

ÉTIENNE GHYS
Bir tekil matematik gezintisi

Bir tekil matematik gezintisi



Caspar David Friedrich
"Sis denizi üzerinde
gezgin" (1818)

ÉTIENNE GHYS

BİR TEKİL
MATEMATİK
GEZİNTİSİ

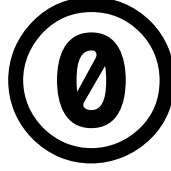
Kataloglama: Publication Data

Bir tekil matematik gezintisi/Étienne Ghys – Lyon, ENS Éditions

Özgün adı: A singular mathematical promenade

Basım: 2017. –1 vol. (306 p.).

ISBN



© işareti olmayan tüm metin ve görseller Étienne Ghys tarafından üretilmiş ve tüm telif ve benzer haklardan feragat edilmiştir. Ticari amaçlar için bile, izin almadan kopya edebilir, değiştirebilir ve dağıtabilirsiniz. Diğer görsellerin basım hakları için [Görsel kaynaklar](#) sayfasına bakınız.

CCO lisansı hakkında daha ayrıntılı bilgi için: [Creative Commons](#).

Bu kitabın orijinali pdf olarak [Arxiv](#), yazarın [kişisel sayfası](#) ve [ENS Éditions](#) sayfasından ücretsiz indirilebilir. Türkçesi ise Türk Matematik Derneği'nin sitesinden indirilebilir.

İngilizce L^AT_EX kaynak dosyaları [şuradan](#), Türkçe kaynak dosyalarıysa Türk Matematik Derneği'nin sitesinden indirilebilir.

Kitabın İngilizce basılı hali [ENS Éditions](#)'dan satın alınabilir.

Yayın koordinatörü: Betül Tanbay

İngilizce özgün metinden çevirenler: Ahmet Feyzioğlu, Arkadaş Özakin, Ferit Öztürk

Bilimsel editör ve düzelti: Ferit Öztürk

Kapak tasarımı: Aydın Tibet

Kapak fotoğrafı: Gezi Parkı

İletişim adresi:

Türk Matematik Derneği

Bankalar Cad. No:2

Minerva Han

34420 Karaköy

İstanbul - Türkiye

Telefon: (0212) 292 49 39

tmd@tmd.org.tr

Basımevi

Beni hep “ufak bir kitap” yazmaya teşvik eden Martine’e...

İçindekiler

<i>Gezintinin gezisi</i>	1
<i>Türkçe çeviri için önsöz</i>	5
<i>Önsöz</i>	7
<i>Yol haritası</i>	11
<i>Kesişen Polinomlar: Maxim Kontsevich</i>	17
<i>Örüntüler ve permütasyonlar: Donald Knuth</i>	23
<i>Ayrışabilen permütasyonlar</i>	33
<i>Hipparkos ve Schröder</i>	41
<i>De methodis serierum et fluxionum: Newton yöntemi</i>	49
<i>De methodis serierum et fluxionum: Newton serileri</i>	57
<i>Biraz formel cebir</i>	65
<i>Cebirsel eğriler üzerine Gauss</i>	75
<i>Gauss'un tekilliklere dair iddiasının kanıtı</i>	85
<i>Iraksak serilere dair: Euler, Cauchy ve Poincaré</i>	93
<i>Yakınsaklık: Cauchy</i>	101

<i>Möbius ve şeridi</i>	117
<i>Möbius kolyeleri</i>	127
<i>Tekilliklerin çözünmesi</i>	139
<i>3-küre ve Hopf liflenmesi</i>	149
<i>Topuk ve yonca</i>	163
<i>Victor Puiseux, nihayet!</i>	175
<i>Jack Milnor ve liflenmesi</i>	183
<i>Hipparkos-Schröder-Tamari-Stasheff asosiahedronu</i>	197
<i>Jim Stasheff ve ilmek uzayları</i>	205
<i>Operadlar</i>	217
<i>Tekil operadlar</i>	227
<i>Gauss'un dönüşü: düzlemde eğriler</i>	235
<i>Analitik giriş diyagramları: bir algoritma</i>	249
<i>Analitik giriş diyagramları: binişme çizgeleri</i>	263
<i>Gauss ve geçişme</i>	281
<i>Kontsevich'in dönüşü: evrensel değişmez</i>	291
<i>Sonsöz</i>	299
<i>Teşekkür</i>	301
<i>Görsel Kaynaklar</i>	303
<i>Sözlükçe</i>	305

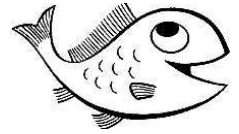
Gezintinin gezisi



Etienne Ghys, kitabından da anlaşılacağı üzere bir gezgin. Pek çok gezgin gibi dünyayı keşfi Anadolu'dan başlamış. Kendi küçük Roubaix şehrini ilk terk edişi 1972'nin Temmuz ayında ülkemize gelmek üzere iki abisi ve onların bir kız arkadaşıyla trene binmesiyle gerçekleşiyor. Tatil için ülkesine dönen işçilerin misafirperverliği ile tanışmış önce. Trende yemekler paylaşıyor, uyuyana omuz veriliyor, işaretlerle anlaşmaya çalışılıyor. Ve tabii çok gülünüyormuş! Şafak vakti İstanbul'a giren tren... Uykulu gözlerle yepyeni bir dünyanın keşfi. Memleketin değişik manzaralarını hatırlıyor ama en çok insan manzaralarını. Ertesi yaz "kaplumbağa" bir vosvos ile yine Türkiye. Bir sonraki yaz, bu sefer kargo gemisi ile. Ve yirmi beş sene sonra karısı ve iki çocuğunu alıp uçakla. Bu sefer dünyanın kendi çevreleri ile bitmediğini anlama sırası çocuklarında. Otobüsle Karadeniz'den Güney Doğu'ya gitmedik yer bırakmıyorlar.

Ghys buralara gelmeyeli bir yirmibeş sene daha geçmiş neredeyse. Boğazdan da çok sular akmış. Yüzden fazla balık çeşidi, tek rakama inmiş. Bir, iki derken, üç köprü yapılmış. Artık trenle gelinmiyor İstanbul'a. Gelen ziyaretçi vapurları ise, karadaki apartmanların denize izdüşümü sanki. Matematikçi gezginin ritminden çıkmış şehir. Yürümek, yürürken düşünmek imkansız. Kapaktaki "arnavut kaldırımları" bütün şehirden bir bir sökül-müş, "ne arnavut, ne kaldırım" denmiş adeta... Kapak için epey dolaştık da zor bulduk "Zürafa Sokak"ta canlı kalanları! Pek tekil kaldı zavallılar, Gezi Parkı'ndaki parke taşına razı olduk.

Kitapta Etienne Ghys matematik ağaçlarından, ormanlarından, kuşlardan, balıklardan, kirazlardan bahis ediyor. Her satırda,



kendini Matematiği anlamaya ve de anlatmaya adanmış bir insanın heyecanını hissediyorsunuz. Kitapta az buz patlatma, kesip biçme yok ama, soyutla somutun, Matematikle Doğanın ilişkisi hiç kopmuyor. Doğa nasıl yaratılmış hemfikir olmasak da, insanın insanı ve doğayı anlamak için yarattığı en inanılmaz yapının Matematik olduğu muhakkak. Ne yazık ki, hem doğanın, hem Matematiğin doğasının çok hor görüldüğü bir dönemden geçiyoruz, özellikle yakın çevremizde. Kolay değil bu ortamdan iyi matematikçiler çıkarmak. Ama doğal ortamında Matematik düşünmek isteyenlerin şansı hiç de yok değil: koca şehrin korularından birine saklanmış bir merkez, hala trenle gidilen bir şehrin yakınındaki ormanlara gizlenmiş bir “çakılası”, uçsuz bucaksız denizlerimizin bir yamacında gelişen bir enstitü, ve ünü memleketimizi aşmış bir koca matematik köyümüz var. . . Ve daha ülkemizde Matematiğin saklanmadan yeşerebileceği inanılmaz nitelik ve nicelikte yer var. . . Ümidim bu kitabın matematikçilerin ufkunu açması, yeni fikirler üretmelerine katkıda bulunması, doğa ile matematiğin inanılmaz ilişkisini yeniden hissedip, yeni birlikteliklere fırsat doğurması.

Aralık 2016’da matematikçilerimizin sanal haberleşme ağlarında kitabın orijinalini paylaşan Arkadaş Özakin’a tekrar teşekkür ediyorum. Okuduğumda Hindistan’da bir konferansta idim ve gezintide olma ruh ve enerjisiyle kitabı türkçeye kazandırmak için Ghys ile hemen yazıştım. Hindistan’dan bir Türk, Brezilya’da bir Fransızla haberleşebiliyor, ve bir fikir çabucak somutlaşabiliyor. Bu da teknolojinin bize kazandırdığı güzelliklerden, kolaylıklardan biri. Gönül ister ki, bir tek güzellik ve kolaylık için kullanalım.

Kurumdaş ve arkadaşlarım Ahmet Feyzioğlu ve Ferit Öztürk benimle aynı heyecanı duydular ve Arkadaş’la birlikte kalifiye ötesi tercüme ekibimizi, daha doğrusu Etienne’in tabiriyle kitabı “yeniden yaratma” ekibini oluşturdular. Ahmet 17-21, 49-84, 101-115 sayfaları arasını, Arkadaş 23-47, 117-159, 163-173 sayfaları arasını ve Ferit de 85-100, 160-162, 175-297 sayfaları arasını tercüme ettiler. Herbirine ayrı ayrı, ama özellikle tüm bilimsel editörlük ve düzeltmeleri yapan Ferit’e çok teşekkür ediyorum.

Kitabı türkçeye kazandırma projesini Türk Matematik Derneği Yönetim Kurulu'na sunduğumda aynı heyecanla kabul ettiler. Tercüme emeğinin sıklıkla sömürüldüğü bir ülkede, derneğin sınırlı imkanlarını zorladılar, ellerinden gelen en geniş desteği verdiler. Derneğimize "kurumsal kimlik" kazandıran tasarımcımız Aydın Tıbet de her zamanki gibi gönülden katkısını esirgemedi. Hepsine müteşekkirim.

Tüm hatalardan tek başıma sorumlu olduğumu eklemeliyim. Çünkü ben de önsöz, yol haritası, sonsöz derken burnumu soktum, ve stil farkı olmasın bahanesiyle oraya buraya dokunduğum oldu. En keyiflisi Ghys'in bizim kitabımız için yazdığı "Gavagai" metnini "yeniden yazmak" oldu. Daha felsefi olan bu kısım üzerinde çalışırken, evrensellik ve yerellik konularını düşünmemek mümkün değildi. Evet, Ghys'in cömertçe ifade ettiği gibi, yerelde bir yenilik yaratıyorduk, ama yeniliğin evrensele bir katkısı olmalıydı. Sadece "gerçek" mi, "hakikat" mı sorusu bile, ne yerel soru ve sorunlar açabilirdi. Bırakayım soyut sorunları, "Napolyon"'a yenilmemiş olup, sayfa 215'deki kiraz ağacı resmini, "Yarımca kirazı" ile değiştirebilseydik fena mı olurdu? "Gavagai" tercümemi ve bu önsözü Ghys'e tekrar tercüme edip yorumlarını alsaydım, bu kitap hiç bitmeyecekti. . . Aslında belki de bu kitap hiç bitmeyecek. . . Matematik, insanın ruhunu, dikkatini, terbiyesini, estetik duygusunu, merakını, zerafetini, efendiliğini, tevazusunu, aklını, anlayışını geliştiren bir mucize ve bu mucizenin sonu yok!

Elinizdeki gezintinin daha çok gezilere ilham olması ümidiyle, keyifli okumalar, düşünceler diliyorum.

Betül Tanbay
İstanbul, Mart 2018



Türkçe çeviri için önsöz

Kendi yazdığın metni, hiç anlamadığın bir dilde karşında bulmak ne tuhaf bir duygu! Hem gurur, hem merak uyandırıyor insanda. Elimdeki şu Türkçe kitap, İngilizce yazmış olduğumun aynısı mı acaba? Matematik, yazıldığı dilin ötesinde olabilir mi?

Kimi, Matematikğin bir dil olduğunu, belli kurallarla yazılmış uzun semboller dizisinden oluştuğunu ve içinde kesin anlamlar aranmaması gerektiğini iddia eder. Kimi ise, dili sadece bir araç olarak görür: Platonik bir cennete yerleşmiş, soyut ve evrensel Matematik Dünyasını tasvir etmeye yarayan bir araç. Ve nihayet kimileri de Matematikğin, her birimiz için farklı birkaç nöron bağlantısından ibaret olduğunu ve kelimelerle ancak kısmen paylaşılabilceğini ileri sürer.

Tam da Türkçe yazıldığı için, ben bu kitaptaki matematiksel içeriğin, İngilizcesiyle birebir aynı olmadığını, başka birşeyler daha sunduğunu hayal etmek istiyorum. İster Fransızca, ister İngilizce, isterse de Türkçe olsun, Matematikğin doğal bir dili olduğunu ve bu dilin esrarlı bir şekilde, matematikğin içeriğiyle ortak yaşadığını düşündüm hep. Tercüme, basit bir izomorfi olamaz: tadına varılması gereken yeni bir oluşumdur olsa olsa.

Meşhur dilbilimci Willard van Orman Quine bazı dogmalarımızı yıkan bir başyapıt yazdı. *Sözcük ve Nesne*'de, içsel bir anlamı olmadığından, tercüme-izomorfinin de olamayacağını kanıtlar. Her dilde tek anlamlı ifade edilebilecek yegane bir hakikat yoktur. Quine bir düşünce deneyi sunar. Bir dilbilimci dilini hiç bilmediği bir kabileyi ziyaret eder. Birden, 'Gavagai' diye haykıran bir yerli görür ve aynı anda da kaçan bir tavşan... Acaba 'gavagai', 'tavşan' mı demektir? Yerli, kaçışla ilgili bir şey

söylüyordur belki, ya da tamamen ilgisiz başka bir şey... Quine'in savı, aynı durumu yaşayan iki ehil dilbilimcinin, yerlilerle tutarlı sohbetler yapmayı sağlayacak ama birbiriyle uyuşmayan sözlükler hazırlayabilecekleridir. Yani 'Gavagai' tercüme edilmemiştir, ve yine Quine'e göre, ifadelerimizin evrensel anlamı yoktur. Bu tip muhakemeleri matematiğe genelleştirmek tehlikeli ve belki de fazla kolaycılıktır. Yine de iki matematikçinin ikisi de ayrı ayrı, mesela 'manifold' dediklerinde, ciddi matematik kitaplarında bulduğumuz resmi tanımdan oldukça uzak olabilirler. Kendi dillerimizde 'Variété', 'Manifold', 'Mannigfaltigkeit', 'Variedad' kelimelerini duyduğumuz ya da okuduğumuzda, farklı zihinsel resimler çağrıştırmaz mı? Okurum kendi karar versin.

Bu 'yeniden oluşum' için, Türkiye ekibine iftihar ve minnetle teşekkür etmek istiyorum. Her şeyden evvel, coşkusu için Betül Tanbay'a teşekkürler: Türk Matematik Derneği'ne tercüme fikrini o önerdi, kitabın başını ve sonunu da o tercüme etti. Birçok bölümü tercüme eden Ahmet Feyzioğlu ve Arkadaş Özakın'a da müteşekkirim. Ferit Öztürk ise pek çok bölümü tercüme etti, kitabın tümünün düzenlemesini ve okumasını sağladı: tüm çalışması için en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Bana kalan artık Türkçe öğrenmek!

Étienne Ghys

Mart 2018

Önsöz

YIL 2009, aylardan Mart. Bir idari toplantıdayız. Biri benden de fazla sıkılıyor. Belli ki Maxim Kontsevich'in aklı başka yerde. Birden elime bir Paris metro bileti tutuşturuyor. Üzerinde bir karalama ve bir de kelime: "imkansız". Benimle yeni teoremini paylaşmakta! Teoremin ne dediğini anlamam birkaç dakika ve biraz fısıldaşma gerektiriyor, ispatlamam da birkaç dakika daha. Teorem şöyle:

Teorem. *Tek gerçek değişkeni x olan dört polinom P_1, P_2, P_3, P_4 aynı anda*

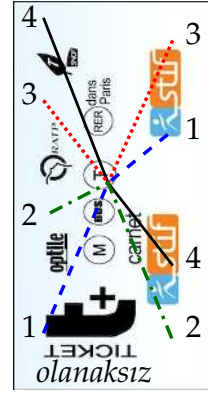
- *küçük $x < 0$ için $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$,*
- *küçük $x > 0$ için de $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$*

eşitsizliklerini sağlayamazlar.

Dört polinomun grafiklerinin görece konumu bazı kısıtlara bağlı. Büyüleyici! 2009 yılında dört polinom hakkında yeni bir temel netice!

Sonradan, teoremi daha genelleştirmeye, dörtten fazla polinom olduğunda neler olduğunu incelemeye çalıştım. Sonuç, şaşırtıcı şekilde farklı matematik alanlarında ve matematik tarihinin farklı dönemlerinde gezinmemi gerektiren bol sapaklı keyifli bir yolculuk oldu. Her zamanki gibi, ancak kısmen çözebildiğim yeni açık sorular çıktı.

Elinizdeki ufak kitabın maksadı, okuru bu matematik yolculuğuna davet etmek. Belli bir hedefe ulaşmak için en verimli yolu seçmedim, hatta bu metnin bir hedefi olduğu bile söylenemez.



Neredeyse tüm bölümler birbirinden bağımsız ve canınızın istediği kadarını atlayabilirsiniz. Herhangi bir bölümü fazla çetin veya fazla basit bulduğunuzda kolaylıkla geçebilirsiniz. Hipparkus, Newton ve Gauss'u ve daha pek çok çağdaş matematikçi ziyaret ediyoruz. Biraz cebir, biraz topoloji, geometri, karmaşık analiz, kombinatorik ve biraz da bilgisayar bilimini kurcalıyoruz. Matematik dünyasında bir gezinti.

Yine de bu gezintinin bir hedefi olsun, tamamen rastgele bir hale dönüşmesin diye son bölümlerde ispatlayacağımız bir sonucu vereyim. Galiba kitaptaki tek yeni sonuç.

C düzlem eğrisi üzerinde bir p noktası alalım.

Eğer C pürüzsüz ise, yerel resim çok ilginç sayılmaz.

Eğer p , C 'nin bir *tekil* noktasıysa resim daha karmaşık olabilir, mesela $x^2 = y^3$ bir topuk noktası. Şimdi F , değişkenleri x ve y olan bir polinom olmak üzere kendimizi $F(x, y) = 0$ denklemiyle tanımlanan *cebirsal* eğrilere kısıtlayalım. Böyle bir eğri, herhangi bir noktasının komşuluğunda, sonlu miktarda *dal* dediğimiz indirgenemez parçanın birleşimi olarak ortaya çıkar. Bu dalların doğası geçmişte uzun tartışmalara sebep olmuştur ve bundan bol bol bahsedeceğiz. En önemli sonuç dalların *topolojik* olarak pürüzsüz olmaları. Daha net ifade edecek olursak, her dal için onu bir doğruya gönderen yerel bir düzlem *homeomorfisi* vardır. Her dal p merkezli küçük bir çemberi tam olarak iki noktada keser.

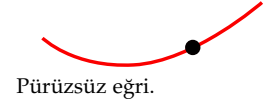
Bir eğrinin dallarının görece konumlarıysa çok daha ince bir mesele. Tekil bir noktanın komşuluğunda, topoloji, bir çember üstünde ikişer ikişer eşleştirilmiş çift sayıda noktayla tanımlanır: eşleştirmeyi dallar verir. Bir çember üstünde herbirinin bir rengi veya harfi olan n çift şeklinde gruplanmış $2n$ nokta elde ederiz.

Son durağımız olacak teoremi artık yazabiliriz. Bize yön verecek bir çeşit deniz feneri.

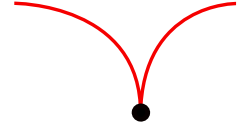
Teorem. *Düzlemde küçük bir çemberle şekilde gösterildiği gibi kesişen beş dalı gerçek cebirsal bir eğri tekiliği yoktur.*

Aslında, bir analitik eğrinin tüm topolojik konfigürasyonlarını tanımlayan çok daha kesin bir teoremi ispat edeceğim.

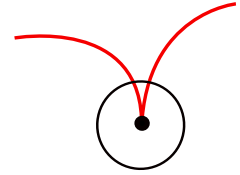
Bu "petit livre" yazılırken, kafamda tek bir okur vardı: üni-



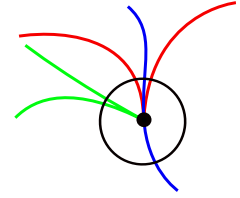
Pürüzsüz eğri.



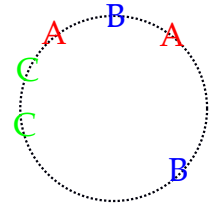
Topuk noktası.



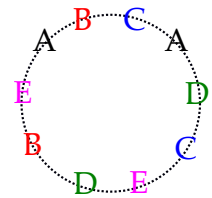
Küçük bir çember eğriyi iki noktada kesiyor.



Üç dalı bir eğri.



Karşılık gelen döngüsel kelime ABACCB.



İmkansız beş dal.

versite öğrencisiyken kendim. . . Bilinmesi gerekenleri, girdiğim “agrégation” sınavındaki dağarcığıma indirdim; tam 40 yıl olmuş ☺! Çok iyi hatırlıyorum, teknik detaylarla dolu uzun matematiksel metinleri okumakta çok zorlanırdım (hala da öyle) ve hep çizimlere bakmayı tercih ederdim. O zamandan beri matematikte çok sıklıkla hassas ve detaycı olmak gerektiğini öğrendim ama hala gezintilere bayılıyorum. Yeni başlayan birinin bu kataba tepkisi nasıl olur diye hayal etmeye çalıştım. “Kendimin iki hali” arasında yaptığım “sohbet” hayli ilginçti ve bana Borges’in “Öteki” öyküsünü hatırlattı. Bir rüya mıydı? Geçmişin yeniden inşası mı?

Burada bir uyarıda bulunmamız lazım: elinizdeki kitap, tepeden tırnağa tanım-teorem-ispata yapıda bir ders kitabı değil. Pek çok gezintide olduğu gibi, arada sırada kaybolmayı göze almalısınız. Tam verilmemiş tanımlar yüzünden homurdanacağınızı duyar gibi oluyorum, evet, yarı pişmiş tanımları kabul etmelisiniz... Elbette, ders kitapları şart ve referanslar vereceğim. Yine de, formel ispat ve tanımlardan önce, matematiksel fikirler ve örnekler verilmesi gerektiğine ikna olmuş vaziyetteyim. Ne demiş D’Alembert: “Devam et, iman arkandan yetişir”. Sislerin arasında nefis manzaralara rastlayacaksınız; Caspar David Friedrich’in kapak içindeki (Sisli Denizde Gezin (1818)) resmindeki gibi: matematik dünyasının bir betimlemesi mi bu acaba?

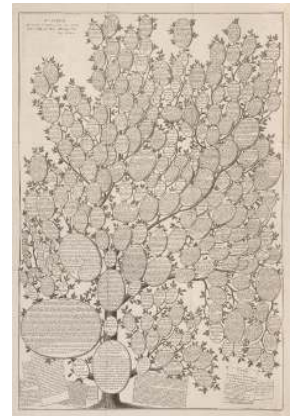
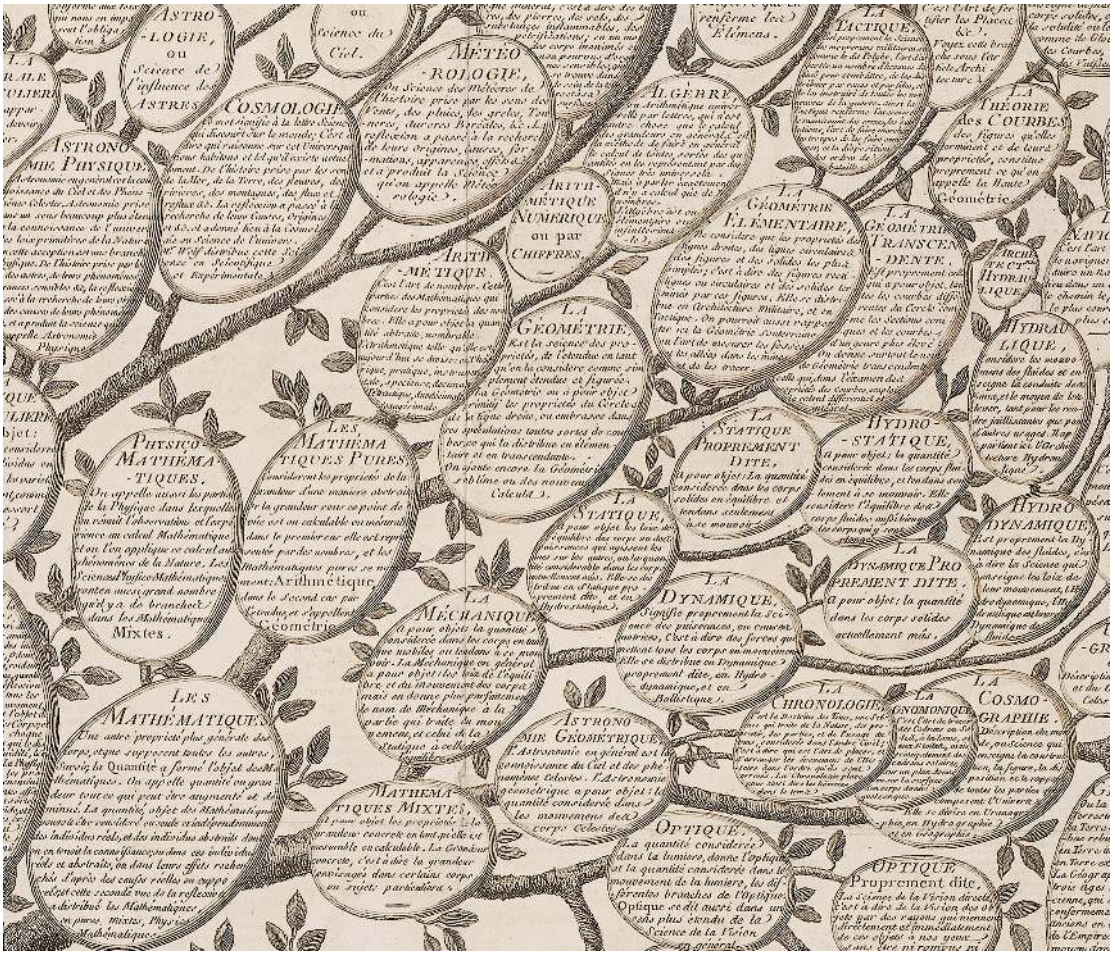
Şevkli üniversite öğrencilerinin bu manzaralardan zevk alacağını umuyorum.

Haydi çıkalım yola.



©

“Allez en avant, et la foi vous viendra.”



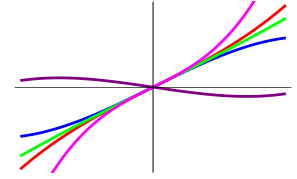
“Temel bilim ve sanatlarda şecere dağılımı üzerine bir deneme”den bir ayrıntı (Chrétien Frédéric Guillaume Roth, 1769). Bu çizim, Diderot ve D’Alembert’in meşhur [Ansiklopedisine](#) kapak içi resmi olarak konulmuştu. “Matematik” sol alt köşeye, “eğriler kuramı” sağ üst köşeye yerleştirilmiş. Acaba insan bilgisinin yapısı bir ağaç biçiminde midir?

Yol haritası

DÜZ BİR YOL TAKİP ETMEYECEĞİMİZ KESİN olduğuna ve bazı isteğe bağlı sapaklara hazır olmak gerektiğine göre, yolumuz hakkında biraz bilgi vermekte fayda var. Tur rehberinin turistik paket reklamındaki gibi.

İlk dört bölümde, P_1, \dots, P_n gerçekte polinom ailesinin grafiklerinin göreceli konumunu girişte bahsettiğim **Kontsevich teoremi** bakışıyla tartışacağız. x değişkeninin (mutlak değeri) küçük negatif ve küçük pozitif değerleri için $P_i(x)$ değerlerini karşılaştırmak, $\{1, \dots, n\}$ 'nin bir permütasyonunu veriyor; bu da yerel resmi 0 'ın komşuluğunda tasvir ediyor. Bu permütasyonların oldukça net bir tanımlamasını vereceğim. Aslında kombinatorikçiler, bunları “*ayrışabilen permütasyonlar*” adı altında değişik bir kılıkta incelemişlerdir. Ardından, **Donald Knuth** tarafından *Bilgisayar programlama sanatı* kitabında sunulduğu şekilde, *İt ve Çek yığıtları* konusunu inceleyeceğiz. **Ayrışabilen permütasyonların** sayısını *hesaplayacağız* ve bu sayıların iki binyıldan da önce **Hipparkos** tarafından incelenmiş olduğunu keşfetme fırsatı bulacağız.

Sonra problemi polinom grafiklerinden, dolaylı olarak bir $F(x, y) = 0$ gerçekte polinom denklemiyle tanımlanmış *düzlemsel eğri*'lere genelleyeceğiz. Bu, tekil bir noktanın komşuluğunda cebirsel (veya analitik) eğri topolojisini anlamayı gerektirecek. İlk önemli sonuçlar, iki bölüm boyunca inceleyeceğimiz Newton'un 1669 yılında yazdığı *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* isimli olağanüstü makalesinde. Bu makale polinom köklerine yaklaşımlar bulmaya yarayan meşhur *Newton yönteminin* ayrıntılı bir sunumunu içeriyor. Ayrıca, ilgili bir fikir olan *Newton*



Beş polinomla tanımlanmış bir permütasyon.

B				
x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
0	y	y^2	y^3	y^4
A				

Newton'un *de methodis*'inden

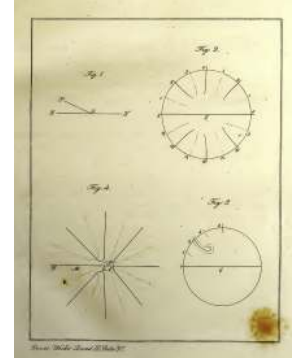
poligonlarını da takdim ediyor. Newton tam anlamıyla ispatları vermediği halde yerel olarak analitik bir eğrinin, *rasyonel üslü formel kuvvet serisinin* “grafiği” olan sonlu sayıda *daldan* oluştuğunu anlamıştı. Adını **formel cebir** koyduğum ek bir bölümde, modern terminolojiyle Newton’un sonuçlarını anlatıp, ispat veriyoruz (sayfa 65).

Buraya kadar tartışma tamamen cebirsel olacak. Ardından, zamanı için devrim sayılacak topolojik argümanlar kullanan — 1799 tarihli doktora tezi — **Gauss’un cebirin temel teoreminin ilk ispatı**’nı gözden geçireceğiz. İspatın temeli *ispatlanmamış bir iddia: bir daireye giren cebirsel eğri çıkmalıdır. İddianın ispatıysa* gözüktüğünden daha ince bir konu. 19. asırda yaşamış iki adaş matematikçi ispat edememişler (sayfa 85).

Euler, Cauchy ve Poincaré serilerin manipülasyonunda büyük ustalardı. İki bölüm onların keşiflerine ayrıldı. İkincisinin sonunda, *Newton serilerinin yakınsaklığı* ispatını **Cauchy’nin limitler hesabını** kullanarak elde ediyoruz. Bu sayede, gerçek analitik bir düzlem eğrisinin tekilliği civarında küçük bir dairenin eğriyi çift sayıda noktada kestiğini ve bir *kiriş diyagramı*, yani daire üzerinde döngüsel sıralı ve çift olarak gruplanmış $2n$ nokta tanımladığını gösterebiliyoruz.

Takip eden üç bölüm analitik düzlem eğri tekilliklerinin topolojisiyle ilgili. Tekillğe daha derinden bakmamızı sağlayan bir çeşit mikroskopa benzeyen *patlatma* yöntemini anlatıyoruz. Bu bize bir **Möbius şeridi**, veya mikroskobu birçok defa kullanırsak bir **Möbius kolyesi** veriyor. Patlatma işleminin **tekillik çözünmesi** konusunda çok güçlü bir araç olduğunu görüyoruz.

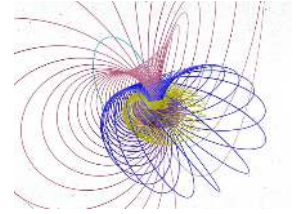
Karmaşık düzlemsel eğrilerin yerel çizimleri gerçekten harika ve ziyaret etmeye değer. C^2 ’nin gerçek boyutu 4 olduğundan, eğriyi tekillik civarında küçük 3-boyutlu küreyle kesiştiriyoruz. Bu bakış açısıyla, düz doğrular bile, **Hopf liflenmesi** gibi dikkat çekici nesnelere üretiliyor (sayfa 149).



Gauss’un doktora tezinden.



Üç kere patlatılmış daire.



Hopf liflenmesi

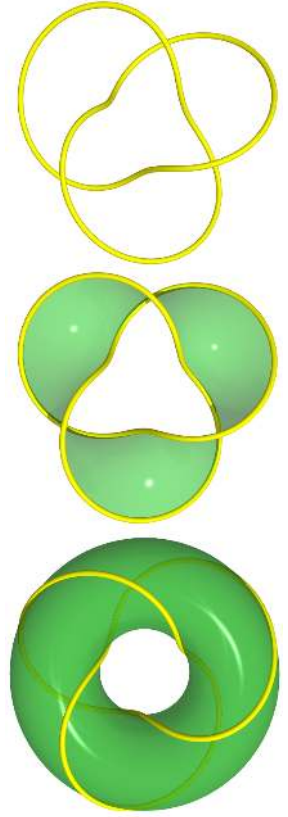
Daha çetrefilli tekillikleri, örneğin $x^3 - y^2 = 0$ **topuk noktasını**, **düğümler** ve **bağlarla** tasvir ediyoruz (sayfa 163). Genel durumu anlamak için, Newton serilerine 1850’de tamamen yeni bir yaklaşım getiren **Victor Puiseux**’ye uğruyoruz (sayfa 175). 1968’de, **Jack Milnor** bu fikirleri — hala *karmaşık sayılar* üzerinde olsa da — eksiksiz bir topolojik resim elde etmek için kullandı (sayfa 183).

İlginç bir biçimde, ayrışabilen permütasyonlarla **asosiahedron** arasında bir bağ kuruyoruz (sayfa 197). Bu asosiahedron, "homotopiyle değiştirebilmek kaydıyla birleşme özelliği"ne anlam verebilmek için Tamari ve Stasheff tarafından ortaya atılan konveks bir politop ailesi. **Jim Stasheff**, bu politopları kullanarak, topolojik gruplarla aynı homotopi tipine sahip uzayların tanımlamasını verdi (sayfa 205). Bu bizi, modern homotopi kuramı ve cebirsel topolojide temel rolü olan **operad kuramının** başlangıç noktasına getiriyor (sayfa 217). Operadlar çok genel cebirsel yapılar olup, bizim konumuza mükemmel bir şekilde uyarlanıyorlar. Tipik örnek olarak ağaçları, örgüleri, kurulum uzaylarını vs. verebiliriz. Homeomorfiyle değiştirebilmek kaydıyla tüm tekillikler kümesini, bir **tekil operad** olarak görebileceğiz ve bu da bütünsel resmi anlamamız için çok yardımcı olacak (sayfa 227).

Sırf keyfine, yalnızca sıradan çifte noktaları olan kapalı düzlem eğrileri hakkında **Gauss’un kısa bir notu**’nu inceleyeceğiz (sayfa 235). Eğri boyunca dönerken, her bir çifte nokta iki kere ziyaret ediliyor, bu da bir kiriş diyagramı veriyor. Bu tip diyagramların tanımlamasını yapabilir miyiz?

Nihayet gevşek hedefimize ulaşıyoruz: gerçek analitik düzlem eğrilerinin **tekilliklerle ilişkili kiriş diyagramlarının** iki bölüm boyunca tam tanımlanması (sayfa 249, 263).

