 أوتار، 2108 ليست تحليلية. المثال الأساسي الوحيد غير التحليلي هو C_7 .

في الفصل القادم، سأبين أن حاسوبي وجد كل المخططات الأساسية غير التحليلية.

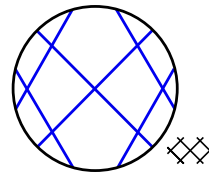
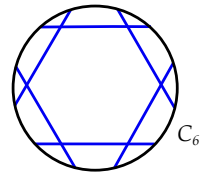
المخططات الوترية المعلمة

لاختتام هذا الفصل ووضعه في سياق أكثر عمومية، أود أن أصف بنية عمولة موجودة خلف الستارة. سيكون من المناسب أولاً تقديم تعزيز طفيف لمفهوم المخططات الوترية التحليلية.

عندما أثبتنا أن خوارزمتنا تقرر ما إذا كان مخطط تحليليًا، كانت النقطة الأساسية هي إمكانية إدخال فرع جديد.



المخططات الوترية غير التحليلية الأساسية الثلاثة ذات 5 أوتار.



المخططان الوتران غير التحليليين الأساسيان ذوا 6 أوتار.

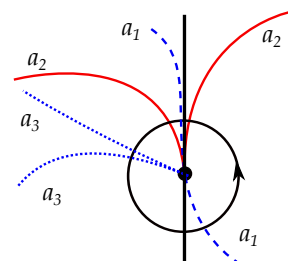
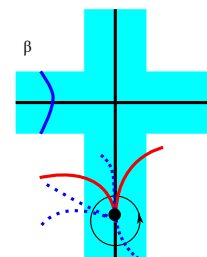
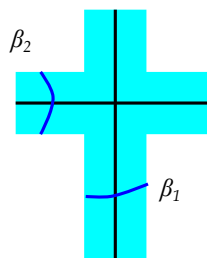
اتضح أن المفرديات الأكثر تعقيداً يمكن أيضاً أن يتم إدراجها، كما سنشرح الآن. لنفترض إزالة مفرديات من منحن C كما كان في السابق، بحيث يكون لدينا سطح S ، قاسم E ، ومجموعة من المنحنيات المساء β_1, \dots, β_n تقطع E عرضياً في عدد منته من النقط p_1, \dots, p_n ، حيث n هو عدد الفروع الحقيقية. نختار إحدى هذه النقط، على سبيل المثال p_1 . نختار الآن منحنيًا مفردًا آخر C_1 ذا فرعًا حقيقيًا، ونفترض أنه لا يحتوي على محور ال y . نحذف β_1 ونستبدل به نسخة من C_1 في السطح S ، بطريقة يتم فيها تحويل محور ال y بالنسبة إلى C_1 إلى القاسم E ويتم تحويل النقطة المفردة لـ C_1 إلى p_1 . يمكننا الآن القيام بتفجير هابط لاتحاد هذه النسخة من C_1 و β_1, \dots, β_n . النتيجة هي نقطة مفردة جديدة، مع $n + n_1 - 1$ فرعًا: أحد فروع C تم تعويضه بنسخة من C_1 .

لنفحص تأثير هذا النوع من العمليات على المخططات الوترية المرتبطة. إذا نظرنا إلى المخطط الوترى المرتبط بـ C_1 ، نرى أن محور ال y يحلّل الكلمة ذات الطول $2n_1$ إلى مركتين، يسار ويمين. في المخطط الوترى الجديد المكون من $2(n + n_1 - 1)$ حرفًا، تم استبدال المجالين هما يسار ويمين بزوج واحد من الأحرف المتطابقة من المخطط القديم ذي $2n$ حرفًا. ومع ذلك، يجب أن تتوخى الحذر، في هذه العملية، يجب أن يكون قد تم عكس ترتيب الأحرف في يسار ويمين. بالفعل، تقاطعا حد S الموجه مع β_1 يجب أن يكونا من إشارتين مختلفتين. علاوة على ذلك، يمكن إدخال C_1 في S بأربع طرق لأن S غير قابل للتوجيه و E غير موجه.

بالطبع، يمكننا المضي قدمًا بنفس الطريقة مع فروع C الأخرى، باستخدام منحنيات مفردة أخرى C_2, \dots, C_n . كل هذه الملاحظات توجي بالتعريف الآتي.

تعريف. مخطط وترى معلّم هو مجموعة من $2n$ نقطة مختلفة $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$ في اتحاد ضلعين متقابلين لمربع $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (إلى هوميوتشاكلات حافظة للاتجاه لكل ضلع، مقربة).

لاحظوا الميزات الإضافية إذا ما قورنت بالمخططات القياسية. للمخططات المعلّمة جزء أيمن وجزء أيسر. علاوة على ذلك، كل وتر a_i هو الآن موسوم بعدد i من 1 إلى n وهو موجه من a_i^{-1} إلى a_i^{+1} .



$$\text{يسار} = a_1 a_2, \text{ يمين} = a_1 a_2 a_3$$

لاحظوا أن اليسار أو اليمين قد يكونا خاليين.

في معادلة $F(x, y) = 0$ ، يمكننا استبدال (x, y) أو $(-x, -y)$ أو (x, xy) .

التحويل $(x, y) \mapsto (x, xy)$

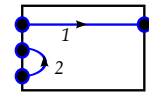
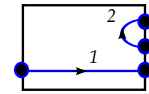
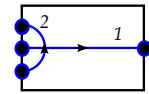
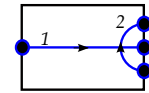
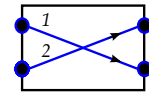
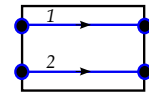
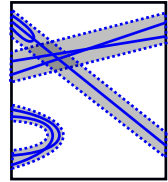
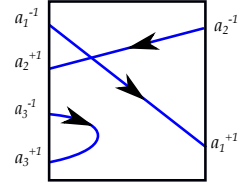
يحافظ على كل مستقيم عمودي، يقوّض المحور $x = 0$ إلى المبدأ، ويعكس الاتجاه بالنسبة إلى $x > 0$.

هذا ليس مفاجأة: هذا تطبيق تفجير هابط. مربع هذا التحويل يحافظ على الاتجاه على كل مستقيم عمودي (من أجل $x \neq 0$).

اسمحوا لي أن أشير بواسطة AMC إلى مجموعة تلك المخططات التورية المعلّمة التي تكون تحليلية، أي تلك التي تنشأ من منحني تحليلي $F(x, y) = 0$ والتي لا تحتوي على محور الـ y . لاحظوا أن تحليلية مخطط معلّم لا تتعلّق باتجاه الأوتار ولا بالتوسيم.

الآن، نأمل أن يكون القارئ قد خمن بنية العمولة على AMC . ليكن w مخططا وتريا تحليليا معلّمًا ذا n وترا. ليكن w_1, \dots, w_n مخططا وتريا تحليليا معلّمًا ذات k_1, \dots, k_n وترا، نعرّف عملا لـ w على (w_1, \dots, w_n) بالطريقة الآتية. نرسم w ونُسجّك كل وتر a_i من w ، منشئين مستطيلات. نستخدم الـ a_i^{-1} والـ a_i^{+1} كجوانب عن اليسار وجوانب عن اليمين من هذه المستطيلات الجديدة. الآن، نُدخل w_1, \dots, w_n في هذه المستطيلات مع احترام الوسوم والتوجيهات. نعيد تسمية الأوتار، من 1 إلى $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ باستخدام الترتيب المعجمي. النتيجة هي مخطط وتري تحليلي معلّم آخر لأن هذه العملية تتوافق مع عملية إدخال المنحنيات التحليلية الموصوفة سابقًا. ومن ثمّ، فإن لـ AMC بالفعل بنية عمولة طبيعية. بالنسبة إلى التامة، لنلاحظ أن العمل الطبيعي للزمر المتناظرة، التي تبدل وسوم الأوتار، يُظهر أن هذه هي في الواقع عمولة متناظرة.

دور الوسوم والتوجيهات هو ببساطة إعطاء المعلومات ذات الصلة حول أي مخطط معلّم قد تم إدخاله في كل وتر، وبأي طريقة.

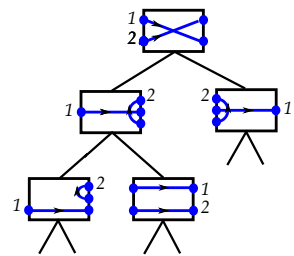


لنحدّد عدد المخططات التورية

سيكون من الرائع الحصول على بعض المعلومات الدقيقة عن العدد a_n للمخططات التحليلية ذات n وترا. على سبيل المثال، علاقة صريحة لمتسلسلة مولّدة $\sum a_n t^n$ من شأنها أن تعطي معدل النمو الأسي الدقيق لـ a_n . لسوء الحظ، لم أكن قادرا على حساب هذه المتسلسلة ☹. في هذا الجزء، سنظهر أن التوطئة الأساسية توفر على الأقل حدًا معقولاً.

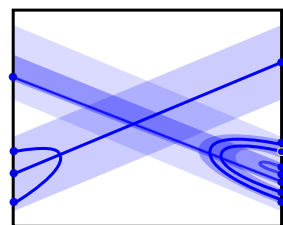
نعتبر شجرة ثنائية مستوية مجدّرة منتبّهة. نجهّز كلا من عقدها الداخلية (بما في ذلك الجذر) بواحد من الأمثلة الستة للمخططات المعلّمة ذات وترين والمثلة في الهامش. من خلال عمليات إدخال تردادية لمخططات الأشقاء في مخطط والداهم، ينتج مخطط تحليلي معلّم، وبالتالي مخطط تحليلي، متناسين الوسوم والتوجيهات وضلعيّ المربع.

أدعي أنه تم إنتاج جميع المخططات التحليلية ذات n وترًا بهذه الوصفة. هذا صحيح بالنسبة إلى $n=2$ لأن كلا الشكلين مع وترين (مرتبطين أو غير مرتبطين) يظهران عندما ينسى المرء التعليم في الأمثلة الستة. الآن، ليكن w مخططًا تحليليًا ذا $n+1$ وترًا، ولنطبق التوطئة الأساسية. لذلك، نجد $\dots aa\dots$ ، $\dots ab\dots ba\dots$ ، $\dots ab\dots ab\dots$ أو



$\dots b\dots aba\dots$ في المخطط. في حالة aa ، نسمي b الحرف الذي يأتي قبل a بالترتيب الدوري. تحذف خوارزمتنا a وتنتج مخططًا تحليليًا \bar{w} ذا n وترًا، يمكننا من أجله تطبيق الاستقراء. هذا يعني أن \bar{w} يمكن أن "يكسى" بوسوم وتوجيهات بطريقة يتم إنتاجها بواسطة شجرة ثنائية، على النحو الوارد أعلاه. يتم الحصول على مخططنا w من \bar{w} باستبدال وترين بوتر واحد. من السهل التحقق من أن أمثلتنا الستة كافية لتحقيق هذه المضاعفة باستخدام إدخال في العمولة. ومن ثم يتم إنشاء w من شجرة ثنائية ذات $n+1$ ورقة بنفس الوصفة.

تحتوي شجرة ثنائية مجذرة ذات n ورقة على $n-1$ عقدة داخلية (بما في ذلك الجذر) بحيث يكون هناك 6^{n-1} وسما يمكننا على العقد الداخلية. عدد الأشجار الثنائية المستوية ذات n ورقة يُعطى بواسطة عدد كتلان رقم $(n-1)$. لذلك، نحصل على التقدير التقريبي الآتي.



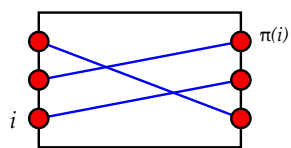
مبرهنة. العدد a_n للمخططات الترتيبية التحليلية ذات n وترًا هو أقل من 6^{n-1} مرة عدد كتلان رقم $(n-1)$.

تذكروا أن $\frac{1}{n} \log C_n$ يتقارب إلى $\log 4$ عندما يؤول n إلى اللامتناهي.

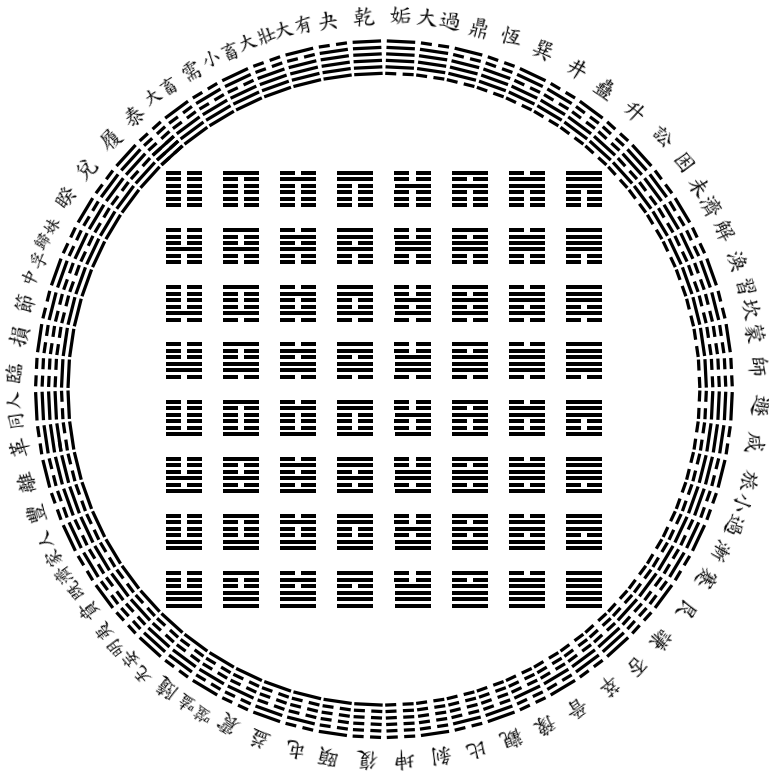
لذلك

$$\limsup \frac{1}{n} \log a_n \leq \log(24).$$

لاحظوا أن أي تبديلة على n حرفًا يمكن اعتبارها مخططًا ذا n وترًا، بحيث تربط كل أوتاره نقطًا على ضلعي المربع. على وجه الخصوص، تُنتج التبديلات القابلة للفصل مخططات تحليلية معلّمة. هذا يعطي حدًا أدنى لنمو a_n حيث أننا قمنا بالفعل بحساب التبديلات القابلة للفصل.



$$\liminf \frac{1}{n} \log a_n \geq \log(3 + 2\sqrt{2}).$$



تتكون المخططات السداسية الصينية الـ $2^6 = 64$ من ستة أشرطة أفقية يمكن توصيلها أو فصلها. ظهرت في **بي جينغ** - I Ching أو Yi Jing أي كتاب التغييرات - المكتوب منذ أكثر من 2500 عام وهي استخدمت بشكل شائع كأداة للعرافة. في الأصل، تم ترتيبها بطريقة غامضة، تُنسب عادةً إلى الملك وين، ولا يزال العلماء يحاولون فكها. منذ ألف عام، رتبها شاو يونغ كما هو موضح في الصورة، في دائرة وفي مربع. في عام 1701، أرسل اليسوعي جواشيم بويجي نسخة من هذا التشكل إلى لايبنيغ الذي شرحه من حيث النشور الثنائية وكتب أحد العروض المنهجية الأولى في علم الحساب في الأساس 2. وهذا مثال مثير للاهتمام للتفاعل بين الفلسفة الشرقية والعلوم الغربية. سأناقش هذا (هذه) الـ بي جينغ (اليجينغيات) أكثر قليلاً في الجزء الأخير من هذا الفصل.

المخططات الوترية التحليلية :

البيانات المتشابكة



كريستوفر لويد سيمون.

أحد الجوانب الممتعة للزخات العشوائية هي أنها مليئة بالمفاجآت. كريستوفر لويد سيمون دارس جامعي في المدرسة العليا (للمعلمين) في ليون ووافق بصدر رحب على قراءة المسودة الأولى لهذا الكتاب. بينما كان يقرأ نسخة أولية من الفصل السابق، كانت له فكرة رائعة لنقل المناقشة من المخططات الوترية إلى البيانات المتشابكة المرتبطة بها. لقد سبق لنا أن صادفتنا هذا المفهوم بالفعل في دراستنا لكلمات فائس المرتبطة بالمنحنيات العامة المغموسة في المستوي. نعتبر مخططا وتريا، إن مجموعة رؤوس بيانه المتشابك هي ببساطة مجموعة الأوتار، والحواف تصل الأوتار المرتبطة (أي المتقاطعة). لا يأتي كل بيان من مخطط وقد يأتي بيان من عدة مخططات. ومع ذلك، تبيّن أن البيانات المتداخلة القادمة من المخططات التحليلية سهلة التحليل. التثليج فوق الكعكة (أو وضع الكرز فوق الكعكة) يكمن في أن هذه البيانات تم تقديمها منذ أربعين عامًا في سياق مختلف تمامًا وهي مفهومة جيدًا. بفضل هذا المنظور الجديد، سوف نحصل على القائمة الكاملة للمخططات الوترية غير التحليلية الأساسية.

العودة إلى التبديلات القابلة للفصل

من أجل تحفيز ما يأتي، هيا بنا لنعيد بسرعة زيارة الموقف الأبسط للتبادلات كثيرة الحدود (يعني التبديلات القابلة للفصل) الذي درسناه في الفصول الأولى.

تكون π تبديلة في $\{1, \dots, n\}$. بيان التبديلة $G(\pi)$ المرتبط بـ π له $\{1, \dots, n\}$ كرؤوس، وحافة تربط i و j إذا عكست π ترتيب (i, j) . هذا هو أيضا البيان المشابك للمخطط الوتري المعلم المرتبط، مع n حرفا على كل جانب.

نحن نعلم أنه إذا كان π تبادلا كثير الحدود، فإن لعدد من صحيحين متتابعين على الأقل صورتين متتابعين. وبالتالي فإن للأوتار المقابلة خاصية أن أي وتر يتقاطع مع أحدهما يتقاطع مع الآخر.