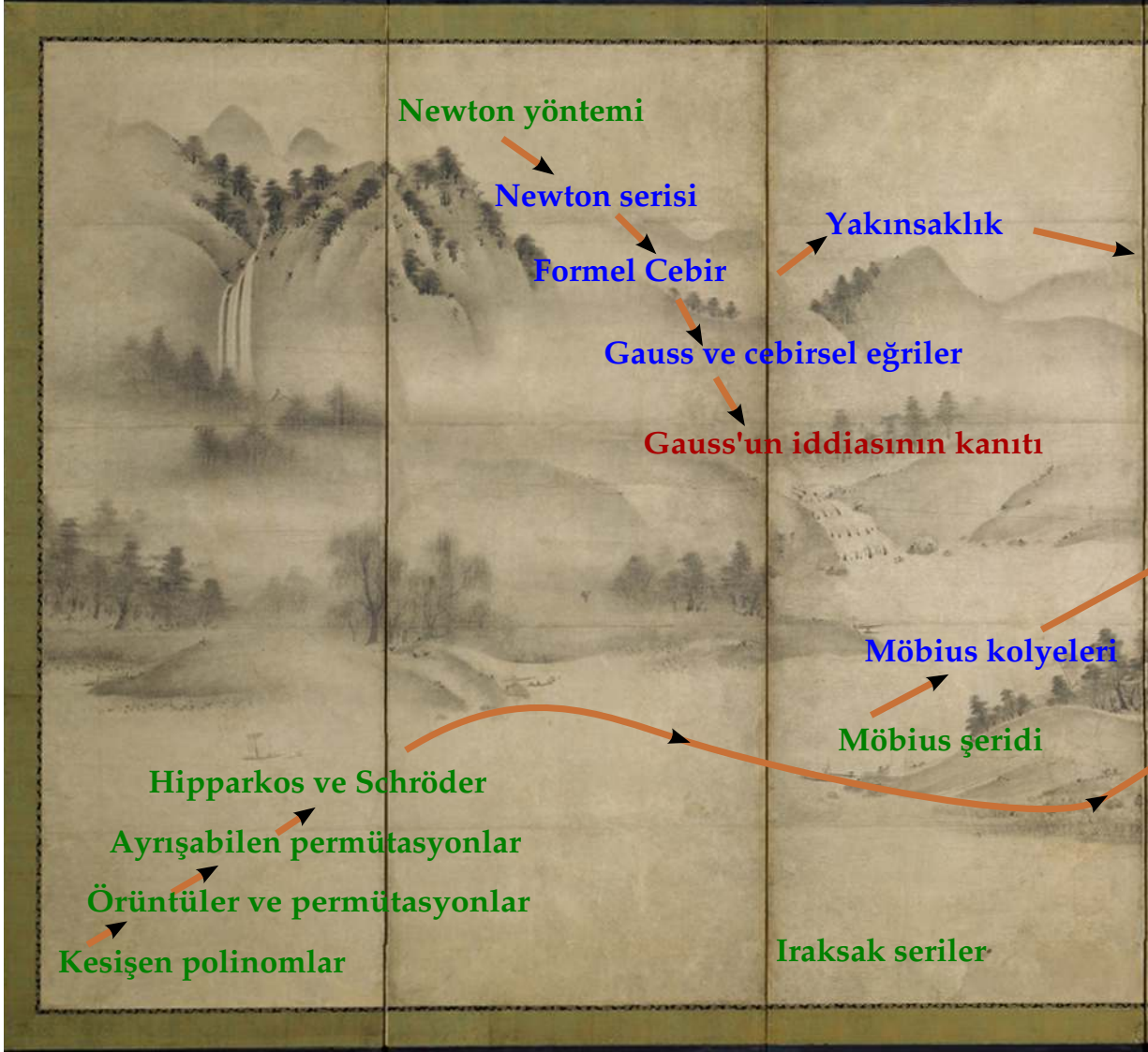
Kitabı iki ek bölümle bitiriyoruz. Bir tanesi **Gauss’un** bağ sayılarına yaklaşımı (sayfa 281); son olarak da **Kontsevich’in düğümler için evrensel değişmezi** (sayfa 291). Bu son bölümün asıl gayesi okuru keşfe devama teşvik etmek.



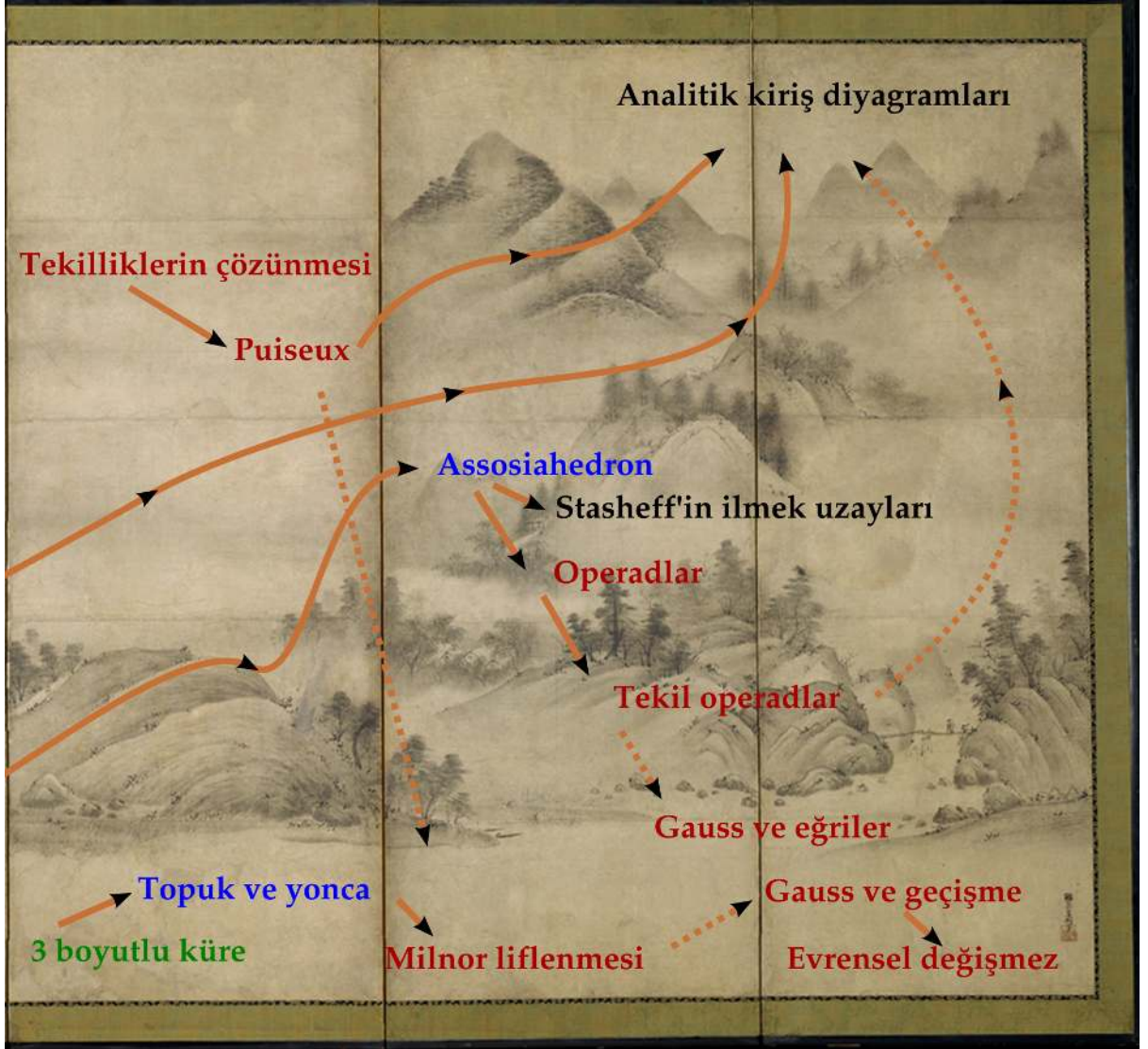
Yonca düğümü. ©



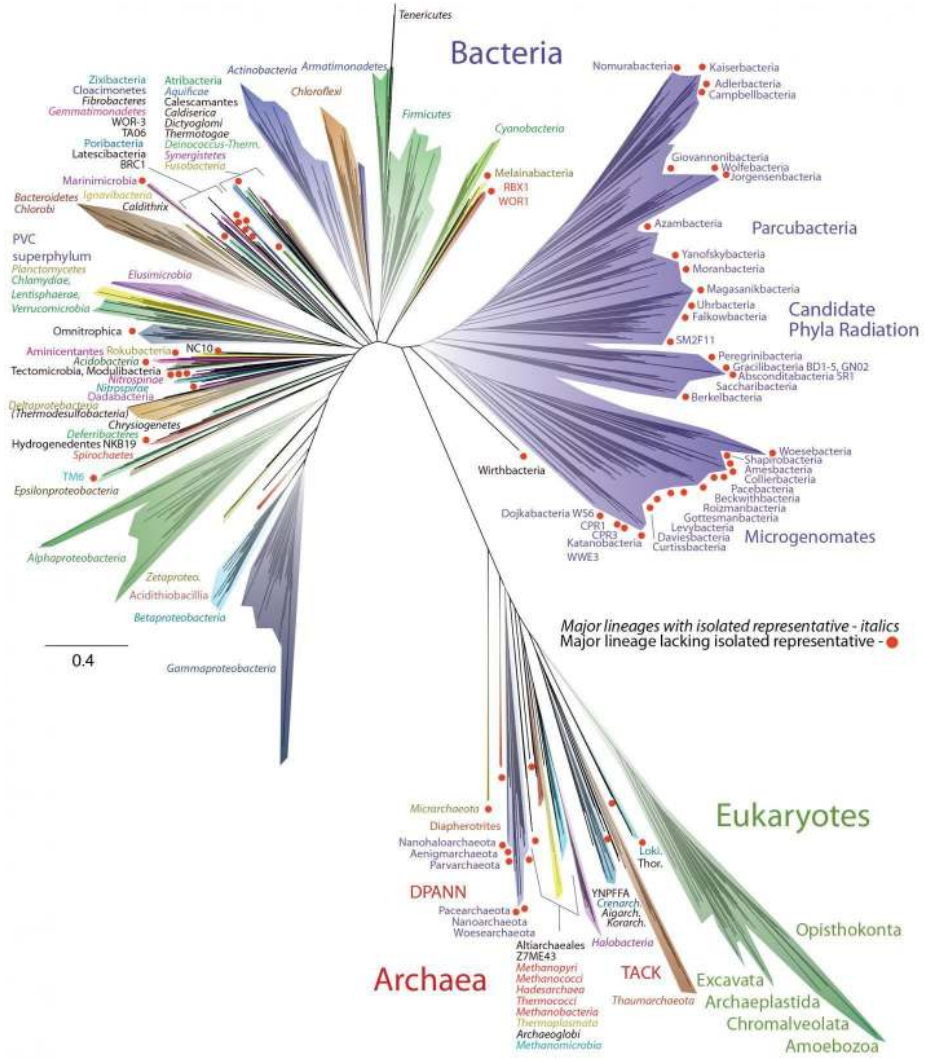
Asosiahedron. ©



Renkler (sırasıyla yeşil, mavi, kırmızı ve siyah) konuların zorluğuna ilişkin tamamen öznel bir fikir veriyor.



Dört Mevsim Manzarası
(Xiao ve Xiang Nehirlerinden Sekiz Görüntü), Soami,
erken 16. yüzyıl. ©



“Yaşam ağacının yeni bir görünümü”nden [Nature Microbiology](#) 1, (2016).
Bu dallar polinom grafikleri olarak görülebilir mi?

Kesişen polinomlar

Maxim Kontsevich

Polinom sıra değişimleri

KONTSEVICH TEOREMİNİ İSPAT ETMEDEN ÖNCE, çok daha basit ve temel bir gözlemlerle başlayayım. Sıfırdan farklı tek bir $P(x)$ polinomunun grafiğinin, 0 civarında x eksenine göre konumunu düşününüz.

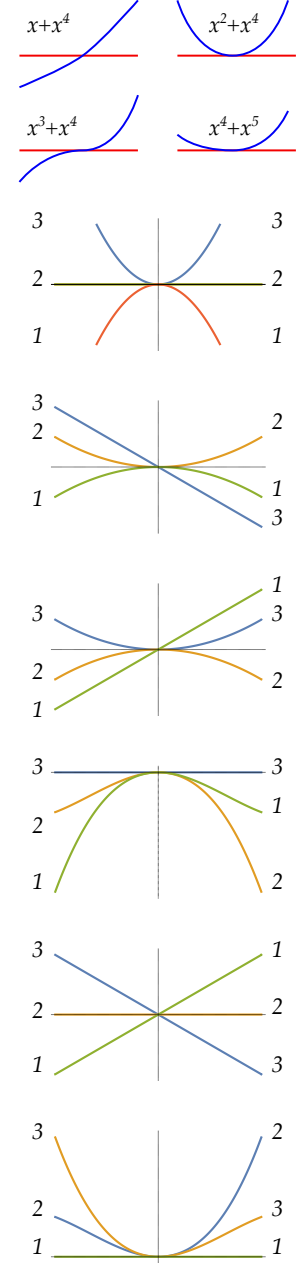
İki hal mümkün. P 'nin grafiği 0'da ya x ekseninin bir tarafından öbür tarafına geçer ya da aynı tarafta kalır. Bu iki hali birbirinden ayırdetmek için aşağıdaki tanımları yapıyorum.

Tanım. $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ bir polinom (veya bir formel seri) olsun. P 'nin (0'daki) $v(P)$ değerlenmesi, $a_k \neq 0$ olmak üzere en küçük k tamsayıdır. Genel bir uzlaşım olarak, sıfır polinomunun değerlenmesi ∞ olarak alınır.

P 'nin grafiğinin 0'da x eksenini geçmesi için gerek ve yeter şartın $v(P)$ değerlenmesinin tek tamsayı olması olduğu gayet açık.

Bize iki farklı P_1, P_2 polinomu verilmişse, $P_1(x) - P_2(x)$ 'in işareti, ancak ve ancak $v(P_1 - P_2)$ tekse değişir.

Şimdi üç P_1, P_2, P_3 polinomumuzun olduğunu farzedelim ve başnokta yani başnokta civarında mümkün olan resimlere bakalım. Kenardaki altı şekil, polinomlar uygun şekilde seçilirse $\{1, 2, 3\}$ 'ün bütün permütasyonlarının gerçekleştirilebileceğini gösteriyor.



Örneğin:

$$\begin{array}{lll}
 P_1(x) = -x^2 & ; & P_2(x) = 0 & ; & P_3(x) = x^2 \\
 P_1(x) = -x^2 & ; & P_2(x) = x^2 & ; & P_3(x) = -x \\
 P_1(x) = x & ; & P_2(x) = -x^2 & ; & P_3(x) = x^2 \\
 P_1(x) = -x^2 + x^3 & ; & P_2(x) = -x^2 - x^3 & ; & P_3(x) = 0 \\
 P_1(x) = x & ; & P_2(x) = 0 & ; & P_3(x) = -x \\
 P_1(x) = 0 & ; & P_2(x) = x^2 + x^3 & ; & P_3(x) = x^2 - x^3.
 \end{array}$$

Kontsevich'in gözlemlediği olgu, dört polinomla başlar.

Önceki resimlerin hepsinin, $P_i(0) = 0$ olduğunu kabul ettiğim izlenimini vermiş olabileceğine dikkat edin, ama bu gerekli değil. Bunun sebebi yalnızca, bu kitabın yerel özelliklerden, tek bir $(0,0)$ noktası civarındaki özelliklerden bahsetmesi.

Şimdi önsözde adı anılan metro bileti teoremini ispat edebiliriz.

Çelişkiye varmak amacıyla,

1. (mutlak değeri) küçük $x < 0$ için, $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$,
2. küçük $x > 0$ için, $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$

olacak şekilde P_1, P_2, P_3, P_4 polinomlarının var olduğunu kabul edelim.

P_i yerine $P_i - P_1$ yazarak, $P_1 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

P_2 ve P_4 başnoktada işaret değiştirdikleri için, $v(P_2), v(P_4)$ değerlenmeleri tek sayılardır.

P_3 işaret değiştirmedeği için, onun $v(P_3)$ değerlenmesi çifttir.

Küçük negatif x 'ler için $0 < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ olmasından, $v(P_2) \geq v(P_3) \geq v(P_4)$ sonucuna varırız.

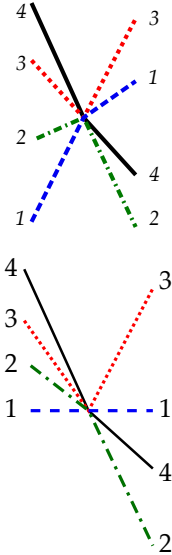
Benzer şekilde, küçük pozitif x 'ler için $|P_4(x)| < |P_2(x)|$ olmasından, $v(P_4) \geq v(P_2)$ sonucuna varırız.

Bu, üç değerlenmenin eşit olmasını zorunlu kılar, ama onların ikisi tek, biri çifttir!

Çelişki.

Dikkat ediniz, aynı ispat gerçek analitik fonksiyonlar için de geçerlidir, ama pürüzsüz fonksiyonlar için geçerli değildir. Gerçekten de okurum, başnoktayı "yasak" permütasyona göre

$x^2P_1(x), \dots, x^2P_n(x)$ polinomları $P_1(x), \dots, P_n(x)$ olarak sıralanmışlardır, hepsi de $x = 0$ 'da sifıra eşittir.



İspatın sonunda \square sembolünü kullanıyorum. Keskin zekalı okurum, neden \square içine · koyduğumu tahmin edebilir mi? İpucu: Fransızca düşünün.

Neden?

geçen ve C^∞ sınıfından dört adet P_i fonksiyonunu kolaylıkla bulacaktır.

x eksenini boyunca yön değiştirerek ters permütasyonun da yasak olduğunu görebiliriz. Bir alıştırmaya olarak, $\{1, 2, 3, 4\}$ 'ün geri kalan 22 permütasyonunun, P_i 'lerin ($i = 1, 2, 3, 4$) uygun seçilmesi halinde ortaya çıktığını göstermeyi tavsiye ederim.

Şimdi durumu herhangi sayıda polinom için incelemeye çalışalım.

Tanım. Bir $n \geq 2$ tamsayısı alalım, π de $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir permütasyonu olsun. Eğer

- küçük negatif x 'ler için $P_1(x) < P_2(x) < \dots < P_n(x)$,
- küçük pozitif x 'ler için $P_{\pi(1)}(x) < P_{\pi(2)}(x) < \dots < P_{\pi(n)}(x)$

olacak şekilde n tane P_1, \dots, P_n polinomu varsa, π 'ye *polinom sıra değişimi* denir.

Amacımız polinom sıra değişimlerinin oldukça kesin bir betimlemesini vermek.

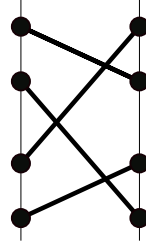
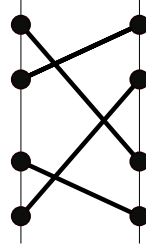
Ayrılabilir permütasyonlar

Tanım. Bir $n \geq 2$ tamsayısı ele alalım, π de $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir permütasyonu olsun. Eğer π , iki yasak permütasyondan birini "içermiyorsa", yani $\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$ veya $\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2)$ olacak şekilde dört indeks $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ yoksa, π 'ye *ayrılabilir* denir.

Başka bir deyişle, bir permütasyon, eğer dört harf üzerinde Kontsevich'in permütasyonlarını içermiyorsa, ayrılabilirdir. Her polinom sıra değişiminin, ayrılabilir olduğu açık olmalı. Kitabın bu kısmında tersini ispat edeceğiz.

Kombinasyonlar teorisi uzmanlarınca bilinen bir lemma ile işe başlayalım¹.

Lemma. $n \geq 3$ olmak üzere $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin ayrılabilir bir π permütasyonunu alalım. Bu durumda, π 'nin altında görüntüsü bir aralık olan, $(1 \leq k \leq k+l \leq n$ olmak üzere) $l+1 \geq 2$ uzunluğunda $I = \{k, k+1, \dots, k+l\}$ has aralığı vardır.



Yasak permütasyonlar.

"Ayrılabilir" teriminin mantığı, gelecek bölümde açıklığa kavuşacak.

¹ P. Bose, J. F. Buss, and A. Lubiw. Pattern matching for permutations. *Inform. Process. Lett.*, 65(5):277–283, 1998.

Gerekirse π yerine $\bar{\pi}(k) = n + 1 - \pi(k)$ şeklinde tanımlanan “geri” permütasyonu kullanarak $\pi(1) < \pi(2)$ olduğunu varsayabiliriz.

Eğer $\pi(2) = \pi(1) + 1$ ise işimiz bitmiştir, çünkü $\{1, 2\}$ 'nin görüntüsü $\{\pi(1), \pi(2)\}$ aralığıdır. Dolayısıyla $\pi(2) > \pi(1) + 1$ farzedebiliriz. Şimdi $\pi(1) + 1$ ile $\pi(2)$ arasındaki J aralığının $\pi(\{2, \dots, k\})$ kümesinin içinde olabilmesi için gerekli en küçük k tamsayısını göz önüne alalım. $\pi(k)$ 'nin J 'de bulunduğunu ve böylece $\pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$ olacağını da kaydedin.

Eğer $\pi(\{2, \dots, k\})$ görüntüsü tam J aralığına eşitse, tek bir terimden oluşmayan ve π altında görüntüsü aralık olan bir aralık bulduk demektir.

Öyle değilse, 2 ile k arasında, π altındaki görüntüsü J 'nin “dışında” olan bir l elemanı seçelim. Ya $\pi(l) < \pi(1)$ olur ya da $\pi(l) > \pi(2)$ 'dir.

Eğer $\pi(l) < \pi(1)$ ise, dört adet $1, 2, l, k$ elemanı, $1 < 2 < l < k$ ve $\pi(l) < \pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$ eşitsizliklerini sağlarlar. Böylece bir “yasak permütasyon” gibi sıralanırlar ki bu ayrılabilir permütasyonun tanımından dolayı mümkün değildir.

Dolayısıyla, $\pi(\{2, \dots, k\})$ kümesinin bütün elemanlarının $\pi(1)$ 'den büyükeşit olduklarını kabul edebiliriz.

Ayrıca $\pi(\{2, \dots, k\})$ 'nin aralık olmadığını da kabul edebiliriz çünkü aksi takdirde işimiz tamamlanmış olurdu. Böylece $\pi(\{2, \dots, k\})$ 'de en az bir “boşluk” vardır ve bu boşluk $\pi(2)$ 'den büyük olmalıdır. Demek ki $k < m$ olacak biçimde bir m ve $2 < l < k$ ve $\pi(m) < \pi(l)$ olmak üzere bir l vardır. $2, l, k, m$ elemanları $2 < l < k < m$ ve $\pi(k) < \pi(2) < \pi(m) < \pi(l)$ eşitsizliklerini sağlar ve böylece diğer “yasak permütasyon” olarak sıralanırlar ki bu mümkün değildir.

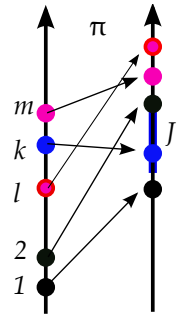
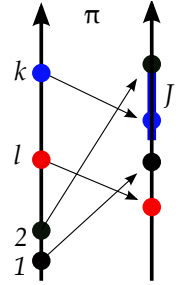
Lemma ispatlanmıştır. \square

Lemmayı ilerletmek kolay:

Lemma. $\pi, \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin ayrılabilir bir permütasyonu olsun. Bu durumda, görüntüleri ardışık olan iki ardışık tamsayı vardır.

İspat tümevarımla bariz. Tek bir elemandan oluşmayan ve görüntüsü aralık olan her has aralık, daha küçük bir n değeri için

Eğer π bir polinom sıra değişimiye, $\bar{\pi}$ de öyledir (bütün polinomları $-x$ ile çarpınız). Benzer şekilde, ayrılabilir polinomların tanımının kendisinden dolayı, π ve $\bar{\pi}$ 'nin ikisi birden ayrılabilir olur.



başka bir ayrılabilir permütasyon tanımlar. Bu da görüntüleri ardışık olan iki ardışık tamsayı verir. \square

Artık bu bölümün ana sonucunu ispat edebiliriz. Kontsevich karşıtörneği nasıl oluyorsa tek karşıtörnektir.

Teorem. *Bir permütasyon, ancak ve ancak ayrılabilir ise polinom sıra değişimidir.*

Polinom sıra değişimlerinin ayrılabilir olduğunu fark etmiştik: bu Kontsevich'in gözlemidir.

Yine n üzerinde tümevarım yaparak, her ayrılabilir permütasyonun bir polinom sıra değişimi olduğunu göstereceğiz. Şimdi $\pi, \{1, 2, \dots, n\}$ 'nin ayrılabilir bir permütasyonu olsun. Biliyoruz ki $\pi(i)$ ve $\pi(i+1)$ görüntüleri ardışık olan i ve $i+1$ ardışık tamsayıları vardır.

Eğer $\{i, i+1\}$ ve $\{\pi(i), \pi(i+1)\}$ birer noktaya "çökertilirlerse", $n-1$ nesne üzerinde bir π' permütasyonu üretiriz. Bu permütasyon apaçık şekilde ayrılabilir ve tümevarıma göre bir polinom değişimidir. Dolayısıyla başnuktada π'' 'ye göre kesişen $n-1$ adet

$$P_1, \dots, P_{n-1}$$

polinomu vardır. Artık yapılacak tek şey, i 'inci polinom P_i 'yi parçalayarak π' 'ye göre kesişen n adet

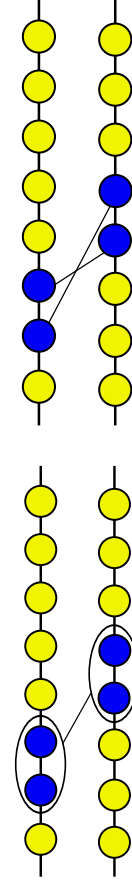
$$P_1, \dots, P_{i-1}, P'_i, P''_i, P_{i+1}, \dots, P_{n-1}$$

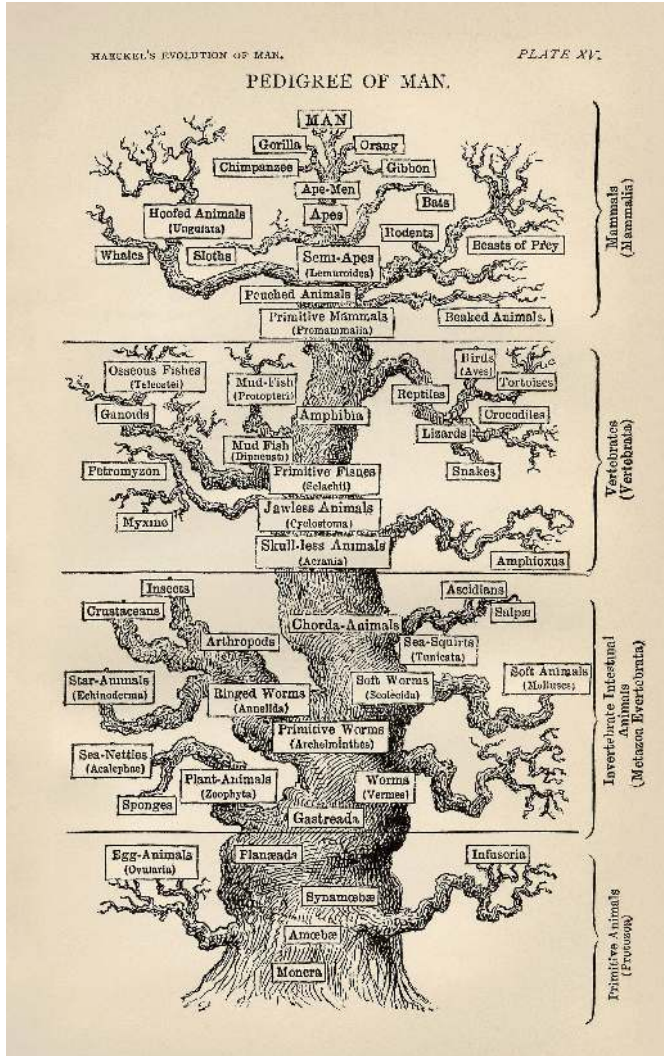
polinomu üretmektir. Bunun için, $\pi(i+1) > \pi(i)$ veya $\pi(i+1) < \pi(i)$ olmasına göre N 'nin çift veya tek olması koşuluyla ve yeteri kadar büyük bir N değeri için

$$P'_i(x) = P_i(x) \quad \text{ve} \quad P''_i(x) = P_i(x) + (-x)^N$$

yazmak yeter. \square

Polinom sıra değişimlerini tanınır hale getirdiğimize göre, bundan sonraki görevimiz o ayrılabilir permütasyonların yapısını anlamak olacaktır.





Ernst Haeckel'in "yaşam ağacı" (1879). İnsan, yaşam ağacının tepesinde midir?

Örüntüler ve permütasyonlar

Donald Knuth

Permütasyonlar

EĞER BENİM GİBİ MATEMATİK EĞİTİMİNDEN GEÇMİŞLERSE, birçok okurum önceki bölümde biraz rahatsızlık hissetmiş olabilir. Ne de olsa permütasyonlar genelde bir kümeden *kendisine* giden birebir ve örten gönderimler olarak tanımlanır ve bunların *varlık sebebi*, bir grup oluşturmalarıdır.

Bunun yerine, “ π permütasyonu Kontsevich’in iki yasak permütasyonundan birini *içerir*” ifadesini “ $\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$ ya da $\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2)$ olacak şekilde dört $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ indisi vardır” anlamında kullanırken permütasyonlara biraz garip bir şekilde yaklaştığımız söylenebilir. Bu kesinlikle $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ kümesinin π altında değişmez olduğu anlamına gelmiyor. Değişmez bir altkümeye kısıtlamaktan *bahsetmiyoruz*.

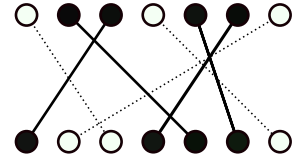
“Permütasyon” kelimesini biraz değişik, daha çok bilgisayar bilimine yakın sayılacak bir perspektifte kullanacağız. Bu yaklaşım esas olarak Donald Knuth tarafından *Bilgisayar programlama sanatı* adlı kitabında² ortaya konmuştur. Daha yakın zamanda yayınlanmış bir kitap³ da önemli bir bilgi kaynağı ve bu alanın da şu an hızla geliştiğini gösteriyor.

Birer tam sıralama olan \ll ve \lll ile donatılmış bir sonlu E kümesini düşünelim. Bu kümenin elemanlarını birinci sıralamayı kullanarak sıralayalım:

$$x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n.$$



Donald Knuth. ©



² D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 1: Fundamental algorithms*. Second printing. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont, 1969.

³ S. Kitaev. *Patterns in permutations and words*. Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer, Heidelberg, 2011. Jeffrey B. Remmel’in önsözüyle.

Sonra bunların \lll altındaki sıralanışına bakalım. Bu,

$$x_{\pi(1)} \lll x_{\pi(2)} \lll \dots \lll x_{\pi(n)}$$

olacak şekilde $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir π permütasyonunu tanımlar. Artık bu bakış açısını kullanacağız; bir permütasyon, iki tam sıralama arasındaki bir karşılaştırmadır.

Örneğin $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4$ ve $2 \lll 4 \lll 1 \lll 3$ sıralamaları $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesi için kullanılabilir. Bu iki sıralamaya karşılık gelen permütasyonu $(2, 4, 1, 3)$ şeklinde göstereceğiz.

Sonlu bir gerçek polinomlar kümesi $\{P_i(x)\}$, en az iki şekilde sıralanabilir: küçük negatif veya küçük pozitif x 'ler için $P_i(x)$ 'lerin değerlerini karşılaştırarak. Bu bize polinom sıra değişimlerini verir.

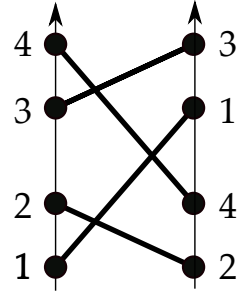
Elbette sıralamaları altkümelere *kısıtlayabiliriz*, ve bu da permütasyonlar için "içerme" kavramını tanımlar.

Tanım. Eleman sayısı n olan bir E kümesinde \ll ve \lll tam sıralamaları verilsin; $\{1, \dots, n\}$ kümesinin bunlarla ilişkilendirilmiş permütasyonu π olsun. $F \subset E$, p elemanlı bir altküme olsun. \ll ve \lll 'nin F 'ye kısıtlanmaları bir $\sigma : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ permütasyonu tanımlar. Böyle bir durumda π , σ 'yı *içeriyor* diyeceğiz ve bunu şöyle göstereceğiz: $\sigma \leq \pi$.

$\{1, \dots, n\}$ 'nin permütasyonlarının oluşturduğu kümeyi (bir grup olarak görmeden) Σ_n 'le gösterelim, $n \geq 1$ için Σ_n 'lerin ayrık bileşimini de Σ_∞ 'la. Bu, Σ_∞ üzerinde bir \leq kısmi sıralaması tanımlar. Bu sıralamayı anlama işlemine *örüntü tanıma* denir; aynı bağlamda, $\sigma \leq \pi$ ise σ , π 'nin *içinde bir örüntüdür* diyeceğiz.

Bir $\mathcal{C} \subset \Sigma_\infty$ altkümesi için eğer $\pi \in \mathcal{C}$ ve $\sigma \leq \pi$ olması $\sigma \in \mathcal{C}$ olmasını gerektiriyorsa, \mathcal{C} 'ye bir *permütasyon sınıfı* denir. Bir permütasyon sınıfının \mathcal{B} tabanına bakabiliriz. Eğer bir π , \mathcal{C} 'de değilse ama π 'den farklı her $\sigma \leq \pi$, \mathcal{C} 'deyse, o zaman \mathcal{B} 'dedir; \mathcal{B} tam bu permütasyonlardan oluşur. O zaman bir π permütasyonu, ancak ve ancak \mathcal{B} 'nin bir elemanını içermiyorsa \mathcal{C} 'nin içindedir. $\mathcal{C} = \text{Kaç}(\mathcal{B})$ yazacağım ve \mathcal{C} 'nin \mathcal{B} 'den kaçınan permütasyonlardan oluştuğunu söyleyeceğim.

Örneğin Σ_∞ 'da polinom sıra değişimleri altkümesinin bir permütasyon sınıfı olduğu aşikardır. Bunun tabanının iki elemandan, $(2, 4, 1, 3)$, $(3, 1, 4, 2)$ 'den oluştuğunu gördük.



Dikkatli olun; bu resimde $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4$ ve $2 \lll 4 \lll 1 \lll 3$ ve $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)) = (2, 4, 1, 3)$ geçerlidir, yani π , soldaki noktalardan sağdaki noktalara doğru kenarları takip ederek elde edeceğimiz permütasyonun *tersidir*.

Örneğin, birim permütasyondan farklı her permütasyon, $(2, 1)$ 'i içerir.

[Database of Permutation Pattern Avoidance](#) adlı web sitesinde çok sayıda örnek bulmak mümkündür.

Erdős-Szekeres teoremini kanıtlamaya çalışın: $n > (p-1)(q-1)$ olacak şekildeki her $\pi \in \Sigma_n$ permütasyonu, $(1, 2, 3, \dots, p)$ 'yi ya da $(q, q-1, \dots, 2, 1)$ 'i içerir.

$\text{Kaç}((1, 2, 3))$, iki azalan dizinin birleşimi olarak yazılabilen permütasyonlardan oluşur.

Aşağıdakiler, kuramın tipik sorularındandır. Verili bir \mathcal{C} permütasyon sınıfı için:

- Tabanı bulabilir miyiz? Taban ne zaman sonludur?
- $\mathcal{C} \cap \Sigma_n$ 'deki elemanların sayısını bulabilir miyiz? Ya da en azından, bu sayıyı kestirebilir miyiz?
- Verili bir π permütasyonunun \mathcal{C} 'de olup olmadığını algoritmik olarak bulabilir miyiz? Böyle bir algoritmanın karmaşıklığı nedir?

Sonsuz bir tabanı olan bir permütasyon sınıfı örneği bulun.

Zaman içinde tüm bu soruları polinom sıra değişimleri sınıfı/ayırışabilen permütasyonlar için cevaplayacağız.

Yığıtla sıralanabilen permütasyonlar

Permütasyon örüntüleri teorisi, *Bilgisayar programlama sanatı* adlı kitap serisinin birinci cildindeki bir alıştırma kayda değer bir itici güç aldı. Donald Knuth, kitabındaki alıştırmalara zorluk dereceleri atfediyordu.

"0", okurun soruyu anında çözebilmesi gerektiği anlamına geliyor.

"10", bir dakika kadar düşünmek gerekeceği anlamına geliyor.

"20", birkaç saat sürebileceği anlamına geliyor, vs.

Bu logaritmik bir skala ve hatta 50 sayısı civarında da bir kutbu var gibi görünüyor. . .

Benim üzerine tartışmak istediğim alışırma, [M28] şeklinde işaretlenmiş. Burada M, sorunun matematiğe yakın okurlara yönelik olduğu anlamına geliyor; 28 ise soruyu çözmek için gereken zamanın (yukarıda bahsettiğimiz logaritmik ölçekte) bir ölçüsü. Bu alışırma bugün o kadar zor değil ama kombinatorik çalışmaları üzerinde epey kalıcı bir etkisi olmuş.

Yığıtla tanımlanabilen bir permütasyon sınıfı anlatacağım.

$1, 2, \dots, n$ şeklinde etiketlenmiş ve bir yatay doğru üzerinde soldan sağa $1 \ll 2 \ll \dots \ll n$ şeklinde dizilmiş n tane nesne düşünelim. n 'nin sağında, bir *yığıt* var. Bu, nesnelere birbirinin üzerine yığılabildiği bir tür kuyu.



Bilgisayar programlama sanatı.

Yığıt başta boş. Sonra, n nesnesini seçip bunu yığıtın içine itiyoruz. Bundan sonra, iki seçeneğimiz var. Ya doğru üzerindeki son elemanı yığıtın tepesine *itebiliriz*, ya da yığıtın tepesindeki elemanı sağ tarafa *çekebiliriz*.

Kenardaki resimde gösterilen, nesnelere şu şekilde bir işlem dizisi altındaki evrimine bakın: İt, İt, Çek, İt, Çek, Çek, İt, İt, Çek, Çek, Çek.

Bu işlemin sonunda, $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ dizisi $(3, 2, 1, 6, 4, 5)$ 'e dönüşmüştür. Bunu bir permütasyon olarak, ya da iki sıralama olarak görmek mümkündür: Solda $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4 \ll 5 \ll 6$ ve sağda $3 \lll 2 \lll 1 \lll 6 \lll 4 \lll 5$.

Tanım. Bir π permütasyonu, eğer $\{1, 2, \dots, n\}$ 'ye bir dizi İt ve Çek uygulayarak elde edilebiliyorsa, π *yığıtla sıralanabilir*.

Knuth'un kitabının ikinci bölümündeki [M28] zorluğundaki 5. alıştırmaya şöyle:

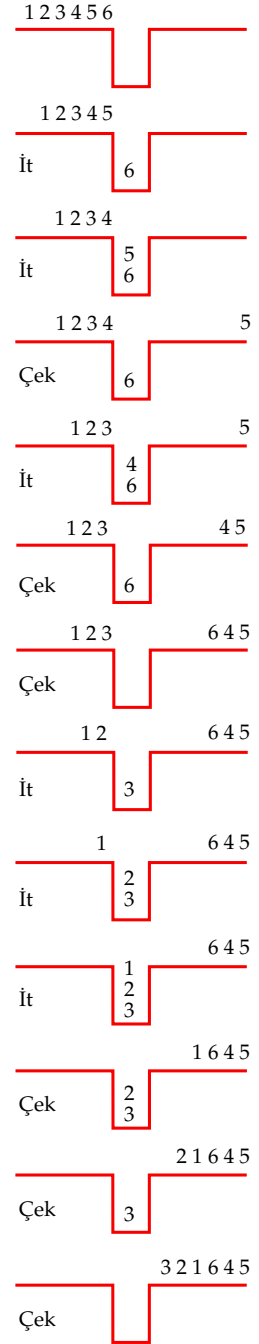
Teorem. Bir permütasyon, ancak ve ancak $(2, 3, 1)$ 'i içermiyorsa *yığıtla sıralanabilir*.

Bu alıştırmayı çözelim.

Bir permütasyonla başlayalım, örneğin $(3, 2, 1, 6, 4, 5)$ ile. Burada son eleman 5. Eğer bu permütasyonu bir yığıtla sıralamak istiyorsak, hiç seçimimiz yok: $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ listesindeki elemanları, 5 yığıtın tepesinde olana kadar itmemiz gerekli, ki 5'i çekip sonuç olarak elde etmek istediğimiz listedeki yerine, yani en sona koyabilelim. Daha sonra sondan ikinci elemana, yani 4'e bakıyoruz ve 4 yığıtın tepesinde olana kadar itiyoruz vs. Yani bir permütasyonu sıralamak istiyorsak, bunun tek bir yolu var.

Anlamamız gereken tek şey, bu sıralama işleminin nerede sarpa sarabileceği. Bu, tam olarak, o an çekmemiz gereken bir a nesnesi yığıtın içindeyse, ama ne yazık ki tepede değil de bir $b \ll a$ nesnesinin altındaysa olur. Eğer b halihazırda yığıtın içine itilmişse, bu daha önce bir $c \ll b \ll a$ nesnesini çekmemiz gerektiği için olmalı.

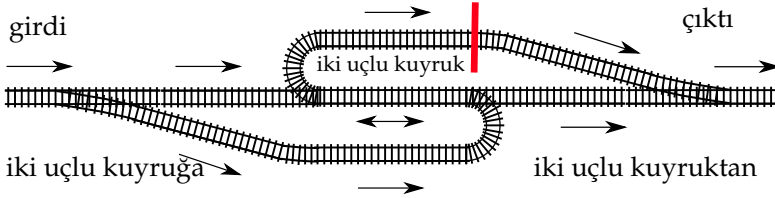
$a \lll c$ 'dir, zira c halihazırda çekilmiş durumda ve biz de a 'yı çekmeye çalışıyoruz. Benzer şekilde, $b \lll a$, zira b 'yi değil, a 'yı çekmek istiyoruz. O zaman $\{1, 2, \dots, n\}$ 'nin $\{c, b, a\}$ altkümesi, $(2, 3, 1) \leq \pi$ ifadesini verir, ki göstermek istediğimiz de buydu. \square



Okurun Knuth'un kitabındaki *tüm* alıştırmaları yapmasını şiddetle tavsiye ederim.

Yandaki tren yolu, yığıtla sıralanabilen permütasyonları üretir. $(1, 2, \dots, n)$ vagonlarından oluşan bir tren soldan gelir. Vagonlar birbirinden ayrılır; her biri rayları okların gösterdiği yönde takip etmek zorundadır. Sağda, çıkış tarafında tren tekrar birleştirilir.

Knuth aynı zamanda *iki uçlu kuyrukları* tanımlıyor. Bunlar, aşağıda görülen biraz daha karmaşık tren yoluyla tarif edilirler.



İki uçlu kuyrukla sıralanabilen permütasyonlar hangileridir?

Kırmızı kapının kapalı olduğu durumda, *çıkışı kısıtlı iki uçlu kuyruk* elde ederiz. Bununla ilişkili permütasyonlar tam olarak, $(4, 2, 3, 1)$ ve $(4, 1, 3, 2)$ 'yi içermeyenlerdir. Polinom sıra değişimlerinin (ki bunlar, $(2, 4, 1, 3)$ ve $(3, 1, 4, 2)$ 'yi içermeyenler) tanımlamasına yaklaştık.

Bu büyüleyici alan hakkında daha fazla bilgi için, Kitaev'in yukarıda bahsedilen kitabını tavsiye ederim.

Her yer Catalan!

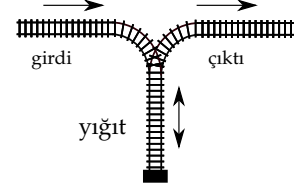
Knuth'un kitabının aynı bölümündeki 4 numaralı alıştırmının derecesi [M34]. Ama 5 numaralı alıştırmayı çözdükten sonra bunu çözmek daha kolay.

Problem, yığıtla sıralanabilen, uzunluğu n olan permütasyonların sayısını bulmak. Yanıt, matematiğin neredeyse her yerinde karşımıza çıkan n 'inci *Catalan sayısı*, C_n .

İlk birkaç değeri şöyle:

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, vs. (OEIS'teki A000108 dizisi.)

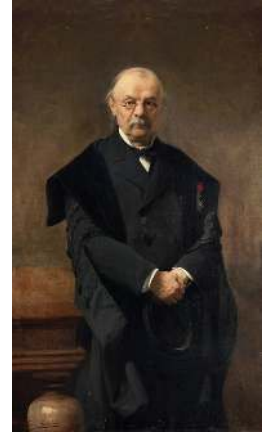
Yığıtla sıralanabilen permütasyonlar, $2n$ tane İt ve Çek'ten



Bu basit tren yolu, yığıtla sıralanabilen permütasyonları üretir.

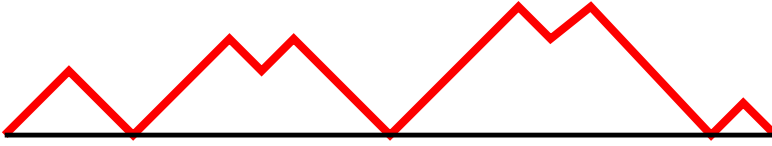
Bu bir iki uçlu kuyruk.

Dikkat! Bu sorunun zorluğu 60 civarı olabilir!



Eugène Catalan 1814 yılında, o zamanlar Napolyon Fransız İmparatorluğu'na ait olan Bruges'de doğdu. ©

oluşan bir diziyle ve biricik şekilde tarif edilirler. Ters yönde, bir İt'ler-Çek'ler dizisinin bir permütasyonu tarif etmesi için tek koşul bizi boş bir yığıttan çekmek zorunda bırakmamasıdır. Bir başka deyişle, dizinin başından itibaren alınan her dizi parçası, en az içerdiği Çek'lerin sayısı kadar İt içermelidir. Bunu tarif etmenin bir başka yolu, yığıttaki elemanların sayısının evrimine bakmak. Yığıt, 0 anında ve $2n$ anında boş ve her İt ve Çek ile +1 ya da -1 kadar değişiyor. Buna $2n$ uzunluğunda bir *Dyck kelimesi* denir. Uzunluğu 24 olan bir Dyck kelimesi örneği aşağıda.



Dyck kelimelerinin sayısı, n 'inci Catalan sayısının tanımlarından yalnızca biri. Bir başka yol olarak, bir İt işlemini parantez açmak "(" olarak, Çek işlemini de parantez kapamak ")" olarak düşünebiliriz. Boş bir yığıttan hiçbir zaman çekmeme koşulu, bu yaklaşımda parantez dizisinin dengeli olmasına karşılık gelir. Bu da, özylenelemeli bir yaklaşımla, her açık "(" işaretinin bir kapalı ")" ile eşleşmesi ve bu şekildeki her çiftin de dengeli bir parantez dizisini iki yandan kapatması şeklinde tanımlanabilir. Örneğin, $n = 3$ için $C_3 = 5$ dizi vardır:

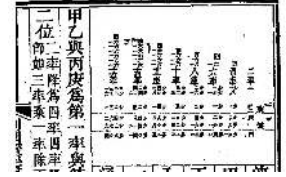
$$((())) ; ()(()) ; ((())) ; ()()() ; (()()).$$

Bir başka yorum da *köklü düzlemsel ağaçlar* kullanarak yapılabilir. Bir resim, bin kelimeye bedeldir. Garip bir sebeple, matematikçiler ve bilgisayar bilimciler, ağaçları genelde baş aşağı çizerler: Kök tepede, yapraklar aşağıda.

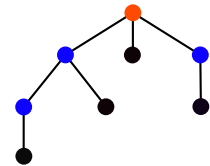
Kenardaki resim, böyle bir ağaca örnek. Bir kökü, 3 boğumu ve 4 yaprağı var. Bu ağaç *düzlemsel*, zira düşümlerinin çocukları soldan sağa doğru sıralı. Buna denk şekilde, eğer bir ağacın yaprakları, ağacın her boğumun döllerinin bir aralık tanımlayacağı şekilde tam sıralı ise, bu ağaca *düzlemsel* diyeceğiz.

Böyle bir ağaç, bir Dyck kelimesi tanımlar. Tek yapmamız gereken, kökten başlayıp ağacı saat yönünün tersinde, dışarıdan

Walther von Dyck (1856–1934), "matematikte modern anlamda grup kavramını ilk tanımlayan kişi" idi. En azından *Wikipedia*'da bulunan ifade bu. Aslında konu çok daha karışık ve başka adların da bahsinin geçmesi gerekli. Ama gerçekten de o, grupların üreteçler ve ilişkilerle sunumlarını kullanan ilklere biriydi.



Catalan'ın sayılarının bahsinin ilk geçtiği yer Migantu'nun 1730 civarında yayınlanmış kitabı: "Bir çemberi bölme oranını kesin bir şekilde elde etmenin hızlı bir yolu".



dolanmak. Her adımda ya köke yaklaşıyoruz ya da kökten uzaklaşıyoruz; bu da bize bir +1'ler ve -1'ler, ya da "İt"ler ve "Çek"ler dizisi verir.

Bu örnekte, +++--+-+--+--- dizisini elde ediyoruz. Ters yönde, bir Dyck kelimesi bir köklü düzlemsel ağaca dönüştürülebilir.

Sonuç olarak, aşağıdakiler arasında birebir ve örten gönderimler var:

- n nesnenin yığılta sıralanabilen permütasyonları
- Uzunluğu $2n$ olan Dyck kelimeleri
- $2n$ parantezle (n adet parantez açma ve n adet kapama kullanarak oluşturulan) dengeli parantezlemeler
- n kenarlı köklü düzlemsel ağaçlar.

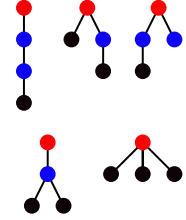
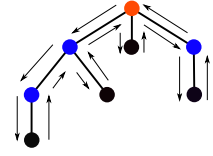
Bu kümelerin her birinin kardinalitesi, n 'inci Catalan sayısı C_n 'dir.

Yığılta sıralanabilen verili bir permütasyonda, nesnelere listesinin son elemanı n 'ye (resimde solda, siyah) ve bunun sıralama işleminden sonraki pozisyonu k 'ye bakalım. Permütasyon, (kırmızı) $\{k, \dots, n-1\}$ aralığını $\{k+1, \dots, n\}$ 'ye, sarı $\{1, 2, \dots, k-1\}$ aralığını da kendisine gönderir. Dolayısıyla bu iki aralık üzerinde yığılta sıralanabilen bir permütasyon oluşturur. Böylece, şu yineleme bağıntısını elde ederiz:

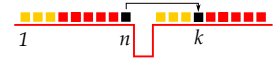
$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}.$$

Bu, Catalan'ın karakteristik işaretidir ve birçok bağlamda karşımıza çıkar.

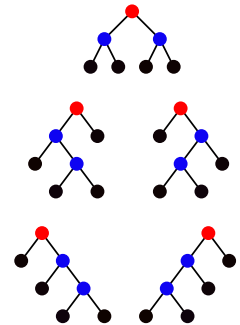
Örneğin, köklü, düzlemsel *ikili ağaçlara* bakalım. Farklı yazarlar bunlar için farklı tanımlar kullanıyorlar, ama ben bunları, boğumlarının ya hiç çocuğu olmayan, ya da biri "solda", biri "sağda" olmak üzere iki çocuğu olan köklü düzlemsel ağaçlar olarak tanımlayacağım. Eğer böyle bir ağacın n iç boğumu varsa, $n+2$ yaprağı ve $2n+2$ kenarı vardır. Eğer kökünü çıkarırsanız, elinizde iki tane köklü düzlemsel ağaç kalır. Buna ters şekilde, verili iki tane köklü düzlemsel ikili ağaca ortak bir kök ekleyerek



3 kenarlı olan 5 adet köklü düzlemsel ağaç.



Bu yineleme bağıntısına Dyck kelimeleri, parantezlemeler ve köklü düzlemsel ağaçlar bağlamında bakın.



Yaprak sayısı 4 olan 5 adet köklü ikili düzlemsel ağaç.

daha büyük bir köklü düzlemsel ikili ağaç elde edebilirsiniz. Biraz düşününce, $n + 1$ yapraklı köklü düzlemsel ikili ağaçların sayısının Catalan'ın yineleme bağıntısını sağladığı görülür. 1,2,3,4 yapraklı köklü düzlemsel ikili ağaçların sayısının sırasıyla 1,1,2,5 olduğunu göstermek mümkündür ve böylece, tümevarım kullanarak, C_n 'nin aynı zamanda $n + 1$ yapraklı, köklü düzlemsel ikili ağaçların sayısı olduğu sonucuna varılır.

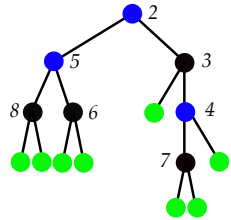
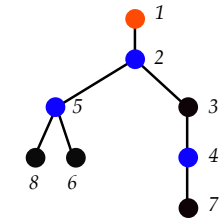
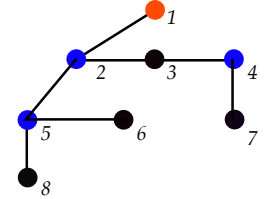
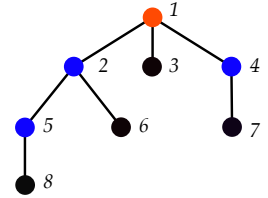
Bu, köklü düzlemsel ağaçlarla köklü düzlemsel ikili ağaçlar arasında bir karşılıklık olduğuna işaret eder. Hakikaten de böyledir. *Knuth dönüşümü* ya da *ilk çocuk - sonraki kardeş temsili* denilen işlemin biraz değişik bir halini sunacağım. n kenarlı bir köklü düzlemsel T ağacıyla başlayalım (ilk resim) ve $n + 1$ yaprağı olan köklü düzlemsel ikili T_{iki} ağacını (son resim) oluşturalım. Önce yardımcı bir T' ağacını oluşturacağım (ikinci ve üçüncü resimler). T' 'nin boğumlarının kümesi, T 'nin boğumlarının kümesiyle aynı. Kökler de aynı. T' 'nin her v boğumunun, en çok iki çocuğu var. İlki, eğer varsa, v 'nin T 'deki en büyük çocuğu. İkincisi, v 'nin T 'deki bir sonraki kardeşi, yani v 'nin kendisinden küçük kardeşlerinin en büyüğü (eğer varsa). Sonra, T' 'nü bir T_{iki} köklü düzlemsel ikili ağacına şu şekilde dönüştürüyorum: Önce kökü ve ondan çıkan kenarı siliyorum. T_{iki} 'nin yeni kökü, T' 'nin kökünün en büyük çocuğu. T' 'nin her boğumu için, eğer bu boğumun T 'de hiç çocuğu yoksa, bir sol çocuk ekliyorum ve eğer bu boğumun kendinden küçük bir kardeşi yoksa, bir sağ çocuk. Böylece, eğer boğum, T' 'nin bir yaprağı ise (yani T 'de bir çocuğu ya da kendinden küçük bir kardeşi yoksa), T_{iki} 'de iki çocuk ekliyorum (dördüncü resimdeki yeşil noktalara bakın). Bunun n kenarlı köklü düzlemsel ağaçlarla $n + 1$ yapraklı köklü düzlemsel ikili ağaçlar arasında birebir ve örten bir gönderim oluşturduğunu gösterin ([M15]).

Kombinatorikte sıkça karşılaştığımız gibi, bu C_n dizisi,

$$C(t) = \sum_{n \geq 0} C_n t^n$$

diye yazılan formel *üreteç serisini* kullanarak elde edilebilir ve yineleme bağıntısı da şu hale gelir:

$$C(t) = tC^2(t) + 1.$$



Ortaöğretimdeki ikinci derece denklemleri hatırlarsak,

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$$

buluruz. Bu formülden, $C(t)$ 'nin yakınsaklık yarıçapının $1/4$ olduğu görülür. Böylece, C_n 'nin büyüme hızı, Cauchy-Hadamard teoremi kullanılarak kestirilebilir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log C_n = \log 4.$$

Bu formül aynı zamanda C_n için muntazam bir ifade elde etmekte kullanılabilir: tek yapmamız gereken, Newton'un binom serisini kullanmak.

$$\sqrt{1 - 4t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4t)^n.$$

t^n 'nin katsayılarını karşılaştırarak

$$C_n = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n+1} (-4)^{n+1}$$

elde ederiz. Biraz temizleyebiliriz:

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n\right) (-1)^{n+1} 2^{2(n+1)} = \dots \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Catalan sayılarının kutsal kitapları, Stanley'nin ⁴ ve ⁵ kitapları. Igor Pak'ın yönettiği "[Catalan Sayıları](#)" sitesi şahane bir bilgi kaynağı. Flajolet ve Sedgewick'in kitabı⁶ daha geniş bir perspektif sunuyor (özellikle ağaçlar hakkındaki altıncı bölüme bakın).

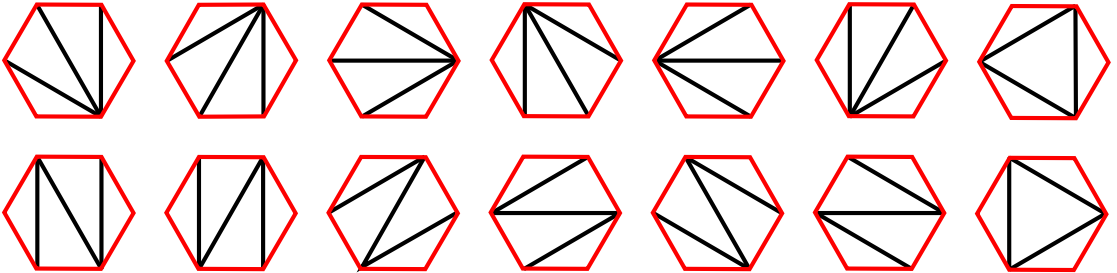
Neden karekökün önündeki işareti – olarak seçtim?

⁴ R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. I.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1986. Gian-Carlo Rota'nın önsözüyle.

⁵ R. P. Stanley. *Catalan numbers.* Cambridge University Press, New York, 2015.

Buradaki ikinci "... " işareti, hesabı kendiniz yapmaya davet edildiğiniz anlamına geliyor!

⁶ R. S. P. Flajolet. *An introduction to the analysis of algorithms.* Addison-Wesley, 2nd ed edition, 2013.



Bir altıgeni üçgenlere bölmenin $C_4 = 14$ yolu var.



Guadeloupe’da düzlemsel bir ağaç; çoğunlukla gezgin avucu diye anılır.

Ayrışabilen permütasyonlar

Polinomlardan ağaçlara

KATSAYILARI 0 KARAKTERİSTİKLI BİR K CİSMİNDEN GELEN $K[x]$ POLİNOM HALKASI, sıfırdan farklı ilk katsayının derecesiyle belirlenen bir v değerlemesine ve v cinsinden

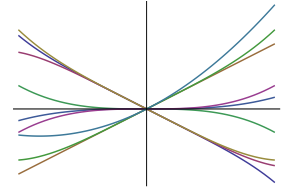
$$\text{dist}(P, Q) = \exp(-v(P - Q))$$

diye tanımlanan doğal bir *ultrametrik uzaklık*ya sahiptir. Daha basitçe söylemek gerekirse, büyük bir k için iki polinomun 0'daki ilk k türevleri aynıysa, bu polinomlar birbirine yakındır. Verili bir uzaklık tanımı için ultrametrik özellik, her $\epsilon > 0$ için

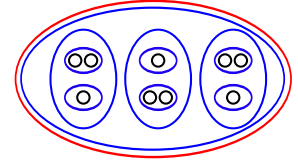
$$\text{dist}(P, Q) < \epsilon$$

bağıntısının denklik olmasıdır. ϵ küçüldükçe, bu denklik bağıntıları gittikçe daha ince hale gelir; kesişimleri boş küme olur.

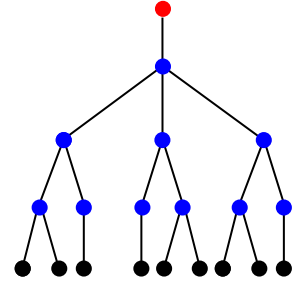
Sonlu bir E polinomlar kümesini düşünelim. Şu şekilde bir ağaç tanımlayalım: Kök, E kümesiyle etiketlenecek; kökün çocukları, $v(P - Q) \geq 1$ bağıntısının denklik sınıflarıyla etiketlenecek; kökün torunları, $v(P - Q) \geq 2$ bağıntısının denklik sınıflarıyla etiketlenecek ve genel olarak, k 'inci kuşak, $v(P - Q) \geq k$ bağıntısının denklik sınıflarına karşılık gelecek. Bu ağaç sonsuzdur ama k büyük olduğu zaman denklik sınıfları tek nokta kümelerine sabitlenir. Bu sayede biraz budama yaparak yaprakları E 'nin elemanlarıyla etiketlenmiş sonlu bir ağaç elde ederiz. Bunun tersi yönde, değerlendirme yapısı ağaçtan elde edilebilir. E 'nin yaprak olarak görülecek verili iki elemanı P ve Q için, ağaçtaki en yakın



İlişkilendirilmiş ağacı aşağıda gösterilen 9 polinom. 9 denklem önerebilir misiniz?



İç içe denklik bağıntıları.



İlişkilendirilmiş ağaç.

ortak ataya bakarız. $P - Q$ 'nun değeri, bu atanın seviyesidir, yani onu köke bağlayan yolun uzunluğudur.

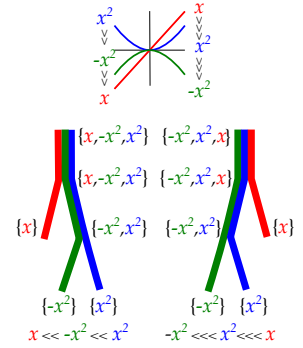
Şimdi K 'nin gerçek sayılar kümesi olduğunu varsayalım. Daha önce de gördüğümüz gibi, her sonlu gerçek polinomlar kümesinde iki tam sıralama vardır: küçük negatif ve küçük pozitif x 'lerdeki değerleri karşılaştıranlar. Bunların ikisi de değerlendirme tarafından verilen ağacın yapraklarının oluşturduğu küme üzerinde bir sıralama tanımlarlar. Bir köşenin döllerinin, yani bir seviyedeki bir denklik sınıfının, bu sıralamaların her birinde bir aralık tanımladığını gözden kaçırmayalım. Böylece, ağacımız iki farklı şekilde düzlemsel bir ağaç olur.

İlk sıralamayı (küçük $x < 0$ için olanı) seçme ve E polinomlar kümemizi de karşılık gelen ağaçla ilişkilendirme konusunda uzlaşalım. Elimizdeki iki sıralamanın karşılaştırılması, daha önce polinom sıra değişimi adını verdiğimiz bir π permütasyonunu tanımlar.

Herhangi bir köklü düzlemsel ağacın yapraklarının oluşturduğu kümede iki doğal sıralama vardır. Birincisi \ll ile gösterilir ve düzlemselliğin tanımından gelir. İkincisiyse \lll ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır: verili a ve b yapraklarının en yakın ortak atasını $a \vee b$ ile gösterelim. O zaman, $a \ll b$ ve $a \lll b$, sadece ve sadece $a \vee b$ 'nin seviyesi çiftse doğru olur. Bunun gerçekten bir \lll sıralaması tanımladığını, yani $a \lll b \lll c \lll a$ olmasının mümkün olmadığını kanıtlamak gerekir. $a \ll b \ll c$ ya da $c \ll b \ll a$ olduğunu varsayabiliriz; ikinci durum simetri sayesinde birinciye denk olur. Eğer $a \lll b \lll c \lll a$ olsaydı, $a \vee b$ ve $b \vee c$ 'nin seviyelerinin çift, $c \vee a$ 'nın seviyesinin de tek olması gerekirdi. Yandaki resimler bunun mümkün olmadığını gösteriyor.

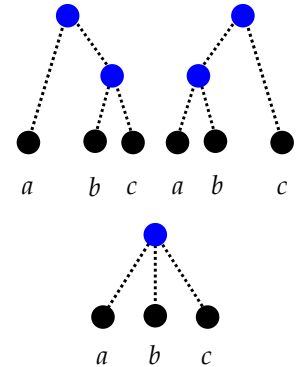
Özetleyelim.

- Sonlu bir gerçek polinomlar kümesi köklü düzlemsel bir ağaç üretir.
 - Köklü düzlemsel bir ağaç, yapraklarında iki sıralama ve bu sayede de bir permütasyon tanımlar.
 - Sonlu bir polinomlar kümesiyle ilişkili düzlemsel ağaçla ilişkili permütasyon, karşılık gelen polinom sıra değişimidir.
- Ağaçlarımız çok fazla bilgi içeriyor; kenarlarını budayacağız. Öncelikle, eğer bir iç boğumun dölleri içinde tek bir yaprak varsa, permütasyonu değiştirmeden tüm dölleri silebiliriz (yanda



$\{x, -x^2, x^2\}$ polinomlarıyla ilişkilendirilmiş iki düzlemsel ağaç; x 'in küçük negatif (solda, \ll) ve küçük pozitif (sağda, \lll) değerlerine göre...

Eğer küçük pozitif (ya da küçük negatif) x 'ler için $P(x) < R(x) < Q(x)$ ise, o zaman $val(P - Q) \geq val(R - Q)$ olur. Buradan $val(P - Q) \geq k$ eşitsizliğini sağlayan tüm denklik sınıflarının her iki sıralamaya göre de aralık olduğu ortaya çıkar; ağaçlarımız hakikaten de düzlemseldir.



aşağıda kesikli yeşil yol).

Şimdi ağaç üzerinde P ve Q iç boğumlarının, geçtiği tüm köşeler dallanmamış, yani tek çocuklu olacak şekilde bir yolla birleştirilebileceğini varsayalım (kesikli kırmızı ve mavi yollar). Bu yoldaki kenarların sayısı çiftse yolu silelim ve iki uç noktasını tek bir boğumda eşleyelim. Bu yoldaki kenarların sayısı tekse yolu silelim ve iki uç noktayı tek bir kenarla birleştirelim. Bu bize yeni bir ağaç verir. Bu işlem sırasında bazı boğumların seviyeleri değişir, ama bu değişim her zaman bir çift sayı kadar olur. Böylece, eğer değerlemeyi yeni ağaçta hesaplırsak teklik/çiftlik değişmez; bu teklik/çiftlik, polinom yer değişimini hesaplamak için gerekli olan tek bilgidir. Budanmış ağacın iç boğumlarından her birinin en az iki çocuğu olduğunu gözden kaçırmayın.

Özet olarak, verili n tane polinom için öyle bir *köklü düzlemsel ağaç* inşa ettik ki,

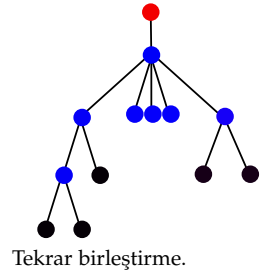
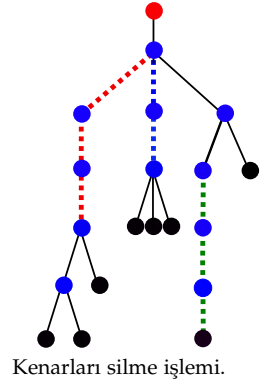
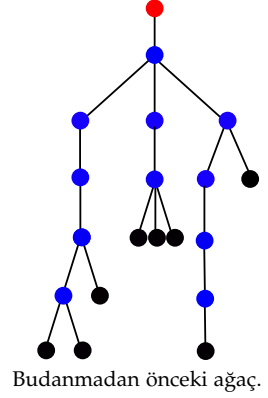
- Kökün herhangi bir sayıda çocuğu olabilir.
- Her iç boğumun en az iki çocuğu vardır.
- Tam olarak n tane yaprak vardır ve bunlar elimizdeki n polinomla etiketlenebilir

Bir düzlemsel ağaç bu özellikleri taşıyorsa, ona *budanmış* diyelim. Verili bir budanmış ağaç için, ilişkili budanmış ağacı o ağaç olacak şekilde n tane polinomu bulabileceğimiz açık olmalı. Herhangi bir sonlu polinomlar kümesi için, ilişkili polinom yer değişiminin ağaçtan elde edilebileceğini gördük. Bunun sonucu olarak, polinom yer değişimleri sayısı, budanmış ağaçların sayısından küçüktür.

Bir permütasyondan bir ağaca

Şimdi, polinom yer değişimlerinin sayısının budanmış ağaçların sayısına eşit olduğunu göstereceğiz. Buradaki mesele, *iki farklı budanmış ağacın farklı permütasyonlar oluşturduğunu* kanıtlamak.

T , soldan sağa doğru yaprakları $1 \ll 2 \ll \dots \ll n$ olan bir budanmış ağaç ve π de onunla ilişkili permütasyon olsun ($n \geq 2$).



Lemma. *Ardışık i ve $i + 1$ tamsayılarının π altındaki görüntüleri ancak ve ancak bunlara karşılık gelen i ve $i + 1$ yaprakları kardeşse, yani ortak bir ebeveyne sahiplerse ardışık olurlar.*

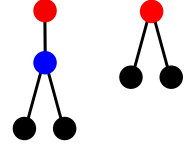
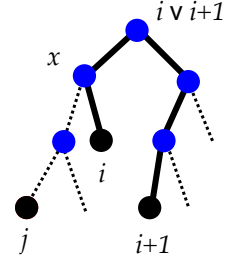
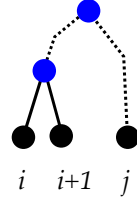
Gerçekten de, i ve $i + 1$ 'in ortak ebeveyni varsa, her $j \neq i, i + 1$ için, $i \vee j = (i + 1) \vee j$ olur. Böylece $i \lll j \lll i + 1$ ve $i + 1 \lll j \lll i$ imkansızdır. Başka deyişle, i ve $i + 1$, \lll için de ardışıktır.

Karşıt şekilde, $i \vee (i + 1)$ 'in bir ebeveyn olmadığını varsayalım. Ağaçta i ve $i + 1$ 'i birleştiren yolun uzunluğu en az 3'tür, dolayısıyla bu yol, seviyesi $i \vee (i + 1)$ 'inkinden farklı olacak şekilde bir x boğumu içerir. x 'in i ve $i + 1$ 'den farklı bir dölü olan bir j yaprağı seçelim (böyle bir j vardır zira T budanmıştır). Buradan j 'nin, \lll sıralamasına göre i ve $i + 1$ 'in arasında olduğu görülür. \square

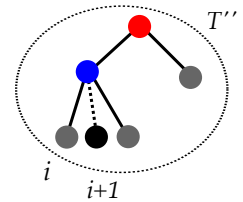
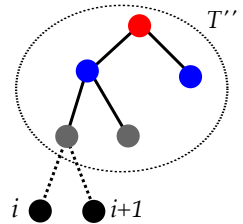
Böylece her polinom yer değişiminin, görüntüleri ardışık olan en az iki ardışık tamsayı içerdiğinin bir başka ispatını elde edebiliriz. Bunun için T' de en yüksek seviyede bir iç boğuma bakmamız yeterli: böyle bir boğumun yaprak ve dolayısıyla da kardeş olmak zorunda olan en az iki çocuğu vardır.

Şimdi $n \geq 2$ üzerinde tümevarımla, verili bir π permütasyonunu üreten en fazla bir budanmış ağaç olduğunu kanıtlayabiliriz. Bu $n = 2$ için elbette basit. T_1 ve T_2 'nin n tane yaprağı varsa ve bu ağaçlar aynı π permütasyonunu tanımlıyorsa, önceki lemma gösterir ki, T_1 ve T_2 'nin her ikisinde de kardeş olan ardışık $i, i + 1$ yaprakları vardır. T_1 ve T_2 'den $i + 1$ yaprağını silelim ve böylece $n - 1$ yapraklı T'_1 ve T'_2 ağaçlarını oluşturalım. T'_1 ve T'_2 , $n - 1$ tane yaprak üzerinde aynı π' permütasyonunu tanımlar elbette. Ancak burada dikkatli olmamız gerekir, T'_1 ve T'_2 budanmış olmayabilir. Bu, tam olarak, i ve $i + 1$, T_1 ya da T_2 'deki bir iç boğumun yegane çocuklarıyken olur. Budanmış T''_1 ve T''_2 ağaçlarının bir T''' ye eşit olduğunu tümevarım hipotezi söyler. T_1 ve T_2 , şu işlemlerin birini kullanarak T''' den elde edilebilir: T''' nün i 'inci yaprağına iki çocuk ekleyerek ya da T''' nün i 'inci yaprağına bir kardeş ekleyerek. T_1 ve T_2 , kabulümüz gereği aynı permütasyonu üretir ve böylece i ve $i + 1$ 'in T_1 ve T_2 'deki ebeveynlerinin seviyelerinin teklik/çiftlikleri aynı olur. Demek ki, T_1 ve T_2 , T''' ne aynı işlem uygulanarak elde edilir. Dolayısıyla istendiği gibi $T_1 = T_2$ olur. \square

Yani, n büyüklüğündeki polinom yer değişimlerinin sayısı, n yapraklı budanmış ağaçların sayısına eşittir.



Yer değiştirmeyi ve birim dönüşümü veren 2 yapraklı budanmış 2 ağaç.



Budanmış bir ağaçtan polinom yer değişimine ve ayrışabilen bir permütasyona

Bu bizi *ayrışabilen permütasyonların* orijinal tanımına götürüyor. n_1 ve n_2 tane sıralı nesnenin verili π_1 ve π_2 permütasyonlarından $n_1 + n_2$ nesnenin bir permütasyonunu oluşturmanın iki farklı yolunu düşünebiliriz. İlk n_1 nesneyi $\{1, 2, \dots, n_1\}$ şeklinde, sonraki n_2 tanesini de $\{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2\}$ şeklinde numaralandıralım.

$$\begin{aligned}\pi_1 \oplus \pi_2(k) &= \pi_1(k) & 1 \leq k \leq n_1 \text{ iken} \\ &= n_1 + \pi_2(k - n_1) & n_1 + 1 \leq k \leq n_1 + n_2 \text{ iken}\end{aligned}$$

şeklinde, $\pi_1 \oplus \pi_2$ ile gösterilen bir permütasyon tanımlayalım ve

$$\begin{aligned}\pi_1 \ominus \pi_2(k) &= \pi_2(k) + n_1 & 1 \leq k \leq n_2 \text{ iken} \\ &= \pi_1(k - n_2) & n_2 + 1 \leq k \leq n_1 + n_2 \text{ iken}\end{aligned}$$

tanımını yapalım. 1998'de yapılan bir tanıma⁷ göre bir permütasyon, bir nesne üzerindeki birim permütasyonun birkaç kopyasından bir dizi \oplus ve \ominus işlemiyle elde ediliyorsa ayrışabilir. Bu permütasyonları epey iyi bir şekilde anladığımızı söyleyebiliriz⁸.