بتعبير البيان $G(\pi)$ ، يقترح هذا التعريف الآتي. يُسمى رأسان x و y في بيان توأمين إذا كان لهما نفس الجيران (مختلفين عن x أو y). يُسمَّيان توأمين صحيحين أو خاطئين حسب وجود حافة تربطهما. يمكن دمج توأمين في بيان في رأس واحد، ما ينتج عنه بيان أصغر أقل برأس واحد.

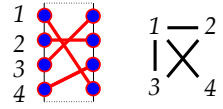
لذلك فإن البيان $G(\pi)$ الذي يأتي من تبادلي كثير الحدود π يحتوي على توأمين على الأقل، يتوافقان مع عددين صحيحين متتابعين i و $i+1$ بحيث يكون $\pi(i+1) = \pi(i) \pm 1$. دمج التوأمين في البيان يرقى إلى دمج العنصرين i و $i+1$. تتميز التبادلات كثيرة الحدود بحقيقة أن تكرار إجراء الدمج هذا يؤدي في النهاية إلى التبديلة التافهة بـ $n=1$.

تعريف. يُطلق على بيان منته اسم بيان مقابل إذا كان من الممكن اختزاله إلى بيان تافه ذي رأس واحد عن طريق دمج التوأمين على التتابع.

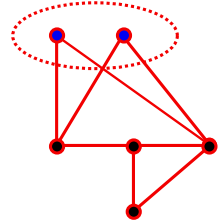
قضية. تكون تبديلة تبادلا كثير الحدود إذا فقط إذا كان بيان التبديلة المرتبط بها بيانا مقابلا.

لقد شرحنا للتو لماذا بيان التبديلة لتبادلي كثير الحدود هو بيان مقابل. لإثبات العكس يكفي تبين أنه إذا كان $G(\pi)$ بيانا مقابلا، فهناك عدنان صحيحان متتابعان ذوا صورتين متتابعين. الإثبات هو عن طريق الاستقراء على n . إذا كان i, j ($j > i$) توأمين خاطئين (صحيحين على التوالي) فإن صورة المجال $\{i, i+1, \dots, j\}$ بواسطة π هي $\{\pi(i), \pi(i+1), \dots, \pi(j)\}$ ($\{p(j), p(j+1), \dots, p(i)\}$ على التوالي). إذا كان $i+2 \leq j$ ، فإن الصورة $\pi(\{i, \dots, j-1\})$ هي أيضا مجال ونطبق فرضية الاستقراء على اقتصار π على $\{i, \dots, j-1\}$ بحيث يجد المرء عددين صحيحين متتابعين بصورتين متتابعين.

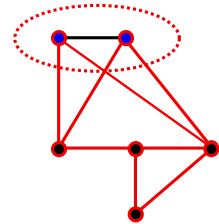
□



تبديلة وبياناتها



التوأمين الزائغان. لاحظوا أن اثنين من الرؤوس المنعزلة هما توأمين زائغان. أنا لست مسؤولاً عن المصطلح الذي هو تقليدي وأكثر ملاءمة من توأمين البيضتين (أو التوأمين الأخوين). كما أنه أقرب إلى الكلمة الفرنسية "faux jumeaux".



توأمين صحيحان (متشابهان أو توأمين البيضة الواحدة).

المصطلح "بيان مقابل" يأتي من حقيقة أن ممتمة بيان مقابل هي أيضا بيان مقابل. بيان G ومتممة \bar{G} لهما نفس الرؤوس ويكون رأسان متجاورين في \bar{G} إذا فقط إذا لم يكونا متجاورين في G .

تم تقديم البيانات المقابلة في السنوات 1970 تحت مختلف الأسماء (الـ D^* - بيانات، وبيانات ديئسي الوراثة وبيانات الـ 2- شفعية: انظروا¹⁶¹ للمراجع). ليس من الصعب وصفها. اسمحو لي أن أدرج بعض خصائصها، وأترك البراهين (الابتدائية) للقارئ.

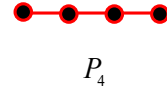
فيما يأتي، جميع البيانات منتهية، من دون حلقات ولا حواف متعددة. يعرف بيان مترابط فضاء متريا على مجموعة الرؤوس. المسافة بين رأسين هي، وفقا للتعريف، طول أقصر طريق يربط بينهما.

يقول منظرو البيانات إن بيانا جزئيا H من بيان G مُحدثٌ إذا كانت أي حافة في G تربط رأسين في H هي أيضًا حافة في H .

مبرهنة. الخصائص الآتية لبيان G منته متكافئة.

1. G بيان مقابل.
2. G هو بيان تبديلة لتبادل كثير الحدود.
3. أي رأسين في نفس المركبة المترابطة من G متصلان بمسار طوله 2 على الأكثر.
4. لا يوجد بيان جزئي مُحدث P_4 بأربعة رؤوس كما في الهامش.

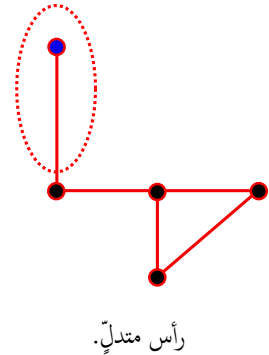
لاحظوا أن كلا من بياني التبديلة المرتبطين بتبديلتَي كونتسبهميتش المحظورتين $(2, 4, 1, 3)$ و $(3, 1, 4, 2)$ إيزومتشاكلان مع P_4 .



البيانات القابلة للتقويض

بدءًا من شجرة، يمكنكم نزع أوراقها والقيام بذلك من جديد حتى يتم تجريد الشجرة من أوراقها تمامًا. نقول إن رأسًا في بيان (رأس) متدلٍ إذا كان مجاورًا لرأس وحيد. يمكن إنشاء أي شجرة بإضافات متتابعة لرؤوس متدلّية، بدءًا من شجرة برأس واحد فقط.

تعريف. يكون بيان منته قابلا للتقويض إذا أمكن اختصاره إلى بيان برأس واحد من خلال تطبيق نوعين من العمليات الأولية: حذف رأس متدلٍ ودمج التوائم.



¹⁶¹ A. Brandstädt, V. B. Le, and J. P. Spinrad. *Graph classes: a survey*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.

إذا كنتم بنائين أكثر من هدامين، يمكنكم التعبير عن نفس الشيء بطريقة أخرى. ابدؤوا بالبيان التافه برأس واحد وطبقوا نوعين من العمليات: إضافة رأس متدل أو إنشاء زوج من التوائم. تتكون العملية الثانية ببساطة من مضاعفة رأس وربط التوأمين المولودين حديثاً ببقية البيان كما كان الرأس الأصلي. ثم قرروا ما إذا كنتم تريدون توأمًا صحيحًا أو توأمًا زائفًا. النقطة الأساسية هي الآتية.

قضية. يكون مخطط وتري تحليليًا إذا وفقط إذا كان بيانه المتشابك قابلاً للتقويض.

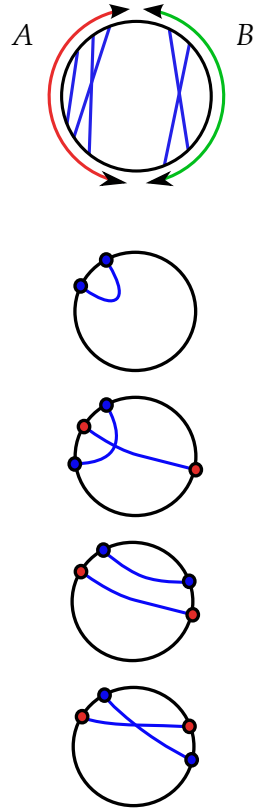
يتبع ذلك من الوصف الخوارزمي للمخططات التحليلية الوارد في الفصل السابق. قبل الإثبات، اسمحوا لي أن أبدي ملاحظة أولية، كفاتحة للشهية.

ليكن w بيانًا ولتكن A مجموعة جزئية من مجموعة أحرفه الـ $2n$ على دائرة. نقول إن A مستقر تحت w إذا كان كلما انتمى أحد طرفي وتر ما إلى A يكون طرفه الآخر منتمياً إلى A . بتعبير آخر A هي مخطط وتري جزئي w_A من w .

نفترض أن هناك مجالاً A مستقرًا تحت w ، ولتكن B متممة. من الواضح أن البيان المتشابك $G(w) \perp G(w)$ هو الاتحاد المنفصل للبيانين $G(w_A)$ و $G(w_B)$ و w_B . ويترتب على ذلك أن $G(w)$ قابل للتقويض إذا وفقط إذا كان $G(w_A)$ و $G(w_B)$ قابلين للتقويض. توضح خوارزمتنا أنه إذا كان w_A و w_B تحليليين فكذا يكون w . في المقابل، إذا كان w تحليليًا، فالحال كذلك بالنسبة إلى المخططين الجزئيين w_A و w_B . هيا بنا الآن نثبت القضية.

نبدأ بمخطط تحليلي w . إذا كان وتران من w متوازيين أو ضد متوازيين فإن الرأسين المرتبطين في البيان المتشابك توأمين وخوارزمتنا تدمجها. تعطي مذرة رأسًا متدليا في البيان والخوارزمية تحذف الوتر القصير وتحافظ على المقبض. يعرّف وتر منعزل رأسًا منعزلاً، والذي تتم إزالته بواسطة الخوارزمية. ويترتب على ذلك أن البيان المتشابك المرتبط ببيان تحليلي قابل للتقويض.

بالنسبة إلى العكس، نبيّن أن كل مخطط w يكون بيانه المتشابك $G(w)$ قابلاً للتقويض يحتوي على وتر منعزل، أو مذرة، أو زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية.



يتوافق وتر منعزل في مخطط مع حرفين متتابعين متطابقين $\dots aa \dots$ في الكلمة الدورية. تتوافق مدزاة مع كلمة جزئية من الشكل $\dots aba \dots$. يتوافق زوج من الأوتار المتوازية (ضد المتوازية على التوالي) مع $\dots ab \dots ba \dots$ (على التوالي $\dots ab \dots ab \dots$).

سيكون إثباتنا بالتناقض. ليكن w مثلاً مضاداً محتملاً للتأكيد السابق بأقل عدد من الأوتار. لذا فإن $G(w)$ قابل للتقويض ولا يحتوي w على وتر منعزل، ولا يوجد زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية، ولا توجد مدزاة.

لما كان $G(w)$ قابلاً للتقويض، فثمة رأس α وهو إما منعزل، أو متدلّ، أو جزء من زوج من التوائم. ليكن \bar{w} البيان الذي تم الحصول عليه بحذف α من w .

بالطبع $G(\bar{w})$ قابل للتقويض بحيث، نظراً إلى الأصغرية، فهو يحتوي على كلمة جزئية $\dots aa \dots$ أو $\dots aba \dots$ أو $\dots ab \dots ba \dots$ أو $\dots ab \dots ab \dots$.

المشكلة هي أن هذه كلمات جزئية من \bar{w} وليس من w الذي يحتوي أيضاً على نسختين من الحرف α الذي يمكن أن يتسلل إلى الكلمات الجزئية أعلاه.

لاحظوا أنه نظراً إلى الأصغرية، فإن أي مجال مستقر تحت w هو إما خال وإما كل شيء. بديهياً :

- 0، 1 أو 2 من الأحرف α يمكن أن تتسلل في الكلمة الجزئية،
 - الكلمة الجزئية من \bar{w} يمكن أن تتوافق مع الوتر المنعزل، أو مع مدزاة، أو مع زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية،
 - يمكن أن يكون α منعزلاً أو متدلّياً أو توأمًا، صحيحاً أو زائفاً، في $G(w)$.
- يُنتج هذا $3 \times 4 \times 4$ حالة للفحص! لحسن الحظ، يمكن دراسة العديد من الحالات في وقت واحد.

1/ إذا لم يتسلل حرف α إلى الكلمات الجزئية أعلاه، فلا توجد مشكلة: يكون للوتر المنعزل أو المدزاة، أو زوج الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية في \bar{w} نفس الخاصية في w .

2/ إذا كان α منعزلاً في $G(w)$ ، فهذا يعني أن لا وتر يقطع α . لذلك يحلّل α الدائرة إلى مجالين اللذين يجب أن يكونا خاليين.

3/ إذا تسلسل حرفان α إلى الداخل، فلا يمكن أن يظهرهما كحرفين متتابعين لأن ذلك من شأنه أن يُجبر الوتر α على أن يكون منعزلاً في w .

هذا الإثبات حالة بعد حالة ليس ممتعا بشكل خاص. يمكنكم تخطيه إذا كنتم ترغبون في ذلك، ولكن إذا قمتم بذلك، فيجب عليكم أن تتعاطفوا معي، أنا الذي كان عليّ أن أسرد جميع الحالات واحدة تلو الأخرى.

أستعمل الرمز \Leftarrow للدلالة على وجود "تناقض".

لذلك، في هذه الحالة، علينا دائماً أن ننظر إلى

$$\dots aab \dots aab \dots \text{أو} \dots aab \dots baa \dots \text{أو} \dots aabaa \dots$$

يُنتج هذا على التوالي مذرة (α, b) ، زوجاً من الأوتار المتوازية (α, b) ، أو الأوتار ضد المتوازية (α, b) في w . \Leftarrow

4/ إدخال α واحد في وتر منعزل يستلزم $\dots a\alpha a \dots$ الذي ينتج مذرة في w بمقبض $\Leftarrow \alpha$.

حتى الآن، لم نستخدم حقيقة أن α متدلّ أو توأم. سيتم استخدام هذا في الحالات المتبقية، عندما يدخل α وحيداً في مذرة أو زوجاً من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية من \bar{w} .

إذا كان α متدلّياً، فليكن β الوتر الوحيد في w الذي يتقاطع مع α . إذا كان α أشقاء توأم، فلنشر β إلى أحدهم. يحدد الوتران α و β أربعة مجالات في الدائرة، باستثناء α و β ، والتي سأسمها قطاعات. إذا كان α متدلّياً، فإن اتحاد قطاعين على نفس الجانب من α يكون مستقراً. إذا كان α و β توأمين، فإن اتحاد قطاعين متقابلين يكون مستقراً.

5/ نفترض الآن أن حرفاً واحداً α يدخل $\dots aba \dots$ أو $\dots ab \dots ba \dots$ أو $\dots ab \dots ab \dots$ وأن أحد الحرفين a و b يساوي β . إذن، الحرفان α و β متتابعان في w . هذا يعني أن أحد القطاعات خال.

5-1/ في حالة التدلّي، هذا يعني أن القطاع الآخر، على نفس الجانب من α ، مجال مستقر، وبالتالي أيضاً خال. إذن، α مذرة في w بمقبض β . \Leftarrow

5-2/ في حالة التوأم، هذا يعني أن القطاع المقابل مجال مستقر، وبالتالي خال. إذن،

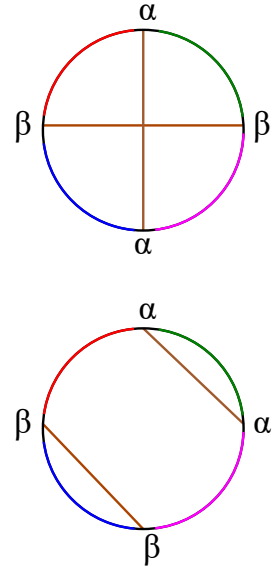
α ، β زوج من الأوتار المتوازية أو ضد المتوازية في w . \Leftarrow

6/ أخيراً، نفترض أن حرفاً واحداً α يدخل $\dots aba \dots$ أو $\dots ab \dots ba \dots$ أو $\dots ab \dots ab \dots$ وأن لا الحرف a ولا الحرف b يساوي β .

6-1/ نفترض أن (a, b) وتران متوازيان أو ضد متوازيين في \bar{w} . يؤدي إدخال

α واحد في ab إلى إنتاج $\dots aab \dots ba \dots$ أو $\dots aab \dots ab \dots$ من الحرفين المتتابعين ba (أو ab) يأتي أن هذين التكرارين على نفس الجانب من الوتر α . من الحرفين المتتابعين aab في w ، يتبع أن هذين التكرارين الآخرين لـ a و b على جانبيين مختلفين من α . ومن ثم يتقاطع الوتر α مع واحد فقط من الوترين a ، b .

6-1-1/ إذا كان α متدلّياً، فهذا يفرض على a أو b أن يساوي β . \Leftarrow



2-1-6/ إذا كان α ، β توأمين، فهذا غير ممكن \Leftrightarrow .

2-6/ نفترض أن (a, b) مذرة في \bar{w} . إدخال حرف α في $\dots aba \dots$ ينجع $\dots aaba$ أو $\dots abaa$ بحيث يجب أن يتقاطع الوتر α مع الوتر a .

2-6-1/ إذا كان α متدليا، فهذا يفرض $\beta = a$.

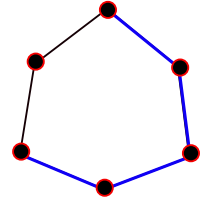
2-6-2/ إذا كان (α, β) توأمين، تُظهر الأحرف المتتابعة $aaba$ أن الحرفين a يقعان في جانبين متقابلين من α ، وبالتالي في قطاعين متقابلين. ويترتب على ذلك أن $\beta = b$.

□ وهذا ينهي البرهان. أف!
علينا الآن، أن نفهم طبيعة البيانات القابلة للتقويض.

قابل للتقويض، وراثي المسافة

تم تعريف البيانات القابلة للتقويض من قبل عدة مؤلفين منذ أربعين عاما، بأساء مختلفة وبدوافع مختلفة جدًا. سنرى أن هذه البيانات قريبة جدًا من كونها أشجارًا.
هوفوركا¹⁶² عرّف البيانات وراثية المسافة في عام 1977.

¹⁶² E. Howorka. A characterization of distance-hereditary graphs. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 28(112):417-420, 1977.



دورة طولها أكبر من أو يساوي 5 ليست وراثية المسافة.