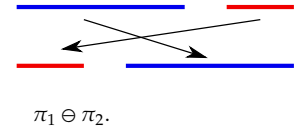
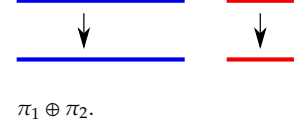
Teorem. $\pi, \{1, \dots, n\}$ kümesinin bir permütasyonu olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1. π , farklı P_1, \dots, P_n polinomlarıyla ilişkili polinom yer değişimidir.
2. π , $(2, 4, 1, 3)$ ve $(3, 1, 4, 2)$ 'yi içermez.
3. π , budanmış bir ağaç tarafından tanımlanan permütasyondur.
4. π , bir nesne üzerindeki birim permütasyonun birkaç kopyasından ardışık bir dizi \oplus ve \ominus işlemiyle elde edilir.

Böyle permütasyonları ayrışabilenler olarak tanımlamıştık.

3 ile 4'ün denkliği dışındaki tüm denklikleri halihazırda gösterdik. Bu denkliği de tümevarımla kanıtlayalım.

π , budanmış T ağacıyla tarif edilsin. Bu ağacın kökü, tek bir çocuğa sahip olabilir. Eğer böyleyse, bu biricik çocuğun dölleri, kökü birkaç çocuk sahibi olan, bir başka budanmış \bar{T} ağacı tanımlarlar. \bar{T} ile ilişkili permütasyon, "tersyüz" $\bar{\pi}$ permütasyonudur. $\pi_1 \ominus \pi_2 = \overline{\pi_1 \oplus \pi_2}$ olduğuna dikkat edelim. Böylece kökün



⁷ P. Bose, J. F. Buss, and A. Lubiw. Pattern matching for permutations. *Inform. Process. Lett.*, 65(5):277–283, 1998.

Bir π permütasyonu ayrışabilirse, "tersyüz" hali $\bar{\pi}(k) = n + 1 - \pi(k)$ deyledir.

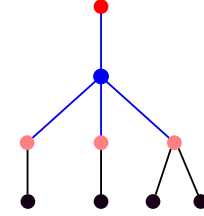
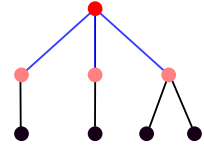
⁸ É. Ghys. Intersecting curves (variation on an observation of Maxim Kontsevich). *Amer. Math. Monthly*, 120(3):232–242, 2013.



Alexander Calder tarzı bir "mobil". Elbette bu tür mobiller düzlemsel olsun diye yapılmıyorlar ama böyle bir mobilin iki düzlemsel temsili, yapraklarının ayrışabilen bir permütasyonuyla birbirine dönüştürülebilir. ©

birkaç çocuğu olduğunu varsayabiliriz. Bu çocuklar, budanmış ağaçlar ve \oplus ile toplamı π olan $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ polinom sıra değişimleri tanımlar. Tümevarımla görürüz ki, tüm $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ permütasyonları birim permütasyondan \oplus ve \ominus işlemleriyle elde edilir ve dolayısıyla aynı şey π için de geçerlidir.

Ters yön de aynı şekilde kolaydır. Budanmış ağaçlarla ilişkili iki permütasyonun \oplus ve \ominus toplamlarının da bir budanmış ağaçla ilişkili olduğunu göstermemiz gerekiyor. Tek yapmamız gereken, işarete göre, iki budanmış ağacın iki kökünü ortak bir ebeveynle birleştirmek ya da bir nine eklemek. \square



Birkaç ağacı birleştirmek için ek bir ebeveyn ya da nine eklemek.

Tren rayları, yığıtlar, kat planları ve permütasyonlar

n vagon dan oluşan (matematiksel) bir tren hayal edin. Bir de matematiksel bir *döner tabla*, yani bazı tren yollarında karşımıza çıkan, 180 derecelik dönüşleri mümkün kılan cihazlardan olsun. Bu döner tabla matematiksel olacak zira içine istenilen sayıda ardışık vagon sığdırılabilir. Ayrıca bir dizi vagon tersyüz edildikten sonra bu vagonların kalıcı şekilde bağlandığını varsayıyoruz; yani gelecekte bunları ayırmak mümkün olmayacak. Tren döner tablanın üstünde birkaç kere hareket etsin. Vagonların en son permütasyonu, neredeyse tanım itibarıyla ayrışabilir. \square

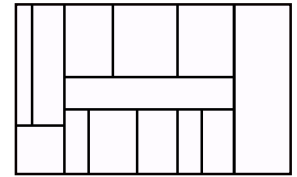
Aynı fikir, önceki bölümdekine benzer olarak *sıra halinde çekme yığıtlarıyla* da ifade edilebilir. $1, 2, \dots, n$ dizisinin sağ tarafında hizalanmış sonsuz bir dizi yığıt düşünelim. Sıralama oyununun kuralları, tek yığıttakinden farklıdır. Her adımda, listenin bir elemanını ilk yığıtın tepesine itebiliriz ya da bir yığıtın *tüm içeriğini* bir sonraki yığıta doğru çekebiliriz.

Ayrışabilen permütasyonların bir başka tezahürüyle şöyle. Bir dikdörtgeni ardışık dikey ya da yatay dilimlemeler kullanarak birkaç *dikdörtgen odaya* ayıralım. Bu, yanda görülen şekilde bir *dilimli kat planı* oluşturur. Dilimli kat planlarının denkleğine iyi bir tanım ve ayrışabilen permütasyonlarla birebir eşleme bulun⁹.

Bu bölümü kaparken, ayrışabilen permütasyonların n sonsuza giderkenki olasılıksal davranışları hakkında yakın zamanda yayınlanmış bir makaleden¹⁰ bahsedelim. $\{1, \dots, n\}$ 'nin verili bir π permütasyonunun grafiği, $\{(i, \pi(i))\} \subset \{1, \dots, n\}^2$ altkümesidir.



Demiryolu döner tablası. \square



⁹ E. Ackerman, G. Barequet, and R. Y. Pinter. [A bijection between permutations and floorplans, and its applications](#). *Discrete Appl. Math.*, 154(12):1674–1684, 2006.

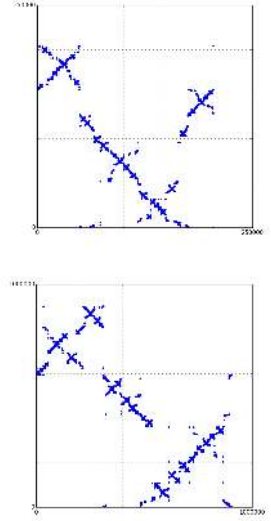
¹⁰ F. Bassino, M. Bouvel, V. Féray, L. Gerin, and A. Pierrot. [The Brownian limit of separable permutations](#). 2016.

Bunun oluşturduğu resmi $[0, 1]^2$ birim karesinin içine çizilebilecek şekilde ölçeklendirelim. Her π permütasyonunu, karenin içinde $(i/n, \pi(i)/n)$ noktalarına konulmuş ve her birinin ağırlığı $1/n$ olan n tane Dirac kütesinin toplamından oluşan bir μ_π olasılık ölçüsüyle ilişkilendirelim. Kare üzerindeki olasılık ölçülerinin oluşturduğu $Olas([0, 1]^2)$ uzayı (zayıf topolojiye göre) tıktır. Böylece μ_π 'lerin $Olas([0, 1]^2)$ içindeki yığılma noktalarını inceleyebiliriz. Her μ yığılma noktasının bir *permüton*, yani kare üzerinde iki kenar dağılımı (yani eksenlere izdüşümü) $[0, 1]$ 'deki Lebesgue ölçüsü olan bir olasılık ölçüsü olduğunu görebiliriz. Bassino ve ekibi, ayrışabilen permütasyonların limitlerini tarif ediyor. Her n için, rastgele (tüm ayrışabilen permütasyonlar üzerinde düzgün dağılımla) ayrışabilen bir permütasyon seçelim. Bu, her n için $Olas([0, 1]^2)$ üzerinde rassal bir olasılık dağılımı verir. Makalenin yazarları, bu olasılıklar dizisinin $Olas([0, 1]^2)$ üzerinde iyi tanımlı bir olasılığa yakınsadığını gösteriyorlar. Bu limit, permütonlar uzayında, *ayrışabilen rassal permüton* denen, rassal bir olasılık dağılımıdır. Bahsi geçen makaleden alınmış yandaki iki resim, n 'nin büyük değerleri için ayrışabilen permütasyonların tipik grafiklerini gösteriyor.

Ayrışabilen permütasyonların kombinatoriğine dair çok daha fazlası için bakınız: ¹¹ veya ¹². Yine de bir alıştırmayı öneriyim.

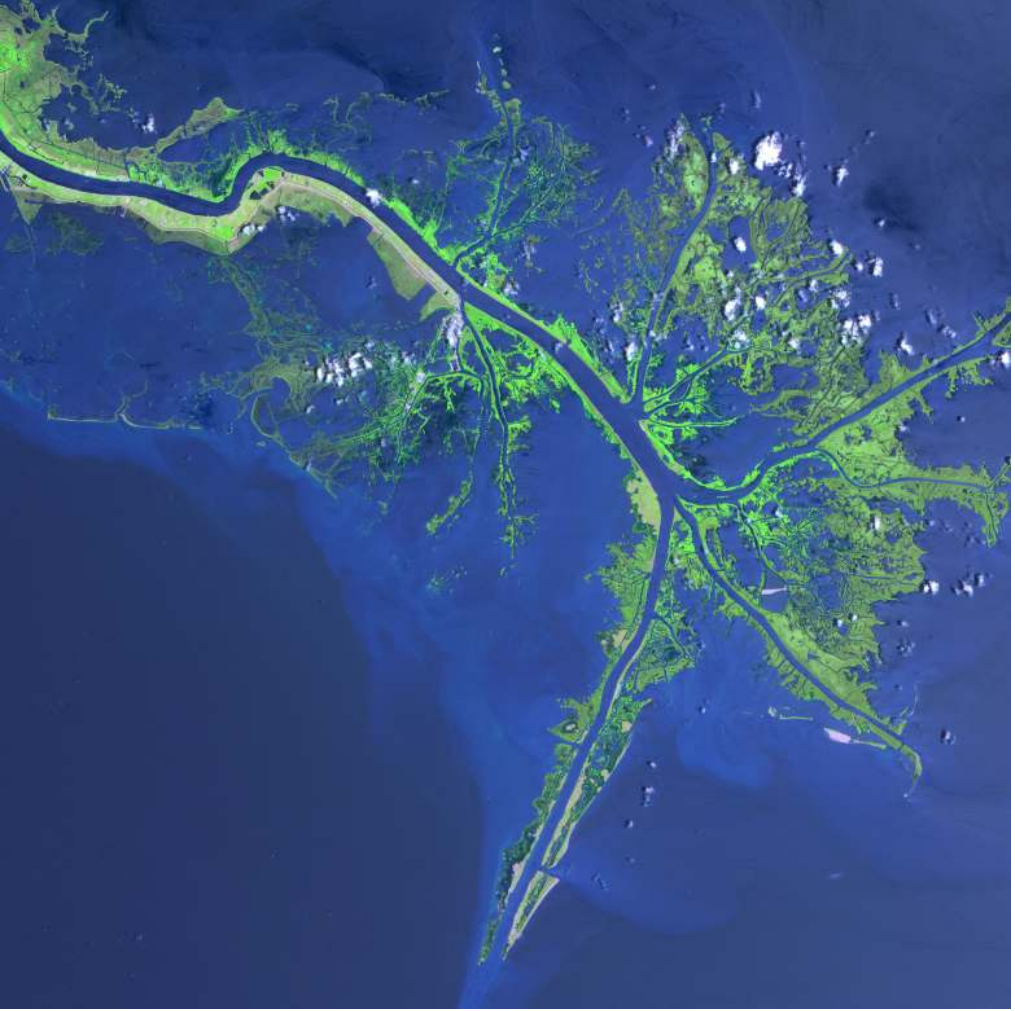
$\{1, 2, \dots, n\}$ 'nin verili bir permütasyonunun ayrışabilip ayrışamadığına (n cinsinden) doğrusal zamanda karar verebilen bir algoritmanın var olduğunu gösterin.

Polinom zamanda çalışan aşikar bir algoritma var; her $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4 \leq n$ dördlüsü için görüntülerin iki yasak permütasyondan biri şeklinde sıralanıp sıralanmadığını kontrol etmek. Polinom zamandan doğrusal zamana gitmek önemlidir zira Stirling formülü sayesinde görebiliriz ki $\log n!$, n 'nin doğrusal bir fonksiyonundan daha hızlı ama kuadratik bir fonksiyondan daha yavaş büyür. Böylece, doğrusal zamanda çalışan bir algoritma bulabilirseniz, ayrışabilen permütasyonların sayısının $n!$ 'le karşılaştırıldığında küçük kalacağını da ispatlamış olursunuz. Bu alıştırmayı için bir ipucu olarak, ayrışabilen permütasyonlar ve budanmış ağaçlar arasında birebir bir eşlemenin varlığının ispatını tekrar okuyun.



¹¹ S. Kitaev. *Patterns in permutations and words*. Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer, Heidelberg, 2011. Jeffrey B. Remmel'in önsözüyle.

¹² M. Bóna. *Combinatorics of permutations*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2012. Richard Stanley'nin önsözüyle.



Mississippi nehrinin deltası.



Hipparkos ve Schröder

Ağaçları sayalım

n ADET NESNE İÇİN polinom sıra değişimlerini (ya da ayrışabilen permütasyonları) sayacağız. Bu sayı $a(n)$ olsun.

Yaprak sayısı n olan ve $n \geq 2$ ise kökünün *en az iki çocuğu olan* ($n = 1$ ise hiç çocuğu olmayan), budanmış ağaçların sayısına $b(n)$ diyelim. Böyle bir ağaç için, ilk kökü kendi biricik çocuğu kabul edecek yeni bir kök yaratabiliriz. Buradan $n \geq 2$ için $a(n) = 2b(n)$ olduğu ortaya çıkar. b 'nin ilk değerleri şöyle:

$b(1) = 1$: kökü aynı zamanda tek yaprağı olan minik bir ağaç.

$b(2) = 1$: iki dallı ve iki yapraklı minik bir ağaç.

$b(3) = 3$.

$b(n)$ için bir yineleme bağıntısı bulma fikri çok çekici geliyor.

Önce kökü en az iki çocuk sahibi olan n yapraklı budanmış bir ağaçla başlayalım. Eğer kökü ve kökün dallarını silerseniz, toplam yapraklarının sayısı n olan bir grup ağaç elde ederiz. Aksi yönde, toplam yapraklarının sayısı n olan en az iki budanmış ağaçtan oluşan sıralı bir kümeyle başlarsak, n yapraklı budanmış bir ağaç oluşturmak için yeni bir kök ekleyip bunu önceki köklere bağlayabiliriz.

Böylece, aşağıdaki eşitlik geçerli olur:

$$b(n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k; i_1 + \dots + i_k = n} b(i_1)b(i_2)\dots b(i_k).$$

Şimdi klasik *üreteç serisi* yöntemini kullanacağız. Formel kuvvet

$a(n)$ 'nin ilk değerleri:

1 1
2 2
3 6
4 22
5 90
6 394
7 1806
8 8558
9 41586
10 206098
11 1037718
12 5293446
13 27297738
14 142078746
15 745387038
16 3937603038
17 20927156706
18 111818026018
19 600318853926
20 3236724317174
21 17518619320890
22 95149655201962
23 518431875418926
24 2832923350929742
25 15521467648875090
26 85249942588971314
27 469286147871837366
28 2588758890960637798
29 14308406109097843626
30 79228031819993134650
31 439442782615614361662

serisi H' 'yi şöyle tanımlayalım:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n = t + t^2 + 3t^3 + \dots$$

H' 'nin karesini alalım:

$$H(t)^2 = t^2 + 2t^3 + 7t^4 + \dots$$

Bu yeni seride t^n 'nin katsayısı $\sum_{i_1+i_2=n} b(i_1)b(i_2)$ 'dir, ki bu da kökü tam olarak iki çocuk sahibi olan n yapraklı budanmış ağaçların sayısıdır. $H(t)^3$ 'ü kullanarak kökü üç çocuk sahibi olan ağaçları vs. sayabiliriz.

Böylece

$$H(t)^2 + H(t)^3 + \dots$$

sonsuz serisi, tek yapraklı ağaç dışındaki tüm ağaçları sayar. Yani bu sonsuz toplamın değeri $H(t) - t$ 'dir.

Dolayısıyla,

$$H(t) - t = H(t)^2 + H(t)^3 + \dots$$

olur. Geometrik serinin toplamını alınca,

$$H(t) - t = \frac{H(t)^2}{1 - H(t)}$$

ya da

$$2H(t)^2 - (1+t)H(t) + t = 0,$$

elde ederiz ve buradan da,

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n = (1+t - \sqrt{1-6t+t^2})/4$$

buluruz. Karmaşık değişkenli bir fonksiyon olarak bakıldığında, $(1+t - \sqrt{1-6t+t^2})/4$ fonksiyonu iyi tanımlıdır ve merkezi 0, yarıçapı da $1-6t+t^2=0$ denkleminin köklerinden küçük olanı, yani $t=3-2\sqrt{2}$ olan bir dairede holomorftur. Dolayısıyla $H(t)$ 'nin yakınsaklık yarıçapı $3-2\sqrt{2}$ 'dir. Diğer bir deyişle,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b(n) = \log(3+2\sqrt{2}).$$

Okur \limsup 'un \lim 'le yer değiştirilebileceğini kolayca gösterebilir. $a(n)$ 'lere büyük Schröder sayıları, $b(n)$ 'lere de küçük



Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder'in (1841-1902) birçok sportif hobisi vardı: bisiklet, doğa yürüyüşü, yüzme, buz pateni, at biniciliği ve bahçecilik. Karlsruhe'de sürekli bisikletine binerken görüldüğü için oralarda 'bisiklet profesörü' diye tanınıyordu (bkz. [MacTutor Matematik Tarihi arşivleri](#)).



Hipparkos
(MÖ 190'lar - MÖ 120'ler)

Schröder sayıları denir. $n \geq 2$ için $a(n) = 2b(n)$ olduğunu unutmayın.

Çevrimiçi Tamsayı Dizileri Ansiklopedisi adlı muhteşem site, (birçok başka sayfanın yanında) bu iki diziyeye adanmış birkaç sayfaya da sahip ve muhtemelen haddinden fazla bilgi içeriyor! Örneğin şu asimptotik kestirme orada bulunabilir:

$$a(n) \sim \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n}{2n\sqrt{2\pi n}\sqrt{3\sqrt{2} - 4}\left(1 - \frac{9\sqrt{2}+24}{32n} + \dots\right)}.$$

Hipparkos ve Schröder

Arnold İlkesi der ki,

Bir kavram bir kişinin adıyla anılıyorsa o ad, o kavramı keşfeden kişinin adı değildir.

ve tamamlayıcısı, Berry İlkesi:

Arnold İlkesi kendine uygulanabilir¹³.

Ve bu Schröder sayılarının keşfi için de geçerli. Ernst Schröder, önemli bir Alman mantıkçısıydı¹⁴. Amacını şöyle açıklıyordu:

Mantığı hesap yapılan bir disiplin olarak tasarlamak, özellikle göreceli kavramların kesin şekilde ele alınmasına olanak vermek ve böylece doğal dilin alışıldık iddialarından özgürleşerek felsefe alanındaki bereketli toprakları 'klişe'lerden kurtarmak. Bu, ortamı Volapük [o zamanlar Almanya'da çok popüler olan, Esperanto gibi evrensel bir dil] gibi dil çabalarından oldukça farklı, bir ses dilinden çok bir işaret diline yakın, bilimsel-evrensel bir dile hazırlayacaktır.

Mantığa bu bakış açısıyla bakınca, n uzunluğundaki bir kelimenin olası doğru parantezlemelerinin sayısını hesaplamak, onun için doğal bir problem haline geliyordu. Bu, onun 1870'te yazdığı makalesinin¹⁵ amacıydı.

Uzunluğu 2 olan bir kelime için iki olasılık var:

$$ab \text{ ve } (ab).$$

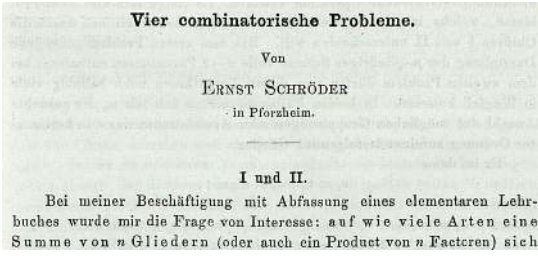


¹³ V. I. Arnold. [On teaching mathematics.](#)

Başka bir bağlamda buna Stigler'in kişiyle adlandırma kanunu da denir. A. N. Whitehead'in şöyle dediği söylenir: "Öneme sahip her şey, onu keşfetmemiş biri tarafından mutlaka daha önce söylenmiştir."

¹⁴ V. Peckhaus. 19th century logic between philosophy and mathematics. *Bull. Symbolic Logic*, 5(4):433-450, 1999.

¹⁵ E. Schröder. [Vier combinatorische probleme.](#) *Bull. Symbolic Logic*, 15:361-376, 1870.



Uzunluğu 3 olan bir kelime için ise altı olasılık:

$$\begin{array}{ccc} abc & (ab)c & a(bc) \\ (abc) & ((ab)c) & (a(bc)). \end{array}$$

Oyunun kuralları şöyle: bir harf tek başına, (a) şeklinde parantez içine alınamaz ve parantezler $((ab))$ şeklinde tekrarlanamaz. Kelimenin tamamı, bir çift parantez içinde olabilir ya da olmayabilir (bu, büyük Schröder sayılarının çift olmasının da sebebi). Bir çift parantezin ikiden fazla harfi kapsayabileceğini de gözden kaçırmayalım. Uzunluğu 4 olan bir kelime için 22 olasılık var.

Bu 22 ifadenin 4 yapraklı, budanmış 22 ağacın listesi olarak düşünülebileceği okura açık görünüyordur. Gerçekten de, kelimelerde gösterildiği gibi, parantezlenmiş kelimeler budanmış ağaçlar olarak görülebilir. Schröder, sadece budanmış ağaçları, yani polinom sıra değişimlerini, yani ayrışabilen permütasyonları sayıyordu. Makalesi, yukarıda tarif edilen yineleme bağıntısını ve üreteç fonksiyonunu da içeriyor.

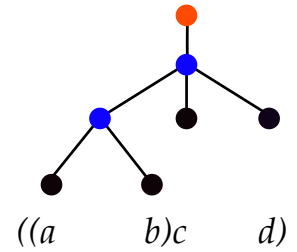
1994 yılında, o zamanlar ABD’de George Washington Üniversitesinde lisans üstü öğrencisi olan David Hough, Stanley’nin kitabındaki¹⁶ 1.45 numaralı alıştırmayı okuyordu:

Plutarkhos’un *Masa Sohbeti*’nden alıntı VIII.9.732: ‘Hrisippos’un dediğine göre sadece on basit önermeden oluşturulabilen bileşik önermelerin sayısı bir milyonu geçiyormuş’. (Hipparkos, olsa olsa en fazla 103.049, negatif taraftan bakarsa da 310.952 tane bileşik önerme olduğunu göstererek bunun yanlış olduğunu ispatladı.)

Y. Heath’in *Bir Yunan Matematiği Tarihi*’ne göre (cilt 2, s. 245) “bu sayılara bir anlam vermek imkansız görünüyor.” [Heath ayrıca 103.049’un 101.049 olarak da okunabileceğini söylüyor.]

Plutarkhos’un ifadesine bir anlam vermek mümkün müdür?

$$\begin{array}{ll} abcd & (abcd) \\ (ab)cd & ((ab)cd) \\ a(bc)d & (a(bc)d) \\ (ab)(cd) & ((ab)(cd)) \\ (ab)(cd) & ((ab)(cd)) \\ (abc)d & ((abc)d) \\ a(bcd) & (a(bcd)) \\ ((ab)c)d & (((ab)c)d) \\ (a(bc))d & ((a(bc))d) \\ a((bc)d) & (a((bc)d)) \\ (a(b(cd))) & ((a(b(cd)))) \end{array}$$



¹⁶ R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. I. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1986. Gian-Carlo Rota’nun önsözüyle.

Hough, 103.049'un onuncu küçük Schröder sayısı $b(10)$ olduğunu fark etti; bu bir rastlantı olamazdı.

Plutarkhos bir Yunan tarihçisi ve biyografi yazarıydı. Hikayemizdeki rolü, kendisinden iki yüz yıl önceki Hipparkos'tan bir alıntıyı tekrar kayda geçirmesiyle sınırlı. Plutarkhos'un elindeki bir kitapta korunmamış olsaydı, bu 103.049 sayısının bu kadar uzun bir süre içinde belleklerden silinmeyeceğini düşünmek zor.

Hipparkos, muhtemelen tarih öncesi zamanların en önemli astronomu. Üzü, gece-gündüz eşitliğinin gerilemesini bulmasından ve daha da önemlisi gezegenlerin hareketinin tutarlı, bilimsel bir tarifini yapmasından geliyor. Üç yüz yıl sonraki ardılı Batlamyus, kendi adıyla anılan *Batlamyus yermerkezli sistemle* biliniyor; Bu sistem, Kopernik yüzlerce yıl sonra kendi güneş merkezli sistemini ortaya koyana kadar genel kabul gören astronomi doktrini olarak kaldı. Batlamyus, Hipparkos'a epey şey borçlu ve bu borcunu da her zaman açıktan ilan etmiyor ama bunun hikayemizle pek ilgisi yok.

Neyse, Hough'a göre, Plutarkhos'un aktarımına bakılırsa Hipparkos, uzunluğu 10 olan parantezlenmiş kelimeleri sayıyordu. Hipparkos'un Schröder sayılarını bu şekilde keşfiyle ilgili birkaç tarih makalesi yazılmış^{17 18}.

[MathPages](#) sitesindeki bir makale¹⁹, Stoacı mantık (özellikle Hrisippos tarafından öğretilmiş ve Hipparkos tarafından eleştirilmiş, Aristo öncesi bir mantık) kullanarak biraz daha ayrıntılı bir açıklama sunuyor.

Belli bir sayıda, verili a_1, a_2, \dots, a_k mantıksal savını *ve* ve *veya* bağlaçlarıyla birleştirmenin en az iki yolu var:

- a_1 VEYA a_2 VEYA \dots VEYA a_n ; bu, n değişkenli $VEYA(a_1, \dots, a_n)$ fonksiyonudur.
- a_1 VE a_2 VE \dots VE a_n ; bu, n değişkenli $VE(a_1, \dots, a_n)$ fonksiyonudur.

Modern Boole gösteriminde VEYA yerine +, VE yerine de bir nokta, ya da sadece yan yana yazma şeklinde bir gösterim kullanıyoruz. Şimdi, n uzunluğunda bir kelime düşünelim (mesela $n = 4$ için $abcd$). Harflerin arasındaki $n - 1$ tane boşluğun her biri için "+" ve "." işaretlerinden birini seçelim. Toplam 2^{n-1} tane



La sage instruction fert de riche couronne
A Travaux, élevés par deffus tous humains.
Si les grands te porteroient au ceut & dans leurs mains,
Verra viuroit au lieu de Venus & Bellone

[Plutarkhos](#)
(yaklaşık MS 46 – MS 120).

¹⁷ R. P. Stanley. [Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough](#). *Amer. Math. Monthly*, 104(4):344–350, 1997.

¹⁸ F. Acerbi. On the shoulders of Hipparchus: a reappraisal of ancient Greek combinatorics. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 57(6):465–502, 2003.

¹⁹ K. Brown. Hipparchus on compound statements. [MathPages](#).

$abcd$	$abc + d$
$ab + cd$	$ab + c + d$
$a + bcd$	$a + bc + d$
$a + b + cd$	$a + b + c + d$

olasılık elde ederiz ($n = 4$ örneğimizde, 8).

Çarpma işleminin toplamaya göre önceliği olduğunu düşünmeye alışkınız ama bu mantıksal fonksiyonda öncelik belirtmek istiyorsak parantezler kullanmamız gerekiyor.

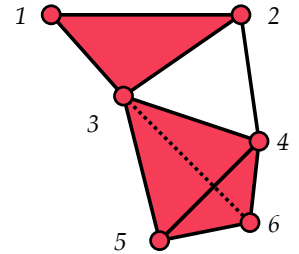
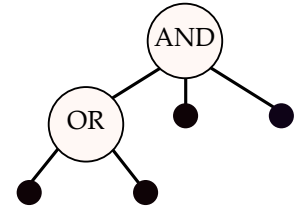
Bu, budanmış bir ağaçla tarif edilebilir. Seviyesi tek olan boğumları VEYA işaretiyle, seviyesi çift olan boğumları de VE işaretiyle ilişkilendirelim. Her boğum, kendi çocukları üzerine (VE ya da VEYA ile) etki eder ve bu çocuklar da bir çift parantez içine alınmış olarak düşünülür. Eğer kökün tek bir çocuğu varsa, onu VE ile ilişkilendirmek gerekmez, zira tek bir elemana etki edecektir.

Bir alıştırma olarak okuru iki farklı ifadenin, yani farklı iki budanmış ağacın, $a_i = 0$ ya da 1 (yanlış ya da doğru) üzerinde hesaplandığında farklı $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ Boole fonksiyonları tanımladığını göstermeye teşvik etmek isterim. Böylece, Hipparkos haklıydı: 10 savı VE ve VEYA kullanarak, anlattığımız şekilde birleştirmenin $a(10) = 2 \times 103.049$ yolu vardır. Neden $a(10)$ değil de $b(10)$ 'dan bahsettiği sorulabilir. *Bileşik önermeler* üzerinde, olumsuzlamayla verilen ve temelde VE ve VEYA'nın yerlerini değiştiren, karesi bir olan doğal gönderimi fark etmiş olabilir.

Bahsettiklerimizle alakalı, [Dedekind problemi](#) denilen açık bir problem var. 2^{2^n} tane Boole fonksiyonu, yani $\{0,1\}^n$ 'den $\{0,1\}$ 'e giden fonksiyon mevcut. Her Boole fonksiyonunun VE, VEYA ve DEĞİL'den oluşan bir formül kullanarak yazılabileceğini görmek kolaydır. DEĞİL içermeyen formüllerle tarif edilebilen fonksiyonlara *tekdüze Boole fonksiyonları* denir (fakat Hipparkos'un aksine, her değişkenin formülde tek bir kere kullanılması gibi bir şart koşmadığımızı gözden kaçırmayın). *Tekdüze Boole fonksiyonlarını sayma problemi*, $n > 8$ için henüz çözülememiştir. Bu sayının güzel bir topolojik yorumu da var: köşenoktaları $\{1,2,\dots,n\}$ olan simpleksli komplekslerin sayısı.

Ben de dahil çoğu matematikçinin Yunan matematiği hakkındaki bilgisi eksik. Bu matematiğin sadece Öklit tipi geometriden ibaret olduğuna inanıyoruz. Hipparkos'un onuncu Schröder sayısını hesaplamış olması, Antik Yunanlıların epey ileri bir kombinatorik bilgisine sahip olduğuna dair bir ipucu oluşturuyor; yukarıda bahsettiğimiz Acerbi makalesinin teması da bu.

$abcd$	$abc + d$
$ab(c+d)$	$a(bc+d)$
$ab+cd$	$a(b+c)d$
$a(b+cd)$	$(ab+c)d$
$ab+c+d$	$a(b+c)+d$
$a(b+c+d)$	$a+bcd$
$(a+b)cd$	$(a+bc)d$
$a+bc+d$	$(a+b)(c+d)$
$(a+b)c+d$	$a+b(c+d)$
$a+(b+c)d$	$a+b+cd$
$(a+b+c)d$	$a+b+c+d$

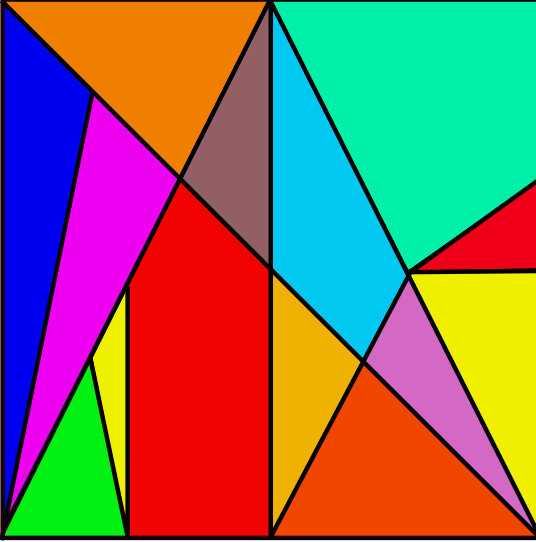


Köşenoktaları kümesi $V = \{1, \dots, 6\}$ olan bir simpleksli kompleks. Bir $X \subset V$ altkümesini X bir simpleks ise 0'la, değilse de 1'le ilişkilendiren fonksiyon, tekdüze bir Boole fonksiyondur.

Netz'in kitabı²⁰ bu tarihe yeni bir perspektif katıyor. İlk bölüm Yunan kombinatoriğini ve özellikle de 103.049 sayısını anlatıyor. Ünlü Arşimet parşömeninde bulunmuş bir başka kombinatorik bilmeceyi de içeriyor. (Şu kitabı²¹ bir dedektif hikayesi gibi okuyun mutlaka.) Bu bilmece, 14 çokgen parçadan yapılmış ve *Tangram* oyununa benziyor.

Netz, "*Stanford'daki meslektaşı ünlü kombinatorikçi Persi'den basit olduğunu varsaydığı bir soruyu çözmeye yardım etmesini istedi: parçalardan kareyi oluşturmanın kaç yolu vardır? [...] Diaconis, üç meslektaşıyla birkaç ay boyunca çalıştıktan sonra cevaba ulaştı: 17.142.*"

Arşimet cevabı biliyor muydu?



²⁰ R. Netz. *Ludic proof*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Greek mathematics and the Alexandrian aesthetic.

²¹ R. Netz and W. Noel. *The Archimedes codex*. Phoenix, London, 2008. Revealing the secrets of the world's greatest palimpsest.

Arşimet'in kutusu (Stomachion).

THE
METHOD of FLUXIONS
 AND
INFINITE SERIES;
 WITH ITS
 Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, K^t.
 Late President of the Royal Society.

*Translated from the AUTHOR'S LATIN ORIGINAL
 not yet made publick.*

Adam
83.12

To which is subjoin'd,
 A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
 Consisting of
 ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
 In order to make this Treatise
A compleat Institution for the use of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M. A. and F. R. S.
 Master of Sir *Joseph Williamson's* free Mathematical-School at *Rocheſter*.

L O N D O N :
 Printed by HENRY WOODFALL ;
 And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.
 M.DCC.XXXVI.

5757

De methodis serierum et fluxionum

Newton yöntemi

Cebirsel Eğriler

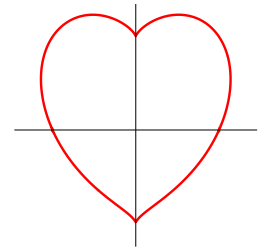
RENÉ DESCARTES'İN KOORDİNATLARI KULLANIMA SUNMASINDAN BERİ, düzlem eğrilerini ve bilhassa ($P(x, y) = 0$ gibi bir polinom denklemlerle tanımlanan) *cebirsal düzlem eğrilerini* incelemek ve araştırmak, matematiğin başlıca temalarından biri olmuştur ve olmaya devam etmektedir. 1. ve 2. dereceden denklemler (yani doğrular ve koni eğrileri) çok tanıdıkları elbette. XVIII. yüzyıl matematikçileri daha yüksek dereceli eğrilere baktıklarında pek çok farklı şekillerden oluşan vahşi bir orman buldular ve onu ehlileştirmeye çalıştılar. Örneğin, Isaac Newton 3. derece eğriler hakkında uzun bir çalışma yazdı, bu çalışmada onları çok sayıda türe ayırdı.²² veya²³ kaynaklarındaki tartışmalara bakınız.

Bu eğrilerin anlaşılmasında tekil noktaların çok merkezi bir rol oynadığı apaçık ve hızla görüldü. Eğer (x_0, y_0) noktası eğri üzerindeyse yani $P(x_0, y_0) = 0$ ise ve (x_0, y_0) 'da $\partial P/\partial x$ ve $\partial P/\partial y$ kısmî türevleri sıfıra eşitse, (x_0, y_0) noktası *tekildir*. Olağan (yani tekil olmayan) bir noktanın bir komşuluğunda günümüz matematikçileri örtük fonksiyon teoremine başvurmakta zorluk çekmez: öyle bir noktanın etrafında, uygun pürüzsüz koordinatlarda, eğri bir doğruya dönüşür.

Tekil noktalarla çok daha çetrefil olabildiklerinden doğalarını anlaşılır hale getirmek uzun zaman aldı.

²² J. Stillwell. *Mathematics and its history*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.

²³ W. W. R. Ball. On Newton's Classification of Cubic Curves. *Proc. London Math. Soc.*, S1-22(1):104–143, 1890.



İki tekil noktası olan bir cebirsel eğri.

Bu bölümde, Newton'un *De methodis serierum et fluxionum* kitabını takip ederek, bu kavrayışa yönelik büyük adımlardan birini betimleyeceğim.

Newton ile Leibniz arasında, diferansiyel ve integral hesabın icadına dair olan rekabetin tarihsel ayrıntılarına girmek istemiyorum. Özellikle bizim amacımız için Westfall'ın şahane Newton biyografisini tavsiye edeyim²⁴.

Newton'un *harikulade yıl*'ını, *Annus mirabilis*'ini kendisi şöyle anlatıyor (²⁵'e bakınız):

1655 yılı başlarında, yaklaşan seriler yöntemini ve herhangi ikiterimlinin herhangi bir kuvvetini böyle bir seriye indirgeme kuralını buldum. Aynı yılın Mayıs'ında Gregory ve Slusius'un teğetler yöntemini ve Kasım'da 'fluxion'ların doğrudan yöntemini buldum ve ertesi yıl Ocak ayında renkler teorisi elimdeydi ve bir sonraki Mayıs'ta 'fluxion'ların ters yöntemine girdim. Aynı yıl, kütleçekimini ayın yörüngesine genişletme konusunda düşünmeye başladım. Bütün bunlar 1665-1666 veba salgını yıllarında oldu. Zira o günlerde icat yaşlarımın zirvesindeydim ve Matematik ile Felsefeye, ondan sonraki zamanlarda hiç olmadığı kadar zihin yoruyordum.

1669 Haziran'ında Newton, 1665'teki fikirlerini temel alarak *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*'ı yazmıştı.

1671 yılında *De methodis serierum et fluxionum*'u yazdı ama yayımlamadı.

1676'da (arabulucu Oldenburg'un üzerinden) Leibniz'e iki ünlü mektubunu, *epistola prior*'u ve *epistola posterior*'u yazdı.

De methodis'in Colson tarafından yapılan İngilizce **çevirisi** 1736'da (yani Newton'un ölümünden dokuz yıl sonra) yayımlandı. İngilizce çevirinin Fransızca'ya Buffon tarafından yapılan çevirisi 1740'ta yayımlandı.

Bütün bu çalışmalar, cebirsel eğrilerin tekil noktalarının epeyce kesin bir tanımını içerir. Bu tanım, yine Arnold ilkesini izleyerek günümüzde *Puiseux serileri* olarak adlandırdığımız şeyler cinsinden yapılıdır.

P katsayıları karmaşık olan bir polinom olmak üzere, $P(x, y) = 0$ eğrisini incelemek istiyoruz. İlk önce anlaşılması gereken şey, Newton'un bunu bir *eğri* olarak değil *fonksiyon* olarak düşündüğüdür: x verildiğinde Newton, $P(x, y) = 0$ denklemini çözmek ve

²⁴ R. S. Westfall. *Never at rest*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980. Bir Isaac Newton biyografisi.

²⁵ R. S. Westfall. [Newton's marvelous years of discovery and their aftermath: myth versus manuscript](#). *Isis*, 71(256):109-121, 1980.

Colson, Buffon'a Latince el yazmasını göstermeyi kabul etmemiş gibi gözüküyor.

Katsayıların gerçek olduğu durumu, ayrıca P 'nin yalnızca analitik varsayıldığı durumu daha sonra inceleyeceğiz.

y' 'yi x 'in bir $y(x)$ fonksiyonu olarak bulmak ister. Elde ettiği ana sonuç, $y(x)$ 'i x 'in rasyonel kuvvetlerinden oluşan bir sonsuz seri olarak düşünmeye razı olduğumuzda bunun gerçekten mümkün olduğudur.

Newton'un "neredeysen" ispat ettiği, ileride daha kesin ifade edeceğimiz bir teoremi verelim.

Teorem. P , x 'e bölünmeyen herhangi bir polinom ve $P(0,0) = 0$ olsun. O zaman $(0,0)$ 'ın bir komşuluğunda $P(x,y) = 0$ denklemi, $(i = 1, \dots, n$ için) sonlu sayıda $y = f_i(x)$ şeklinde eşitliklere denktir; burada f_i 'ler, uygun bazı $a_{i,k}$ karmaşık katsayıları ve q_i pozitif tamsayıları olmak üzere

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} x^{\frac{k}{q_i}}$$

şeklinde verilen Puiseux serileridir.

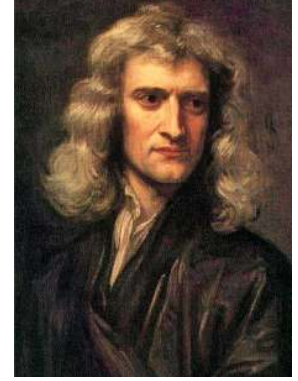
Başka bir deyişle, $\{P = 0\}$ sonlu sayıda f_i serisinin grafiklerinin birleşimidir. Bu durum tam da Kontsevich'in baştaki sorusuna benziyor. Haliyle bu grafiklerin topolojik doğasının ne olduğunu sorgulayacağız. Ancak bu soruyu incelemeden önce, özellikle bu f 'lerin aslında fonksiyon olmamasından ötürü, düzeltilmesi gereken birçok ayrıntı var. Mesela kare kökün "grafliğini" düşünün.

De methodis serierum et fluxionum'un birinci kısmına yakından bakacağız. Bu önemli kitabın kapak sayfasının resmi, bu bölümün ilk sayfasında bulunuyor. Okurların işini kolaylaştırmak amacıyla İngilizce çeviriyi takip edeceğim.

Newton yöntemi

Newton'u okumaya başlayalım.

Türlerin işlemleri ile sıradan sayılardaki aynı işlemler arasında büyük uyumluluk olduğundan; bunları temsil eden simgeler hariç, aralarında fark yok gibidir, birincisi genel ve belirsiz, diğeri belirli ve özeldir: hiç kimsenin son zamanlarda keşfedilmiş olan ondalık kesirler teorisini benzer şekilde türlere uyarlamayı düşünmemiş olmasına ancak hayret edebiliyorum [...] bilhassa bunun daha derin keşiflere yol açabilecek olmasından ötürü.



Newton'un 1689'da Godfrey Kneller tarafından yapılan portresi. ©



De methodis'ten bir sayfa. ©

Açıklama: *Sıradan sayıyla* Newton'un demek istediği ... sıradan sayıdır, yani bugün bizim *karmaşık sayı* dediğimiz şeydir. O zamanlar bu sayıları "sıradan" sayacak çok az sayıda matematikçi bulunduğuna dikkat ediniz. *Tür* diyerek, x 'in bir polinomunu veya bir tam seriyi yani bugün *Laurent serisi* diye adlandırılanı veya belki *Puiseux serisini* yani x 'in kesirli kuvvetlerinin serisini kastediyor. Her halükarda, Newton'un deyişiyle *tür* bir çeşit fonksiyondur.

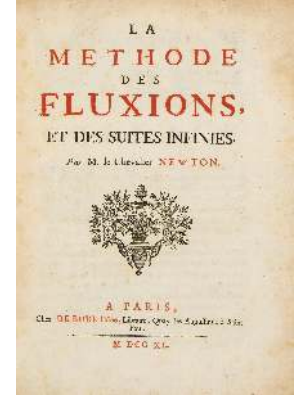
Fakat türler teorisinin cebirle olan ilişkisi, ondalık sayılar teorisinin yaygın aritmetikle olan ilişkisiyle aynı olmasından ötürü; toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kökler alma işlemleri oradan kolaylıkla öğrenilebilir, yeter ki öğrenci ondalık aritmetikte ve adi cebirde ustalaşmış olsun ve ondalık kesirlerle sonsuza dek devam ettirilen cebir terimleri arasındaki uygunluğu görsün.

Açıklama: Newton, serilerle tıpkı dört (+, -, ×, /) işleme sahip sayılar gibi işlemler yapılabileceğini gözlemler. Modern terimlerle ifade edilirse, hem *sıradan sayıların* hem *Laurent serilerinin* cisim olduklarını gözlemler.

Zira, nasıl sayılarda, sağ tarafa doğru basamaklar on veya onun altkatları oranında azalıyorsa; (aşağıda sık sık gerektiği gibi) herhangi pay veya paydanın boyutlarının mertebesine göre sonsuza dek devam ettirilen düzgün bir açılıma konulduğunda, türlerde de aynı şey olur.

Açıklama: Gene Newton'un zamanına uymayan modern terimlerle ifade edersek, Newton bu iki cismin topolojilerinden söz eder. İki gerçek sayı birbirine yakındır demek, ondalık açılımları büyük bir basamağa kadar aynıdır demektir; benzer şekilde, x değişkenli iki polinomun veya serinin 0'ın komşuluğunda yakın olması demek, farklarının değeri büyüktür demektir.

Bu aşamada artık Newton'un stratejisini tahmin edebiliriz. Newton bize, katsayıları *sıradan sayılar* veya *türlerden* oluşan bir cisimden gelen bir P polinomu için, $P(y) = 0$ polinom denklemlerini çözenin bir yolunu öğretecektir. İki değişkenli bir P polinomunu da, katsayıları $C(x)$ rasyonel fonksiyonlar cisminden veya $C((x))$ Laurent serileri cisminden gelen tek değişkenli bir $P(x)(y)$ polinomu olarak görmek suretiyle, bu yöntem $P(x, y) = 0$ şeklindeki denklemlere de uygulanacaktır.



Buffon'un yaptığı Fransızca tercümenin kapak sayfası. ©

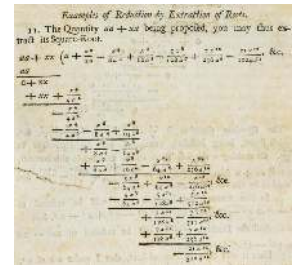
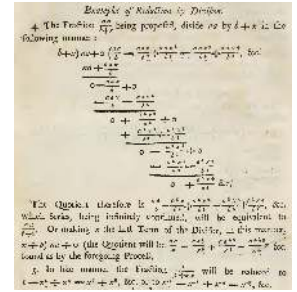
Gayet pedagojik bir sunumla Newton, türler ile sıradan sayılar arasındaki benzerliği gösteren örnekler verir. Önce $a^2/(b-x)$ 'in x değişkenli bir seriye nasıl açılacağını gösterir. Tıpkı bizim ilköğretim okulunda $1'i 0,9 = 1 - 0,1'e$ bölünce $1,1111111 \dots$ çıktığını anlatmamız gibi. Bu kolay işlem, onun okurlarına da kolay gelmiş olmalıdır.

Sonra $x^{p/q}$ rasyonel üslerinin anlamını açıklar; bu okurlarının çoğuna tanıdık gelmiştir herhalde. Ardından $a^2 + x^2$ 'nin karekökünü x değişkenli sonsuz bir seri olarak ifade eden örneği üzerinden ünlü ikiterimli formülünü sunacak duruma gelir:

$$(a + x)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} \text{ vs.}$$

Şimdi bizim için en ilgi çekici yere geliyoruz.

“Dokunulmuş denklemler” adını verdiği, katsayıları türler olan polinom denklemlerini, yani $P(x,y) = P(x)(y) = 0$ denklemlerini çözmek istemektedir. Gene çok pedagojik bir şekilde, önce, P polinomu $C[y]$ 'de olmak üzere, sıradan sayılarla kurulmuş olan $P(y) = 0$ şeklindeki *alelade* denklemleri çözmekle işe başlayacağını ilan eder.



Of the Reduction of affected Equations.

19. As to affected Equations, we must be something more particular in explaining how their Roots are to be reduced to such Series as these; because their Doctrine in Numbers, as hitherto deliver'd by Mathematicians, is very perplexed, and incumber'd with superfluous Operations, so as not to afford proper Specimens for performing the Work in Species. I shall therefore first shew how the Resolution of affected Equations may be compendiously perform'd in Numbers, and then I shall apply the same to Species.

Bu, analizdeki en temel gereçlerden biri olan ünlü *Newton yöntemi*dir.

		$+2,10000000$	
		$-0,00544852$	
		$2,09455148$	
$z+p=y.$	y^3	$+8$	$+12p+6pp+p^3$
	$-2y$	-4	$-2p$
	-5	-5	
	Summa	-1	$+10p+6pp+p^3$
$0,1+q=p.$	$+p^3$	$+0,001$	$+0,03q+0,39q+q^3$
	$+6pp$	$+0,06$	$+q,2+6,$
	$+10p$	$+1,$	$+10,$
	-1	-1	
	Summa	$0,061$	$+11,23q+6,39q+q^3$
$-0,0054+r=q.$	$+q^3$	$-0,000000157484$	$+0,00008748r-0,0162rr+r^3$
	$+639q$	$+0,00193708$	$-0,06807$
	$+1123q$	$-0,060642$	$+11,23$
	$+0,061$	$+0,061$	
	Summa	$+0,0005416$	$+11,162r$
$-0,00004852+s=r.$			

Hesaplamalarını sunuş biçimine bakınız. Ele aldığı örnek, üçüncü dereceden

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

denklemdir. Deneme ve yanılmayla, 2'den çok farklı olmayan bir kökün var olduğunu gözlemler. Bu yüzden y 'yi, küçük bir p 'yle, $y = 2 + p$ diye arar. İlk denklemden yerine yerleştirerek

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

bulur. Şimdi "küçüklüğünden dolayı $p^3 + 6p^2$ atılabilir" ve

$$10p - 1 \approx 0$$

elde eder, yani p , $1/10$ 'a yakındır. Böylece $p = 0,1 + q$ alabilir ve denklemden yerleştirerek

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$$

elde eder. " $11,23q + 0,061 = 0$ doğruya yakın olduğundan" q 'nin $-0,061/11,23 \approx -0,0054$ 'e yakın olduğunu bilir.

Ardından $q = -0,0054 + r$ yazıp önceki gibi yerleştirerek işleme “keyfi istediği kadar” devam eder. Nihayet 2,09455148’e yakın olan çözümü elde eder.

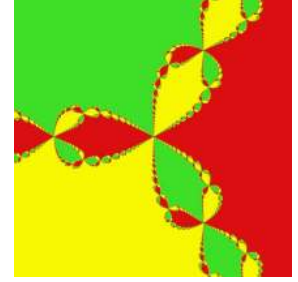
Sonraki paragraf, ille de gerekiyorsa, Newton’un hesaba inanılmaz derecede yetenekli olduğunu gösterir. Esasen, “iş, çok kısaltılabilir”. Bütün lisans öğrencilerinin bildiği, bilmesi gereken bir şeyi açıklar: aslında her adımda doğru basamakların sayısı iki katına çıkar ve bu sayede p, q, r, s, \dots sayılarını kesin olarak hesaplamaya gerek yoktur. Tablodaki kimi sayıların üzerinde çizgi olması bu sebeptendir: bu gaf değil, akıllıca bir basitleştirme.

Royal Society’nin üyesi olan ve dolayısıyla Newton’u çok iyi tanıyan Raphson (1648–1715), 1690 yılında *Analysis aequationum universalis*’te denklemleri çözmek için bir yöntem yayınladı. $P(y) = 0$ ’ın yaklaşık bir y_0 çözümüyle başlayıp

$$y_{k+1} = y_k - \frac{P(y_k)}{P'(y_k)}$$

şeklinde tanımlanan diziyi göz önüne alalım. Her şey yolunda giderse, bu dizi bir çözüme yakınsayacaktır. Raphson, Newton’dan bahsetmez. Bazı tarihçiler, bu iki yöntemin *çok* farklı olduklarını iddia ederler. Raphson’un yönteminde, aynı denklem sabit tutulur ve y_k dizisi hesap edilir. Newton yönteminde, her adımda yeni bir denklem hesaplanır. İki yöntem tamamen aynı sonucu verir, formel olarak özdeşler de; ama hesaplar elle yapılacaksa Newton’un sunuşu çok daha verimlidir. “Raphson’ın yineleme, Newton’unsu özyineleme kullandığı” söylenebilir²⁶. Bazı matematikçiler, Raphson’un, P ’nin türevinin rolünü anladığını, Newton’unsu sadece denklemi doğrusallaştırdığını iddia ederler. İyi de, Newton’un, türevin mucidinin, doğrusal kısmın türev olduğunu farketmemiş olduğunu kim söyleyebilirmiş ki? Ben *Newton yöntemi* demeye devam edeceğim; Newton-Raphson yöntemi demeyeceğim.

Son bir yorum: Newton’un yakınsaklık hakkında hiçbir husustan bahsetmediğini söylemeye gerek yok. Örneğinin yalnızca gerçek polinomların gerçek köklerini içerdiğine de dikkat ediniz.



Newton yöntemi, karmaşık katsayılı $P(z)$ polinomlarının köklerini bulmak için kullanılabilir. Bir z_{ilk} ’le başlar ve Newton algoritmasının yinelemelerinin bir köke yakınsayacağını umarız. Böylece düzlemi (veya hiç değilse yöntemin işe yaradığı z_{ilk} ’ler kümesini), limitteki köke göre birkaç bölgeye ayırırız.

1880 yılında Cayley bu ayırtırmayı iyice tarif etmeye dener. Derece 2 ise sorunun kolay olduğunu söyledi (okura alıştırmaya), 3. derece içinse “aşık demeyin de ne dersiniz deyin” diye yazdı. Gerçekten, bugün bu ayırtırmanın fraktal doğası olduğunu biliyoruz. Bu *Newton tavşanı* diye bilinir.

²⁶ C. Christensen. [Newton’s method for resolving affected equations](#). *College Math. J.*, 27(5):330–340, 1996.



Trinity Koleji'nde Newton'un elma ağacı. Arada sırada, Newton'un başına düşen elmanın bu ağaçtan düştüğü şeklinde bir efsane dolaştırılır. Ancak Newton *Harikulade* yılında Cambridge'de değildi.

De methodis serierum et fluxionum

Newton serileri

Dokunulmuş denklemler

NEWTON ARTIK KATSAYILARINA x 'İN DOKUNDUĞU "DOKUNULMUŞ DENKLEMLERİ", katsayıları x 'in *fonksiyonu* olan denklemleri çözebilecek durumdadır. a, b birer parametre olmak üzere

$$y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

örneğine bakar. Newton'un denklemlerini homojen olarak yazmak konusunda özen gösterdiğine dikkat ediniz. Ben kolaylık olsun diye daha özensiz olacak ve $a = b = 1$ seçeceğim. Newton önce, u sıfır olmayan bilinmeyen bir sabit, α da bilinmeyen bir rasyonel sayı olmak üzere, $y = ux^\alpha$ şeklinde bir *yaklaşık çözüm* arar. Denkleme yerleştirerek

$$u^6x^{6\alpha} - 5u^5x^{1+5\alpha} + u^4x^{3+4\alpha} - 7u^2x^{2+2\alpha} + 6x^3 + x^4 = 0$$

bulur. Bu x 'in rasyonel kuvvetleriyle kurulmuş "monomlardan" oluşan bir ifadedir. Üsler $6\alpha, 1 + 5\alpha, 3 + 4\alpha, 2 + 2\alpha, 3$ ve 4 'tür. Durumu 0 civarında incelersek, en büyük terim bu üslerin en küçük olanına tekabül eder. α 'nın özel olmayan seçimlerinde altı üs farklı olacaktır. O durumdaysak ve baskın terimin sıfır olduğunu ifade etmeyi dilersek $u = 0$ seçmek zorunda kalırdık; ama elbette yapmak istediğimiz şey bu değil.

Bu yüzden α 'yı, altı üssün en az ikisinin eşit olacağı ve diğer hepsinden küçük olacağı şekilde seçmek zorundayız. Newton bu

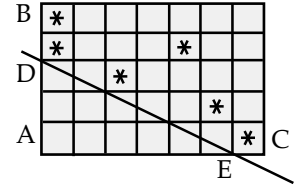
B	x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4
	x^3	x^2y	xy^2	y^3	y^4
	x^2	xy	y^2	y^3	y^4
	x	y	y^2	y^3	y^4
A	1	y	y^2	y^3	y^4
					C

Newton'un *aynı zamanda* fizikçi olduğunu unutmayınız.

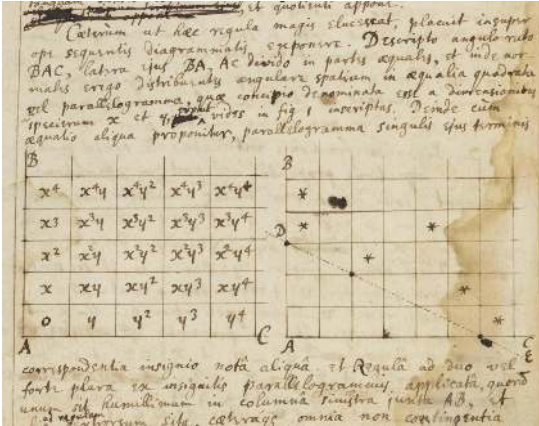
şartı ünlü “çokgenini” kullanarak ifade eder. Karelere (Newton *paralelkenar* der) bölünmüş bir dama tahtası çizer ve 0 olmayan her $a_{ij}x^jy^i$ ($i, j > 0$) monomu için (i, j) kutusuna bir yıldız işareti koyar. Yukarıdaki örneğinde altı yıldız vardır.

α 'nın seçimi ve $j + iu$ üslerinin kıyaslanması, Newton'un gayet berrak olarak açıkladığı geometrik bir yolla anlatılabilir. Dama tahtasına bir cetvel koyun ve işaretlenmiş yıldızlara değinceye kadar hareket ettirin.

O zaman, herhangi bir denklem verildiğinde, bütün terimlerine tekabül eden paralelkenarları işaretle; böyle işaretlenmiş paralelkenarların ikisine veya belki de daha çoğuna cetveli yanaştır, en aşağıdaki AB 'deki sol sütunda olsun, cetvele değen diğeri sağa doğru olsun; geriye kalanları, cetvele değmeyenleri, cetvelin yukarısında bırak. Sonra denklemin, cetvele değen paralelkenarlar tarafından temsil edilen terimlerini seç.



Her ne sebeptense, Newton x^j monomlarını düşey eksen üzerinde ve y^i 'leri yatayda işaretler.



Böylece, ele aldığımız örnekte, α katsayısı $1/2$ 'ye (DE doğrusunun eğimine) eşit olarak seçilir ve böylece x^3 , x^2y^2 ve y^6 ilk denklemde üç “baskın monom” olarak belirlenir. Nitekim, $\alpha = 1/2$ için, x 'in artan kuvvetlerine göre sıralayarak denklemi

$$(u^6 - 7u^2 + 6)x^3 - 5u^5x^{7/2} + x^4 + u^4x^5 = 0$$

olarak yazarız. Bu yüzden u 'yu

$$u^6 - 7u^2 + 6 = 0$$

denkleminin bir çözümü olarak seçmeliyiz. Cetvel üç yıldıza değdiğinden bu denklemde üç monom bulunur. u için altı çözüm vardır:

$$u = \pm 1 \quad ; \quad \pm\sqrt{2} \quad ; \quad \pm\sqrt{-3}.$$

Newton son iki sanal çözümü göz ardı etmiş gibi gözüküyor. Yalnızca gerçek çözümlerle ilgilenmiş olabilir ama eğer öyleyse bile, bu kısımda daha sonra göreceğimiz gibi, bu bir hatadır.

Ardından birinci çözümü seçer. *Sıradan sayılarla* ilgili yöntemdeki gibi $y = \sqrt{x} + p$ yazabilir. Sonra süreci "istenildiği kadar devam ettirmek" yeter. Ama o, hiç açıklama yapmaksızın ilk örneğini aniden bırakıp "çözümlemesinin uygulamasını teşhir eden" başka sayı örneklerine geçer.

Newton'un birinci örneğinin nasıl devam ettiğini göstereyim. Basit olsun diye onun sunuşunu hafifçe değiştiriyorum.

İlk yaklaşık çözüm olan $y \simeq \sqrt{x}$ 'i bir p bilinmeyeni ekleyerek geliştirmek yerine

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = x_1(1 + y_1)$$

koyalım. Bu değerleri başlangıçtaki denkleme yerleştirirerek ve x_1^6 'ları sadeleştirerek

$$\begin{aligned} & -5x_1 + x_1^2 + x_1^4 - 8y_1 - 25x_1y_1 + 4x_1^4y_1 \\ & + 8y_1^2 - 50x_1y_1^2 + 6x_1^4y_1^2 + 20y_1^3 \\ & - 50x_1y_1^3 + 4x_1^4y_1^3 + 15y_1^4 - 25x_1y_1^4 \\ & + x_1^4y_1^4 + 6y_1^5 - 5x_1y_1^5 + y_1^6 = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yeni denklemde, x_1 'in ve y_1 'in katsayıları sıfır değildir. Böylece Newton'un cetveli şimdi $(0, 1)$ ve $(1, 0)$ 'dan geçer. Bu da, yeni denklemin başnoktada tekil olmadığını başka bir yolla söylemektir. Öyleyse baskın terimler

$$-5x_1 - 8y_1$$

doğrusaldır; bu da

$$y_1 \simeq -\frac{5}{8}x_1$$

verir. Süreci

$$x_1 = x_2 \quad ; \quad y_1 = -\frac{5}{8}x_2(1 + y_2), \dots$$



24 Ekim 1676'da Newton, Leibniz'e, *diferansiyel ve integral hesaba* kendi katkılarını "anlattığı" bir **mektup** gönderir. Mektubunun sonunda: "[...] teğetlerin ters problemleri ve onlardan daha zor başka problemlere gücümüz yetmektedir; bunları çözmek için, biri daha derli toplu ve diğeri daha genel olan iki kısımlı bir yöntem kullandım ve şimdilik her ikisini de kaydırılmış harflerle kayıt altına almayı uygun gördüm..." diye yazar ve sonra yöntemini bir anagramda gizler:

5accd10effh11i4l3m9n6oqq
r8s11t9y3x : 11ab3cdd10eg1
0ill4m7n6o3p3q6r5s11t8vx, 3a
c4egh5i4l4m5n8oq4r3s6t4v,
aaddceceiiijmmnnooprsss
sssttuu

Zavallı Leibniz! Anagramın anlamını bulmak için uğraşıp durmuş olmalı.

Zavallı okur! Ben ona çözümü versem de, Latince'den kendi diline çevirmek zorunda kalacak ve o zaman da içeriğin pek açık olmadığını anlayacak!

"Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis, as eruendos terminos assumptae seriei".

yazarak devam ettirip y' 'nin bir açılımını, x 'in tam kuvvetlerinden oluşan bir seri ile \sqrt{x} 'in çarpımı olarak buluruz.

Mathematica yardımıyla, bilgisayarım

$$y(x) = x^{1/2} - 5 \cdot 2^{-3}x + 79 \cdot 2^{-5}x^{3/2} - 14185 \cdot 2^{-10}x^2 \\ + 3118083 \cdot 2^{-15}x^{5/2} - 189696965 \cdot 2^{-18}x^3 \\ + 24625187405 \cdot 2^{-22}x^{7/2} - 1670815928565 \cdot 2^{-25}x^4 + \dots$$

buluyor. Diğer çözüm $u = \sqrt{2}$ için, bilgisayar

$$y(x) = \sqrt{2}x^{1/2} + 2x - 13\sqrt{2} \cdot 2^{-2}5^{-4}x^{3/2} + 3825^{-2}x^2 \\ - 267229\sqrt{2} \cdot 2^{-5}5^{-3}x^{5/2} + 903813 \cdot 2^{-1}5^{-4}x^3 \\ - 1661176381\sqrt{2} \cdot 2^{-7}5^{-5}x^{7/2} + 777992628 \cdot 5^{-6}x^4 + \dots$$

olduğunu iddia ediyor.

Newton'un gagesine ilişkin son bir söz. Üstü örtük bir $P(x, y) = 0$ bağıntısıyla tanımlanmış herhangi bir $y(x)$ "fonksiyonunun" (rasyonel üsler kullanmak pahasına da olsa) kuvvet serisi olarak açılabileceğini "ispat etmiş" olduğundan ve tabii ki herhangi bir x^α kuvvetinin türevini de, integralini de bildiğinden, kendi tekniğini kullanarak herhangi bir serinin türevini ve integralini hesap edebilecek durumdadır. Başka bir deyişle, "herhangi" bir fonksiyonun türevini ve integralini hesaplayabilir. *De methodis serierum et fluxionum* çalışmasının geri kalanı, bu yöntemin pek çok uygulamasına tahsis edilmiştir.

Newton'un bir hatası mı acaba?

Newton'un,

$$u^6 - 7u^2 + 6 = 0$$

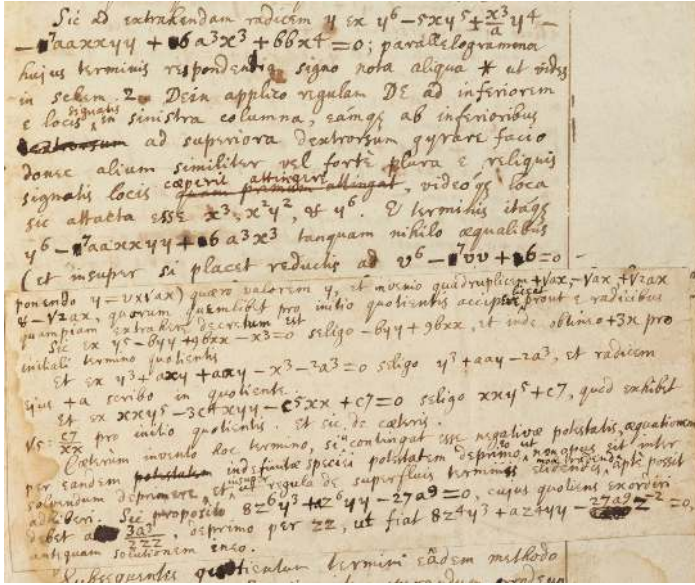
denkleminin bir kökünü atlamış olduğunu fark etmek hayret verici. Sanal $\pm\sqrt{-3}$ köklerinin $y(x)$ için sanal çözümlere yol açacağını düşünmüş olacağına inanılabilir. Ama öyle değil ve kanımca bu gerçekten bir hata.

2016 yılında, Newton'un 1669 civarında yazdığı önemli bir çalışmada hata keşfetmek ilginç bir tecrübe. Orijinal el yazmasına bakınca, Newton'un bir gafı düzeltmek ve orijinal sayfanın üzerine kağıt yapıştırmak zorunda kaldığını görüyoruz. Trinity College kütüphanesinin, kağıdın altında ne olduğunu görmek



Newton'ın tam hata anındaki hali böyle miydi? (Gotlib'e derin saygılar ve bağlılıklarla). ©

için bu kıymetli el yazmasını soymayı kabul edeceğinden kuşku duyarım. Bunun yerine X-ışınları kullanılmalı.



Bir hata mı var?

Aslında başka bir yorum da olabilir. *Epistola posterior* şerhinde Turnbull²⁷ (sayfa 159, not 68) başka bir “hatadan” söz eder: ona göre kare kök işaretinin “damı” yeteri kadar uzun değildir ve Newton $\sqrt{2x}$ yerine yanlışlıkla $\sqrt{2}x$ yazmıştır. Sonra “Newton, $v^2 + 3 = 0$ ’dan gelen sanal kökleri reddeder” der. Newton’un $\sqrt{2x}$ ile ilgili bir hata yapmış olması, bunun kendisini $\sqrt{-3x}$ ’in sanal olduğu düşüncesine sevk etmesi ve onu reddetmesi pekala mümkündür. Eğer $\sqrt{-3x}$ yazmış olsaydı, bu çözümün $x < 0$ iken hiç de sanal olmadığını görecekti. Hiçbir zaman bilemeyeceğiz.

²⁷ I. Newton. *The correspondence of Isaac Newton, Vol. II: 1676–1687*. Published for the Royal Society. Cambridge University Press, New York, 1960.

Gerçekten de $\pm\sqrt{-3}$ sanaldır ama eğer x bir *negatif gerçek sayıysa* $y \approx \pm\sqrt{-3}\sqrt{x}$ yaklaşık fonksiyonu gerçektir; göz ardı edilmemesi gerekirdi.

$u = 1$ gerçek kökü için

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = x_1(1 + y_1)$$

demiştik. Sanal kök $\sqrt{-3}$ için

$$x = -x_1^2 \quad ; \quad y = \sqrt{3}x_1(1 + y_1)$$

der ve daha önce yaptığımız gibi ilerleriz. Sonunda üçüncü bir gerçek çözüm buluruz:

$$y(x) = -3^{1/2}(-x)^{1/2} - 9 \cdot 2^{-3}(-x) - 721 \cdot 2^{-6}5^{-1}3^{-1/2}(-x)^{3/2} - 36543 \cdot 2^{-10}5^{-2}(-x)^2 \\ - 27986569 \cdot 2^{-15}3^{-3/2}5^{-3}(-x)^{5/2} - 96025589 \cdot 2^{-18}5^{-4}(-x)^3 \\ + 169264391911 \cdot 2^{-22}3^{-5/2}5^{-5}(-x)^{7/2} + 1398151100829 \cdot 2^{-25}5^{-6}(-x)^4 + \dots$$

Madem $u^6 - 7u^2 + 6 = 0$ denkleminin gerçekten altı çözümü var, o zaman neden altı değil de üç çözüm bulduk diye sorulabilir. Bunun sebebi zıt köklerin aynı çözümü üretmeleridir. Newton'un \sqrt{x} 'i, iki değerli bir fonksiyon saydığını unutmayınız; onun için \sqrt{x} ile $-\sqrt{x}$ "aynı"dır. $\sqrt{x} = -\sqrt{x}$ yazmanın çelişkilere yol açacağını kabul ederim ama Newton'un kalemıyla yazılırsa açmaz. Öğrencilerimize x gerçek ve pozitifken \sqrt{x} 'in pozitif kök olduğunu öğretmemiz ve $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ için esas bir belirlenmiş seçmemiz akıllıca. Modern terimlerle ifade edersek, parametrelenmiş (t^2, t) ve $(t^2, -t)$ eğrileri, aynı eğrinin farklı parametrelenmeleridir.

Newton'un ispat etmedikleri

"Yakınsaklık" tanımı Newton'un elinde yoktu. Gene de, sayılarla yaptığı hesaplamalar, onun serilerinin gerçekten yakınsak olduğunu ima ediyor; hatta Newton *yakınsak* terimini bile kullanıyor. Dürüst olmak gerekirse sadece serilerinin *asimptotik açılımlar* verdiğini göstermiş olduğunu söylemek lazım. Açık olarak, $(\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ rasyonel üsler olmak üzere), bir

$$a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \dots$$

serisi, f fonksiyonuna *asimptotiktir* demek, her $k \geq 1$ için

$$f(x) - \sum_{i=1}^k a_i x^{\alpha_i} = o(x^{\alpha_k})$$

demektir. Bu $f_k = \sum_{i=1}^k a_i x^{\alpha_i}$ fonksiyonlarının f' 'ye yakınsamasını gerektirmez ama sık sık alıştığımız yakınsaklık kadar hatta bazen ondan daha da faydalıdır.



Westminster Abbey'de Newton anıtı.



Sağ eli, esas dört kitabının üzerinde.



Sol eli iki meleğe doğrultulmuş, iki melek... ikiterimli serisini gösteriyor.

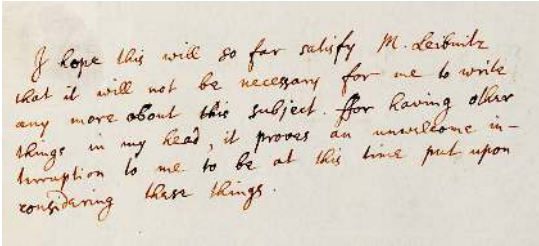
Bahsetmediği bir başka husus da serilerinde gözüken rasyonel üslerin doğasıyla ilgilidir. Her adımda yeni bir rasyonel sayı ortaya çıkmaktadır; bu üsler dizisinin sonsuza yakınsadığı açık değildir. Bütün paydaların *sımsırlı* olduğuyse daha az açıktır. Gene de Newton, yönteminin $P(x, y) = 0$ denklemlerine kısıtlı olmadığını, ($a_{00} = 0$ olmak üzere) $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}x^i y^j = 0$ şeklindeki “sonsuz terimli denklemler” için de mükemmel olarak yürüdüğünü kaydeder ki bunlara bugün *analitik fonksiyonlar* diyoruz.