تعريف. يسمى بياناً منتهٍ G وراثي المسافة إذا كان من أجل كل بيان جزئي مترابط محدث H في G ، تكون المسافة بين رأسين من H في H تساوي المسافة بين هذين الرأسين في G .

على سبيل المثال، أي شجرة وراثية المسافة وأي دورة طولها لا يقل عن 5 ليست كذلك. يكفي اختيار H كبيان جزئي محدث معرّف بواسطة مسار داخل الدورة، طولها أكبر من نصف طول الدورة (باللون الأزرق في الصورة).

نعتبر بياناً منتهياً ونختار طولاً ما لكل حافة، والذي يمكن أن يكون أي عدد حقيقي موجب. نعرّف طول مسار كمجموع أطوال حوافه والمسافة بين رأسين كأصغر طول مسار يربط بينهما. نتحدث عندئذ عن بيان متري.

نحن نبحث عن تمييز للفضاءات المترية (تسمى عادةً الأشجار المترية) الناشئة بهذه الطريقة من الأشجار. ها هي الإجابة. ليكن (E, d) فضاء مترياً منتهياً. نختار أربع نقط x_1, x_2, x_3, x_4 في E ونحسب مجاميع أطوال أزواج الأقطار الثلاثة :

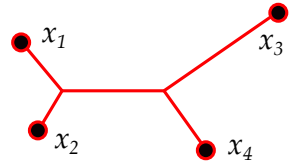
$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4) ; d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4) ; d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3).$$

ليكن s (على التوالي l, m) أصغر (على التوالي أوسط، أكبر) هذه الأعداد الثلاثة : $l \geq m \geq s$. تبين أن فضاء متريا منتبها يكون متقايسا مع مجموعة جزئية من شجرة مترية إذا وفقط إذا كان $m=l$ من أجل كل رباعية نقط. هذا ليس من الصعب إثباته وأتركه كتمرين M25. يستطيع القارئ الكسول أن يطّلع على الإثبات في هذه الورقة القصيرة¹⁶³.

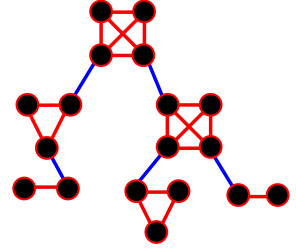
يجب ان نكون حذرين. إن بياننا يكون فيه طول جميع الحواف 1, يمكن أن يكون متقايسا مع مجموعة جزئية من شجرة مترية دون أن يكون في حد ذاته شجرة. انظروا إلى المثال الموجود في الهامش.

في نظرية البيانات، تسمى هذه البيانات، البيانات الكُتلية. من أجل إنشائها، نبدأ بشجرة، نحذف بعض رؤوسها ونستبدلها بـ عُصبا، أي بيانات منتبها حيث كل أزواج الرؤوس متجاورة، كما في الشكل. أقترح على القارئ أن يُثبت أن هذا هو بالفعل تمييز للبيانات الكُتلية (M15 وفي حالة الطوارئ انظروا¹⁶⁴).

في السنوات 1980، طوّر فروموپ نظرية هندسية للفضاءات الزائدية التي كان لها تأثير قوي جدًا على نظرية الزمر التوافقية والهندسية (للأسف ليست جزءًا من نزهتنا). التعريف هو الآتي. يسمى فضاء متري (E, d) زائديا إذا وجد $0 \leq \delta$ بحيث يكون، من أجل كل رباعية نقط كما هو مذكور أعلاه، l و m "متساويين تقريبًا"، أي $\delta \geq l - m$. لاحظوا أن أي فضاء متري منته هو فضاء زائدي (من أجل δ كبير بما فيه الكفاية) بحيث يكون هذا المفهوم مناسبًا فقط في الهندسة واسعة النطاق. هناك العديد من الصيغ المكافئة لهذه الخاصية، والأكثر شيوعًا (للفضاءات المترية الجهدية) هي أن جميع المثلثات الجهدية ضئيلة. نعتبر ثلاث نقط x, y, z ، ونختار ثلاث جهوديات $[x, y]$ ، $[x, z]$ ، $[y, z]$ تربط بينها. يجب أن تكون كل نقطة في $[x, y]$ على مسافة ما، محدودة بانتظام، من الاتحاد $[x, z] \cup [y, z]$ بغض النظر عن اختيار x, y, z (انظروا الصورة). هذا المفهوم قوي بشكل ملحوظ. على سبيل المثال، التغطية الكونية لمنوعة ريمانية متراسة ذات انحناء سالب هي زائدية.



¹⁶³P. Buneman. A note on the metric properties of trees. J. Combinatorial Theory Ser. B, 17:48-50, 1974.

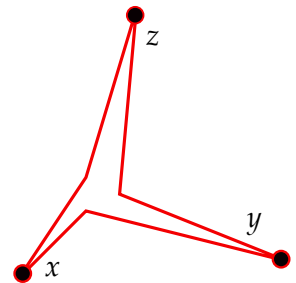


بيان كتلي

¹⁶⁴F. Harary. A characterization of block-graphs. Canad. Math. Bull., 6:1-6, 1963.

يكون فضاء متري (E, d) جهوديا إذا تحقق من أجل كل ثنائية نقطية (x, y) وجود تغطيس متقايس $i : [0, d(x, y)] \rightarrow E$

بحيث يكون $i(d(x, y)) = y$ و $i(0) = x$



يتم تقريب هذه الفضاءات المترية بشكل جيد من خلال الأشجار، بطريقة كمية. لمزيد من المعلومات حول هذه النظرية، فإننا نشجع القارئ على قراءة¹⁶⁵.

في عام 1986، نشر باندبيلت ومولدر ورقة¹⁶⁶ تقترح تمييزات مترية مجتة للبيانات وراثية المسافة، قريبة من شروط فروموف الزائدية.

تعريف. يُدعى بيانٌّ منتهٍ G شجريًا إذا كان من أجل كل 4-قائمة من الرؤوس x_1, x_2, x_3, x_4 يكون اثنان من الأعداد الآتية متساويين:
 $d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4)$; $d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)$; $d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3)$.

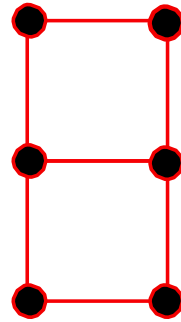
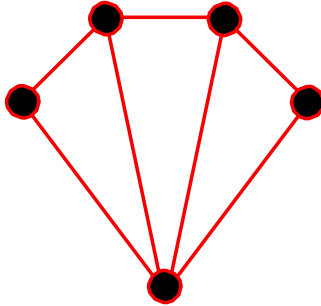
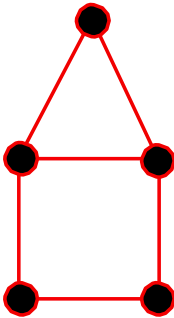
ربما تخمن القارئ أنه يتضح أن كل هذه التعريفات هي في النهاية متكافئة.

مبرهنة. ليكن G بيانًا منتهيًا. الخصائص الآتية متكافئة.

- 1./ G هو بيان متشابك لمخطط ورتي تحليلي،
- 2./ G قابل للتقويض،
- 3./ G وراثي المسافة،
- 4./ G شجري،

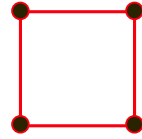
5./ G لا يحتوي على دورة طولها خمسة على الأقل، أو منزل، أو جوهرة، أو حجر دومينو، كبيان جزئي محدث.

تم تصوير المنزل والجوهرة وحجر الدومينو أدناه.



¹⁶⁵É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

¹⁶⁶H.-J. Bandelt and H. M. Mulder. *Distance-hereditary graphs*. *J. Combin. Theory Ser. B*, 41(2):182–208, 1986.



دورة طولها 4 هي شجرية لكنها ليست شجرة.

تمرين: بينوا أن بيانًا شجريًا يكون زائديًا بمعنى فروموف مع $\delta = 2$.

جميع التكافؤات الواردة في المبرهنة السابقة (بالطبع باستثناء البند الأول) مثبتة في الأوراق المذكورة أعلاه. ومع ذلك، سأقترح قريبًا بعض البراهين الأولية.
حان الآن الوقت لجني ثمار عملنا والحصول على وصف بسيط للغاية للمخططات الوترية التحليلية.

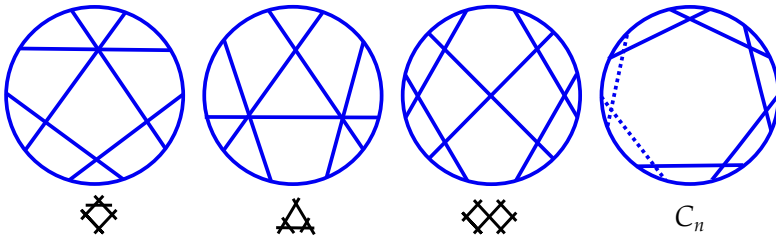
لا ينبغي أن تتفاجؤوا من أن البيانات المتشابهة لـ \diamond ، \heartsuit ، \spadesuit هي المنزل والجوهرة والدومينو.

تمرين: بينوا أن \spadesuit ، \diamond ، \heartsuit هي المخططات الوترية الوحيدة التي بياناتها المتشابهة هي المنزل، الدومينو والجوهرة.

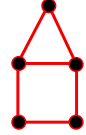
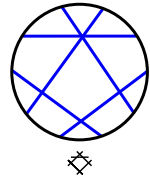
بنفس الطريقة سبق أن وصفنا المخطط الوترية غير التحليلي C_n المعرف بواسطة $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ($5 \leq n$)، حيث يوجد ربط وترية $2k$ و $2k+3$ (من أجل $k=1, \dots, n$)، $(k=n)$. بيانه المتشابه دورة طولها n .

تمرين: أثبتوا أن C_n هو المخطط الوترية الوحيد الذي بيانه المتشابه دورة طولها n . أخيرًا، لاحظوا أن مخططًا وترية جزئيًا يعرّف بيانا جزئيًا مُحدثًا في البيان المتشابه. لذلك، نحصل على وصف مُرضٍ للغاية للمخططات الوترية التحليلية. أكتب المبرهنة الآتية باللون الأزرق لأنها تسلط الضوء على نهجتنا.

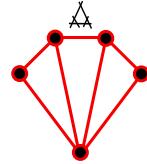
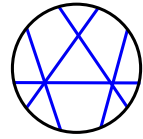
مبرهنة. يكون مخطط وترية تحليليًا إذا فقط إذا كان لا يحتوي على \heartsuit ، \diamond ، \spadesuit أو C_n ($5 \leq n$) كمخطط وترية جزئي.



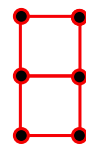
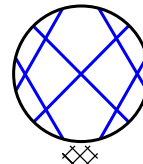
لاحظوا التشابه الكامل مع تمييزنا للتبادلات كثيرة الحدود على أنها التبديلات القابلة للفصل، والتي بدورها هي بالضبط تلك التبديلات التي لا تحتوي على مثالي كوتسبهيشتش $(3, 1, 4, 2)$ و $(2, 4, 1, 3)$.



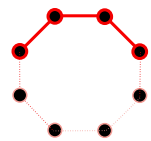
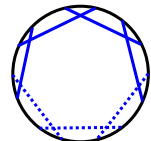
المنزل.



الجوهرة.



الدومينو.



C_n وبيانه المتشابه: ال - n دورة.

بعض البراهين

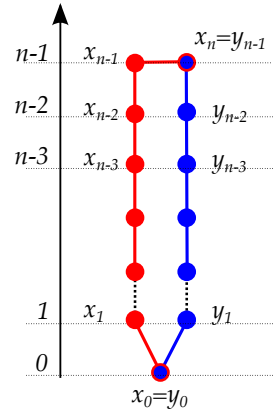
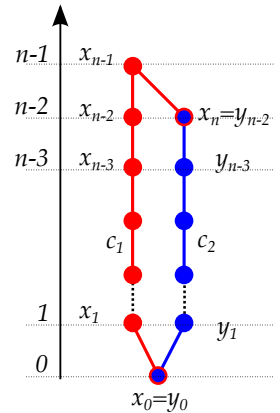
أقدم الآن البراهين على تكافؤات التعاريف في الجزء السابق. معظمها ابتدائي وأقترح أن يحاول القارئ المهتم إثباتها بمفرده. من المهم رسم الصور. في هذه الحالة المحددة، ربما كان العثور على تعريفات مهمة أكثر صعوبة من إثبات تكافؤها.

وراثية المسافة \Rightarrow (لا $\triangleleft \triangleright \boxtimes \boxplus$ هو بيان جزئي محدث)

ليكن H بيانا جزئيا مُحدثًا من البيان G . نقوم بوصل رأسين p و q من H على مسافة n في H بواسطة مسار $c = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ (مع $q = x_n$ و $p = x_0$) في H . يكون رأسان x_i و x_j متجاورين إذا فقط إذا كان i و j متتابعين، لأنه بخلاف ذلك سيكون هناك اختصار. بمعنى آخر، يكون المسار c محدثًا في G . ويزترب على ذلك أنه من أجل تبيان أن البيان وراثي المسافة، يجب أن تثبت أن المسافة بين تقطعي نهاية أي مسار محدث في G تساوي طول المسار.

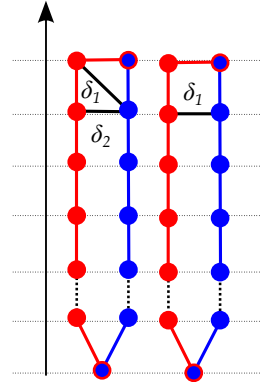
نفترض أنه لا $\triangleleft \triangleright \boxtimes \boxplus$ محدث في G . نختار مسارًا محدثًا $c_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ وبنين، من خلال الاستقراء على n ، أن المسافة في G بين x_n و x_0 هي بالضبط n . نقوم بوصل x_n بـ x_0 بأقصر مسار $c_2 = (y_0, y_1, \dots, y_l)$ في G (مع $y_0 = x_0$ و $y_l = x_n$). بالطبع، إن c_2 هو أيضا محدث و $d(y_0, y_l) = l$ من أجل $l \geq 0$. بالاستقراء، $d(x_0, x_i) = i$ من أجل $0 \leq i \leq n-1$. ويزترب على ذلك أن l يساوي $n-2$ أو $n-1$ أو n . نبين أن الحالتين الأوليين غير ممكنتين. لنفترض أن $l = n-2$ أو $l = n-1$. من خلال الاستقراء، يمكننا أن نفترض أن المسارين c_1 و c_2 يتقاطعان فقط في تقطعي النهاية: يمكن استخدام أي نقطة تقاطع أخرى كنقطة بداية لمسارين أقصر c'_1 و c'_2 .

نرسم صورة في المستوي بحيث يكون ارتفاع رأس في c_1 أو c_2 هو المسافة من x_0 . الحالتان $l = n-1$ و $l = n-2$ مرسومتان في الهامش. رؤوس c_1 حمراء ورؤوس c_2 زرقاء. اتحاد c_1 و c_2 يعرّف دورة c في G . طول c هو على الأقل 5. لا يمكن أن تكون الدورة c محدثة نظرًا إلى عدم وجود دورة محدثة طولها أكبر من أو يساوي 5. لذلك يجب أن توجد أقطار تربط رؤوسا من c_1 برؤوس من c_2 . من المتباينة المثلثية، فرق الارتفاع بين طرفي قطر يمكن أن يكون فقط -1 ، 0 ، 1 . علاوة على ذلك، فالأقطار تربط نقطًا بألوان مختلفة.



هيا بنا نرتب الأقطار (x_i, y_j) من أعلى إلى أسفل، أي (x_i, y_j) قبل $(x_{i'}, y_{j'})$ إذا كان $j < j'$ أو $j = j'$ و $i < i'$.

حاولوا الآن إنشاء سلم، قطر واحد في كل مرة. قاعدة اللعبة هي الآتية. عليكم رسم متتالية مرتبة من الأقطار $\delta_1, \delta_2, \dots$ مع احترام الشروط المذكورة أعلاه ودون إنشاء أي محدث $\triangle \nabla \square \circ$.

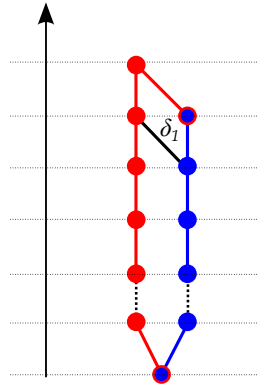


لاحظوا أن القطر δ_k مع جزء c الذي فوقه يعرف دورة. يجب أن يكون أي وتر في هذه الدورة أحد الأوتار المختارة سابقاً $\delta_1, \dots, \delta_{k-1}$.

في الحالة $l = n - 1$ ، هناك احتمالان فقط للقطر الأول δ_1 . يمكن أن يكون (x_{n-1}, y_{n-2}) أو (x_{n-2}, y_{n-2}) . في الحالة $l = n - 2$ هناك احتمال واحد فقط لـ δ_1 .

بعد ذلك، حاولوا اختيار القطر الثاني δ_2 ، مع تجنب $\triangle \nabla \square \circ$. اختيار واحد فقط من الاختيارات الثلاثة لـ δ_1 يتيح لكم القيام بذلك.

أخيراً، حاولوا رسم القطر الثالث، في الحالة الوحيدة حيث يمكنكم رسم δ_1, δ_2 . لا يمكن الاستمرار دون إنشاء واحد من البيانات المحظورة. \square

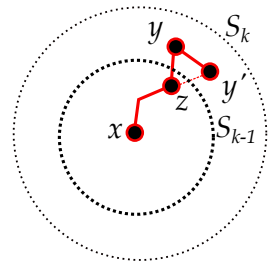


قابل للتقويض \Rightarrow وراثي المسافة

اسمحو لي أولاً أن أبدي ملاحظة أولية.

نختار رأساً x في بيان G وراثي المسافة مترابط وننظر إلى أكبر k بحيث تكون الكرة S_k في G التي شعاعها k والمتمركزة في x غير خالية. لتكن C مركبة مترابطة لـ S_k . إذا كانت C تحتوي على عنصر واحد فقط، فهو رأس متدلٍ في G .

نختار رأسين y و y' في C يكونان متجاورين في C . نختار نقطة ما z مجاورة لـ y ، على مسافة $k-1$ من x . نختار سلسلة c طولها $k-1$ من x إلى z ونسمي c' السلسلة التي طولها $k+1$ والتي يتم الحصول عليها عن طريق إضافة الحافة بين z و y ومن y إلى y' . لما كانت المسافة بين x و y' تساوي k بالضبط، فإن هذه السلسلة لا يمكن أن تكون مُحدثة ويجب أن تكون y' مجاورة لـ z . هذا يعني أن نقطتين في C متجاورتان في نفس الوقت أو ليستا متجاورتين مع أي نقطة z على مسافة $k-1$ من x . ويترتب على ذلك أن C لا يمكن أن تحتوي على مسار محدث P_4 طولها 3، لأنه مع z ، سنتنج جوهرة في G ، وهي ليست وراثية مسافة. ومن ثم فإن C بيان مقابل، ويحتوي على وجه الخصوص على زوج من التوائم. من خلال الملاحظة أعلاه، توأمان في C هيا توأمان في G . \square



شجري \Rightarrow قابل للتقويض

هذا سهل عن طريق الاستقراء. خذوا أربع نقط في البيان، واحذفوا رأسا متدليا أو أدمجوا توأمين. قد تكون إحدى النقط الأربع هي الرأس الذي تمت إزالته. إذا كانت هذه هي الحالة، فاستبدلوا بها الطرف الآخر من الحافة التي تمت إزالتها. انظروا إلى النقط المقابلة في البيان المجرد (مع الأخذ في الاعتبار على سبيل المثال حقيقة أن اثنتين من نقطنا الأربع يمكن أن تكونا التوأمين اللذين تم دمجهما). طبقوا فرضية الاستقراء. □

غير محدث \Rightarrow شجري

هذا واضح حيث إنه يمكن للمرء التحقق بسهولة من أن لا أحد من أمثلة البيانات هذه شجري. □



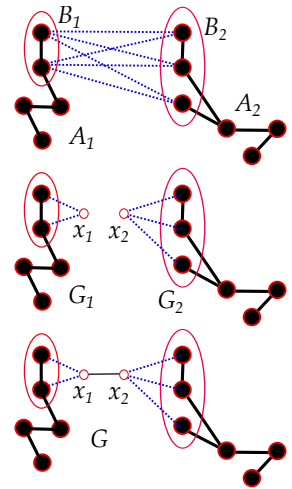
البيانات القابلة للتحليل تماما

انعطاف آخر. الهدف الوحيد من هذا الجزء هو وصف بنية البيانات القابلة للتقويض.

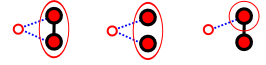
البيانات التي يمكن تجريدتها إلى نقطة بحذف الرؤوس المتدلية فقط هي الأشجار. البيانات التي يمكن تجريدتها إلى نقطة بدمج أزواج التوائم فقط هي البيانات المقابلة. ربما تخمن القارئ أن البيانات القابلة للتقويض لا ينبغي أن تكون بعيدة عن الأشجار. هذا صحيح بالفعل مثلما سأشرح الآن.

أفضل المصطلح "قابل للتحليل" على "قابل للفصل" وهو شائع أيضًا في هذا المجال، نظرًا إلى أننا استخدمنا بالفعل كلمة "قابل للفصل" بالنسبة إلى التبديلات.

ليكن G بيانا منتهيا مترابطا. نفترض أن رؤوسه تم تقسيمها إلى جزأين A_1 و A_2 . لتكن $B_1 \subset A_1$ ، $B_2 \subset A_2$ ، B_1 ، B_2 مجموعة رؤوس A_1 (على التوالي A_2) المجاورة لرؤوس في A_2 (على التوالي A_1). نفترض أن كل عنصر من B_1 مجاور لكل عنصر من B_2 . يتم استيفاء هذا الشرط بشكل تافه إذا كان A_1 أو A_2 يحتويان على عنصر واحد فقط (أو صفر!). لذلك نفترض أن كلا من A_1 و A_2 يحتوي على عنصرين على الأقل. في هذه الحالة، يسمى البيان G قابلا للتحليل والتجزئة A_1 ، A_2 هي تقسيم. من أجل البقاء على اتصال مع هذا التحليل، هيا بنا ننشئ بيانيين G_1 و G_2 بالطريقة الآتية. مجموعة رؤوس G_1 (على التوالي G_2) هي اتحاد A_1 والمجموعة المكونة من رأس إضافي واحد x_1 (على التوالي x_2) يسمى رأس التحكم. بالنسبة إلى حواف G_1 (على التوالي G_2)، نختار حواف G مع الحواف الإضافية التي تربط x_1 (على التوالي x_2) بجميع عناصر B_1 (على التوالي B_2). يمكن إعادة إنشاء البيان G من (G_1, x_1) و (G_2, x_2) من خلال إنشاء ضم بسيط. لاحظوا أن نقطتي التحكم x_1 و x_2 ليستا رأسين لـ G : هما مفيدتان فقط لتحديد الحواف التي تربط بين الجزأين.



لاحظوا أنه عندما يحتوي A_2 على عنصرين، كما في الهامش، فإن البيان G يحتوي على رأس متدلٍ أو زوج من التوائم. قدم هامر ومافري¹⁶⁷ تعريفًا آخر في عام 1987.



لاحظوا التشابه مع الأشجار. يكون بيان مترابط منته شجرة إذا فقط إذا كان كل بيان جزئي محدث يحتوي على حافة قاطعة، أي حافة تجعله غير مترابط.

تعريف. يكون بيانٌ منتهٍ قابلاً للتحليل تماماً إذا كان كل بيان جزئي محدث مترابط بأربعة رؤوس على الأقل قابلاً للتحليل.

ليس من الصعب إثبات أن البيانات القابلة للتحليل تماماً (المترابطة) هي على وجه التحديد البيانات القابلة للتقويض (المترابطة).

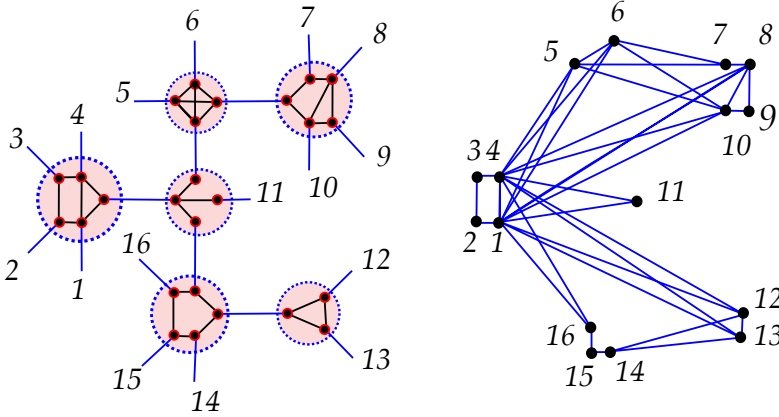
بالفعل، في إنشاء الضم، إذا كان G_1 و G_2 قابلين للتقويض، فإن الشيء نفسه ينطبق على G ، بحيث تكون البيانات القابلة للتحليل تماماً قابلة للتقويض، عن طريق الاستقراء. في المقابل، رأينا أن رأساً متدلّياً أو زوجاً من التوائم يؤدي إلى التحليل. لذلك، فإن البيانات القابلة للتقويض قابلة للتحليل وحتى قابلة للتحليل تماماً، نظراً إلى أن بيانا جزئياً محدثاً من بيان قابل للتقويض هو أيضاً قابل للتقويض.

من أجل إعطاء وصف دقيق للبيانات القابلة للتحليل تماماً، اسمحوا لي أولاً أن أذكر مبرهنة تحليل الانقسام المهمة للبيانات العامة المنتهية والمترابطة. إذا كان بيان مترابط منته G قابلاً للتحليل، نعتبر أنه ضم- G_1 و G_2 كما كان من قبل. ثم نحاول تحليل G_1 و G_2 إلخ. حتى تصبح البيانات الناتجة غير قابلة للتحليل. يمكن وصف النتيجة النهائية لهذا التحليل إلى "قطع أولية" بشكل ملائم بواسطة شجرة بيان موسوم، كما هو موضح أدناه.

هو يتكون من شجرة T حيث كل عقدة داخلية x مزودة ببيان منته مترابط G_x . علاوة على ذلك تم اختيار تقابل ما بين رؤوس G_x والحواف الخارجة من العقدة x في T . نفترض أن تكافؤ كل عقدة (أو تواتر الحواف التي تقع عليها) هو 3 على الأقل. إذا أعطينا مثل هذا البنية، نقوم بإنشاء بيان $G(T)$ وهو "تركيب البيانات G_x التي يتم التحكم فيها بواسطة T ". التعريف هو الآتي.

¹⁶⁷P. L. Hammer and F. Maffray. Completely separable graphs. *Discrete Appl. Math.*, 27(1-2):85-99, 1990. Computational algorithms, operations research and computer science (Burnaby, BC, 1987).

رؤوس $G(T)$ هي أوراق T . لكي نفهم حواف $G(T)$ ، اسمحوا لي فقط برسم صورة، مستوحاة من ورقة جيوان و پول¹⁶⁸ اللذين قدما مفهوم شجرة البيان الموسوم. نرى شجرة ذات 16 ورقة و6 عقد داخلية باللون الوردي. البيان المرفق، ذو 16 رأسًا، مرسوم عن اليمين.



168 E. Gioan and C. Paul. [Split decomposition and graph-labelled trees: characterizations and fully dynamic algorithms for totally decomposable graphs.](#) *Discrete Appl. Math.*, 160(6):708–733, 2012.

نختار ورقتين من T ونقوم بتوصيلها بأقصر مسار في الشجرة. من أجل كل عقدة x يزورها هذا المسار، هناك حافة للدخول وحافة للخروج. في المقابل، هاتان الحافتان تحددان رأسين في G_x . يكون رأسان من $G(T)$ ، أي ورقتان من T ، متجاورين في $G(T)$ إذا كان من أجل كل عقدة x زارها هذا المسار، يكون الرأسان المقابلان في G_x متجاورين في G_x . تُعمم رؤوس البيانات G_x رأسي التحكم، كما في الحالة البسيطة حيث تحتوي T على حافة واحدة فقط.

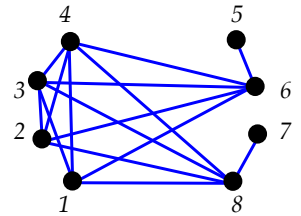
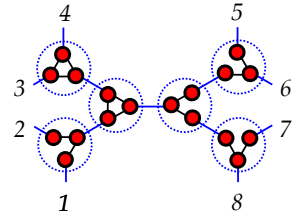
يبدو أنه يمكن أن تكون البيانات موسومة (labeled) في الـ و. م. أ. وموسومة (labeled) في بلدان أخرى ناطقة بالإنجليزية

النتيجة الرئيسية، التي أثبتها كتيشفام وادموندز¹⁶⁹ في عام 1980 (وأعاد صياغتها جيوان وپول)، هي أن أي بيان مترابط منته يتم الحصول عليه من خلال مثل هذا الإنشاء الذي تكون فيه البيانات G_x غير قابلة للتحليل، بطريقة وحيدة بشكل أساسي. وجود هذا الانقسام سهل. الجزء الصعب هو "الوحدانية الأساسية" التي لن أعرفها لأنني لن أحتاجها. لنعد إلى البيانات القابلة للتحليل تمامًا. في الحالة الخاصة هذه يجب أن تحتوي البيانات G_x على 3 رؤوس على الأكثر. بالفعل، فهي بيانات جزئية من G ، محدثة وغير قابلة للتحليل، بحيث يتبع الادعاء من تعريف قابلية التحليل التام.

169 W. H. Cunningham and J. Edmonds. [A combinatorial decomposition theory.](#) *Canad. J. Math.*, 32(3):734–765, 1980.

يعطي ذلك وصفًا هندسيًا دقيقًا تمامًا للبيانات القابلة للتحليل. خذوا شجرة حيث تكافؤ كل عقدة يساوي 3. من أجل كل عقدة، اختاروا بيانا مترابطًا بـ 3 رؤوس (ليس هناك الكثير من الاختيارات!)، وأنشئوا شجرة بيان موسوم كما في الهامش. يتم إنتاج جميع البيانات القابلة للتحليل تمامًا بهذه الطريقة.

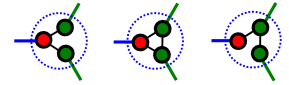
هذه ليست مفاجأة على الإطلاق. بالفعل، انظروا إلى الصورة الثالثة في الهامش، التي تُظهر ثلاثة بيانات صغيرة بها ثلاث أوراق. عندما تربطون إحداها بورقة ما (زرقاء) من شجرة بيان موسوم T ، تحصلون على شجرة بيان موسوم أخرى T' مع ورقة أخرى مضافة. إذا قمت بفحص التأثير على البيان المرفق $G(T)$ ، فسترون أنكم قسمتم رأسًا إلى زوج من التوائم (صحيح أو زائف) أو قمت بإنشاء رأس متدلّ، حسب الحالة. لقد عدنا إلى التعريف الأصلي للبيانات القابلة للتفويض كبيانات يمكن إنشاؤها من نقطة عن طريق إدراج متتابع لتوائم أو رؤوس متدلّية. لقد عدنا أيضًا إلى العمولات. كان هذا بالفعل منعطفًا!



حسوية

هناك خوارزمية تقرر في وقت تربيعي (في n) ما إذا كان بيان حجمه n بيانًا متشابهًا. تم إثبات ذلك في ¹⁷⁰ بعد فترة طويلة من التحسينات المتتالية (بدءًا من n^9 خوارزمية، في عام 1987).

افترضوا مخططًا ذا n وترا، يتطلب إنشاء بيانه المتشابه وقتًا تربيعيًا بالنسبة إلى n . اجثوا عن الرؤوس المتدلّية والتوائم وكررو العملية n مرة كي تقرر في وقت تربيعي ما إذا كان تحليليًا.

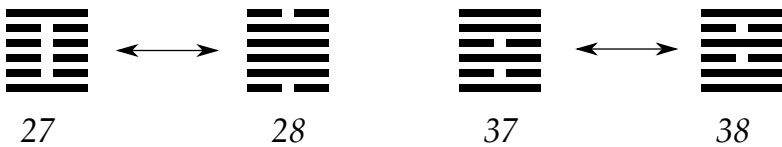


¹⁷⁰J. Spinrad. Recognition of circle graphs. *J. Algorithms*, 16(2):264–282, 1994.

تمرين حصري (مقتصر على فئة معينة)

الـ 64 مخططًا سداسيًا في الصفحة الأولى من هذا الفصل تم تجميعها تقليديًا في 32 زوجًا من السداسيات المتتامة. فكروا في الـ وينث و يانث. للحصول على المخطط التثوي لمخطط سداسي، فقط اقلبه رأسًا على عقب. في الحالة التي يكون فيها المخطط السداسي متناظرًا، استبدلوا خطأ غير متصل بكل خط متصل بالعكس بالعكس.

في ما يأتي مثالان لأزواج ثنوية.



الأعداد (28-27) و(38-37) مرتبطة بترتيب الملك وابن. يجب العديد من الخبراء رسم قطعة بين المخططات السداسية الثنوية من خلال العمل بترتيب شاو يونق الدائري، ينتج عن ذلك مخطط بـ 32 وترًا.

هل سيتحلّى القارئ بالصبر لرسم هذه الأوتار وليقرر ما إذا كان مخططُ بي جينغ هذا تحليليًا أم لا؟

في 14 نوفمبر 1701، تلقى لايبنيذ نسخة من ترتيب شاو يونق الدائري من اليسوعي الفرنسي جواشيم بويبي الذي كان يعيش في الصين. بعد ذلك بعامين نشر ورقة رائعة عن الحساب الشائئ¹⁷¹ في مذكرات أكاديمية العلوم (Mémoires de l'Académie des Sciences) وبقا له :

هذه الصور ربما تكون أقدم نصب تذكاري للعلوم يوجد في العالم.

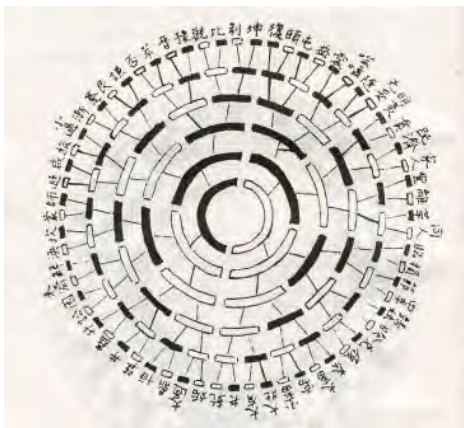
" لايبنيذ كان يأمل في أن يوقظ تحليله الذي للمخططات الثلاثية من بي جينغ في الصين تقديرا عميقا للعلم الغربي، وفي النهاية للمسيحية¹⁷²".