Newton’un orijinal eğrisine bakarak bu bölümü bitirelim:

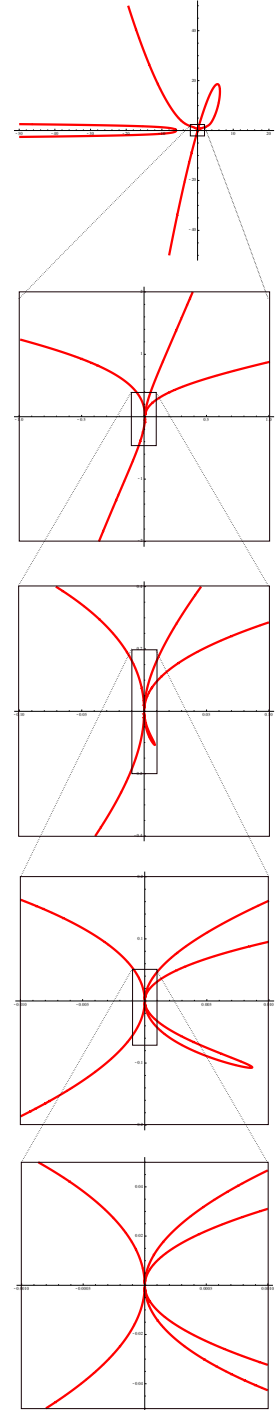
$$P(x, y) = y^6 - 5xy^5 + x^3y^4 - 7x^2y^2 + 6x^3 + x^4 = 0.$$

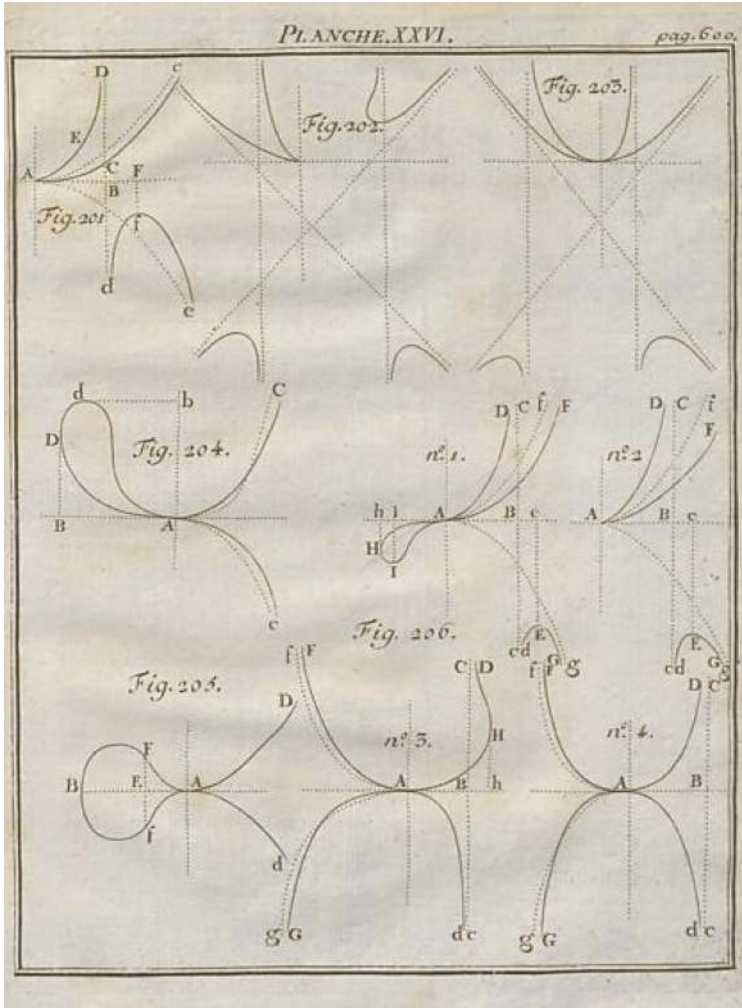
Bilgisayarımdan bu eğriyi $[-50, +20] \times [-50, +50]$ kutusunda çizmesini istersem, kenardaki birinci çizimi elde ediyorum. Bu şaşırtıcı gözükebilir, çünkü başnokta civarında yalnızca iki dal görmekteyiz. Resmi büyütüp, daha küçük olan $[-1, 1] \times [-2, 2]$ kutusuna (ikinci çizime) bakarsak, başka bir dal daha bulunduğunu tahmin edebiliriz. Daha da yaklaştırır ve $[-1, .1] \times [-4, .4]$ ’e (üçüncü çizime) bakarsak, bunu görmek daha kolay olur. Yerel resim, $[-.01, .01] \times [-.2, .2]$ ’de (dördüncü çizimde) tamamen bellidir. Nihayet, $[-.001, .001] \times [-.05, .05]$ ’te, Newton’un (üçüncüsünü, $x < 0$ olanını unutmaması hariç) önceden dediği gibi $\pm\sqrt{x}, \pm\sqrt{2x}, \pm\sqrt{-3x}$ ’e asimptotik olan üç dal da görüyoruz.

Bu $P(x, y)$ polinomu asaldir: 1 olmayan iki polinomun çarpımı olarak yazılamaz. Ama x ve y ’nin yakınsak bir kuvvet serisi olarak başnoktanın civarında pekala üç çarpana ayrılır; bu çarpanlar üç dala tekabül ederler.



Newton, Oldenbourg’dan ikinci mektubunu (*Epistola Posterior*) Leibniz’e iletmesini rica ettiği zaman bu hamışı ekledi. Evet, gerçekten de aklında başka şeyler vardı.





Cramer'in eğriler hakkındaki kitabından bir yaprak.



Biraz formel cebir

BU BÖLÜMDEKİ CEBİR “FORMEL” OLACAK çünkü formel serileri göz önüne alacağız.

Bir çözüm bulma

Newton’un akıl yürütüşlerini daha modern bir cebirsel terminolojiyle ifade ederek tekrarlayacağım. Bütün bunları Newton’a atfetmek, sonsuz hayal gücü ve zorlama ister. Özellikle Cramer’in önemli bir katkısını vurgulayacağım. Aşağıdakilerin epeyce bir kısmı geleneksel olarak Puiseux’ye atfedilir ama bu da en az o kadar zorlama gerektirir. Puiseux’nün katkılarını yeri gelince anlatacağım.

Bu konuda şahane kitaplar var. Özellikle Walker²⁸, Brieskorn ve Knörrer²⁹, Wall³⁰, ve Casas-Alvero’yu³¹ tavsiye ederim.

K , karakteristiği 0 olan cebirsel kapalı bir cisim olsun. Elbette aklımızdaki ilk örnek \mathbb{C} karmaşık sayılar cismi.

Biraz gösterim geliştirelim:

– $K[x]$, katsayıları K ’den olan x ’in *polinomları* halkası.

– $K(x)$, katsayıları K ’den olan x ’in *rasyonel fonksiyonları* cismi, $K[x]$ ’in kesirler cismi.

– $K[[x]]$, x ’in formel serileri halkası, yani a_i ’ler K ’den alınmak üzere yakınsaklık konularına bakmaksızın $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ şeklindeki ifadelerin halkası.

– Benzer biçimde iki değişkenle de $K[x, y]$ (polinomlar), $K(x, y)$ (rasyonel fonksiyonlar) ve $K[[x, y]]$ (formel seriler) tanımlanır.

²⁸ R. J. Walker. *Algebraic curves*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. 1950 edisyonunun tekrar basımı.

²⁹ E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.

³⁰ C. T. C. Wall. *Singular points of plane curves*, volume 63 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

³¹ E. Casas-Alvero. *Singularities of plane curves*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1 edition, 2000.

Şimdi Newton teoremini kesin bir şekilde ifade edebiliriz.

Teorem (Newton-Cramer). $F(x, y)$, $K[[x, y]]$ halkasında, başnoktada sıfır değerini alan, x' e bölünemeyen bir formel seri olsun. O zaman öyle bir $m \geq 1$ tamsayısı ve 0 'da sıfır değerini alan öyle bir $f(t) \in K[[t]]$ formel kuvvet serisi vardır ki $F(t^m, f(t))$ tümünden 0 olur. Başka bir ifadeyle, $F(x, y) = 0$ denkleminin $y = f(x^{1/m})$ şeklinde en az bir "çözümü" vardır.

İspatın genel yapısını görmüştük.

İşin içinde x_k, y_k 'lerin olduğu yinelemeli inşalar anlatacağım için, $F(x, y)$ yerine $F_0(x_0, y_0)$ yazayım. Böylece ($a_{00} = 0$ olarak) $F_0(x_0, y_0) = \sum_{i,j} a_{ij} x_0^i y_0^j$ bir formel seri olsun. Şimdi $a_{ij} \neq 0$ şartını sağlayan her (i, j) için, $x \geq i; y \geq j$ çeyrek düzlemini göz önüne alalım. *Newton çokgeni*, bu çeyrek düzlemlerin birleşiminin dışbükey haznesidir. Kenardaki resim,

$$F = y_0^7 - x_0^2 y_0^3 + x_0^2 y_0^6 + x_0^3 y_0^2 + x_0^4 y_0 + x_0^4 y_0^6 + x_0^5 y_0^4 + x_0^7 + x_0^7 y_0$$

için bu çokgeni göstermektedir. F_0 'ın y_0 'a veya x_0 'a bölünmediğini her zaman kabul edebiliriz zira problemi değiştirmeksizin F_0 'ı y_0^j veya x_0^i gibi bir monoma bölebiliriz. Başka bir deyişle, eksenlerin her biri Newton çokgeniyle kesişir. Bu çokgenin eksenler dışındaki kenarı, α ve β aralarında asal kabul edilebilecek pozitif tamsayılar olmak üzere, denklemleri $\alpha i + \beta j = \gamma$ şeklinde olan *destek çizgilerinin* üzerinde sonlu sayıda doğru parçasından oluşur. Bu çizgilerden birini, $\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0$ 'ı seçin ve (i, j) bu çizgide olmak üzere sonlu sayıda a_{ij} katsayısını ele alın. Böylece

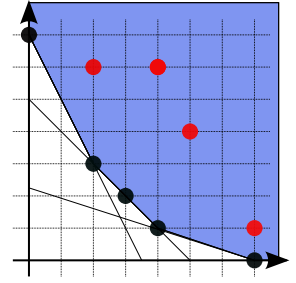
$$F_{bas}(x_0, y_0) = \sum_{\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0} a_{ij} x_0^i y_0^j$$

şeklinde bir *baskın polinom* tanımlanır. Şimdi t 'yle parametrelenmiş,

$$x_0 = t^{\alpha_0} \quad ; \quad y_0 = ut^{\beta_0}$$

şeklinde yaklaşık bir çözüm arayalım. "Yaklaşık" diyerek bunun, denkleminin baskın kısmına

$$F_{bas}(t^{\alpha_0}, ut^{\beta_0}) = 0$$



Bir Newton çokgeni. Seride, a_{ij} 'leri sıfır olmayan terimler noktalarla temsil edilmişlerdir. Üç tane destek çizgisi vardır. Dikkat ediniz, Newton'un garip fikrine uymuyor, i 'leri düşey eksen üzerinde yazmıyorum. Okurun yararına, geleneğe uyarak yatay ve düşey eksenler için x ve y 'yi kullanıyorum.

Örnek:

$$2i + j = 7,$$

destek çizgisini, yani $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 7)$ diye seçiniz. Böylece $F_{bas}(x_0, y_0) = y_0^7 - x_0^2 y_0^3$ ve p polinomu

$$p(u) = u^7 - u^3$$

olur.

$u_0 = 1$ seçiniz; böylece yaklaşık çözüm

$$x_0 = t^2; y_0 = t$$

olur.

biçiminde bir çözüm olduğunu kastediyorum. Böylece

$$p(u) = \sum_{\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0} a_{ij} u^j = 0$$

olarak u 'nun bir polinom denklemini elde ederiz.

K cebirsel kapalı olduğundan bu denklemin sıfır olmayan en az bir çözümü vardır; buna u_0 diyelim. Sonra asıl denkleminiz $F_0(x_0, y_0) = 0$ 'a geri döner, x_0 yerine $x_1^{\alpha_0}$ ve y_0 yerine $u_0 x_1^{\beta_0} (1 + y_1)$ yerleştiririz. Bu (x_1, y_1) 'li yeni bir formel seri üretir. Bu seri, inşası gereği $x_1^{\gamma_0}$ ile bölünebilir. Biz de $x_1^{\gamma_0}$ ile bölerek ona denk olan bir $F_1(x_1, y_1) = 0$ denklemini elde ederiz.

... böylelikle "keyfince" devam edilir (Newton'un sözcükleriyle) ve $F_k(x_k, y_k) = 0$ ($k \geq 1$) denklemler dizisi ve $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ tamsayılar dizileri üretilir.

Newton'un bahsetmediği önemli bir özellik eksik. Sonlu sayıda adımdan sonra α_k katsayılarının hep 1'e eşit olduğunu, yani destek çizgilerinin eğimlerinin sadece rasyonel sayılar olmakla kalmadıklarını, üstelik bir bölü tamsayı olduklarını göstermek zorundayız. Bu önemli çünkü her yeni adım bizi bir $x_{k+1} = x_k^{1/\alpha_k}$ kökünü dahil etmeye sürükler ki bunu sonsuz kez yapmak zorunda olsaydık başımız belaya girerdi.

Bu, Cramer'in 1750 yılında yayımlanmış olan şahane kitabı *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*'in³² VII. bölümünde bütün ayrıntılarıyla tahlil edilir. Yazar Newton'un hakkını tam olarak verir ama der ki:

Serilerin gerçek yöntemi, Bay Newton'un paralelkenarı üzerine temellendirilmiştir. Bu şahane bir icattır ama yazar ispatını vermemiştir, hatta kıymetinin tamamını idrak etmemiş gibidir.

Tanım. $K[[x, y]]$ 'de olan ve x 'e bölünmeyen bir F formel kuvvet serisinin *katlılığı*, y 'nin bir polinomu olarak $F(0, y)$ 'nin değeri olmasıdır ve *kat*(F) olarak gösterilir. Bu aynı zamanda F 'nin Newton çokgeninin düşey eksenindeki noktalarının en küçük yüksekliğidir.

Dışbükeylikten dolayı, herhangi bir destek çizgisinin j eksenini *kat*(F)'nin altında keseceğine dikkat ediniz. Özel bir durum olarak, $p(u)$ polinomunun derecesi en fazla *kat*(F) olur.

Birinci adım. F_0 'da

$$x_0 \rightarrow x_1^2; y_0 \rightarrow x_1(1 + y_1)$$

yerleştirmesini yapın ve x_1^7 'ye bölün. Böylece

$$\begin{aligned} F_1(x_1, y_1) = & x_1 + 4y_1 + \\ & 2x_1^2 + 2x_1y_1 + 18y_1^2 + 6x_1^2y_1 + \\ & x_1y_1^2 + 34y_1^3 + 10x_1^2y_1^2 + 35y_1^4 + \\ & + 10x_1^2y_1^3 + 21y_1^5 + 5x_1^2y_1^4 + \\ & 7y_1^6 + 3x_1^7 + x_1^2y_1^5 + y_1^7 + x_1^8 + \\ & 10x_1^7y_1 + x_1^8y_1 + 21x_1^7y_1^2 + \\ & 24x_1^7y_1^3 + 16x_1^7y_1^4 + 6x_1^7y_1^5 + \\ & + x_1^7y_1^6 \end{aligned}$$

elde ederiz; bu polinomun y_1 'de birinci derece terimi sıfır değildir ve dolayısıyla x_1 'in kuvvetlerinden oluşan bir kuvvet serisiyle y_1 'in açılımı yapılabilir.

³² G. Cramer. *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*. Frères Cramer et Cl. Philibert, 1750.



Gabriel Cramer (1704-1752). Eğriler hakkındaki kitabı, Newton serilerinin tahlilinin yanısıra, n bilinmeyenli doğrusal denklemler kuramını (ünlü Cramer kuralını) ve polinomlarda eleme kuramının ilk adımlarını içerir. Ek.1'in başlığı hoşuma gidiyor: "Bilinmeyenlerin görünmez oluşu hakkında (De l'évanouissement des inconnues)"; böyle söylemek "eleme"den daha cazip görünüyor. ©

Lemma. $mult(F_1) \leq mult(F)$.

Tanıma göre

$$F_1(x_1, y_1) = x_1^{-\gamma} \sum_{i,j} a_{ij} x_1^{\alpha_0 i + \beta_0 j} u_0^j (1 + y_1)^j$$

olur. $kat(F_1)$ 'i hesaplamak için, $x_1 = 0$ koyar ve y_1 'in bir polinomu olarak $p(u_0(1 + y_1))$ 'in değerlendirilmesine bakarız:

$$kat(F_1) \leq degree(p) \leq mult(F).$$

□

Demek ki Newton algoritmasında $kat(F_k)$ katlılıklar dizisi artmamaktadır. Eğer F_0 çok özel bir şekilde değilse, bu eşitsizliğin kesin küçük olduğunu göstereceğiz.

Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart, $p(u_0(1 + y_1))$ 'de $kat(F)$ dereceli yalnızca tek bir monom bulunmasıdır. Bundan da özel olarak p 'nin derecesinin $kat(F)$ 'ye eşit olduğu çıkar.

Başka şekilde söyleyecek olursak $y_1 = 0$, $p(u_0(1 + y_1)) = 0$ ifadesinin katlılığı $kat(F)$ olan katlı bir kökü olmalıdır. Bu da p 'nin

$$p(u) = C(u - u_0)^{kat(F)}$$

şeklinde olması demektir. Bu polinomun 0 'dan $kat(F)$ 'ye kadar her bir derecedeki katsayısı 0 'dan farklıdır. Bu sebepten, Newton çokgeninin sınırında seçmiş olduğumuz doğru parçası üzerinde j 'nin $j = 0$ 'dan $j = kat(F)$ 'ye kadar her bir değeri için noktalar vardır. Bundan Newton çokgeninin (eksenler hariç) yalnızca bir kenarının olduğu ve $\alpha_0 = 1$ olduğu sonucu çıkar.

Özetleyelim.

Et dès-lors la Série devient régulière, parceque toutes les déterminatrices suivantes partant du point T, on ne tombe plus dans des équations qui aient plusieurs racines. Tous les termes suivants de la Série peuvent même se calculer avec plus de facilité par la Méthode qu'on va expliquer.

Cramer'in ispatından alıntı (200. sayfa): *Ve böylece seri düzgün hale gelir çünkü T noktasından başlayan tüm determinatrisler*

Algoritma boyunca $kat(F_k)$ katlılığı azalmaktadır, dolayısıyla bir zaman sonra sabit olmak zorundadır. Bu aşamada Newton



©

çokgenleri için $\alpha_k = 1$ olur (ve üstelik hepsi biraz önce betimlediğimiz çok özel yapıda olurlar). Ayrıca

$$x_0 = x_1^{\alpha_0} = x_2^{\alpha_0\alpha_1} = \dots = x_k^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}} = \dots$$

ve

$$y_0 = u_0 x_1^{\beta_1} (1 + y_1) = u_0 x_1^{\beta_1} (1 + u_1 x_2^{\beta_2} (1 + y_2)) = \dots$$

olur. k' 'nin büyük değerleri için α_k 'lerin 1'e eşit olduğunu bildiğimiz için, m 'yi tüm α_k 'lerin çarpımı olarak tanımlar ve büyük k için x_k 'nin değerine t diyebiliriz. Şimdi $x_0 = t^m$ olur, daha genel olarak x_k 'lerin her biri t 'nin pozitif bir tamsayı kuvveti olur.

Yinelemeli

$$y_k = u_k x_{k+1}^{\beta_{k+1}} (1 + y_{k+1})$$

formülü, t değişkenli $y_k(t)$ bir polinomlar dizisi tanımlar. Bu dizi bir $f(t) \in K[[t]]$ limit serisine "yakınsar". Demek ki, k sonsuza giderken $f(t) - y_k(t)$ 'nin değerlenmesi sonsuza gider.

İşi tamamlamak için, bunun gerçekten problemimizin bir çözümü olduğunu, yani $F(t^n, f(t))$ 'nin özdeş olarak 0 olduğunu kontrol etmemiz gerekir. Okuru, bunu kontrol etmeye davet ediyorum. Ne de olsa algoritmanın tek bir amacı vardı: bir çözüm bulmak.

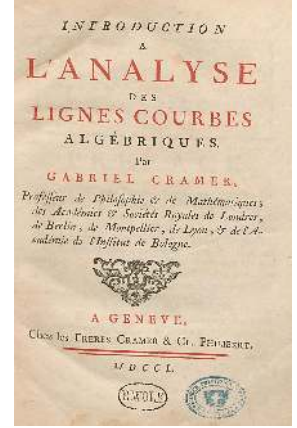
Böylece Newton'un teoremini ispatlamış olduk: $F(x, y) = 0$ şeklindeki her denklemin, uygun tanımlanmış bir anlamda en az bir çözümü vardır. □

Cebirsel kapalılık

Artık rasyonel üslü serilerin kesin bir tanımını vermenin vakti geldi.

Formel Laurent serileri dediğimiz (i_0 negatif tamsayı olabilmek üzere) $\sum_{i \geq i_0} a_i x^i$ şeklindeki ifadelerin cismini $K[[x]][[x^{-1}]]$ diye gösterelim. Bu, $K[[x]]$ halkasının kesirler cismidir.

Daha genel olarak, eğer m sıfırdan farklı bir tamsayıysa, $x^{1/m}$ değişkenli formel Laurent serilerini $K[[x^{1/m}]][[x^{-1/m}]]$ diye gösteririz; bunlar (i_0 negatif tamsayı olabilmek üzere) $\sum_{i \geq i_0} a_i x^{i/m}$ şeklindeki formel ifadelerdir. Burada m 'ye bölünemeyen her i için $a_i = 0$ şartını sağlayan serilerden oluşan altcisim, doğal



Eleman sayısı 2 olan \mathbb{F}_2 cisminin \mathbb{F}_2 cebirsel kapanışını göz önüne alalım. Algoritmayı, katsayıları \mathbb{F}_2 'de olan $F = y^2 + x^2y + x^2$ polinomuna uygulayınız ve

$$y = x \left(1 + x^{\frac{1}{2}} + \dots + x^{1-2^{-k}} + \dots \right)$$

çözümünün elde edildiğini gösteriniz. Bu bir Puiseux serisi *değildir* çünkü $1 - 2^{-k}$ üslerinin ortak bir paydası yoktur ve hatta sonsuza da gitmemektedirler. Burada ne oluyor?



"Un spectacle dont on ne se lasse jamais" (Bakmaya doyulmayan bir sahne).

olarak $K[[x]][x^{-1}]$ ile eşyapılıdır. Böylece $K[[x^{1/m}][x^{-1/m}]$ cismini, $K[[x]][x^{-1}]$ 'in bir cisim genişlemesi olarak görebiliriz. Bu genişlemenin Galois grubunu betimlemek kolaydır: birimin n -inci kökleri grubudur. Böyle bir ω kökünün

$$\sum_{i \geq i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$$

üzerindeki etkisi

$$\sum_{i \geq i_0}^{\infty} \omega^i a_i x^{i/m}$$

olur. Bu bir Galois genişlemesidir: $K[[x^{1/m}][x^{-1/m}]$ cisminin, Galois grubu etkisi altında değişmez elemanları $K[[x]][x^{-1}]$ cismini oluşturur.

Aynı şekilde, eğer m_1 sayısı m_2 'yi bölüyorsa, $K[[x^{1/m_1}][x^{-1/m_1}]$ cismi $K[[x^{1/m_2}][x^{-1/m_2}]$ 'nin bir altcisimidir. $K[[x]][x^{-1}]$ 'in tüm bu genişlemelerinin doğrudan limiti $K[[x^*][x^{*-1}]$ diye gösterilir.

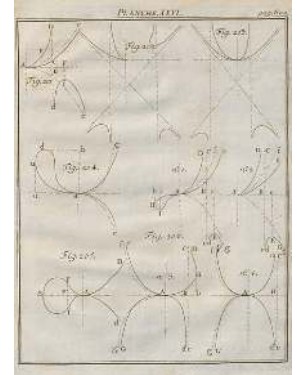
Bu, *Puiseux serileri cismidir*: elemanları, ortak paydaya sahip rasyonel üslü serilerdir. Elle tutulur bir ifadeyle, bir Puiseux serisi, m sıfırdan farklı pozitif bir tamsayı olmak üzere $\sum_{i \geq i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$ şeklinde bir formel ifadedir. Puiseux serilerinden $i_0 \geq 0$ şartını sağlayanlar bir halka oluştururlar; bunu da $K[[x^*]]$ diye göstereceğiz.

Teorem (Newton-Cramer). $K[[x^*][x^{*-1}]$ Puiseux serileri cismi cebirsel kapalıdır. Bu cisim, $K[[x]][x^{-1}]$ Laurent serileri cisminin cebirsel kapanışıdır.

Bu teorem, bölümün ana teoreminin yeniden ifadesinden başka bir şey değil.

$K[[x^*][x^{*-1}]$ 'in, $K[[x]][x^{-1}]$ 'in bir cebirsel genişlemesi olduğu açıktır. Nitekim her Puiseux serisi uygun bir $K[[x^{1/m}][x^{-1/m}]$ 'de bulunur ve dolayısıyla $K[[x]][x^{-1}]$ üzerinde cebirseldir.

Değişkeni y , katsayıları $K[[x^*][x^{*-1}]$ 'den olan (sabitten farklı) bir polinom denklemini göz önüne alalım. Epeyce bölünen bir m için $\bar{x} = x^{1/m}$ tanımını yaparak ve bütün katsayıları \bar{x} 'in yüksek bir kuvvetiyle çarparak polinomumuzun katsayılarının $K[[\bar{x}]]$ 'te olduklarını farzedebiliriz. Dolayısıyla denkleminiz, F bir kuvvet serisi olmak üzere $F(\bar{x}, y) = 0$ şeklindedir. Biliyoruz ki



böyle bir denklemin, uygun bir \bar{m} için $\bar{x}^{1/\bar{m}}$ 'nin kuvvetlerinden oluşan ve dolayısıyla $K[[x^*]][x^{*-1}]$ 'de bulunan bir seri çözümü vardır. Böylece, katsayıları $K[[x^*]][x^{*-1}]$ 'de olan sabitten farklı her polinomun $K[[x^*]][x^{*-1}]$ 'de bir kökünü bulmuş olduk. \square

Bütün çözümleri bulma

Eğer $F(x, y) = 0$ 'ı, bilinmeyeni $y(x) \in K[[x^*]][x^{*-1}]$ serisi olan bir denklem diye düşünersek, alışagelmış polinom denklemleriyle yapıldığı gibi, F 'yi cebirsel kapanışta birinci dereceden polinomlar cinsinden

$$F = A(x, y)(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$$

diye çarpanlara ayırmaya çalışabiliriz; burada $A(0, 0) \neq 0$ ve n adet $f_i(x)$ çözümü $K[[x^*]][x^{*-1}]$ 'nin elemanı. Eğer F , değişkeni y olan bir polinom olsaydı bu bariz olurdu ama F sadece bir formel seri. Denkleminin sonlu sayıda çözümünün var olduğu bile açık değil.

Aslına bakarsanız Newton haklıydı. Şimdi açıklayacağım gibi, denklemlerimiz "klasik" polinom denklemleri olmaya çok yakın.

Birkaç temel gözlemlerle başlıyorum.

Lemma. $F \in K[[x, y]]$ olsun. Bir $y = f(x) \in K[[x]]$ formel serisinin, $F(x, y) = 0$ denkleminin çözümü olduğunu kabul edelim. O zaman $K[[x, y]]$ içinde $y - f(x)$, F 'yi böler.

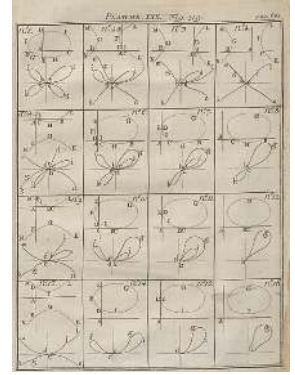
Eğer $f(x) = 0$ ise bu aşıkardır. Böylece $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ formel dönüşümü, $K[[x, y]]$ 'nin, y 'yi $y - f(x)$ 'e gönderen bir otomorfisini verir. \square

Lemma. $f \in K[[x^*]]$ ve f_1, \dots, f_m 'ler f 'nin Galois eşlenikleri olmak üzere

$$\bar{f}(x, y) = (y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_m(x))$$

tanımını yapalım. O zaman $\bar{f}(x, y)$, $K[[x, y]]$ 'dedir.

Bu açıktır çünkü $\bar{f}(x, y)$, değişkeni y olan ve katsayıları Galois grubu altında değişmeyen bir polinomdur. Dikkat, bu polinom, $K[[x]][x^{-1}]$ 'in bir cebirsel genişlemesi olan $K[[x^*]][x^{*-1}]$ 'e ait f elemanının minimal polinomudur. \square



Lemma. $F \in K[[x, y]]$ olsun ve bir $y = f(x) \in K[[x^*]]$ formel Puiseux serisinin, $F(x, y) = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu farzedelim. O zaman $\bar{f}(x, y) \in K[[x, y]]$ serisi, $K[[x, y]]$ halkasında $F(x, y)$ 'yi böler.

f bir çözüm olduğundan ve denklem Galois grubu altında değişmediğinden f 'nin bütün eşlenikleri de çözümdür. Öyleyse birinci lemmayı m kez kullanarak $K[[x^{1/m}, y]]$ 'de F 'nin $\bar{f}(x, y)$ 'ye bölünebildiğini gösteririz. Böylece F/\bar{f} bölümü Galois değişmezdir ve aslında $K[[x, y]]$ 'dedir. \square

Artık formel seriler için Weierstrass hazırlık teoremini ispat edebiliriz.

Teorem. $F(x, y) \in K[[x, y]]$ olsun. F 'nin x 'e bölünemediğini kabul edelim ve katlılığını $kat(F)$ ile gösterelim. O zaman

- $A, P \in K[[x, y]]$,
- $A(0, 0) \neq 0$, yani A tersi olan bir eleman,
- y 'nin bir polinomu olarak $P(x, y)$ 'nin derecesi $kat(F)$

olmak üzere, F serisi $F = A(x, y)P(x, y)$ çarpımı şeklinde yazılabilir.

İspat, $kat(F)$ üzerinde tümevarımla olacaktır. Dikkat ediniz, bir çarpımın değerlendirilmesi, değerlendirilmelerin toplamıdır ve $kat(F) = 0$ tam tamına $F(0, 0) \neq 0$ demektir. Eğer $kat(F) \geq 1$ ise, F 'nin en az bir $y = f(x) \in K[[x^*]]$ çözümü olduğunu ve $\bar{f}(x, y) \in K[[x, y]]$ ile bölünebildiğini biliyoruz. Bölümün katlılığıysa $kat(F)$ 'ten daha küçüktür. \square

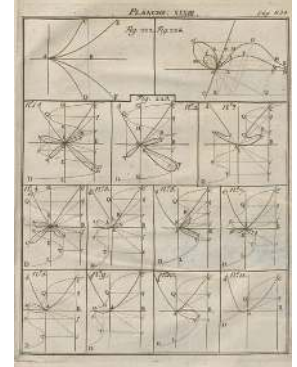
Şimdi çalışmalarımızın hasadını toplayabilir, önceki teoremden kolaylıkla çıkan iki sonucu ifade edebiliriz. İspatlar, cisimler üzerinde polinomlar halkaları için olan klasik ispatların aynıdır.

Teorem. $K[[x, y]]$ 'nin sıfırdan farklı her F elemanı

$$F = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$$

diye parçalanabilir; burada $r \geq 0$ 'dır; $A \in K[[x, y]]$ ve $A(0, 0) \neq 0$ 'dır; n tane $f_i(x)$ çözümü $K[[x^*]]$ 'dadır.

Teorem. $K[[x, y]]$ halkası, tek çarpanlama bölgesidir.



Burada indirgenemez çarpanlar $\overline{f}_i \in K[[x, y]]$ 'lerdir.

Bu bölümü iki alıştırmayla bitiriyoruz.

Alıştırma. Newton'un algoritması birtakım $y(x)$ çözümlerini üretir. Her adımda, çokgenin kenarı üzerinde destek çizgilerinden birini ve buna karşılık gelen polinom denkleminin bir kökünü seçmemiz gerekiyor. Bu algoritmanın $F(x, y) = 0$ 'ın *bütün* $f_i(x)$ çözümlerini ürettiğini gösteriniz.

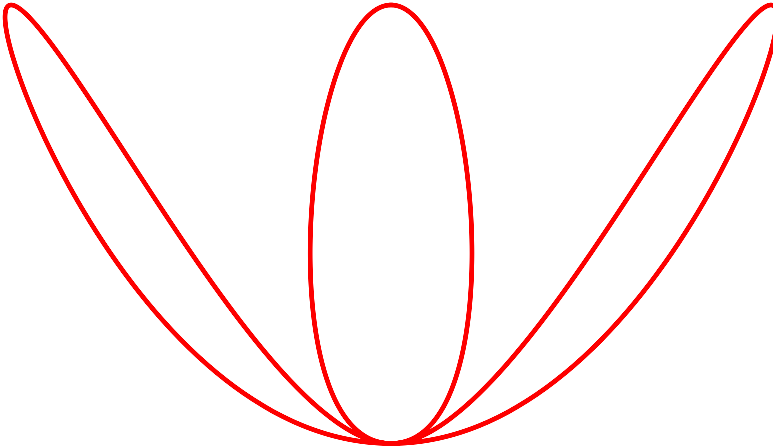
Alıştırma. Newton'un algoritmasını bir takım destek çizgilerini seçerek takip ettiğimizi ve sonunda bir $y = f(x)$ çözümüne ulaştığımızı kabul edelim. Bu süreç, $F_k(x_k, y_k)$ formel seriler dizisi üretir. F_k 'lerin $kat(F_k)$ katlılıklarının bir andan sonra sabit olacağını ispat etmiştik. Bu "nihai katlılığın" kökün katlılığı olduğunu, yani yukarıdaki $F = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$ ayrışmasında $(y - f(x))$ 'e eşit olan çarpanların sayısı olduğunu ispat ediniz.

Şimdilik bu kadar cebir yeter!

Bay Newton'un ispatlarını eklemeksizin keşiflerini sergilemekle yetinmiş olması ve kendine hayran bırakma hazzını öğretme hazzına tercih etmiş olması tatsızdır.

Cramer'in önsözünden:

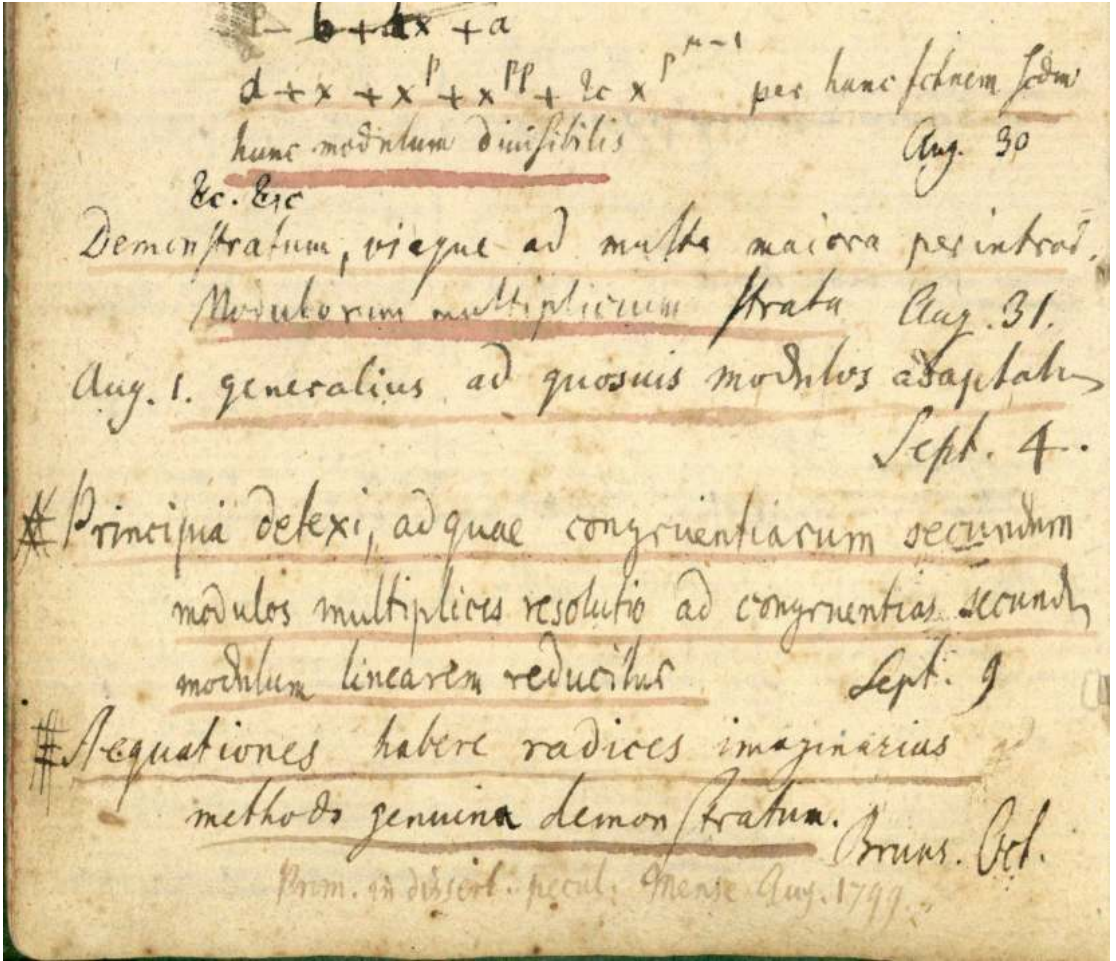
Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre de démonstrations et qu'il ait préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire.