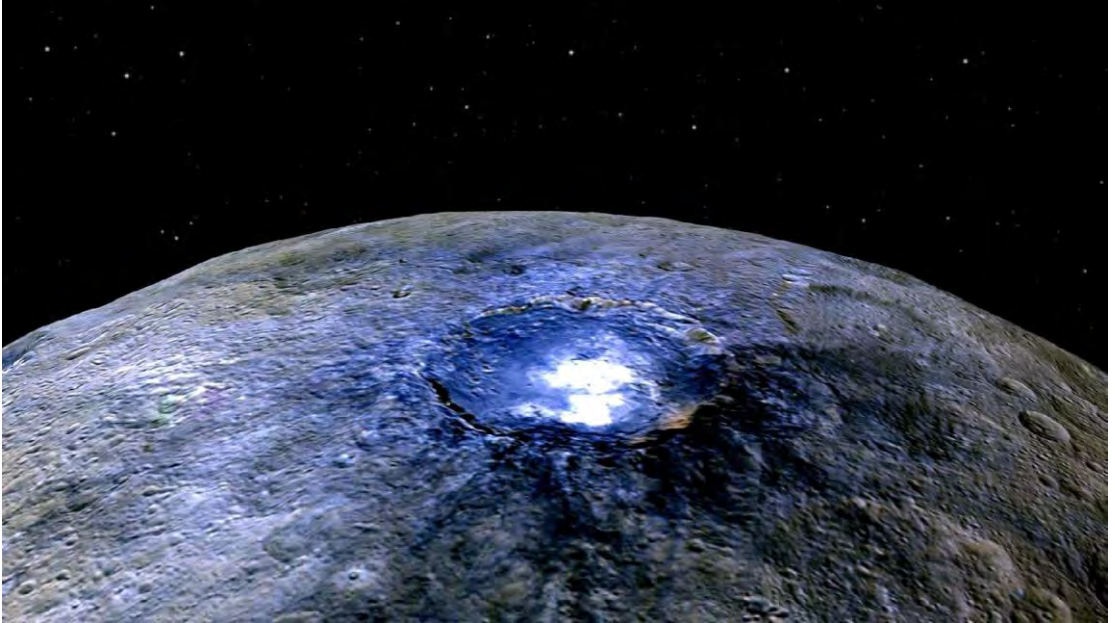
¹⁷¹G.-G. Leibniz. *Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy.*

"Ces figures sont peut-être le plus ancien monument de science qui soit au monde".

These figures are perhaps the most ancient monument of science which exists in the world.

¹⁷²D. Lach. *Leibniz and China. Journal of the History of Ideas, 6(4):436-455, 1945*





الكوكب القزم سبديس، كما رأته بعثة
داون، في يوليو 2016. كان تحديد
مداره إنجازًا رائعًا لفاوس. ◉

قاوس من جديد : الربط، المغناطيسية والفلك

قاوس وأعداد الربط

في الثاني والعشرين من شهر يناير (جانفي، كانون الثاني) 1833، كتب قاوس علاقة غامضة في دفتر ملاحظاته¹⁷³.



ZUR ELECTRODYNAMIK.

605

[4.]

Von der *Geometria Situs*, die LEWISITZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.

Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometria Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.

Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z ; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(ydz'-dzdy') + (y'-y)(dzdx'-dxdz') + (z'-z)(dxdy'-dydx')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt

$$= 4 m \pi$$

und m die Anzahl der Umschlingungen.

Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegen einander umgetauscht werden. 1833. Jan. 22.

عملة معدنية من ألمانيا، صدرت عام 1977 للاحتفال بعيد ميلاد قاوس ال 200.

¹⁷³C. F. Gauß. *Werke. Ergänzungsreihe. Band V.* Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975. Briefwechsel: C. F. Gauss-H. C. Schumacher. Teil 3. [Correspondence: C. F. Gauss-H. C. Schumacher. Part 3], Edited by C. A. F. Peters, Reprint of the 1863 and 1865 originals.

هدفه هو "حساب عدد ربط منحنين مغلقين": عدد صحيح مرتبط بمنحنين مغلقين منفصلين في ال 3-فضاء والذي يبقى لا متغيرا تحت عمليات التشويه.

في عام 1833، لم تكن الطوبولوجيا موجودة بعد... حتى الكلمة ظهرت فقط في الطباعة بعد اثني عشر عامًا في كتاب لـ ليستينش. كان لاينيز قد صاغ بالفعل كلمة تحليل الموقع

"Die Umschlingungen zweier geschlossener Lieben zu zählen."

(Analysis Situs) وكان يحلم فقط ببعض العلوم التي تعالج الأشكال تمامًا مثل الجبر الذي يعالج الرموز. يستخدم فاوس المصطلح هندسة الموقع (Geometria Situs) ويذكر أويلر وفاندرموند كسلفين سابقين.

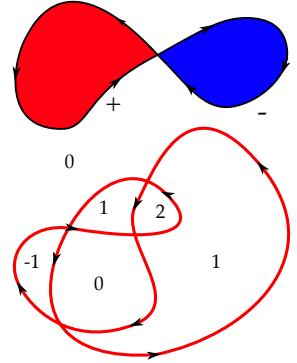
لا تنسوا أن هذه Nachlasse لم يكن المقصود بها النشر. ماذا كان يظن لو كان على علم بأن تصبح مسوداته الخاصة متاحة للجمهور؟ مذكرة 1833 هذه نُشرت بالفعل في عام 1867، بعد وفاة فاوس، وأدرجها الناشر في مجلد مخصص للكهر مغناطيسية. كان هذا اختيارًا معقولًا وتقتح ورقة حديثة¹⁷⁴ تفسيرًا كهرو مغناطيسيا جيدًا. تدعي ورقة أخرى¹⁷⁵ على العكس من ذلك أن للعلاقة أصلاً فلكيا ويبدو أن هذه الورقة ذات مصداقية. من هو على حق؟ كلاهما بالطبع! كان فاوس مقتنعًا بالوحدة العميقة للرياضيات، ولن يبيّن حدودًا بين الرياضيات وعلم الفلك والفيزياء إلخ. أنا بالتأكيد لن أختار وسأقدم ثلاث وجهات نظر متوازية: ثلاثة تعريفات لعدد ربط منحنين مغلقين منفصلين في الـ 3 - فضاء.

هندسة

يحدّ منحني أملس، مغلق، موجه ومغطس في المستوي ميدانا له مساحة ما. لنفترض أن هذه المساحة موجبة إذا كان المنحني موجهًا عكس اتجاه حركة عقارب الساعة وسالبة في الحالة الأخرى. هذا سهل. الآن، إذا لم يكن المنحني مغطسا، فسيكون الموقف أكثر تعقيدًا بعض الشيء، كما هو الحال على سبيل المثال في منحنى الشكل ثمانية في الهامش. يتم توجيه الحلقة اليسرى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة والحلقة اليمنى باتجاه حركة عقارب الساعة، بحيث يتم توجيهنا لتعريف المساحة المؤشّرة على أنها مجموع جبري للمساحتين. في الحالة العامة لمنحن مغموس مع عدد منتهٍ من النقط المزدوجة، نواصل بطريقة مماثلة. المنحني يحلّل المستوي إلى مركبات مترابطة. دعونا نزوّد المركبة غير المحدودة بالمعامل 0. الآن، نزوّد كل مركبة بعدد صحيح ما مع اصطلاح أنه عندما نعبّر المنحني وفق الاتجاه الموجب، يقفز هذا العدد الصحيح بمقدار +1. بمعنى آخر، النقطة التي تتحرك على المنحني في الاتجاه الموجب ترى معاملاً عن يسارها يساوي المعامل الموجود عن اليمين مضافا إليه +1. يتضح أن مثل هذا الوسم موجود وهو وحيد. ثم نعرّف المساحة المؤشّرة للمنحني على أنها تركيب خطي من المساحات الهندسية للمركبات مع هذه المعاملات الصحيحة. هذا التعريف طبيعي ويعود إلى ... فاوس.

¹⁷⁴R. L. Ricca and B. Nipoti. Gauss' linking number revisited. *J. Knot Theory Ramifications*, 20(10):1325-1343, 2011.

¹⁷⁵M. Epple. Orbits of asteroids, a braid, and the first link invariant. *Math. Intelligencer*, 20(1):45-52, 1998.



حاولوا إثبات وجود مثل هذا التوسيم باستخدام حقيقة أن عدد التقاطع (الجبري) لمنحنين عرضيين مغلقين في المستوي هو 0. لنفترض أن C_2 و C_1 منحنيان عرضيان موجهان في سطح موجه. أي نقطة تقاطع لـ C_2 و C_1 لها إشارة ± 1 تبعا للاتجاه الذي يقدمه شعاعان مماسان لـ C_2 و C_1 في هذه النقطة. مجموع كل هذه العلامات لجميع نقط التقاطع هو عدد التقاطع الجبري لـ C_2 و C_1 . إذا كان C_2 و C_1 منحنين في المستوي، فإن عدد التقاطع هذا هو 0. بالمصطلحات الحديثة، هذا ناتج عن حقيقة أن تماثل المستوي تافه. كان فاوس يعرف هذه الحقيقة. هل يمكنكم تقديم إثبات كان يمكن أن يقبله؟

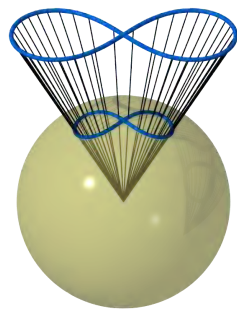
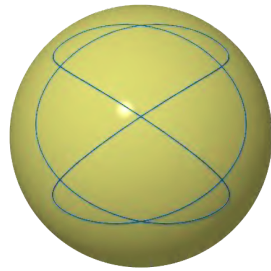
تعريف آخر يأتي من حقيقة أنه على أية حال فالمساحة تحت منحن $y(x)$ هي تكامل $y dx$. نعتبر الـ 1- شكل التفاضلي $\omega = -y dx$ في المستوي وتقوم بمكاملته على طول المنحني. أشجع القارئ على التحقق من أن هذين التعريفين يعطيان نفس العدد. بصورة عابرة، لاحظوا أن تفاضل ω هو الـ 2- شكل $dx \wedge dy$ وهو شكل المساحة. ليست هذه مفاجأة لرياضياتي من القرن الحادي والعشرين، لكنها كانت بعيدة كل البعد عن الوضوح في بداية القرن التاسع عشر.

لنأخذ الآن منحنيًا مغلقًا موجهًا على 2-كرة الوحدة. هل يمكننا تعريف المساحة المحصورة؟ إذا كان المنحني مغطسًا، لا توجد مشكلة. المنحني يحلّل الكرة إلى منطقتين، يكون المنحني الموجه لإحدهما حدًا عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، ويمكننا تعريف المساحة على أنها مساحة هذه المنطقة. الآن، إذا كان المنحني معقدًا، فماذا يمكننا أن نفعل؟ لا يزال بإمكاننا أن نهب أعدادًا للمركبة المترابطة في المتمة بنفس الخاصية كما كان من قبل، لكن لا يمكن تطبيقها من خلال طلب أن يكون لمركبة في اللامتبي الوزن 0، لأنه لا يوجد لا منته. لذلك كل هذه الأعداد الصحيحة هي معرفة جيدًا إلى إضافة مقربة لنفس العدد الصحيح إلى كل مركبة. المساحة المؤشرة المحاطة بالمنحني هي فقط معرفة إلى إضافة مقربة لمضاعف صحيح لمساحة الكرة، أي مقياس $4\pi\mathbf{Z}$.

يحدد منحني مغلق في الكرة مخروطًا في الـ 3-فضاء، رأسه في المبدأ. مساحة المنحني بالتعريف هي الزاوية المجسمة للمخروط، ومن ثم يتم تعريفها بمقياس $4\pi\mathbf{Z}$. تمامًا مثلما يتم تعريف زاوية موجهة في المستوي بمقياس $2\pi\mathbf{Z}$. نفترض الآن أن لدينا منحنيًا مغلقًا موجهًا γ في الـ 3-فضاء، ليس بالضرورة مغطسًا. من أجل كل نقطة x خارج γ ، ننظر إلى الزاوية المجسمة $A_\gamma(x)$ للمخروط الذي رأسه x وقاعدته γ . تعرّف زاويته المجسمة دالة

$$A_\gamma : \mathbf{R}^3 \setminus \gamma \rightarrow \mathbf{R}/4\pi\mathbf{Z}.$$

لاحظوا أنه إذا كان γ عقدة، أي إذا كان دائرة مغطسة، فإن الصورة العكسية $A_\gamma^{-1}(\theta)$ هي سطح قابل للتوجيه حدّه γ من أجل كل قيمة منتظمة θ لـ A_γ . لقد التقينا بالفعل بمثل هذه السطوح تحت اسم سايفرت.



منحن مغلق في البعد 3 هو صورة تطبيق من \mathbf{S}^1 في \mathbf{R}^3 . في البعد 2، يمكننا إلقاء نظرة على تطبيق من \mathbf{S}^0 في \mathbf{R}^2 ، أي نقطتين P, Q في المستوي! الآن تم استبدال مثلث بالمخروط، ودالة الزاوية

$$A : \mathbf{R}^2 \setminus \{P, Q\} \rightarrow \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$$

تحول x إلى الزاوية PxQ . يذكركم النظر إلى ألياف A بالمدرسة الثانوية.

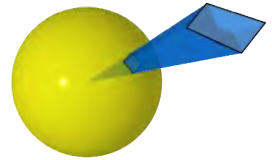
هيا بنا نحسب التفاضل dA_γ . لنفترض أن x, x' نقطتان قريبتان في الفضاء، وكل منهما بعيدة عن γ . لحساب $A_\gamma(x)$ ، يجب أن نسحب γ بـ $-x$ ، ونسقط النتيجة شعاعياً على كرة الوحدة ثم نحسب المساحة المؤثرة. الفرق بين المساحتين $A_\gamma(x) - A_\gamma(x')$ هو المساحة المؤثرة لإسقاط الحلقة التي تحدّ انحنائي γ بـ $-x$ و $-x'$ على كرة الوحدة. تقرب γ بمنحن متعدد الأضلاع بحيث يتم تقريب $A_\gamma(x) - A_\gamma(x')$ بمجموع المساحات المؤثرة لإسقاطات بعض متوازيات الأضلاع. لاحظوا أنه إذا كان $\delta x, \delta'x$ شعاعين في الفضاء، فإن حجم الهرم الذي رأسه 0 وقاعدته

$$x, x + \delta x, x + \delta'x, x + \delta x + \delta'x$$

هو

$$\frac{1}{3} \det(x, \delta x, \delta'x).$$

إذا كان δx و $\delta'x$ صغيرين جداً، يتم الحصول تقريباً على الزاوية المجسّمة المقابلة بقسمة هذه القيمة على مكعب نظيم x . بضم كل الأشياء إلى بعضها، والذهاب إلى النهاية، نحصل على علاقة لـ dA_γ في النقطة x ، على الشعاع v :



زاوية مجسّمة

$$dA_\gamma(x, v) = \int_\gamma \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|^3} \det\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), v\right) dt.$$

نحن نعرف مفهوم مؤشر كوشي لمنحن مغلق c في المستوي المثقوب $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: عدد "الدورات" حول المبدأ عندما يسير المرء على طول c . اتبعوا العمدة بالاستمرار وأتم تسيرون حول c ثم احسبوا زيادة العمدة عندما تعودون إلى نقطة البداية. يمكنكم أيضاً استخدام الشكل التفاضلي $\frac{1}{2i\pi} dz/z$ ومكاملته على طول c . كل ذلك يبدو سهلاً لدارسي اليوم، لكنه لم يكن واضحاً للآباء المؤسسين فاوس-كوشي وغيرهم. الآن، افعلوا نفس الشيء بالضبط في الـ 3-فضاء، واستبدلوا بالعمدة الزاوية المجسّمة الناتجة عن منحن مغلق γ . إذا كان منحن γ' لا يتقاطع مع γ ، انتقلوا حول γ' وانظروا إلى زيادة الزاوية المجسّمة عندما تقومون بدورة كاملة (مقسومة على 4π). يُطلق على هذا المؤشر اسم عدد الربط بين γ و γ' : وهو عدد صحيح.

باستخدام العلاقة الخاصة بـ dA_γ ، نحصل على علاقة فاوس لعدد الربط $link(\gamma, \gamma')$

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|\gamma(t) - \gamma'(t')\|^3} \det \left(\gamma(t) - \gamma'(t'), \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma'}{dt'}(t') \right) dt dt'.$$

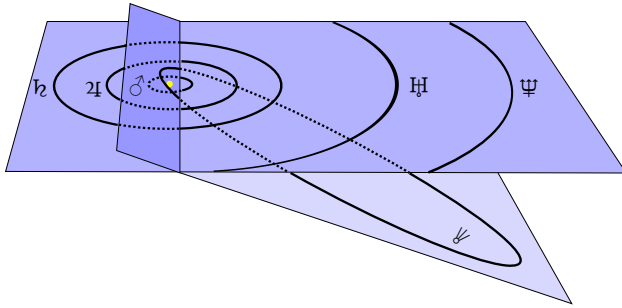
هذا بالضبط ما كتبه فاوس في دفتر ملاحظاته في 22 يناير 1833. لاحظوا أن العلاقة أعلاه توضح أن الربط متناظر أي أن $link(\gamma, \gamma') = link(\gamma', \gamma)$ ، وهو ما لم يكن واضحاً من التعريف. هذا ما كتبه فاوس.

القيمة متناظرة: تظل كما هي عندما يقوم المرء بتبديل المنحنيين.

لاحظوا أيضاً أنه إذا كان المنحنيان γ و γ' يتشوهان باستمرار بطريقة تبقيهما لا يتقاطعان أثناء التشويه، فإن على عدد الربط أن يكون ثابتاً: لا يمكن لعدد صحيح أن يتغير بشكل مستمر. هذه هي أهم ميزة لعدد الربط: هو لا متغير تحت التشويه.

Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wen beide Linien gegen einander umgetauscht werden.

فلك



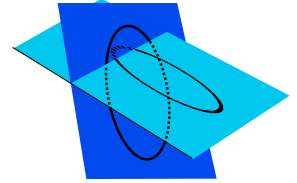
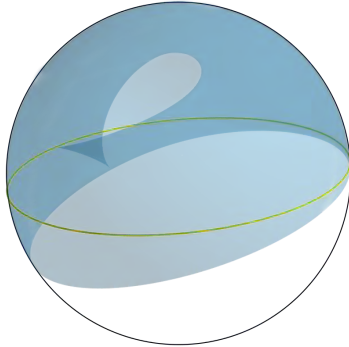
مدار مذنب هالي مع مدارات المريخ والمشتري وزحل وأورانوس ونبتون.