Cramer'in incelediği altıncı dereceden eğrilerden birisi olan bu eğrinin denklemi şöyle:

$$y^6 - (y - x^2)(y - 4x^2)^2 = 0.$$

Tekil noktanın üç dalı vardır. Bu dalları çizebilir misiniz?



Gauss, (19 yaşında olduğu) 1796'dan başlayarak matematiksel keşiflerini ünlü *Günlük*'üne kaydetmiştir. Etkileyici bir liste... Klein'in [şerhlerine](#)³³ ve İngilizce çeviri için şuraya³⁴ bakınız. Bu sayfa, 1797 Ağustos'undan Ekim'ine zaman dilimini konu alır. Son "Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum" maddesi, Gauss'un cebirin temel teoreminin ispatını ilan eder. Bu satırın altında, başka mürekkeple sonradan eklenmiş yazı, bunun, Gauss'un tezinin konusu olduğundan söz eder: "Prom[ulgatum] in dissert[at]ione peculiari] mense Aug. 1799" ©

³³ F. Klein. *Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796–1814*. *Math. Ann.*, 57(1):1–34, 1903.

³⁴ J. J. Gray. A commentary on Gauss's mathematical diary, 1796–1814, with an English translation. *Exposition. Math.*, 2(2):97–130, 1984.

Curuam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse: Cebirsel eğriler üzerine Gauss

Cebirin temel teoremi

CARL FRIEDRICH GAUSS, 1799'DA TEZİNİ SAVUNDUĞUNDA 22 YAŞINDAYDI. Bu [olağanüstü bir eserdir](#)³⁵ (Türkçe çevirisi³⁶) ve cebirin temel teoreminin muhtemelen ilk "ispatı" sayılabilecek satırları içerir.

Sabit olmayan karmaşık katsayılı herhangi bir polinomun en az bir kökü vardır.

Azıcık farklı terimlerle ve o zamanlar kuşku duyulan "karmaşık" veya "sanal" kelimelerini kullanmaksızın, her gerçek polinomun 1. veya 2. dereceden çarpanların çarpımı olduğunu ispat etti. Başka bir dille, doktora tezinin başlığı şudur:

DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM VNIVS VARIABILIS IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADVS RESOLVI POSSE

Bu, günümüzün standartlarına göre ispat sayılamaz. Ben aynı tema üzerine, 21. yüzyıl matematikçilerince pekala kabul edilebilecek olan hafifçe farklı bir çeşitleme sunacağım. İspata ilk girişen Gauss değildi. Ondan önce bu işe yeltenenler arasında d'Alembert, Euler ve Lagrange anılabilir. O zamanlarda bile bu



Gauss'un karmaşık düzlemi anısına bir posta pulu. ©

³⁵ C. F. Gauß. *Werke. Band III.* Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973. 1866 orijinalinin tekrar basımı.

Gauss, derecesini Helmstedt Üniversitesi'nden almıştır. Resmi danışmanı, tezi dikkatlice okumuş olan Johann Friedrich Pfaff'tı. Fakat bu doktora, Gauss'un *gıyabında* verildi: sözlü sunum yapılmadı. Metne göre ana sonuç, 1797 Ekim'inde elde edilmiştir. Tezin, Ernest Fandreyer tarafından yapılan İngilizce çevirisi internette bulunabilir. Türkçe tercümesi Gülnihal Yücel tarafından yapılmıştır.

³⁶ C. F. Gauß. *Cebirin Temel Teoremi için Dört İspat.* Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 2005. Çeviren: Gülnihal Yücel.

“ispatların” hiçbiri sağlam değildi; yine de Newton çokgenini kullandığı için d’Alembert’in ispatını yeniden inşa edeceğim.

Gauss’un tezinin ilk yarısı, kendisinden önce gelenlerin eleştirisiyle meşguldür. D’Alembert, Euler ve Lagrange’in ispatlarının neden kusurlu olduğunu dikkatli bir şekilde açıklar. Bugün böyle bir şeyi hayal etmek zordur. Çok genç bir kişi tezini savunmaktadır; henüz on beş yıl önce ölmüş ya da hatta (Lagrange gibi) hala hayatta olan, saygı duyulan büyük Ustaları sistematik bir biçimde mahvetmekle başlar. Ardından ikinci kısımda, Gauss kendi ispatını verir. Gerçekten güzel ispat, ama “ispatlanmamış olgulardan” tamamen arınmış değil. İleride anlatacağımız can alıcı bir yerde, gerçek cebirsel bir eğrinin yerel yapısının epeyce kesin bir betimlemesine gereksinim duyar. Hiç ispat vermeksizin şunu ileri sürer:

Yüksek geometride bilindiği gibi, her cebirsel eğri (ya da birden fazla parçadan oluşuyorsa, cebirsel eğrinin her bir parçası) ya kendini keser ya da her iki yönde sonsuza gider. Dolayısıyla cebirsel bir eğrinin bir dalı, sınırlı bir bölgeye girdiğinde, bir yerde bölgeden dışarı çıkması gerekir.

Bir başka deyişle, Gauss bir cebirsel eğrinin birdenbire bir noktada duramayacağını iddia ediyor. Bir dipnotta verilen “ispat”, tehditle ispatın tipik bir örneğidir:

Sanırım, cebirsel bir eğrinin bir noktada (örneğin $y = 1/\log x$ denklemiyle verilen aşkın eğride olduğu gibi) aniden kopamayacağı veya (logaritmik spiral gibi) sonsuz sarılışlardan sonra bir noktada kaybolamayacağı yeterince iyi bir şekilde ispatlanmıştır ve kimsenin bu konuda bir kuşkusu yoktur. Yine de istendiği takdirde, başka bir fırsatta hiçbir şüphe bırakmayacak bir ispat vereceğim.

“Kimsenin bu konuda kuşkusu yokmuş ve başka bir fırsatta ispat edecekmiş” ☺! Aslında (belki kendi de ikna olmadığından daha sonra üç ayrı ispat daha yayımlamasına rağmen) bu olguyu hiçbir zaman ispatlamadı. Amma küstah (ve parlak) bir genç!

Gauss eğrilere iki örnek verir. Birincisi $1/\log(x)$ ’in grafiğidir, ikincisi logaritmik spiraldir (kutupsal koordinatlarında $r = \exp(\theta)$). Her ikisi de birer $F(x, y) = 0$ denklemiyle tanımlanır ve her ikisinin de bir çeşit *bitiş noktası* vardır. Bu nokta

Gauss’un “ispatlanmamış olgularının” Trump’ın “alternatif olgularıyla” hiç mi hiç ilişkisi yoktur: her şeyden önce, Gauss’unkilerin hepsi doğrudur.

“Iam ex geometria sublimiori constat, quamvis curvam algebraicam, (siue singulas cuiusvis curvae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redientem aut vtrunque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curvae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere.”

“Satis bene certe demonstratum esse videtur, curvam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (vti e. g. euenit in curua transscendente, cuius aequatio $y = 1/\log x$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (vt spiralis logarithmica), quantum scio nemo dubium contra rem mouit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam.”

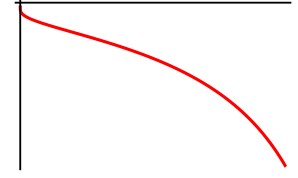
etrafında küçük bir daire çizersek, eğri daireye girer ama çıkmaz. Gauss'un (doğru) iddiası, bunun sebebinin, bu eğrilerin aşkın doğularında yattığı ve $P(x,y)$ 'nin polinom olduğu cebirsel eğrilerde böyle bir şeyin meydana gelmeyeceğidir.

Gauss'un ispatının yeniden inşası

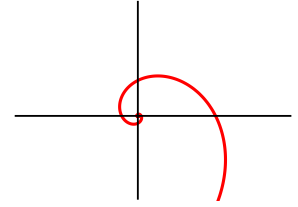
Niyetim, elbette ki bu ispatı tarihi bir bakış açısından tahlil etmek değildir. Yoksa ele alınacak pek çok şey olurdu: süreklilik kavramı, eğri kavramı, topolojik akıl yürütmeler ve özellikle karmaşık sayıların düzlemde nokta olarak kullanılması. Dhombres ile Alvarez'in³⁷ ve Van der Waerden'in³⁸ kitaplarını tavsive ederim. Yalnız, Gauss'un, Abel ve Galois'dan yirmiden fazla yıl önce ifade etmiş olduğu berrak bir bakış açısını dile getireyim. Aşağıda *saf denklem* dediği, $x^n = a$ şeklinde olan denklemdir.

[...] böyle büyük matematikçilerin çabalarından sonra, cebirsel denklemlerin genel çözümlerine ulaşmaya dair çok az ümit kalmıştır. Böyle bir çözümün tamamen imkansız ve çelişkili olması, gittikçe daha muhtemel görünüyor. Bu hiç de bile bir paradoks olarak düşünülmemelidir çünkü yaygın olarak bir denklemin çözümü denilen şey, aslında onun saf denklemlere indirgenmesinden başka bir şey değildir. Zira burada saf denklemlerin çözümü öğretilmez, önceden kabul edilir; eğer bir $x^m = H$ denkleminin köklerini $\sqrt[m]{H}$ olarak ifade ederseniz, onu hiçbir suretle çözmüş olmazsınız, yaptığınız şey $x^h + Ax^{h-1} + \dots = 0$ denkleminin kökünü göstermek için herhangi bir sembol icat etmek ve kökü ona eşit yazmaktan daha fazla bir şey değildir.

Benim mütevazı amacım, ispatın modern anlamda bir yeniden inşasını önermek ve Gauss'un niçin cebirsel eğrilerin yerel doğasını anlamaya ihtiyaç duyduğunu göstermektir. Şimdi $P(z)$, derecesi $n \geq 1$ olan karmaşık katsayılı monik bir polinom olsun. Ana fikir, $z = x + iy$ 'yi düzlemde bir nokta, $P(x + iy)$ 'yiye $p(x,y) + iq(x,y)$ olarak görmek ve böylece (x,y) değişkenli iki gerçek polinom tanımlandığını düşünmektir. P 'nin karmaşık bir kökünün varlığını ispatlamak, $p(x,y) = 0$ ve $q(x,y) = 0$ cebirsel eğrilerinin arakesitlerinin boş olmadığını göstermeye denktir. Bu iki eğrinin, sonsuz civarında niceliksel davranışlarını tahlil edeceğiz.



$x \exp(-1/y) = 1$ (yani $y = 1/\log x$) eğrisinin $(0,0)$ 'da bir "çıkma" vardır.



$y - x \log \tan(x^2 + y^2) = 0$ (kutupsal koordinatlarda $\rho = \exp(-\theta)$) denkleminin verilen logaritmik spiral, başnoktaya yakınsarken sonsuz kez döner.

³⁷ J. Dhombres and C. Alvarez. *Une histoire de l'invention mathématique : les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*. Hermann, 2013.

³⁸ P. D. B. L. van der Waerden. *A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1985.

Polinomu bir düzlemde başka bir düzleme bir tasvir olarak görme fikri bugün bize "basit" gelse de 1797'de yepyeni bir fikirdi.

Şimdi, z 'nin uzunluğu büyük olduğu zaman, $P(z)$ ile z^n denktir, biz de ilk yaklaşım olarak

$$\Re(x + iy)^n = 0 \quad ; \quad \Im(x + iy)^n = 0$$

eğrilerini göz önüne alırız. Bu denklemleri çözmek kolaydır: eşitlikler, başnoktada kesişen

$$\text{açı}(z) = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (0 \leq k \leq 2n-1); \quad \text{açı}(z) = \frac{2k\pi}{2n} \quad (0 \leq k \leq 2n-1)$$

doğrularını tanımlarlar. Bu $2n$ doğru, her $|z| = R$ çemberini $4n$ noktada keser. Gauss'un ilk iddiası şudur:

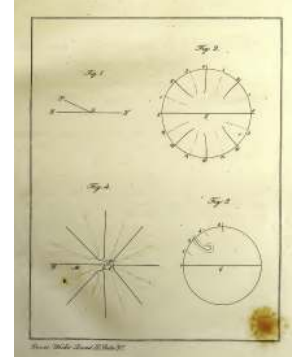
Lemma. Eğer R yeterince büyükse, $p(x, y) = 0$ ve $q(x, y) = 0$ cebirsel eğrilerinin her biri, $|z| = R$ çemberini yukarıdakilere yakın $2n$ noktada keser.

$\frac{1}{R^n} P(R \exp(i\theta))$ ifadesinin gerçekte ve sanal kısımları, θ değişkenli, $\cos(n\theta)$ ve $\sin(n\theta)$ 'ya yakın trigonometrik polinomlardır. Dolayısıyla her biri en fazla $2n$ defa sifıra eşit olur ve ara değer teoremine göre gerçekten $2n$ defa sifıra eşit olur. Temel ayrıntılar okura bırakılmıştır. Gauss'un bu husus için verdiği ispat kusursuzdur. \square

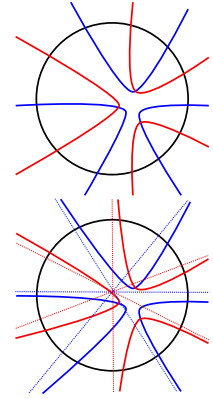
Şimdi ispatın topolojik kısmı geliyor.

Önce, mavi ve kırmızı eğriler diye adlandırılacak olan $p(x, y) = 0$ ve $q(x, y) = 0$ eğrilerinin pürüzsüz olduklarını farzedelim. Bu eğriler, $|z| \leq R$ dairesi içinde, her biri $[0, 1]$ 'e difeomorf sonlu sayıda yaydan ve çembere difeomorf belli sayıda kapalı eğriden oluşurlar. Bu iddia, bir boyutlu tıkkız manifoldların sınıflandırılmasından çıkar (mesela³⁹ veya ⁴⁰ kaynaklarına bakınız). Bir çember üzerinde mavi ve kırmızı renkli olan, çember boyunca bir mavi bir kırmızı gelecek şekilde sıralanmış $4n$ nokta vardır. Aynı renkli iki noktaya, eğer *dairenin içindeki* bu mavi veya kırmızı yaylardan birinin iki kenar noktasıysalar bir çift diyeceğiz. Böylece $4n$ noktalı kümemiz, $2n$ çiftten oluşur.

Çember üzerinde ikisi mavi ikisi kırmızı dört farklı nokta göz önüne alın. Topolojik açıdan iki hal mümkün: ya *bağlıdır*lar ya da *değildir*ler. Çemberde giderken bir dizi renk okuruz; bağlı olma halinde renkler "mavi, kırmızı, mavi, kırmızı" gibi hep değişir, olmama durumunda "mavi, mavi, kırmızı, kırmızı" gibi olur. Sezgisel ve can alıcı topolojik lemma şudur.

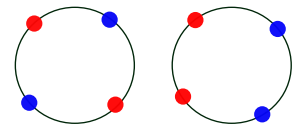


Bu, Gauss'un tezindeki tek resimdir. \copyright



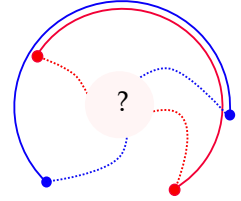
³⁹ J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

⁴⁰ V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. 1974 orijinalinin tekrar basımı.



Bağlı ve bağlı değil.

Lemma. Çember üzerinde b_0, b_1, r_0, r_1 gibi dört nokta göz önüne alalım, $\{b_0, b_1\}$ ve $\{r_0, r_1\}$ bağlı olsun. Ayrıca b , daire içinde b_0 ile b_1 'i birleştiren, r de r_0 ile r_1 'i birleştiren pürüzsüz yaylar olsunlar. O zaman b ve r 'nin arakesiti boş değildir.



Bu, cebirsel topolojinin ilk (dolayısıyla Gauss'un elinin altında olmayan) teoremlerinden birinden çıkar. *Düzlemde çaprazlama kesişen iki kapalı eğrinin çift sayıda kesişme noktası vardır* (örneğin Milnor'ın kitabına bakın). Eğer *dairenin içinde* mavi noktaları ve kırmızı noktaları bağlayan *ayrık* yaylar var olabilseydi, düzlemde tam bir noktada kesişen iki kapalı eğri inşa edebilirdik (kenardaki şekle bakın). □

Lemma. Bir masa etrafında $2k$ kişinin oturduğunu ve kollarını çaprazlamaksızın ikişer ikişer el sıkıştıklarını farzedelim. O zaman en az iki komşu el sıkışmaktadır.

Eğer $k = 2$ 'yse bu bir önceki lemmadır. El sıkışan iki kişiyi ele alalım. Bu kişiler masanın kenarını iki aralığa bölerler. Bu aralıklardan biri boşsa işimiz tamamdır. Değilse, matematiksel tümevarımla devam edin. □

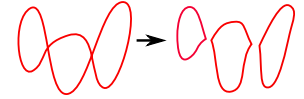
Mavi ve kırmızı eğrilerimiz $p(x, y) = 0$ ve $q(x, y) = 0$ 'ın pürüzsüz olduğunu farzetmeye devam ederek, Gauss'un izinde cebirin temel teoremini ispat edeceğiz. Çelişki yoluyla, mavi ve kırmızı yayların birbirini kesmediğini farzedelim. Bir önceki lemmaya göre, çember üzerinde iki komşu çift olmuştur. Ardışık noktalar aynı renkte olamadıkları için bu mümkün değildir. □

İşte şimdi "hakkında kimsenin kuşku duymadığı" zorluğu anlıyoruz. Çıkamaz olan bir cebirsel eğri var olsaydı, bir yay *dairenin içine* girebilir ve çıkmadan orada durabilirdi ki bu da ispat için ölümcül olurdu.

Gauss'un iddiasını daha dikkatlice ifade edelim.

Teorem. F polinomu $\mathbb{R}[x, y]$ 'de bir gerçek polinom olmak üzere, $F(x, y) = 0$ 'la tanımlanan C gerçek cebirsel eğrisi üzerinde yalıtılmış olmayan bir (x_0, y_0) noktası alalım. O zaman, merkezi (x_0, y_0) olan küçük bir dairenin, C 'yi çift sayıda farklı yarıçapın birleşimine gönderen bir homeomorfisi vardır.

Düzlemde çaprazlama kesişen iki eğrinin, çift sayıda noktada kesiştikleri, aşağı yukarı Jordan teoremine denktir: "düzleme gömülmüş kapalı bir eğrinin tümleyeninin tam iki bağlantılı parçası bulunur". Gerçekten de eğer c_1, c_2 kapalı ve çaprazsalar, öncelikle c_1 'i, c_2 'yle kesişimini bozmaksızın hafifçe değiştirir ve kendisiyle çaprazlama kesişen bir daldırma haline getiririz. Ardından c_1 'i aşağıdaki şekildedeki gibi hafifçe değiştirir ve c_2 'yle kesişimini yine bozmaksızın c_1 'in yerine birkaç kapalı gömülmüş eğrinin ayrık birleşimini alabiliriz. Şimdi, Jordan teoremine göre, (değiştirilmiş) c_1 'in bir bağlantılı parçasının içine c_2 'nin her girişinde, c_2 oradan çıkmak zorundadır; dolayısıyla kesişim noktaları gerçekten çift sayıdadır. Şimdi de Jordan teoremini, kesişim sayısının çift oluşunu kullanarak ispatlamaya çalışın.



Bir masa etrafındaki çift sayıda insanın, kollarını çaprazlamaksızın el sıkışma biçimleri sayısının, bir Catalan sayısı olduğunu ispat edin.

Bu iddia artık gerçekten de doğru; “başka bir fırsatta hiçbir şüphe bırakmayacak bir ispat vereceğim.”

Bunun doğruluğu kabul edilirse, ispatı sonlandırmak kolay. Eğer mavi ve kırmızı $p(x, y) = 0$ ve $q(x, y) = 0$ eğrileri ayrık ve üstelik tekillese, bunları tekil noktaların ayrık küçük komşuluklarında kenardaki gibi yerel olarak hafifçe bozarak yarıçapları çiftler çiftler bağlamak yeter. Böylece mavi ve kırmızı eğriler, *tekil olmayan ayrık yaylara* dönüşürler. Bununla olası olmadığını görmüştük. □

Bu ispat üzerine yorumlar

Steve Smale bu ispatı, cebirin temel teoreminin hesaplama algoritmalarına uygun halleriyle ilgili bir makalesinde sunmuştur⁴¹. Gauss’un ispatlanmamış iddiasını vurgular:

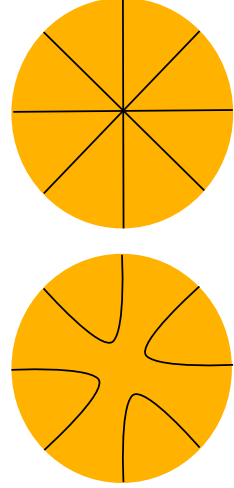
Fakat şimdilik, Gauss’un ispatının ne kadar uçsuz bucaksız bir boşluk içerdiğine işaret etmek istiyorum. Gerçek bir cebirsel eğrinin bir daireye girdiyse orada kalamayacağı, bugün bile çok incelikli bir husustur.

Kabul görmüş “ilk” ispatı kimin verdiği hakkındaki bitmez tükenmez tartışmalar üzerine de bir yorum yapar.

Tarihi durum belki Imre Lakatos’un⁴² bakış açısıyla daha iyi anlaşılabilir. Bir taraftan Hegel, diğer taraftan Popper geleneğindeki Lakatos, matematiği ‘ispatlar ve çürütmeler’ silsilesi olarak ilerleyen bir gelişme olarak görmektedir.

İspatı “düzeltmenin” ve “uçsuz bucaksız boşluğu” doldurmanın pek çok yolu var. İlk önce, Ostrowski’nin 1920 tarihini taşıyan, Gauss’un iddiasının ispatına hasredilmiş uzun ayrıntılı çalışmasından söz etmem gerekir⁴³. Gauss’un kullandığı $p(x, y) = 0$ ve $q(x, y) = 0$ eğrileri gerçekten cebirsel eğrilerdir ama çok özel cebirsel eğrilerdir. Modern terimlerle, bu polinomlar, holomorf bir $P(z)$ fonksiyonunun gerçek ve sanal kısımlarıdır ve dolayısıyla *harmonik* polinomlardır. Ostrowski’nin ayrıntılı ispatı aslında harmonik polinomları ele alır ki bu da elimizdeki problem için yeterli. Karmaşık analizin temel kavramlarıyla ayrıntıları doldurmak gerçekten kolay. Şimdi bunu göstereceğim.

Gelecek bölüme kadar beklemek zorundasınız!



⁴¹ S. Smale. [The fundamental theorem of algebra and complexity theory](#). *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4(1):1–36, 1981.

⁴² I. Lakatos. *Proofs and refutations*. Cambridge Philosophy Classics. Cambridge University Press, Cambridge, paperback edition, 2015. İlk olarak 1976’da basılmış.

⁴³ A. Ostrowski. [Über den ersten und vierten Gauss’schen Beweis des Fundamental satzes der Algebra](#). *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen*, 1920.

$P(z) = P(x + iy) = p(x, y) + iq(x, y)$ ifadesini $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ 'den kendisinin bir kopyasına tasvir olarak düşünün. Bu tasvirin bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasındaki türevi 2×2 gerçek matris ya da $P'(z_0)$ karmaşık sayısı olarak görülebilir. Dolayısıyla kritik noktalar, P' türevinin sonlu sayıdaki sıfırlarıdır. Mavi ve kırmızı eğriler, iki eksenin ters görüntüleridir. Herhangi bir doğrunun P altındaki ters görüntüsünü tahlil edelim.

Acil durumlarda, Needham'ın kitabı⁴⁴ bu resimleri anlamaya yardımcı olabilir.

Bir z_0 noktasının civarında

$$P(z) - P(z_0) = c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots + c_n(z - z_0)^n$$

yapacak $k \geq 1$ vardır ($P(z) - P(z_0)$ 'ın z_0 'da değeri). Böylece

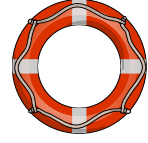
$$P(z) - P(z_0) = \left((z - z_0)^k \sqrt[k]{c_k} \sqrt{1 + \frac{c_{k+1}}{c_k}(z - z_0) + \dots} \right)^k = \phi(z)^k$$

olur. Burada $\sqrt[k]{c_k}$, herhangi bir k -inci kök seçimidir; diğer k -inci kökse Newton'un ikiterimli teoremine göre yakınsak bir kuvvet serisidir. ϕ 'nin z_0 'daki türevi sıfır değildir, yani ϕ bir yerel difeomorfidir. Kısacası $P(z)$, $z \mapsto P(z_0) + (z - z_0)^k$ tasviri ile bir difeomorfinin yerel bileşkesidir. Dolayısıyla $P(z_0)$ 'dan geçen pürüzsüz bir eğrinin P altındaki ters görüntüsünün, z_0 'dan geçen k adet pürüzsüz eğrinin birleşimi olduğu aşikar. Böylece yerel olarak $2k$ yarıdoğru vardır. Bu da Gauss'un iddiasını ihtiyaç duyduğu özel halde ispatlar. Bu özel hal gerçekten çok özeldir çünkü elimizdeki pürüzsüz eğriler eşit açılarda buluşuyorlar. \square

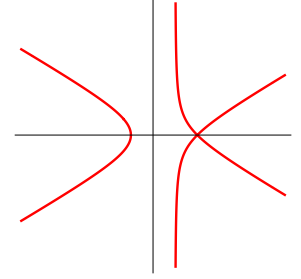
Fakat Gauss'un iddiasını hala en genel halinde ispatlamamış olduğumuzu unutmayın.

Gauss'un "uçsuz bucaksız boşluğunu" doldurmanın bir başka yolu var. Ekseni bir θ açısı kadar döndürerek, $P(z)$ yerine $\exp(i\theta)P(z)$ 'yi ele alabiliriz. Şimdi $p(x, y) = 0$ (ve $q(x, y) = 0$) eğrisi ancak ve ancak P 'nin kritik değerlerinden biri gerçek (sırasıyla sanal) eksendeysse tekildir. Dolayısıyla bu durumdan kaçınmak için uygun bir θ kadar döndürmek yeter; yani Gauss pekala mavi ve kırmızı eğrilerin pürüzsüz olduğu varsayımıyla başlayabilirdi. Bu kolay tartışma, 1797'de kolay değildi.

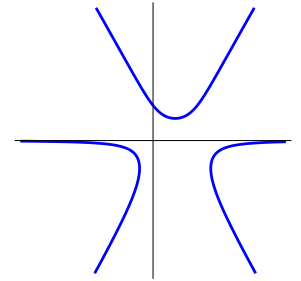
Cebirin temel teoreminin bugün pek çok ispatı vardır. Duruma açık ve özetleyici bir bakış için Eisermann'ın makalesini⁴⁵



⁴⁴ T. Needham. *Visual complex analysis*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.



Düşey eksenin $2z^3 - 3z^2 + 1 + i$ altındaki ters görüntüsü. Kritik noktalar $z = 0, 1$ ve kritik değerler $1 + i$ ve i dir; bunlardan biri düşey eksendedir.



Yatay eksenin $2z^3 - 3z^2 + 1 + i$ altındaki görüntüsü. Bu eksende hiçbir kritik değer yoktur.

⁴⁵ M. Eisermann. [The fundamental theorem of algebra made effective: an elementary real-algebraic proof via Sturm chains](#). *Amer. Math. Monthly*, 119(9):715–752, 2012.

tavsiye ederim. Gauss'un incelediğimiz ispatı ne en dolaysız ne de en kısadır elbette. Bu ispatı temizlemek için incelikli topolojik akıl yürütmeler gerekiyor. Bunun karşılığı olarak yolda bol bol ödül kazanıyoruz zira bir tasvir olarak karmaşık polinomları çok daha iyi anlıyoruz.

En beğendiğim ispatı sunayım. Bu ispat, Gauss'un topolojik ispatı havasındadır; Smale'in yukarıda adı geçen makalesinde bulunabilir. Bana göre en basit⁴⁶ ispat bu. Öyle bir z_0 noktası seçelim ki P 'nin sonlu tane olan kritik değerlerinden hiçbiri 0 'ı $P(z_0)$ 'a bağlayan γ doğru parçası üzerinde bulunmasın. Bu ancak 0 kritik bir değer değilse mümkün. Ama eğer 0 kritik bir değerse o zaman 0 bir değer olduğundan P 'nin bir kökü vardır. 0 'ın kritik bir değer olmadığı durumda γ 'nın P altında ters görüntüsü 1 boyutlu, pürüzsüz, tıknaz, kenarlı bir manifolddur. z_0 noktası, bu manifoldun bağlantılı bir parçasının kenar noktalarından biridir. Bu parçanın diğer kenar noktasıysa P 'nin bir kökü olur. İşte budur! \square

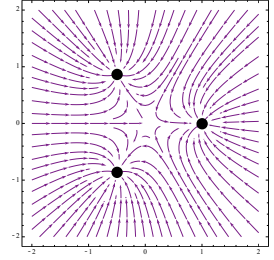
Bu basit ispat, aslında çok daha fazlasını veriyor. Kritik değerlerin dışında $-x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$ radyal vektör alanını P 'nin türevi altında geri çekerek düzlemde kritik noktaların dışında bir vektör alanı elde ederiz. Bu vektör alanının izleri tam tamına ışınların ters görüntüleridir. Öyleyse bir noktadan başlayıp bu diferansiyel denklemi çözerek P 'nin köklerine varabiliriz. Bir adi diferansiyel denklemin çözümlerine yaklaşımlar bulmanın bir yolu, klasik Euler yöntemini kullanmaktır. Buradan da Euler'in yinelemeli düzeninin, Newton yöntemiyle tıpatıp aynı olduğu ortaya çıkar. Newton, Gauss ve Euler bir arada!

D'Alembert'in bir ispatı

İki nedenden ötürü d'Alembert'in⁴⁷ bir ispatını da anlatacağım. Birincisi, Fransa'da cebirin temel teoemine sıklıkla d'Alembert teoremi denmesidir ☺. İkincisi bunun önceden tahlil etmiş olduğumuz Newton çokgeniyle yakından ilişkili olmasıdır. Bu ispat hakkında çok daha fazlası için: ⁴⁸ ve ⁴⁹. D'Alembert, Newton'dan söz etmez. Bir Fransız nasıl olur da İngilizin birinin emeklerini teslim edebilir?

"En basit" demekle ne demek istiyorum? Herhalde en kısa olanı değil çünkü bu ispat, ispatlanması gereken üstü örtük epey çok olgu içeriyor. Basitlik, matematikte incelikli ve çok kişisel bir kavramdır. Bu özel durumda, bu ispatı unutamadığım için ona basit diyorum.

⁴⁶ É. Ghys. Inner simplicity vs. outer simplicity. In R. Kossak and P. Ording, editors, *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts Conferences (CUNY New York, 2013)*. Springer Verlag, 2017.



$P(z) = z^3 - 1$ polinomu için $-P(z)/P'(z)$ vektör alanının faz portresi. İzler, P altında ışınlara gider.

⁴⁷ J. D'Alembert. *Recherches sur le calcul intégral*. *Histoire de l'Acad. Royale Berlin*, pages 182–224, 1748.

⁴⁸ C. Baltus. *D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra*. *Historia Math.*, 31(4):414–428, 2004.

⁴⁹ C. Gilain. Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 42(2):91–136, 1991.

“İspatının” basitleştirilmiş bir halini anlatayım. Diyelim ki

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

denklemini çözmek istiyoruz. $z = y/\varepsilon$ yazarak ilkinde tamamen denk

$$y^n + a_{n-1}\varepsilon y^{n-1} + \dots + \varepsilon^n a_0 = 0$$

denklemini elde ederiz. $\varepsilon = 0$ için $y = 0$ bir çözümdür elbette. $\varepsilon \neq 0$ için bir çözüm istiyoruz. Yukarıdaki denklemi, $F(\varepsilon, y) = 0$ şeklinde bir denklem olarak düşünün. ε değişkenli Puiseux serisi olarak ifade edilebilen, sıfır olmayan $y(\varepsilon)$ çözümlerinin var olduğunu Newton ve Cramer sayesinde biliyoruz. “Dolayısıyla” denkleminin bir kökünü bulmuş olduk. \square

Yukarıdaki “dolayısıyla” çok tartışma götürür. Ana zorluklardan biri, ne Newton’un, ne Cramer’in ne de d’Alembert’in serinin yakınsadığını ispat etmemiş olmasıdır. Daha da kötüsü, Puiseux serisini kuran Newton algoritması, cebirin temel teoremini kullanmaktadır. Kısır döngü.

D’Alembert’in bu ispatın bir başka biçimini *rüzgarların nedenlerini* ele aldığı bir çalışmada⁵⁰ da yayınlamış olması inanılmaz.

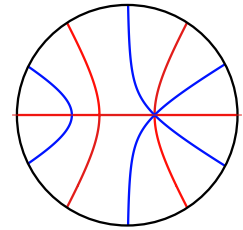
Bu bölümü eski öğrencim Victor Kleptsyn’in önerdiği bir alıştırmayla bitireyim. Karmaşık bir $P(z)$ polinomunun altında gerçek eksenin (kırmızı) ve sanal eksenin (mavi) ters görüntüsüne bakınız. Bu, büyük bir dairede şöyle bir grafik üretir. Her kenar ya mavi ya da kırmızı renklidir. Mavi (ve sırasıyla kırmızı) grafiğin tekil noktaları, P ’nin gerçek (sırasıyla sanal) eksene giden kritik noktalarıdır; bunlar bir köşeden çıkan çift sayıda mavi (sırasıyla kırmızı) kenar tanımlarlar. Genel hallerde bir tekil nokta böyle değildir. Nitekim iki grafiğin kesişimi etrafındaki yerel durum yukarıda anlatılmıştı: bir köşeden çıkan ve renkleri dögüsel olarak birbiri ardınca değişen $4k$ adet kenar. Cebirin temel teoremine göre bu kesişimler vardır. Büyük çemberlerde, kırmızı ile mavi birbiri ardısıra gelir.

Soru, bunun tersiyle ilgili. Bir dairede, yukarıdaki bu niceliksel özelliklerin hepsini sağlayan renkli bir grafik verilmiş olsun. Öyle bir $P(z)$ polinomu bulmak istiyoruz ki bunun belirlediği renkli grafik, dairenin uygun bir homeomorfisiyle verilen grafiğe homeomorf olsun. Böyle bir $P(z)$ hangi koşullar altında vardır?

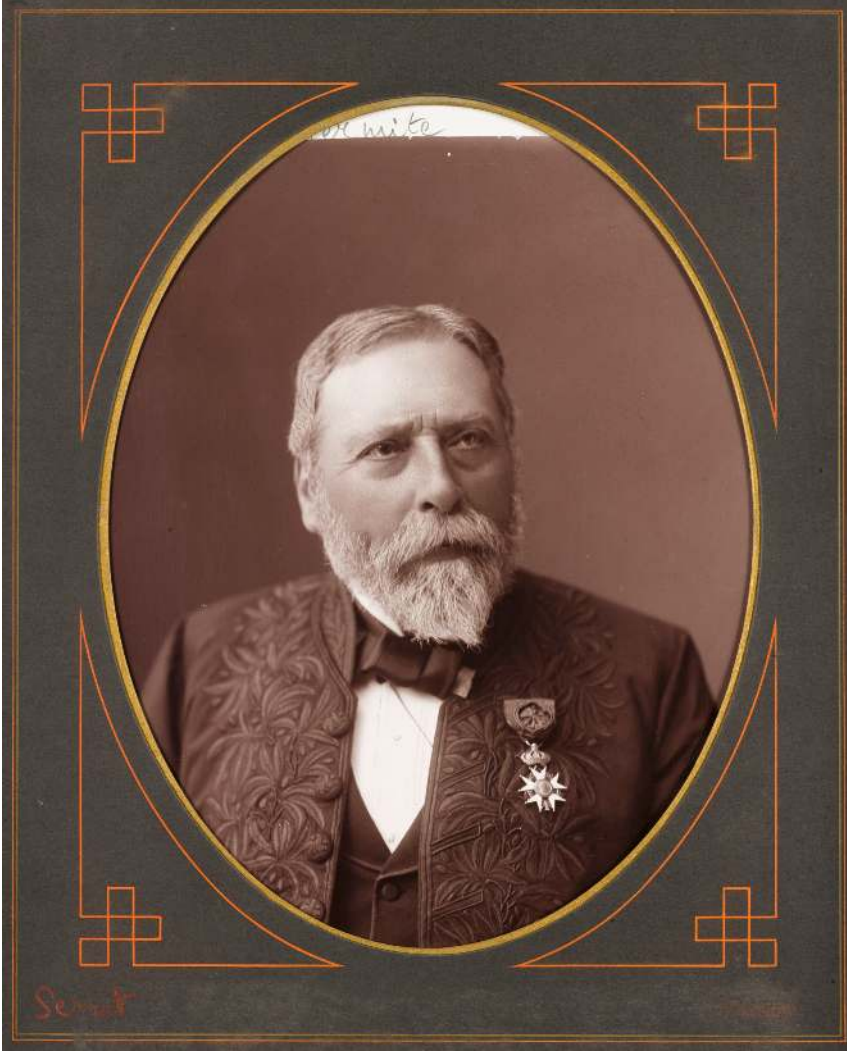


Jean Le Rond d’Alembert
(1717–1783).