ورقة إيبيل المذكورة أعلاه تقترح مقارنة ممكنة لأعداد الربط. من أولى إنجازات فاوس التي جعلته مشهوراً هي تحديده في عام 1801 لمدار الكوكب القزم سيريس، والذي كان قد تم اكتشافه للتو. لنفترض أننا رصدنا كوكباً من موقع ثابت على كوكبنا الأرض. أين يجب أن ننظر في السماء؟ بتعبير أدق، ليكن γ مسار الأرض في فضاء ثابت (ثابت بالنسبة إلى الشمس) وليكن γ' مسار الكوكب الذي نريد مراقبته. من أجل التبسيط، نفترض أن γ و γ' منفصلان ☺.

إذا كانت أذوار الدوران Q - مستقلة ناطقيا، فإن مواقع الأرض والكوكب على مداريهما متغيرات عشوائية مستقلة. يسمي قوس دائرة البروج للكوكب (zodiacus نسبة إلى الأرض) صورة التطبيق:

$$\omega: (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2 \rightarrow \mathbf{S}^2 ; (t, t') \mapsto \frac{\gamma(t) - \gamma'(t')}{\|\gamma(t) - \gamma'(t')\|}.$$

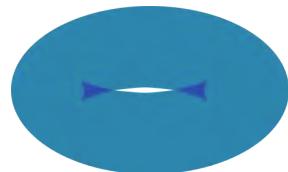
هذه المنطقة في الكرة الساوية حيث يجب على المراقب البحث عن الكوكب. المكامل في علاقة قوس لعدد الربط هو ببساطة المحدد يعقوبي لهذا التطبيق، بحيث أن عدد الربط هو $1/4\pi$ في المساحة المؤشّرة لدائرة البروج. يعرف رياضياتي معاصر أن تكامل المحدد يعقوبي لتطبيق بين منوعتين موجهتين لهما نفس البعد هو الدرجة الطوبولوجية لهذا التطبيق. لذلك يمكن أيضًا تعريف عدد الربط على أنه درجة تطبيق دائرة البروج ω . بالطبع، درّس قوس بالتفصيل حالة قطعين ناقصين في الفضاء.



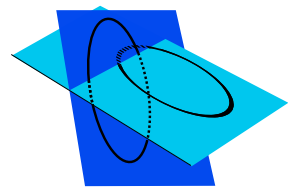
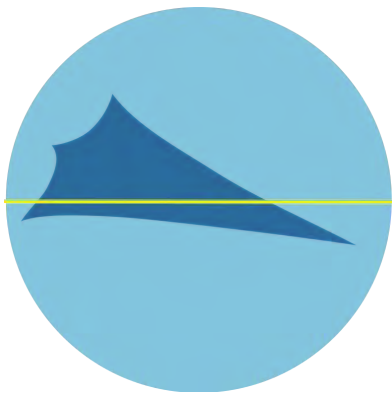
قطعان ناقصان غير مرتبطين. دائرة البروج عن اليسار.

عندما لا يكون القطعان الناقصان مرتبطين، كما في الصورة أعلاه، فإن دائرة البروج لا تغطّي كل الكرة الساوية. تتوافق المنطقة الزرقاء الفاتحة في دائرة البروج مع النقط التي يغطّيها ω مرتين.

المنطقة الداكنة، بنقطتين مفردتين، مغطاة أربع مرات. قارنوا مع الصورة المعتادة (في الهامش) من منظور طارة دورانية والمفرديات التي تظهر على محيطها. عندما يتم ربط القطعين الناقصين، كما في الصورة أدناه، تكون دائرة البروج هي الكرة كلها. المنطقة الزرقاء الفاتحة في دائرة البروج تتوافق مع النقط التي تمت تغطيتها مرة واحدة فقط بواسطة ω . المنطقة الداكنة، بأربع نقط مفردة، مغطاة ثلاث مرات.



إسقاط طارة على مستو.



قطعان ناقصان مرتبطان. دائرة البروج عن اليسار.

ليكن التطبيق $f : M \rightarrow N$ بين منوعتين مترابطتين موجهتين مترابطين من دون حدّ، هناك العديد من التعاريف الممكنة للدرجة الطوبولوجية. الأول يتكون من اختيار شكل حجم vol على N ، حجمه الإجمالي 1، ومكاملة مسحوبه إلى الخلف f^*vol على M . ليس من الصعب أن نرى أن هذا مستقل عن vol . بالفعل، إذا كان vol' هو اختيار آخر لشكل حجم، فإن $vol' - vol$ شكل تام، وبالتالي فإن تكامل $f^*vol' - f^*vol$ هو صفر. من هذا التعريف، من السهل أن نرى أن هذا لا متغير تحت عملية التشويه. بالفعل، إذا كان تطبيقان f_0, f_1 مترادفين، فإن $f_0^*vol - f_1^*vol$ شكل تام. من الصعب أن يرى المرء أن هذه الدرجة هي عدد صحيح.

تمثل التعريف الثاني في أن نختار في N قيمة منتظمة γ لـ f وننظر إلى عدد منته من الصور العكسية x_1, \dots, x_n في M . في كل من هذه الصور العكسية، تفاضل f يحفظ الاتجاه أو يعكسه، ومنحها إشارة + أو - وفقاً لذلك.

درجة f هي مجموع هذه الإشارات. يجب على المرء أن يُظهر أن هذا لا يتعلق باختيار القيمة المنتظمة وأنه لا متغير ترادف.

انظروا مرة أخرى إلى الصور السابقة لدائرة البروج لقطعتين ناقصين واستنتجوا إشارتي + أو -.

قد أُثبت ذلك ببراعة في كتاب ميلنور¹⁷⁶. يجب على المرء أيضًا أن يُثبت أن التعريفين متفقان. . . أحد الاحتمالات هو استخدام متتالية من أشكال الحجم على M والتي تتقارب نحو كتلة ديرك في القيمة المنتظمة γ .

هيا بنا نستخدم وجهة نظر القيمة المنتظمة لحساب درجة تطبيق دائرة البروج $\omega: \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$. نختار القطب الجنوبي لـ \mathbf{S}^2 ليكون النقطة γ . تتكون الصور العكسية لـ γ من أزواج من النقط $\gamma(t)$ و $\gamma'(t')$ بحيث تكون $\gamma(t)$ أعلى من $\gamma'(t')$: لهما نفس الإحداثيين x و y والإحداثي z لـ $\gamma(t)$ أكبر من الإحداثي z لـ $\gamma'(t')$. تفاضل ω في مثل هذه النقطة سهل الحساب. إنه غير منحل إذا كان إسقاطا γ و γ' على المستوي (x, y) يتقاطعان بشكل عرضي في النقطة المقابلة. يكون محدها يعقوبي موجبا (على التوالي سالبا) إذا كان تقاطع الإسقاطين موجبا (على التوالي سالبا).

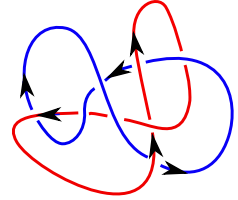
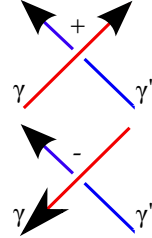
هذا يؤدي إلى تعريف توافيقي لعدد الربط، الذي من الواضح أن فاوس كان يعرفه. قوموا بإسقاط المنحنيين γ ، γ' على مستوي عام بحيث يتقاطع الإسقاطان $\bar{\gamma}$ و $\bar{\gamma}'$ بشكل عرضي. ضعوا علامة $+1$ أو -1 لكل نقطة تقاطع، وفقًا للحالة التي يحدد فيها الشعاعان المماسان لـ γ و γ' أساسا موجبا أو سالبا. من بين نقط التقاطع هذه، اختاروا فقط تلك التي يكون فيها γ فوق γ' . مجموع العلامات المقابلة هو عدد ربط γ و γ' . في الصورة، يمر المنحني الأحمر 3 مرات فوق المنحني الأزرق بعلامات $+1$ ، $+1$ ، -1 . عدد الربط هو 1.

ما يسمى رابط وابتهد في الهامش له عدد ربط يساوي 0 ولكن هذا لا يعني أنه يمكن فصل المركبتين عن طريق تشويه¹⁷⁷. يتنوا أنه لا يوجد منحني جبري مركب له فرعان بحيث يكون الرابط المرفق هو هذا الرابط.

كهرومغناطيسية

تذكرنا علاقة فاوس بقانون بيوت - ساپارت في الفيزياء. يؤلّد تيار كهربائي حقلًا مغناطيسيًا. نفترض أن سلكًا مغلقًا γ يحمل تيارًا ثابتًا، مع شدة i ولتكن x نقطة خارج السلك.

¹⁷⁶ J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.



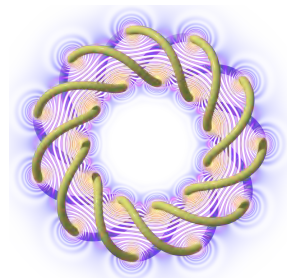
رابط وابتهد

¹⁷⁷ D. Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.

إذن الحقل المغناطيسي الذي تم إنشاؤه في x هو

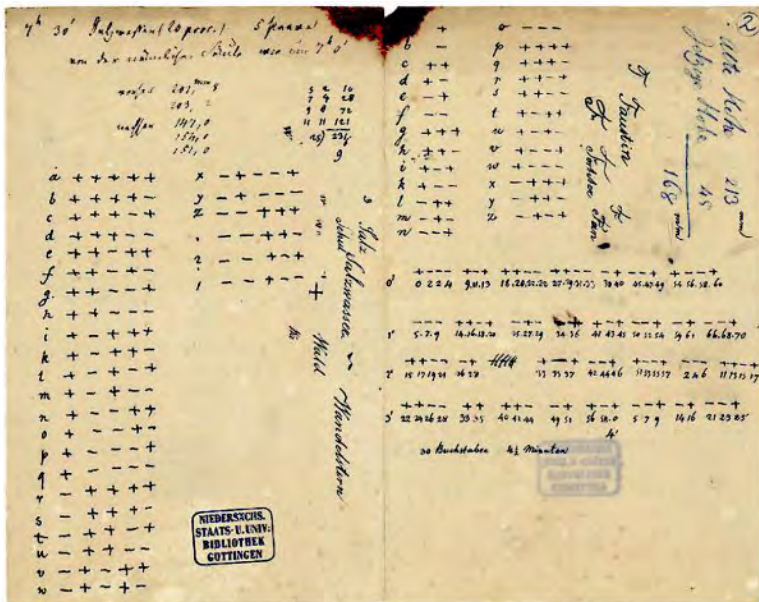
$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|^3} \left((\gamma(t) - x) \wedge \frac{d\gamma(t)}{dt} \right) dt$$

حيث μ_0 هو الثابت المغناطيسي. هذا الحقل الشعاعي هو ثنوي الـ 1- شكل المغلق dA_{γ} (بالنسبة إلى المترية الإقليدية في الفضاء الفيزيائي ثلاثي الأبعاد). يمكن تفسيره أيضًا على أنه حقل التدرج لـ (شكل) أصلي محلي للـ 1- شكل A_{γ} . ويترتب على ذلك أن جَوْلان الحقل المغناطيسي في حلقة γ' هو نفسه تكامل dA_{γ} على γ' ، أي عدد الربط. ومن ثم، فإن الربط $link(\gamma, \gamma')$ هو جَوْلان الحقل المغناطيسي الناتج عن تيار.

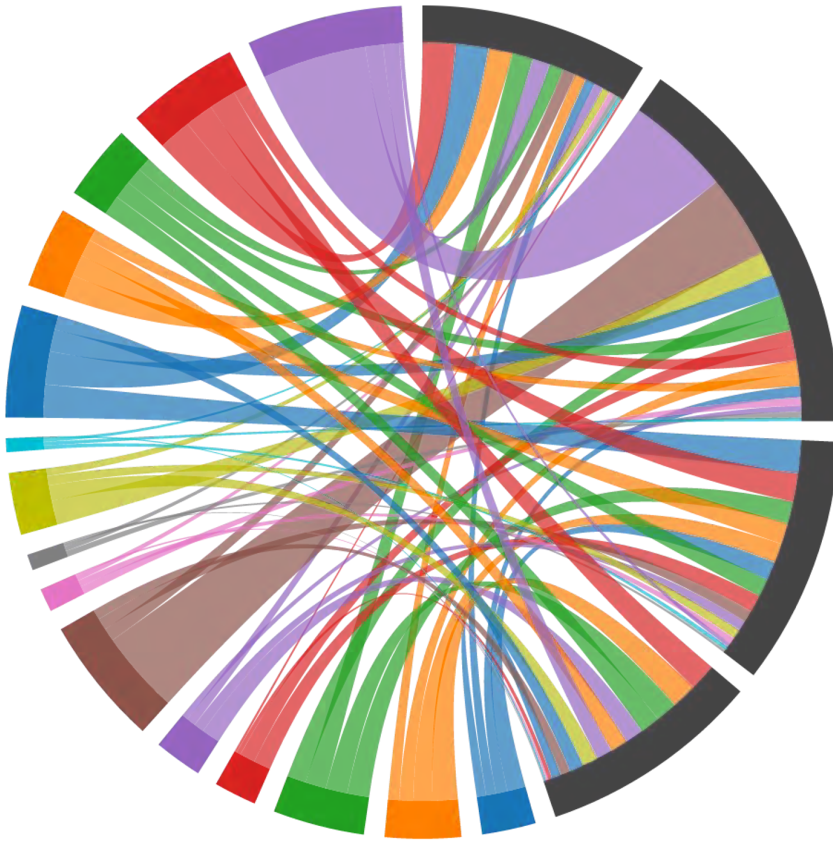


الحقل المغناطيسي الموّلد بعقدة طارة.

الورقة المذكورة أعلاه من قبل ريكّا ونيوتني تعطي إعادة إنشاء مثيرة للاهتمام لما يمكن أن يكون التفسير المغناطيسي في عقل فاوس. لا تنسوا أن فاوس أنشأ مع فيببر أول نظام برقي (تبلهغراف) ينقل الرسائل عبر فوتينشن.



رموز (شفرة) فاوس - فيببر لتبلهغرافها: التوافقيات من جديد!



مخطط وترّي هو أيضًا طريقة بيانية لعرض العلاقات المتبادلة بين البيانات أو المعطيات. لتكن مصفوفة عشوائية (a_{ij}) (أي $a_{ij} > 0$ و $\sum_j a_{ij} = 1$)، يمكن للمرء أن يفكر في a_{ij} على أنه نسبة كيان i يتفاعل مع j . نرسم n مجالاً I_1, \dots, I_n حول الدائرة، والتي يجب تحديد أطوالها l_1, \dots, l_n ، والشرائط التي تربط I_j و I_i بعرض يساوي $a_{ij}l_i$. يمكن التعبير عن شرط التلاؤم بالعلاقة $l_j = \sum_i a_{ij}l_i$. تتضمن مبرهنة بيرون-فروينبوس وجود الحل.

ويعود كونتسببيتش : لا متغير كوني

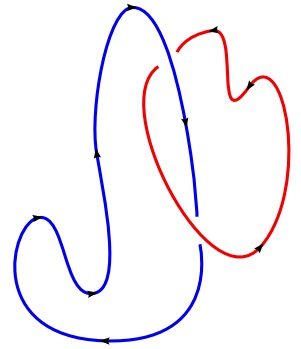
هل هذه التزهة حلقة مترادفة مع نقطة؟ ها نحن نعود إلى نقطة البداية: مكسيم كونتسببيتش. هذا الفصل ليس خاتمة بل انفتاحاً على ميدان مَهَبٍ ويظهر أنه في الرياضيات من الممكن العودة إلى الأفكار القديمة جداً بمنظور جديد تماماً. أريد أن أعرض مقدمة قصيرة عن تطور رائع في نظرية العقد يتضمن المخططات الوترية، في ورقة لكونتسببيتش صدرت عام 1993.

¹⁷⁸M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

وجهة نظر جديدة حول عدد الربط

ليكن γ_1, γ_2 من \mathbf{R}/\mathbf{Z} في \mathbf{R}^3 منحنيين مغلقين موجهين منفصلين. نعلم أن عدد الربط بين γ_1 و γ_2 هو الدرجة الطوبولوجية لتطبيق دائرة البروج لقاوس، من جداء المنحنين إلى كرة الوحدة. سوف تعبر علاقة كونتسببيتش عن نفس العدد كدرجة طوبولوجية لتطبيق من منوعة موجهة ذات بعد واحد (وهي بالتالي اتحاد دوائر) إلى دائرة. الميزة الكبرى هي أن وجهة النظر الجديدة هذه تمكّننا من تعريف العديد من اللامتغيرات.

لنفكر في الفضاء \mathbf{R}^3 بالإحداثيات (x, y, t) وكأنه جداء المستقيم المركب \mathbf{C} (بالإحداثي $z = x + iy$) و \mathbf{R} (مع الإحداثي t). نفترض أن منحنينا γ_1 و γ_2 مورس. هذا يعني ببساطة أن للإسقاط على الإحداثي t عدداً منتهياً من النقاط الحرجة وأن المشتق الثاني غير منعدم في هذه النقاط الحرجة. نفترض أن القيم الحرجة للإحداثي t كلها متميزة.

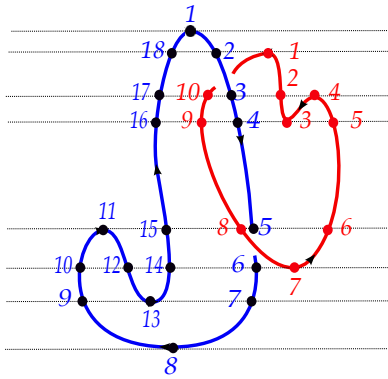


لنعتبر الآن مجموعة أزواج النقط من γ_1 و γ_2 والتي لها نفس الإحداثي t . شكليا، هذه هي المجموعة

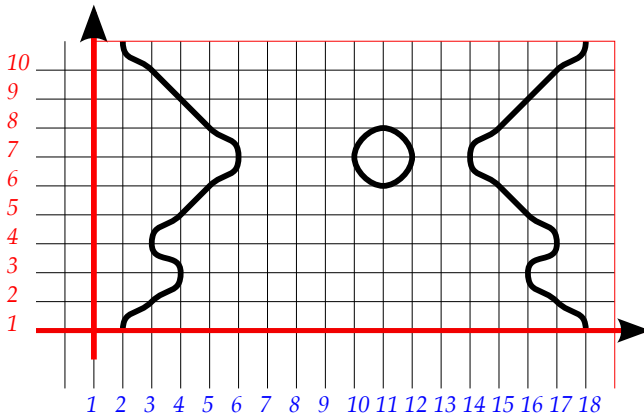
$$X = \{(s_1, s_2) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2 \mid t(\gamma_1(s_1)) = t(\gamma_2(s_2))\}.$$

هذا منحني أملس من الـ 2 - طارة. الشيء الوحيد (السهل) الذي يُتحقق منه هو أن هذه هي الحال بالفعل في جوار النقط الحرجة.

لننظر إلى هذا المثال. توجد 8 قيم حرجة، تحلل المنحني الأول إلى 18 قوسا والثاني إلى 10 أقواس.



يتم تمثيل المنوعة الجزئية X في الصورة الآتية.



يوجد اتجاه قانوني على X . نختار مجالاً صغيراً I في X ، بعيداً عن القيم الحرجة. هذا المجال يُحوّل تفاعلياً إلى مجال I_1 في γ_1 وإلى مجال آخر I_2 في γ_2 . يكون مجال غير حرج في γ_1 (أو في γ_2) مزوّداً باتجاهين، آتيين من اتجاه γ_1 (أو γ_2) من ناحية، ومن الإحداثي t من ناحية أخرى. نقول إن مثل هذا المجال موجب إذا كان هذان الاتجاهان متوافقين وسالب في خلاف ذلك. نوجه I باستخدام t المتزايد إذا كان كل من I_1 و I_2 موجباً أو كل منهما سالباً وباستخدام t المتناقص في خلاف ذلك.

تأكدوا من أن هذا يعرّف اتجاهًا على X .

الآن، نحدد نقطة في X نقطتين $\gamma_1(s_1)$ و $\gamma_2(s_2)$ تسقطان على نقطتين متميزتين في المستوي المركّب $x + iy$. تعرّف عمدة الفرق تطبيقاً $\pi: X \rightarrow \mathbf{S}^1$. إنه تطبيق بين منوعتين موجهتين من البعد واحد.

ندعي أن درجة π هي عدد الربط بين γ_1 و γ_2 .
لنثبت هذا الادعاء. عدد الربط هو الدرجة الطوبولوجية للتطبيق

$$\omega: (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$$

$$(s_1, s_2) \mapsto \frac{\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)}{\|\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)\|}$$

بين سطحين موجهين. تحتوي كرة الوحدة \mathbf{S}^2 على خط الاستواء الأفقي \mathbf{S}^1 (حيث $t=0$). افترض أن γ_1 و γ_2 مورس بقيم حرجة متميزة يستلزم أن ω عرضي على \mathbf{S}^1 المحتواة في \mathbf{S}^2 . الصورة العكسية $\pi^{-1}(\mathbf{S}^1)$ هي X ، من التعريف. يطابق تفاضل ω الحزمة الناظمية لـ X ، في الـ 2-طارة، مع الحزمة الناظمية لخط الاستواء، في الكرة. اصطلاحنا للتوجيه على X هو بحيث تكون هذه المطابقة موجبة.

نريد مقارنة الدرجتين الطوبولوجيتين لـ ω و π . نأخذ قيمة منتظمة v لـ π على \mathbf{S}^1 المحتواة في \mathbf{S}^2 ولتكن u نقطة في صورتها العكسية. لاحظوا أن v هي أيضاً قيمة منتظمة لـ ω . إشارة يعقوبي لتفاضل π في u هي نفس إشارة يعقوبي ω في u . ويستخلص من ذلك أن درجتَي ω و π متساويتان. □

نحصل الآن على علاقة جديدة لعدد الربط باستخدام مؤشرات من نوع كوشي. هذه حالة خاصة من مبرهنة كوتنسبهيتهش.

مبرهنة. تقطع γ_1 و γ_2 بمستويات أفقية تمر عبر النقط الحرجة للإحداثي t لـ γ_1 أو γ_2 . بين مستويين متتاليين، يحدد γ_1 و γ_2 عددًا معينًا من الخيوط (الأقواس) الموجبة أو السالبة. نختار أحد الخيوط المتعلقة بـ γ_1 ، المحددة بواسطة بيان $(\zeta_1(t), t)$ (من أجل $t_- \leq t \leq t_+$). نختار خيطا $(\zeta_2(t), t)$ بالنسبة إلى المنحني γ_2 (أيضًا من أجل $t_- \leq t \leq t_+$). نحسب مقدار الدوران

$$\varepsilon \frac{1}{2i\pi} \int_{t_-}^{t_+} \frac{d(\zeta_1(t) - \zeta_2(t))}{\zeta_1(t) - \zeta_2(t)}$$

حيث ε هو +1 إذا كانت للخيوط المختارة نفس الإشارة و -1 في خلاف ذلك. نجمع كل هذه الأعداد بالنسبة إلى جميع الأزواج الممكنة من المستويات الأفقية المتتالية، وإلى كل الاقترانات في أزواج لخيط من γ_1 وخيط من γ_2 . والنتيجة هي عدد الربط $lk(\gamma_1, \gamma_2)$.

في المثال السابق، تحدد القيم المفردة الثمانية 7 مجالات تحتوي على 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2 من الخيوط الزرقاء، و 0, 2, 2, 4, 2, 0 من الخيوط الحمراء. لذلك هناك

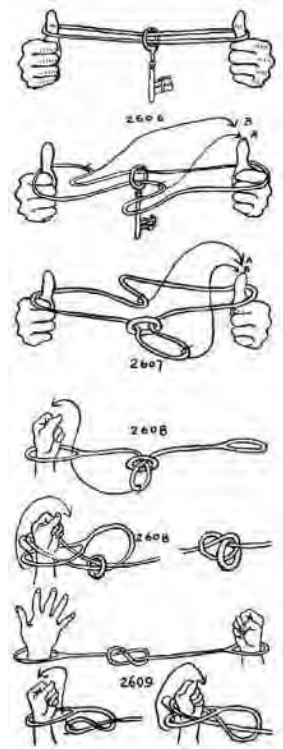
$$2 \times 0 + 2 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 0 + 4 \times 0 = 24$$

اقترانا بين الخيوط، والذي يتوافق مع عدد المجالات في X .

لا متغير كوتنسبييتش الكوني لعقدة مع قيم في جبر الأوتار

في الختام، أرسم تعريف لا متغيرٍ مرفقٍ بعقدة مع قيمٍ بمتسلسلات شكلية بمعاملات في مخططات وترية. هذه فكرة رائعة لكوتنسبييتش، مأخوذة من ورقته الشهيرة لعام 1993. لتكن $Chord(n)$ مجموعة المخططات الوترية ذات n وترًا. كما رأينا عدة مرات، فهي مجموعات من $2n$ نقطة على دائرة موجهة، مجمعة في أزواج، إلى هوميوتشاكلات محافظة على الاتجاه للدائرة مقربة. نشير بـ $\mathbb{C}[Chord]$ إلى الفضاء الشعاعي الذي أساسه الاتحاد $Chord$ لكل المجموعات $Chord(n)$. عناصره هي إذن المجاميع المنتهية $\sum_{w \in Chord(n)} \lambda_w \cdot w$ حيث $\lambda_w = 0$ من أجل جميع w باستثناء عدد منته. نعتبر

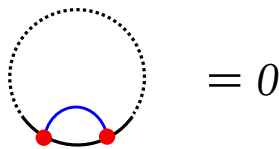
$\mathbb{C}[Chord]$ كفضاء شعاعي مندرج، يُعطى التدرج بواسطة n .



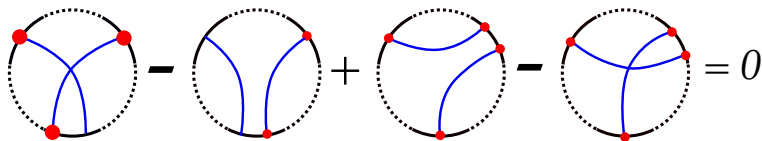
تحاول بعض الحيل السحرية إقناعكم بأن عدد الربط غير موجود. من "كتاب آشلي للعقد" الرائع (1944)، يحتوي على 7000 صورة تمثل 3800 عقدة.

نرمز بـ A إلى حاصل قسمة $\mathbb{C}[Chord]$ على الفضاء الجزئي الناتج عن علاقيتين، قد تبدوان مصطنعتين للوهلة الأولى:

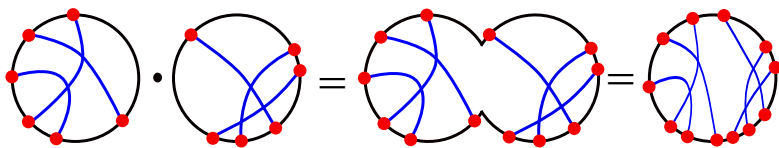
- علاقة الحد الواحد. هذا يعني أن أي مخطط وتري قد تم الحصول عليه من الصورة أدناه من خلال استكمالها بأي شكل من الأشكال في الجزء المنقط من الدائرة، يُعلن أنه 0 في A . بتعبير آخر، كل مخطط يحتوي على وتر واحد يساوي 0 في A .



- علاقة الحدود الأربعة. بالمثل، فإن الجزء المنقط من الدائرة يمكن إكمالها بأي شكل من الأشكال (ولكن بالطبع بنفس الطريقة في المكونات الأربعة للعلاقة).



الفضاء الشعاعي A هذا هو في الواقع جبر متدرج $\bigoplus_{n \geq 0} A_n$. مخططان وتريان يمكن ضربهما بالطريقة الآتية.



علاقة الحدود الأربعة هي بالضبط ما هو مطلوب للتأكد من أن هذه العملية معرّفة جيداً، بغض النظر عن موضع المجموع المترابط.

لنعتبر التقييم \hat{A} ، حيث نجمع مجاميع شكلية غير منتهية $\sum_{w \in Chord(n)} \lambda_w \cdot w$ من دون شرط على الأعداد λ_w . نسمي \hat{A} "جبر الأوتار".

يمكننا الآن تعريف لا متغير كوتنسبيتش الكوني للعقد، بقيم في \hat{A} .

لتكن γ عقدة في الـ 3 - فضاء (يُفترض أن تكون مورس).

تقوم بتقطيعها بواسطة مستويات أفقية تمر عبر النقط الحرجة من إحداثي t . يؤدي هذا إلى تحليل العقدة إلى عدد منته من الخيوط (الأقواس)، والتي يمكن أن تكون موجبة أو سالبة، بالنسبة إلى توجيه العقدة.

نختار عددا صحيحا n . نعتبر فضاء الـ $2n$ - قائمة من النقط المتمايزة $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ على العقدة بحيث يكون

$$n \geq i \geq 1 \text{ من أجل } t(p_i) = t(q_i)$$

$$\text{و } t(p_{i+1}) > t(p_i) \text{ من أجل } n-1 \geq i \geq 1.$$

هذه منوعة جزئية X_n من البعد n ذات حد للطارة ذات البعد $2n$ ، والموجهة بشكل قانوني من خلال توجيه الدائرة.

لاحظوا أن أي عنصر في X_n يعرف مخططا وتريا ذا n وترا.

هناك تطبيق طبيعي ω من X_n في $(\mathbf{C}^*)^n$. بالفعل، إذا كانت p و q نقطتين متمايزتين من γ لهما نفس الإحداثي t ، فإن فرقهما عدد مركب غير منعدم. لذلك نربط الـ n - قائمة $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ من $(\mathbf{C}^*)^n$ بـ $(q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$ ليكن الآن الـ n - شكل التفاضلي (المركب)

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \omega^* \left(\frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \right)$$

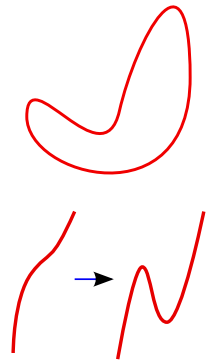
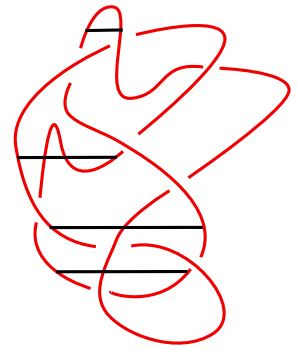
على X_n . بعد مكاملته على كل مركبة مترابطة لـ X_n ، وضربه بالعنصر المقابل من $Chord(n)$ والجمع على كل المركبات لـ X_n ، نحصل على عنصر من A_n . يعرف

المجموع الشكلي لكل هذه العناصر، من أجل كل قيم n ، عنصراً من \hat{A}_n : هذا هو لا

متغير كوتسبشيتش لـ γ ، الذي نرمز إليه بـ $Z(\gamma)$ ، وهو عنصر من \hat{A}_n . بالمعنى الدقيق للكلمة، هذا ليس لا متغيرا بعدا! لقد تبين أن هذا لا متغير فقط إذا كانت العقدة γ مشوهة بين عقد مورس، مع الحفاظ على عدد النقط الحرجة. هذه بالفعل حقيقة غير تافهة.

يمكن أن يؤدي تشويه عام لـ γ إلى ظهور حذبة.

ومع ذلك، يمكن أن يكون التغيير في مقدمة الحذبة هذه موصوفا تماما. ليكن $Z(H)$ لا متغير الحذبة في الهامش.



يمكن إثبات أنه إذا كان للإحداثي t للعقدة γ ، $2c$ نقطة حرجة، فإن حاصل القسمة

$$I(K) = Z(K)/Z(K)^{c/2}$$

حيث $I(K) \in \hat{A}$ ، هو لا متغير فعلي للعقدة γ ، من أجل أي صنوية، يعني أي تشويه للعقدة ينتج تكوين نقط مزدوجة.

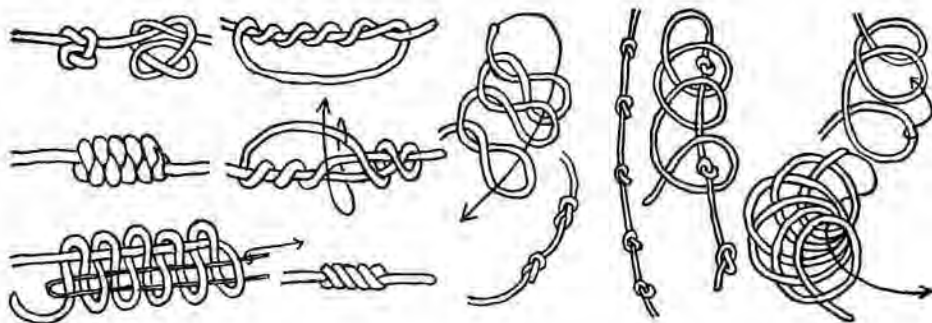
لا يزال يتعين علينا تبرير القسمة على $Z(K)^{c/2}$ في الجبر \hat{A} . هذا ليس بالأمر الصعب لأنه من السهل رؤية أن لـ $Z(K)^{c/2}$ شكل $1+a$ حيث درجة a أكبر من 1 بحيث يكون معكوس $1+a$ هو $1-a+a^2-a^3-\dots$.

لم تثبت شيئاً على الإطلاق. لم نشرح بأي معنى يكون هذا اللا متغير كونياً. في واقع الأمر، إنه غير معروف ما إذا كانت عقدتان متكافئتين إذا فقط إذا كان لهما نفس اللا متغير: سيكون ذلك رائعاً.

للحصول على عرض مفصل، أنصح بإلحاح هذه المقالة¹⁷ وبهذا الكتاب¹⁸⁰.

179 S. Chmutov and S. Duzhin. [The Kontsevich integral](#). *Acta Appl. Math.*, 66(2):155–190, 2001.

180 S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. [Introduction to Vassiliev knot invariants](#). Cambridge University Press, Cambridge, 2012.





كاسپار ديبيد فريديتس : شجرة الغربان.

خاتمة

زهتنا قد انتهت. لقد تجولنا عبر كثير من الغابات الرياضية. لقد رأينا بالفعل العديد من الأشجار، ولم يكن سفرنا بالتأكيد مسارًا جبهودبيًا. سوف يرغب قارئى بكل أمل في السفر أكثر واستكشاف مناطق جديدة فيها مزيد من التفاصيل، وربما أكثر جدية. نظرا إلى أن جولتنا كانت حلقة مغلقة بدأت مع الـ "هائم فوق بحر الضباب"، لكاسبر ديهيد فريدريش، فلربما يكون من المناسب الآن أن نلقي نظرة إعجاب على شجرة الغربان للفنان نفسه، بتاريخ 1822. في ذلك الوقت، كان قاوس يحلم بالهندسة غير الإقليدية. تم اختيار هذه اللوحة كواجهة لواحد من كتيبي الرياضياتية المفضلة¹⁸¹ والتي تتعامل أيضًا مع الأشجار، وإن كانت مختلفة جدًا عن تلك التي شوهدت أثناء الزهرة. الوجهة المقبلة لقارئى؟

¹⁸¹J.-P. Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.



كاسپار ديبيد فريديريتش :
Mann und Frau in
Betrachtung des Mondes
(رجل وامرأة يتأملان القمر)
◉ (1818 - 1824).

نسخة من هذا النص كانت متاحة على *Arxiv* وعلى *AMS Open Math Notes* في نوفمبر 2016. منذ ذلك الحين قام دارسان آخران سابقان بفحص الكتاب بالتفصيل وأرسلوا إليّ كثيرًا من الملاحظات المثيرة للاهتمام.

عادة ما يتعامل سبّرج كانطا مع الهندسة الجبرية والديناميكيات في الميدان المركّب. ميشيل تريستينو أكثر اهتمامًا بالاحتمالات، النظرية المسرانية والفيزياء النظرية الغائبة أساسًا عن هذا النزهة!

لقد تشرفت بتدريس دورة الدراسات العليا حول هذا الموضوع في IMPA، بريو دي جانيرو، في يناير وفبراير 2017. من بين الدارسين الذين حضروا الفصول الدراسية، أودّ أن أوّكد أن سبعة منهم بدأوا الترجمة باللغتين البرتغالية والإسبانية وهم:

Aguiar Alina Sotolongo, Azul Fatalini, Carlos A. Gomes, Esteban Arreaga, Filipe Bellio da Nobrega, Gregory Cosac, Thiago Dourado.

Dali Shen، زميل ما بعد الدكتوراه في IMPA، أيضًا أرسل إليّ قائمة طويلة من الملاحظات.

كما تلقيت تعليقات من

Jean Barge, Brian Davey, Maxim Kontsevich, Manuel Ojanguren, Jean-Pierre Serre.

إنه لمن دواعي سروري أن أشكرهم جميعًا. لن أنسى القارئ المجهول الذي أرسل إليّ الشوكولاتة لأنه أحب الكتاب. عرّف عن نفسه باسم Paul Ynomial, rue du nœud de trèfle, Ker Lann. ربما لا يجدر بي إضافة التعليق الواضح الذي أنا فيه - بالطبع - مسؤول عن جميع الأخطاء المتبقية.

كما يسعدني أن أشكر ثلاث مؤسسات محممة. كان *Centre National de la Recherche Scientifique* يدعمني منذ سنوات عديدة.

ال *Instituto de Matemática Pura e Aplicada* ريو دي جانيرو، وقرّ أجواء علمية ممتازة وسلاما كافيًا لكتابة المسوّدة الأولى من هذا الكتاب.

ال *Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'École Normale Supérieure de Lyon* كانت مؤسستي المنزلية لوقت طويل.

إبتيهن جيس

ليون، 22 أغسطس 2017



Serge Cantat.



Michele Triestino.

اعتمادات الصور



تم إنتاج النص والرسوم التوضيحية من دون الرمز © من قبل إبتيهن جيس الذي تنازل عن جميع حقوق النشر والحقوق ذات الصلة أو المجاورة. يمكنكم نسخها وتعديلها وتوزيعها، حتى للأغراض التجارية، كل ذلك دون طلب إذن. ينطبق ترخيص CC0 نفسه على الصور المعدّة من طرف جوس لؤس على الصفحات الآتية:

7, 7, 49, 112, 112, 116, 117, 124, 124, 142, 149, 152, 153, 153, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 165, 170, 176, 179, 180, 180, 180, 181, 182, 184, 185, 186, 186, 187, 201, 218, 219, 224, 227, 278, 283,

والمستندات الآتية من archive.org :

Gauss's dissertation: 6 – Colson's translation: 42 – Buffon's translation: 46 – Cramer's book: 58 – Cramer's book : 63 – Gauss figure: 72 – Serret's book: 84 – Serret's book: 85
— Divergentibus: 86 – Architecture book: 112 – Cable: 223 – Ashley: 288,

وكذلك ما يأتي من Wikipedia :

Wanderer: ii – Haeckel: 16 – Catalan: 21 – Catalan: 22 – Schroeder: 36 – Hipparchus: 36
– US signs: 37, 179 – Plutarch: 39 – Newton: 45 – Cramer: 61, – Dalember: 77 – Euler: 87, – Hardy: 91 – Cauchy: 94 – Darwin finches: 109 – Moebius: 111 – Recycling: 117
– Olympic: 122, – Noether: 133 – Cremona: 137 – Paris: 147 – G. Doré: 155 – Puiseux: 169 – Weierstrass: 173 – Dürer: 190 – Cherry tree: 198 – Darwin: 214 – Epicycles: 224 – Gauss: 228 – Gauss's signature: 230 – Tree of crows: 292 – Mann und Frau: 294,

و

Four seasons: 9 – Tree of life: 10 – Mississipi: 34 – Circular Iching : 273 – Chord: 284.

تم نشر الرسوم التوضيحية الأخرى بموجب تراخيص المشاع الإبداعي الموضحة أدناه.



Signs: 3, 62, 87, 91, 134, 184, 199 – Knuth: 17, 19 – Mobile: 31 – : 32 – Cauldron: 118 – Cherry : 209 – Fish : 219 – IconPark : 242 – Nasa: 274.



Earth: 114 – Logo: 123 – Dimensions: 146 – Hopf: 149 – Flammarion: 154 – Geocentric: 154 – Pointe: 168 – Stasheff: 199.



أشكر الأفراد والمؤسسات الآتية أسماؤهم على السماح لي باستخدام بعض وثائقهم

Maxim Kontsevich: 1 – Bib. Diderot ENS Lyon: 4 – Cambridge University library: 5, 45, 47, 48, 51, 52, 55, 57 – Museu de Arte da USP: 6, 120 – Frédérique Bassino: 33 – Pierre Gallais: 54 – U. Göttingen: 38, 283 – Scot Kolodziejski: 69, 275 – Institut de France: 78 – Gallica: 99 – Étienne Lecroart: 116 – Sylvie Pic: 118 – Laurent Bartholdi: 119, 143, 170 – Tadashi Tokieda: 125 – Ton Marar: 126 – Barry Sobel: 132 – Tony Philips: 148 – André Nachbin: 167 – Olivier Joseph: 175 – John Milnor: 177 – Rémy Oudompheng: 193 – Robert Coquereaux: 197 – Eliane Loday: 197 – Anatoly Fomenko: 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207 – Yifan Hu: 220, – Gary Urton: 245.

تم إعداد هذا الكتاب باستخدام "tuftex-latex Document class" المستوحاة من أعمال Edward Tufte.

بالنسبة إلى المراجع فقد حددت الروابط الفائقة على الأوراق التي يمكن الوصول إليها مجاًناً. قيل لي إنه يمكن الوصول بسهولة إلى جميع المراجع تقريباً على مواقع الشبكة المشكوك في شرعيتها.

2-ball: كرة 2

2-disk: قرص 2

2-sphere: كرة 2

3-sphere: كرة 3

Acyclic digraph: بيان موجه خال من الحلقات

acyclic graph: بيان خال من الحلقات

abelianization: مؤابلة، التحويل إلى أبلي (ة)

abelianize: آبل، يؤابل، يحول إلى أبلي (ة)

action: عمل

adjacency matrix: مصفوفة تجاور

adjacent: متجاور

affine: تآلفي

analytic: تحليلي

ancestor: سلف

annulus: حلقة، طوق

apex: قمة، رأس

approximation: تقريب

a priori: بداهة

argument (of a complex number): عمدة عدد مركب

associahedron: تجميعي السطوح

automorphism: أوطوتشاكل

axiom: بديهية، مسلمة

Barycenter, barycentre: مُرَجِّح، مُرَجِّح

base point: نقطة أساس

biconnected: ثنائي الترابط

bigraph: بيان موجّه

binary: ثنائي (أثنائي)

binary tree: شجرة ثنائية (أثنائية)

binomial: ثنائي الحد

bipartite graph: بيان شطرافي، ذو فرعين

birational: ثنائي التنطيق

block graph: بيان كُتلي

blow down (a curve): جُر هبوطا

blow up: جُر صعودا

blowing down: تفجير هابط

blowing up: تفجير صاعد

boundary: حدّ

braid: ضفيرة

branch: فرع

branch cut: قطع تفريحي

branched cover: تغطية مفرّعة

bundle: حزمة

Category: فئة

cellular space: فضاء خلوي

child (of a node): طفل (عقدة)

chord: وتر
 chord diagram: مخطط وترى
 circulation: جولان
 clique: عصابة
 closed curve: منحنٍ مغلق
 closure: مُغلقة
 cobord: حدّ مقابل
 cochain: سلسلة مقابلة
 cocycle: دورة مقابلة
 codimension: تمام البعد، البعد المقابل
 cograph: بيان مقابل
 cohomology: تمانل مقابل
 colinear points: نقط متسامنة، نقط على استقامة واحدة
 collapse: يقوّض
 collapsible (graph): قابل للتقويض
 combination: توفيقية
 combinatorial: توافيقي
 combinatorics: توافيقيات
 combinatorist: توافيقياتي
 compact: متراص
 compactification: رص
 compactness: تراص
 complement: مُتّيم
 complete graph: بيان تام
 completeness: إتمامية
 completion: تميم
 complex (number): عدد مركّب
 complexification: تراكب
 component: مركّبة
 concatenation: تعاقب
 configuration: تشكّل
 configuration space: فضاء التشكّل
 conformal: امتثالي

connected: مترابط
 connectedness: ترابطية
 connection: ربط، رابط
 content: محتوى
 contractible: قابل للتقليص
 contravariant: مخالف للتغير
 convex hull: الغلاف المحدّب
 convolution: تلاق
 core: نواة
 corollary: لازمة
 covariant: موافق للتغير
 cover: تغطية
 critic point: نقطة حرجة
 critic value: قيمة حرجة
 cusp: قُرنة
 cuspidal: قُرني
 cutting: قطع
 cycle (graph): دورة
 cyclic: دوري

Deck transformation: تحويل تكديسي
 decomposable: قابل للتحليل
 decomposition: تحليل
 deformation: تشويه
 degenerate form: شكل منحلّ
 deque: رصطف (رصيف + اصطفاف)
 descendant (of a node): سليل
 desingularization: إزالة المفرديات
 diagram: مخطط
 diffeomorphic: متفاكل (تفامتشاكل)
 diffeomorphism: تفاكل (تفاتشاكل)
 digraph: بيان مُوجّه
 dihedral: ثنائي الوجه
 disc: قرص

discrete: متقطع

discriminant: مميّز

disk: قرص

disorienting loop: حلقة غير موجهة

domain: ميدان

double point: نقطة مزدوجة

dual: ثنائي

dyadic: ثنائي، 2-رئابي

dynamical system: نظام تحريكي (ديناميكي)

Edge: حافة (وصلة)

effective: فعلي

ellipsoid: شبيه ناقص (شبيها ناقص، أشباه ناقص)

elliptic: ناقصي

embedding: تغطيس

entire function: دالة صحيحة

epimorphism: إبيتمشاكل (تشاكل فوق)

equivariant: متساوي التغير

ergodic theory: النظرية المسرانية

exact sequence: متتالية تامة

exceptional divisor: قاسم استثنائي

Face: وجه

fiber: ليفة

fiber bundle: ملبّيف (حزمة ليفية)

fibred knot: عقدة ملبّيفة

fibration: تليف

fixed point: نقطة ثابتة

flecnode: عقدة انعطاف

flow: سائل، تيار

flux: تدفق

folium: ورقية

forest: غابة

form: شكل

formal sum: مجموع شكلي

formula: علاقة (صيغة مرادف قديم)

frame (in a vector space): معلّم

free action: عمل حر

frontier: حد (محيط)

functor: دالّ

Genus: جنس، مُصنّف

geodesic: جوديزية

germ (of function): برعم (دوال)

girth: طوق

graceful graph: بيان رشيق

graded algebra: جبر متدرّج

graded space: فضاء شعاعي متدرّج

gradient: تدرّج

grafting: تطعيم

graph: بيان

Holomorphic: هولومورفيك (ة)

hom(o)eomorphic: هوميومورفيك (مستشاكل)

hom(o)eomorphism: هوميومورفيك (مستشاكل)

homogeneous: متجانس

homology: تماثل

homotopy: ترادف

hyperbolic: زائدي

hyperbolic space: فضاء زائدي

hyperboloid: شبيه زائد

hyperplane: مستوي فوق

Image: صورة

immersion: تغميس

implicit function theorem: مبرهنة الدالة الضمنية

implosion: انفجار داخلي

improper integral: تكامل موسع

incidence: وقوع	marked: مُعلَّم
induced: مُحدَّث	meromorphic: مبرومتشاكل (ة)
induction: استقراء	moduli space: فضاء المقاييس
infinite: غير منته	modulus: مقياس
infinity: لا منته	monodromy: الامتداد الأوحده
inflection point: نقطة انعطاف	monomial: أحادي الحد
integral domain: ميدان متكامل (حلقة صحيحة)	monomorphism: مونومتشاكل
integrand: مُكامل	morphism: تشاكل
interlace graph: بيان متشابك	multiple point: نقطة مضاعفة، متعدّدة
interval: مجال	multiple root: جذر مضاعف
invariant: لا متغير	multiplicity: تعددية
involute: ناشر	n -ary (operation): n -اي (آية)
involution: النفاذ	n -list: قائمة n
irreducible: غير قابل للاختزال	node (of a tree): عقدة (شجرة)
isomorphic: إيزومتشاكل (ة)	non-orientable: غير قابل للتوجيه
isomorphism: إيزومتشاكل	norm: نظيم (معياري)
isotopic: صنو (صنوان، أصناء)	normal: ناظمي
isotopy: صنويّة	normal bundle: حزمة ناظمية
isotropic: متناح (ي، ية)	notation: ترميز
iteration: تكرار	not oriented: غير موجّه
iterative: تكراري	n -th root of unity: جذر n -ي للوحدة
Join (graph): ضم بيانين	n -tuple: قائمة n
Label: يسم، وسم، وسوم	Obstruction: إعاقة
labeled (labelled): موسوم	occurrence: تكرار
lemma: توطئة	operad: عمولة
lexicographical order: ترتيب معجمي	orbit: مدار
link: رابط، ربط	order: ترتيب، مرتبة
linked: مرتبط	orientable: قابل للتوجيه
linking: ربط، رابط	orientation: توجيه
locus (geometric): محلّ (هندسي)	oriented: موجّه
loop: حلقة، غرورة	orienting loop: حلقة موجّهة
Manifold: مُنوّعة	p -adic: p -رتابي
map, mapping: تطبيق	paper: ورقة، مقالة

parabolic: مكافئي	recursion: ترداد
paraboloid: شبه مكافئ	recursive: تردادى
parameter: وسيط	reduced: مختصر، مختزل
parameterization: توسيط	regular curve: منحن منتظم
parameterize: يُوسَط	regular point: نقطة منتظمة، عادية
parity: شَفَعِيَّة	regular value: قيمة منتظمة، عادية
partition: تجزئة	relatively prime: أوليان (أولية) نسبيا
path: مسار	resolution (of a singularity): حل المفردية
path graph: بيان مساري	resultant (of polynomials): ناتج
pattern: نمط	rigid rotation: دوران صلب
pencil: حُرمة	ring: حلقة (بنية جبرية)
pendant vertex: رأس متدلّ	root: جذر
permutation: تبديلة	rooted tree: شجرة مُجَدَّرَة
permuton: بُدِيلَة	Saddle-node: عقدة السرج
phase portrait: صورة (لوحة) الأطوار	separable: قابل للفصل
pitchfork: ومذارة	signature: توقيع
polynomial interchange: تبادل كثير الحدود	simplex: بسيط
power series: متسلسلة قوى	simplicial complex: مركب بسيط
preimage: صورة عكسية	singularity: مفردية
presentation: عَرْض	singular point: نقطة مفردة
projective: إسقاطي	skelton: هيكل
projectivize: يُوسَقَط	smooth: أملس
pruned tree: شجرة مشدّبة، مقلمة	solid torus: طارة صلبة
pull-back: سحب إلى الخلف	solitary chord: وتر منعزل
Quadtree: شجرة رباعية	spectrum (roots, eigenvalues): طيف
quaternion: مرباعي	split (in a graph): يشطر، يقسم
Radial: شعاعي	square sphere: كرة مربعة
radius: شعاع (نصف قطر)	stable: مستقر
ramphoid curve: منحن منقاري	stack: تكديس
ramphoid cusp: قرنة منقارية	stereographic: مجسمي
rank: رتبة	strand (of a braid): خيط، قوس

strict transform (of a curve): تحويل فعلي (لمنحن):

subgraph: بيان جزئي

submersion: غمر

subtree: شجرة جزئية

support: حامل

suspension: تعليق (معلق)

symmetric: متناظر

Tangent: مماس

theorem: مبرهنة

theory: نظرية

torus: طارة

tour: جولة

trajectory: مدار

transcendental: مُتسام

transitive action: عمل متعدي

transversal: عرضي

transverse: عرضي

tree: شجرة

treelike: شجري (شبه شجرة)

trefoil knot: عقدة ثلاثية الوريقات

triangulate: مَثَلَّتْ

triangulated: مُمَثَلث

triangulation: مَثَلْثَة

trivial: تافه

trivialization (of a bundle): تنفيهِ (حزمة)

tubular neighborhood: جوار أنبوبي

Uniform: مننظِم

unique factorization domain:

ميدان التحليل الوحيد (حلقة عاملية)

unit (element): الوحدة (عنصر)

universal covering: غطاء كوني

unknot: لا عقدة

unlinked: غير مرتبط

Valency: تكافؤ، تواتر الحواف

valuation: تقويم

vector: شعاع

vector space: فضاء شعاعي

vertex: رأس

Walk: مسلك

wedge: إسفين

winding number: عدد اللقات

word: كلمة

Zodiacus: دائرة البروج

نزهة رياضية فريدة

نزهة في عالم الرياضيات. هذه ليست مقدمة أولية لنظرية المفرديات، ولا بحث متخصص يحتوي على العديد من المبرهنات الجديدة. الغرض من هذا الكتاب الصغير هو دعوة القارئ إلى نزهة رياضية. تقوم بزيارة لهيباركوس ونيوتن وفاوس، ولكن أيضًا للعديد من علماء الرياضيات المعاصرين. نحن نعالج القليل من الجبر، والطوبولوجيا، والهندسة، والتحليل المركب، والتوافقيات، وعلوم الحاسوب. نأمل أن يستمتع الدارسون الجامعيون المتحمسون والرياضياتيون الأكثر تقدمًا ببعض هذه المشاهد العامة.

إيتيين جيس هو باحث أول في المركز الوطني للبحث العلمي (CNRS) في École normale supérieure de Lyon.