⁵⁰ J. D’Alembert. *Réflexions sur la cause générale des vents*. David l’ainé, Paris, 1747.



Gerçek ve sanal eksenin $z^3 - 3z + 2$ altındaki ters görüntüleri. İki kritik değer var: 0 ve 4.



Joseph Alfred Serret
(1819–1885).

Gauss'un cebirsel eğrilerin tekilliklerine dair iddiasının kanıtı: iki Serret'nin iki makalesi

GAUSS'UN ÖNERMESİNİ İSPATLAMA VAKTİ GELDİ. İddia şuydu: "düzlemsel bir gerçek cebirsel eğrinin bir noktasının komşuluğu, bir dairedeki çift sayıda yarıçapa homeomorftur".

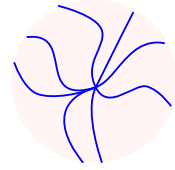
Yetersiz kanıtlar

Joseph Alfred Serret (1819–1885), Paul Joseph Serret'yle (1827–1898) karıştırılmasın.

Joseph Alfred'in parlak bir kariyeri vardı. Kitaplarını şöyle imzalardı: "Enstitü'nün ve Boylam Bürosu'nun üyesi, Paris Bilimler Fakültesinde ve Collège de France'da profesör". Epey etkili olmuş *Yüksek Cebir Dersleri* adlı kitabını 1849'da iki cilt halinde yayınladı. Bu kitap Galois kuramının düzenli ilk anlatımını da içeriyordu. Joseph Alfred, 3 boyutlu uzayda eğriler için tanımlı Frenet-Serret çerçevesinin de kalbinde yer alır. Daha genç olan Paul Joseph'in kariyeri çok daha gösterişsizdi. Kitaplarını "Bilim doktoru, bilimseverler cemiyeti üyesi" diye imzalardı. Paris'te Collège Sainte-Barbe'da hocalık yaptı. Herhangi bir resmini bulamadım.

1847 yılında Joseph Alfred bir makale yazdı⁵¹. Bu makalede Newton'un şu önermesini "kanıtladı":

Eğer düz bir doğru bir cebirsel eğrinin bir dalına asimptotikse başka bir dalına da asimptotiktir.



Cebirsel bir eğrinin yerel resmi.

⁵¹ J. A. Serret. [Théorème sur les courbes algébriques asymptotiques](#). *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 6:217–218, 1847.

Joseph Alfred'e bakılırsa, "Ce théorème est dû à Newton, et est énoncé, si je ne me trompe, dans son *Enumeratio Linearum tertio ordains*". "Bu teorem Newton'a aittir ve yanılmıyorsam *Enumeratio Linearum tertio ordains* eserinde verilmiştir."

Newton'un, bizim dal dediğimiz yarısına *dal* dediğine dikkat edin. Basit bir örnek olarak Descartes'in $x^3 + y^3 = 3xy$ denklemiyle verilen yaprağına bakalım. $x, +\infty$ ve $-\infty$ 'a giderken eğri asimptota yaklaşıyor. Newton'un terminolojisinde bu *iki dala* karşılık geliyor, bizimkisindeyse sonsuzda tek bir dala.

Joseph Alfred Serret'nin kanıtı özünde şöyle. Bir koordinat sisteminde $y = 0$ doğrusu asimptot ve $F(x, y) = 0$ da eğrinin denklemi olsun. x 'in yerine $1/x$ koyarak $F_1(x, y) = 0$ diye ikinci bir cebirsel eğri elde ederiz. Şimdi, ilk eğri $y = 0$ 'a asimptotik bir tek dala sahip olsaydı, $F_1(x, y) = 0$ eğrisinin "point d'arrêt", yani bir *çıkılmaz sokağı* olacaktı, ki bu olanaksızdır. İşin inanılmaz yanı, Joseph Alfred'in böyle bir durma noktasının olanaksız olduğunu kafadan kabul etmesidir. Elbette kelimenin hiçbir anlamında bu bir kanıt falan değildir.

İşin komik tarafı Joseph Alfred, Euler'i kesinlik zaafı yüzünden eleştirmektedir. Nitekim kısa makalesinin sonunda Euler'in *Introductio in analysin infinitorum* (cilt 2, bölüm 7, kısım 174) eserine atıfta bulunur:

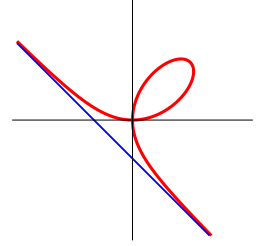
Quam ob rem Linea curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter se oppositos. . .

Joseph Alfred makalesinde son cümle olarak "Bu *quam ob rem* kanıt ister" yazmış. Euler'in ya da Newton'un $x \mapsto 1/x$ değişken değişimini düşünemediklerine gerçekten inanıyor muydu?

Onsekiz yıl sonra Paul Joseph aynı dergide kısa bir makale yazdı⁵². Adaşı ve saygın meslektaşının daha önceki makalesini eleştiriyordu. Joseph Alfred'in katkısının, asimptotlar problemini cebirsel eğrilerin durma noktaları problemine indirgemek olduğunu saptayarak ama bunun "a priori bariz" olduğunu söyleyerek başlar. Paul Joseph hala problemin çözülmemiş olduğunda ısrar eder; cebirsel eğrilerin durma noktalarının olamayacağını kanıtlanması gerekmektedir. Sonunda şu kanıtı önerir.

$(0, 0)$ noktası $F(x, y) = 0$ cebirsel eğrisi üzerinde olsun. Eğriyi, başnokta merkezli, küçük $x^2 + y^2 = r^2$ çemberiyle keselim. İyi bilinen şu parametremeyi kullanalım:

$$x = \frac{2rt}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{(1-t^2)r}{1+t^2}.$$

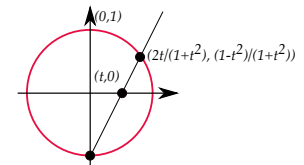


Descartes'in $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ yaprağına asimptot.

"ce qui ne peut arriver pour une courbe algébrique".

"Bu nedenle eğri, sonsuzda birbirinin tam karşısında olacak iki dala sahiptir. . ."

⁵² P. J. Serret. *Note sur les courbes algébriques*. *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 4:311-313, 1865.



$F(x, y) = 0$ denkleminde yerine koyarak ve F 'nin derecesi d olmak üzere $(1 + t^2)^d$ ile çarparak, $\phi_{2d}(t) = 0$ biçiminde bir denklem elde ederiz; burada ϕ_{2d} derecesi $2d$ olan bir polinomdur. Şimdi $e(0, 0)$ bir durma noktası olsaydı eğrinin küçük bir çemberle kesişimi tek bir nokta olurdu ve böylece t değişkenli $2d$ çift dereceli bir polinomun tek bir kökü olurdu, "*ce qui serait absurde*".

İlginç... Paul Joseph, t^2 'nin derecesinin iki olduğunu ama tek bir kökünün bulunduğunu nasıl bilmez? Evet, bu çift bir kök ama problemimiz tam da bu zaten. Belirli bir noktaya giden ve oradan geriye aynı yol üzerinden dönen cebirsel bir eğriyi rahatlıkla hayal edebiliriz.

Burada kanıtlanacak bir şey var.

Değişmeli cebirde iki önemli gerçek

Polinomlara ilişkin iki temel teoremi burada derleyeceğim. Bunlar Paul Joseph'in kanıtını tamir etmemizi sağlayacak. Cebir konusunda daha fazlası için şunlara bakabilirsiniz: ⁵³, ⁵⁴, ⁵⁵. Tüm halkaları değişmeli kabul ediyorum. Sayfa kenarlarında yararlı bazı tanımlar bulunuyor.

Teorem. \mathcal{R} bir Tek Çarpanlama Bölgesi olsun. O zaman $\mathcal{R}[x]$ polinom halkası da bir tek çarpanlama bölgesidir.

$\mathcal{R}[x]$ 'te bir polinomun katsayıları aralarında asalsa böyle bir polinoma *ilkel* diyelim. Kilit nokta, Gauss lemması denen gözlem.

Lemma. $\mathcal{R}[x]$ 'de iki ilkel polinomun çarpımı da ilkeldir.

(Modern) kanıt kolay (fakat bir hayli dolaylı). \mathcal{R}' de asal bir p için \mathcal{R}/p halkası bir tamlık bölgesidir. Eğer $P_1(x)$ ve $P_2(x)$, çarpımları ilkel olmayan iki polinomsa P_1P_2 'nin tüm katsayıları asal bir p 'ye bölünebilir. Tüm katsayıları mod p alarak $(\mathcal{R}/p)[x]$ 'de

$$\bar{P}_1(x)\bar{P}_2(x) = 0.$$

eşitliğini elde ederiz. Bir tamlık bölgesi üstünde bir polinom halkası da bir tamlık bölgesi olduğundan $\bar{P}_1(x)$ ya da $\bar{P}_2(x)$ 'in $(\mathcal{R}/p)[x]$ 'te sıfır olduğu sonucuna varırız. \square

F 'nin derecesi diyerek, katsayısı sıfır olmayan $x^i y^j$ monomları içinde $i + j$ 'nin en fazla değerini kastediyorum.

İleride Paul Joseph'in haklı olduğunu, derecenin $\leq 2d$ değil, gerçekten de tam $2d$ olduğunu göreceğiz.



⁵³ S. Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

⁵⁴ M. Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

⁵⁵ N. Bourbaki. *Commutative algebra. Chapters 1-7*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Gauss tarafından, doktorasından üç yıl sonra, *Disquisitiones Arithmeticae*'de Paragraf 42'de kanıtlanmıştır.

Tamlık Bölgesi, sıfır olmayan elemanlarının çarpımının da sıfır olmadığı bir halkadır. Bir halkada bir *birim eleman* tersi olan bir elemandır. Bir halkada a, b eleman çifti için $b = ua$ eşitliğini sağlayan bir u birim elemanı varsa bu çifte *ilişkili* denir ve bu durum $a \equiv b$ olarak gösterilir.

Bir $P(x) \in \mathcal{R}[x]$ polinomunun *içeriğini*, katsayılarının en büyük ortak böleni olarak tanımlayalım ve $\text{iç}(P)$ olarak gösterelim. Her $P(x)$ polinomunun, $\tilde{P}(x)$ ilkel olmak üzere $\text{iç}(P)\tilde{P}(x)$ çarpımı şeklinde yazılabileceği açık. Gauss'un lemması, bir çarpımının içeriğinin içeriklerin çarpımı olduğunu söylüyor basitçe.

Şimdi teoremi kanıtlayabiliriz. $\mathcal{R}[x]$ 'teki asal elemanların

1. Ya \mathcal{R} 'deki asal elemanlar olduğunu (buradaki elemanlar sabit polinom olarak düşünülebilir),
2. Ya da $\mathcal{R}[x]$ 'te ilkel polinomlar olduğunu (bunlar \mathcal{R} 'nin $\text{Böl}(\mathcal{R})$ bölüm cismi üzerinde polinomlar olarak düşünüldüğünde asaldırlar)

göstereceğiz.

Bir cisim üzerinde polinomların halkası Öklit halkasıdır. Bu $\text{Böl}(\mathcal{R})[x]$ için de geçerlidir elbette; dolayısıyla $\mathcal{R}[x]$ 'te herhangi bir $P(x)$ elemanı $\text{Böl}(\mathcal{R})[x]$ 'te asal polinomların çarpımı şeklinde yazılabilir. Paydaların peşinden koşarak P' 'yi yukardaki 1/ ve 2/ türlerin bir çarpımı olarak

$$P(x) = u \cdot r_1 \cdots r_k \cdot P_1(x) \cdots P_l(x).$$

diye yazabiliriz. Burada u , \mathcal{R} 'de birim, r_i 'ler \mathcal{R} 'de asal elemanlardır; P_i 'ler $\text{Böl}(\mathcal{R})[x]$ 'te ilkel ve indirgenemezdir. Gauss sayesinde $r_1 \cdots r_k$ çarpımının P 'nin içeriği olduğunu ve böylece P tarafından tek biçimde tanımlandığını söyleriz.

\mathcal{R} tek çarpanlama bölgesi olduğundan r_i 'ler P tarafından tek biçimde belirlenir (birimle çarpma ve sıra değiştirme koşuluyla).

$\text{Böl}(\mathcal{R})[x]$ de tek çarpanlama bölgesi olduğundan $P_i(x)$ çarpanları da $\text{Böl}(\mathcal{R})[x]$ 'de (birimle çarpma ve sıra değiştirme koşuluyla) tek biçimde belirlenir. Böylelikle $P(x)$ ve $Q(x)$, $\mathcal{R}[x]$ 'te ilkel polinomlar ve a , $\text{Böl}(\mathcal{R})$ 'nin elemanı olmak üzere $Q(x) = aP(x)$ eşitliği a 'nın \mathcal{R} 'de birim olmasını gerektirir. \square

Buradan hemen şu sonuç çıkar: *herhangi bir K cismi için $K[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkaları da tek çarpanlama bölgesidir.* Bu özel durumda teoremin söylediği, $K[x_1, \dots, x_n]$ 'de herhangi sabit olmayan bir polinomun indirgenemez terimlerin çarpımı şeklinde tek bir biçimde yazılabildiğidir (sırayı değiştirebilmek ya da sabitlerle $-K$ 'nin elemanlarıyla- çarpabilmek koşuluyla).

Bir \mathcal{R} tamlık bölgesinde bir *asal eleman* p , \mathcal{R}/p bölüm halkasını tamlık bölgesi yapan bir elemandır. Bir tamlık bölgesinde bir eleman, birim olmayan iki elemanın çarpımı değilse bu elemana *indirgenemez* denir. Asal elemanlar indirgenemezdir. Tersini genelde doğru değildir. Bir *tek çarpanlama bölgesi* (bazen çarpım halkası da denir) her elemanın asal elemanların çarpımı olarak yazılabileceği ve bu ifadenin birimlerle çarpma ve sırasını değiştirme koşuluyla biricik olduğu bir halkadır. Öklit halkaları ve esas halkalar — örneğin bir cisim üzerinde polinomların halkası — tek çarpanlama bölgeleridir. Bu durumda asal ve indirgenemez kavramları çakışır; en büyük ortak bölenler iyi tanımlıdır.

Cebirsel ikinci sonuç *bileşke* ile ilgili. Bir \mathcal{R} tamlık bölgesi üzerinde bir $\mathcal{R}[x]$ polinom halkasında dereceleri $d_1, d_2 \geq 1$ olan iki polinom $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ alalım. Derecesi en fazla d olan polinomların oluşturduğu \mathcal{R} -modülü $\mathcal{R}_d[x]$ olarak gösterelim; bu modül \mathcal{R}^{d+1} 'e izomorftur. Şimdi

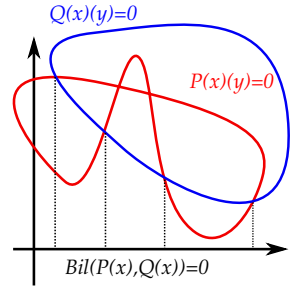
$$\Phi : (A_1, A_2) \in \mathcal{R}_{d_2-1}[x] \times \mathcal{R}[x]_{d_1-1} \mapsto A_1P_1 - A_2P_2 \in \mathcal{R}_{d_1+d_2-1}[x]$$

gönderimini düşünelim. $\mathcal{R}^{d_1+d_2}$ 'den kendisine doğrusal bir fonksiyon olarak görülebilecek bu gönderimin determinantına P_1 ve P_2 'nin *bileşkesi* denir ve $Bil(P_1, P_2)$ diye gösterilir. \mathcal{R} 'nin bu elemanı, P_1 ve P_2 'nin katsayılarını değişken kabul eden, \mathbb{Z} katsayılı evrensel bir polinomdur.

Teorem. \mathcal{R} tek çarpanlama bölgesi olsun. $Bil(P_1, P_2)$ bileşkesinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul P_1 ve P_2 'nin $\mathcal{R}[x]$ 'de 1 olmayan ortak bir böleni olmasıdır.

Gerçekten de, eğer $P_1 = QQ_1$ ve $P_2 = QQ_2$ ise (Q_2, Q_1) elemanı Φ 'nin çekirdeğindedir ve böylece bileşke sıfır olur.

Ters yönde, bileşke sıfır demek Φ 'nin çekirdeği sıfır değil demektir; yani $\mathcal{R}_{d_1-1}[x]$ ve $\mathcal{R}_{d_2-1}[x]$ 'te sıfır olmayan A_2 ve A_1 elemanları vardır ve $A_1P_1 = A_2P_2$ sağlarlar. Sonuç $\mathcal{R}[x]$ 'in tek çarpanlama bölgesi olmasından elde edilir: P_1 ve P_2 eğer aralarında asal olsaydı P_1 'in A_2 'yi bölmesi gerekirdi; A_2 'nin derecesi P_1 'inkinden küçük olduğu için bu olanaksız. \square



$P(x, y) = 0$ ve $Q(x, y) = 0$ eğrilerinin kesişiminin x eksenine izdüşümleri, bu polinomların bileşkelerinin sıfırları olarak verilir.

Gauss'un iddiasının kanıtı

Şimdi gerçek cebirsel bir eğride bir noktanın komşuluğunun sadece başnoktada kesişen, çift sayıda yaydan oluştuğunu kanıtlayabiliriz.

$(0, 0)$ 'dan geçen gerçek cebirsel eğrimizin denklemi $F(x, y) = 0$ olsun. İndirgenemez terimlerin çarpımı olarak F 'yi

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdots F_n(x, y)$$

diye yazalım. $(0, 0)$ 'ın bir komşuluğunda F 'nin sıfır kümesini değiştirmeden bu çarpanlardan bazılarını silebilir ve geriye kalan

tüm F_i 'lerin $(0,0)$ 'da sıfır olduğunu ve ilişkisiz, indirgenemez çarpanlar olduğunu kabul edebiliriz.

$(0,0)$ 'ın bir komşuluğunda F 'nin sıfır kümesi, F_i 'lerin sıfır kümelerinin birleşimidir.

Gauss'un iddiasını kanıtlamak için iki lemma kanıtlayacağız.

Lemma (1). $P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ indirgenemez bir polinom ve $Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ herhangi bir polinom olsun. $P(x, y) = 0$ ve $Q(x, y) = 0$ eğrileri başnoktanın küçük bir komşuluğunda sonsuz kez kesişsinler. Bu durumda $\mathbb{R}[x, y]$ 'de P, Q 'yu böler. Daha özel durumda, eğer P ve Q 'nun ikisi de indirgenemezse ve ilişkisizlerse karşılık gelen iki eğri yalnızca yalıtılmış noktalarda kesişirler.

Lemma (2). Eğer $P(x, y)$ indirgenemezse, başnoktanın bir komşuluğunda sıfır kümesi $(0,0)$ 'a yakınsayan çift sayıda yaydan oluşur.

İlk lemmayla başlayalım. $x = x_0$ düşey ekseninde $P(x, y) = 0$ 'ın sonsuz adet noktası varsa $P(x, y)$ polinomu $(x - x_0)$ 'a bölünebilir. $P(x, y)$ 'nin indirgenemez ve başnoktada sıfır olduğunu kabul etmiştik. Dolayısıyla $P(x, y)$, x 'in bir sabit katı olmalı ki bu da lemmayı kanıtlar. Öyleyse genelliği kaybetmeden, $P(x, y) = 0$ 'ın her düşey doğruyu sonlu noktada kestiğini kabul edebiliriz.

Eğer $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ ise $\mathbb{R}[y]$ 'nin elemanı olan $P(x_0, y), Q(x_0, y)$ polinomları ortak bir y_0 köküne sahiptirler; dolayısıyla \mathbb{R} 'nin bir elemanı olan bileşikleri sıfır olur.

$P(x, y) = 0$ ve $Q(x, y) = 0$ 'ın başnoktanın bir komşuluğunda sonsuz adet kesişim noktası olsun. $P, Q \in \mathbb{R}[x][y]$ polinomlarının bileşkesini $\mathbb{R}[x]$ 'in bir elemanı olarak inceleyelim. Bu bileşke, başnoktanın bir komşuluğunda sonsuz adet x_0 noktasında sıfırdır; bu yüzden tamamen sıfırdır. Dolayısıyla $\mathbb{R}[x, y]$ 'de P ve Q ortak bir çarpana sahip olmalı. P indirgenemez olduğundan demek ki P, Q 'yu bölmeliymiş. \square

Paul Joseph'in fikrini izleyerek ikinci lemmayı kanıtlayalım.

$$F(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

olsun. F 'nin derecesine d diyelim (tanım gereği, $a_{ij} \neq 0$ olmak üzere $i + j$ 'lerin en büyüğü). F indirgenemez olduğundan (x 'in bir sabit katı olmadıkça) x 'e bölünemez; demek ki katsayılarından biri, a_{0j} , 0 değildir. Bir r sabitleyerek

$i \neq j$ için $F_i \neq F_j$ ise, yani $F_j = cF_i$ eşitliğini sağlayacak sabit bir c yoksa F_i, F_j polinomları ilişkisizdir.

COURS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET INTÉGRAL,

PAR J.-A. SERRET,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

TROISIÈME ÉDITION.

TOME PREMIER.
CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,
GUTHRIER-VICTARS, IMPRIMEUR-TARNAISE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE MONTAIGNE ET DE LAUNAY, 1880.
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,
Quai des Augustins, 55. }
SERRET
Troisième édition.

$F(x, y) = x$ iken lemmanın aşıkâr olduğunu görün.

$$x = r \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad y = r \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ifadeleri r yarıçaplı bir çemberin $((0, -r)$ noktası hariç) t ile bir parametrelmesidir. Bunu $F(x, y)$ 'de yerine koyup sonucu $(1+t^2)^d$ ile çarparak t 'nin şu polinomu elde edilir:

$$\phi_{2d,r}(t) = \sum_{i,j} a_{ij} r^{i+j} (2t)^i (1-t^2)^j (1+t^2)^{d-i-j}$$

Bunun en yüksek monomu olan

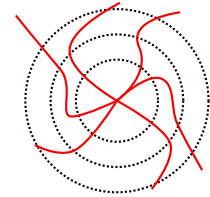
$$\left(\sum_j (-1)^j a_{0j} r^j \right) t^{2d},$$

küçük $r \neq 0$ için tabii ki sıfır değildir. Dolayısıyla Paul Joseph haklı imiş: $\phi_{2d,r}(t)$ 'nin derecesi gerçekten $2d$.

Kanıtı tamamlamak için, küçük $r \neq 0$ için $\phi_{2d,r}(t) = 0$ 'ın köklerinin basit olduğunu göstermeliyiz; bu da çift sayıda kök olmasını gerektirecek. t_0 bir çift kökse $\phi_{2d,r}(t)$ polinomu ve türevi birlikte sıfır olur. Geometrik olarak bu, o noktada çemberin teğetinin $F(x, y) = 0$ eğrisine de teğet olması demektir. Başka deyişle dışlamak istediğimiz çift kökler, $F(x, y) = 0$ ile $y\partial F/\partial x - x\partial F/\partial y = 0$ eğrisinin kesişim noktalarıdır. F 'nin indirgenemez olduğunu kabul etmiştik. Birinci lemma, ya bu eğrilerin sonlu noktada kesiştiklerini ya da $y\partial F/\partial x - x\partial F/\partial y$ 'nin F 'yi böleceğini söylüyor. Derecelere bakarsak bu son durum ancak $y\partial F/\partial x - x\partial F/\partial y$, F 'nin bir sabit katıyken meydana geliyor; bu da F 'nin çemberlerde sabit olması demek. Dolayısıyla F , $x^2 + y^2$ 'nin bir polinomudur ve başnoktada sıfır olduğundan $x^2 + y^2$ 'ye bölünür. Bu yüzden $x^2 + y^2$ 'nin sabit bir katıdır. Öyleyse sıfır kümesi yalnızca başnoktadır. \square

Gauss'un iddiasının kanıtı esasen bitmiş oldu. Sıfır olmayan her bir küçük r için $x^2 + y^2 = r^2$ çemberine F 'nin kısıtlanması, çift sayıda ve basit sıfırlar verir. Örtük fonksiyon teoremini bu gayet temel durumda kullanarak, bu sıfırların başnoktaya yakınsayan, ayırık çift sayıda eğri tanımladığı sonucuna varabiliriz. Bu eğrilerin limit yönleri konusunda bir şey söylemedik: başnoktaya yakınsarken teğet yönlerinin yakınsaması a priori zorunlu değil. \square

Carl Friedrich Gauss ve Paul Joseph Serret haklılarmış.



Bir cebirsel eğrinin her dalının mutlaka bir teğete sahip olduğunu ilerde göreceğiz.



J. Lamouroux'nun 1821 tarihli bir kitabından *Oculina Hirtella*'yı betimleyen bir resim. Bu kitap, beş yıl boyunca Darwin'in de yuvası olmuş *HMS Beagle* gemisinin kütüphanesinde de vardı. Ramis sparsis divergentibus! (İraksak dalların yayılması...)

Iraksak serilere dair: Euler, Cauchy ve Poincaré

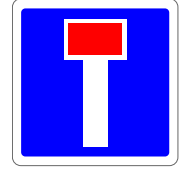
Euler'in seriebus divergentibus

NEWTON SONSUZ SERİLERİ KULLANMA MECRASINI $F(x, y) = 0$ ŞEKLİNDE DENKLEMLERLE SINIRLI TUTMAMIŞTI. *Diferansiyel denklemleri* çözmek için de onları sistemli bir biçimde kullanmıştı. Yaklaşımı esasen uygulamaya dönüktü. Formel seri olarak bir çözüm arıyor ve bir "kesinlik" elde etmek için serinin giderek daha sonraki terimlerini tümevarımsal olarak hesaplıyordu. Yakınsaklık kavramı anlamının henüz düzenli bir yolu yoktu. Yine de Newton'un kurcaladığı tüm seriler aslında yakınsaktı.

Daha sonra serilerin büyük ustası Euler olacaktı. Günümüz matematikçileri arasında genel kanı, Euler'in serilerle uğraşırken dikkatsiz olduğu ve "hiçbir anlam ifade etmeyen" serilerle uğraşmış olduğudur. Sözelimi, kendisinin⁵⁶

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + vs \dots = -\frac{1}{8}$$

formülü, bu tür dehşet ifadelerden kaçan, kendisine daha yolun başında yakınsak serilerin tanımı öğretilmiş bir lisans öğrencisi için korkunçtur. Hiç de değil! Euler ne yaptığını biliyordu. Iraksak bile olsa bir seriye bir toplam atfetmek için çeşitli usuller öneriyor ve bunları birbirleriyle karşılaştırmaya çalışıyordu. Serileri alışılmış genel serilerden değildir: serileri, –burada tarihsel sırayı biraz değiştirerek– bir tür algoritmayla örtük biçimde tanımlanmışlardır. Iraksak serilerin, aslında serilerin doğasına içten bağlantılı "bir şeyi" temsil ettiklerine kanidir. Her matematikçiye tavsiye edeceğim ve saf bir mücevher olan *De seriebus*



Çıkılmaz sokak. Bu bölüm kitabın diğer taraflarından tamamen bağımsızdır. ©



Leonhard Euler (1707-1783) ©

⁵⁶ L. Euler. Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 17:83–106, 1768. İngilizce çeviriler ve yorumlar için [Euler Arşivlerine](#) bakınız.

*divergentibus*⁵⁷ adlı makalesini mutlaka okuyun.

Euler'in örneklerinden biri epey meşhur:

$$S = 1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \dots$$

Önerdiği beş farklı toplama yöntemiyle elde ettiği değerler, S 'nin 0,5963473621237'ye yakın olduğuna işaret ediyor. En ikna edici yöntemlerden biri,

$$\hat{f}(x) = x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots$$

formel serisinin

$$x^2y' + y = x$$

doğrusal diferansiyel denklemin çözümü olduğu gözlemini kullanıyor. Bu gayet temel diferansiyel denklem için $x = 0$ 'da 0 olan şu açık çözüm bulunabilir:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) dt.$$

$\hat{f}(x)$ formel serisinin değerini $f(x)$ 'in temsil ettiğini bir biçimde neden söyleyemeyelim. Euler'in bulunduğu 0,596347362123 sayısı, $f(1)$ 'in değeridir.

Bilgisayarınıza basitçe

$$N[\text{Exp}[1] * \text{Integrate}[\text{Exp}[-1/t]/t, t, 0, 1], 100]$$

yazarsanız, Euler'in sayısal sonucuna tam uymasa da, hemen

0,5963473623231940743410784993692793760741778601525487815734849104823272191148744174

elde edersiniz.

Daha sonra ıraksak serilerin gözden düşürüldüğü dönem başladı.

Yeni usta, *yakınsaklık* kavramını açıkça tanımlayan ve sıkça adı matematiksel kesinlikle anılan Augustin Cauchy idi. Bu tamamen yanlış değil ama hiç kuşkusuz biraz abartılı bir basitleştirme. Bir yandan kesinlik Cauchy'den önce de vardı, öte yandan Cauchy ıraksak serileri tümünden reddetmemişti⁵⁸. Maalesef bugün bile halen birçok öğrenci ıraksak serilerin şeytandan geldiğine inanmış durumdadır...

1821'de *Cours d'analyse* eserinin önsözünde Cauchy, ıraksak serileri terk etmek zorunda bırakıldığını yazmış!

⁵⁷ L. Euler. De seriebus divergentibus. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5:205-237, 1760. İngilizce çeviriler ve yorumlar için [Euler Arşivlerine](#) bakınız.



Dikkat! Genç okuruma *her* ıraksak serinin iyi tanımlı bir toplamı olduğu yanlış hissini vermeyi kesinlikle istemem. Evet, bazı ıraksak seriler, farklı yöntemler kullanarak gerçekten de toplanabilir hale getirilirler ve *farklı* toplamlar verirler. Kolay bir örnek olarak $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ toplamını düşünün.

⁵⁸ A. Cauchy. [Sur un emploi légitime des séries divergentes](#). *Comptes Rendus Académie des Sciences*, XVII:18-25, 1843.

Hazmetmesi belki de güç görünecek bazı önermeleri kabullenmek zorunda kaldım. Sözelimi, ıraksak serilerin toplamının olmamasını...

1826'da ünlü bir mektubunda Abel Holmboe'ya şöyle yazmış:

İraksak seriler genel olarak ölümcül şeylerdir; bir kanıt onlara dayandırmak yüz karasıdır.

Poincaré

Yeni büyük usta Poincaré'ydi; ıraksak serilerin yalnızca yararlı olduğunu değil gök mekaniğinden gelen doğal soruların çözümünü için gerekli olduğunu da açıkça anlamıştı. Büyüleyici ve günümüz araştırma çalışmalarıyla bağlantılı olsalar da bu dinamik sistem yönünü tanıtmamak için kendimi tutacağım.

Méthodes nouvelles de mécanique céleste eserinin ikinci cildinden bir alıntı yapayım.

Yakınsama sözcüğünün anlamıyla ilgili olarak geometriciler ile gökbilimciler arasında bir çeşit yanlış anlama mevcut. Geometriciler mutlak kesinlikle ilgilenir ve açıkça yapmaya yeltenmeden olası olduğunu düşündükleri içinden çıkılmaz hesapların uzunluğundan rahatsız olmazlar. Bu yüzden, ilk terimleri çok yavaş azalsa da toplamı belirli bir limite yaklaşıyorsa bu seriye yakınsak derler. Oysa gökbilimciler bir serinin diyelim ki ilk 20 terimi çok hızla azalıyorsa, diğer terimler sonsuza dek artsa bile, bu serinin yakınsadığını söyleme alışkanlığındadırlar. Nitekim basit bir örnek olarak genel terimi

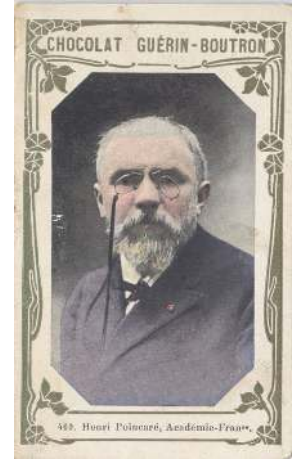
$$\frac{1000^n}{n!} \text{ ve } \frac{n!}{1000^n}$$

olan iki seri alalım. Geometriciler ilk serinin yakınsadığını, hatta hızla yakınsadığını [...]; ikinci serinin de ıraksak olduğunu söyleyeceklerdir [...] Tam tersine, gökbilimciler ilk seriyi ıraksak görecektir [...], ikinci seriyi de yakınsak. Her iki kural da meşrudur: ilki teorik araştırmalarda, ikincisi sayısal uygulamalarda.

Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend

"J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures. Par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme..."

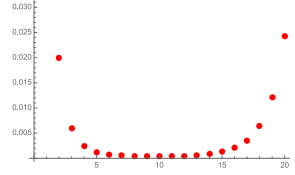
"Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration." Abel'in toplu eserlerinin 2. cildi.



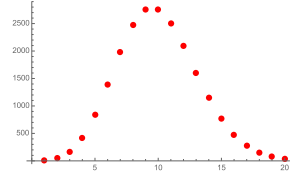
Henri Poincaré (1854-1912). Acaba kaç matematikçi, daha yaşarken çikolatalara fotoğrafı basılacak kadar ünlüydü?

vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général $\frac{1000^n}{n!}$ et $\frac{n!}{1000^n}$. Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement, [...] mais ils regarderont la seconde comme divergente [...]. Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, [...] et la seconde comme convergente [...] Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques ; la seconde, dans les applications numériques.

Poincaré'nin örneği mükemmel: $n = 1, \dots, 20$ için sırayla $x = 100$ ve $.01$ 'de $\frac{n!}{1000^n} x^n$ ile $\frac{1000^n}{n!} x^n$ ifadelerinin değerlerini karşılaştırın.



$\frac{n!}{10^n}$, $n = 1, \dots, 20$ için.



$\frac{10^n}{n!}$, $n = 1, \dots, 20$ için.

Eyer-çukur ve Euler denklemi

Adi diferansiyel denklemleri anlamak için, katsayıları polinom olanlar için bile, iraksak serilerle uğraşmak zorundayız. Başka seçeneğimizin olmadığını göstermek için basit bir örneğe bakalım.

Şu basit sistemi düşünelim:

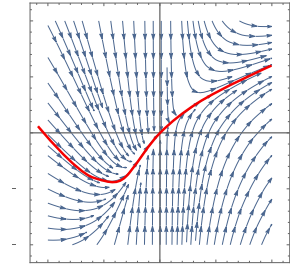
$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -y + x.$$

$x > 0$ iken eyer, $x < 0$ iken çukur davranışına sahip olduğu için bu sisteme *eyer-çukur* deniyor Epey yoz bir durum gibi görünse de *1 ekboyutta* meydana geldiğine dikkat edin; başnoktada vektör alanının doğrusal kısmının bir tane sıfır özdeğeri var. Dolayısıyla benzer eyer-çukurlar (ya da eyer-tepeler) düzlemde bir parametrelili *genel* vektör alanı ailelerinde görülmeli.

Yandaki resim bu vektör alanının faz portresi. Başnoktadan geçen, pürüzsüz, vektör alanı altında değişmez (ve y ekseninden farklı) bir eğriyi açıkça görüyoruz. Bu kümeye *merkezi manifold* denir.

Bu eğriyi bir $y(x)$ 'in grafiği olarak görmek istersek hemen $x^2 \frac{dy}{dx} + y = x$ Euler denklemini elde ediyoruz. Böylece merkezi manifoldun denklemi,

$$y = f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) dt$$



Eyer-çukurun faz portresi.

olarak bir C^∞ fonksiyonla verilir; bu fonksiyonun, \hat{f} formel iraksak serisiyle nasıl ilişkili olduğunu anlamalıyız.

Euler fonksiyonu, Stokes olgusu vs.

Hardy'nin sunumunu izliyorum⁵⁹.

Değişken değiştirip $t = x/(1+xw)$ koyarak

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-w) \frac{x}{1+xw} dw$$

yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \exp(-w) (x - x^2w + x^3w^2 - \dots + (-1)^{n-1}x^n w^{n-1}) dw \\ &+ (-1)^n x^{n+1} \int_0^\infty \frac{\exp(-w)w^n}{1+xw} dw \\ &= x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n + R_n(x) \end{aligned}$$

elde ediyoruz. R_n 'yi üstten sınırlamak kolay. Eğer $x, w > 0$ ise $1+xw > 1$ olur ve böylece

$$|f(x) - (x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n)| \leq n!x^{n+1}$$

buluruz. Başka deyişle \hat{f} formel serisi, f C^∞ fonksiyonuna asimptotiktir.

Aslında dahası da söylenebilir. Şimdi x bir karmaşık sayı olsun ama negatif gerçekte sayı olmasın. Bu durumda f 'yi tanımlayan formül mükemmel bir anlam kazanır, f fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ üzerinde holomorfe bir fonksiyon olur. Üstelik diyelim ki bir $\delta > 0$ için x öyle bir dilimde olsun ki açısı $[-\pi + \delta, \pi - \delta]$ aralığında olsun. Bu dilimde $|1+xw|$ alttan da sınırlanabilir (w hala pozitif bir gerçekte sayı) ve x bu dilimdeyken

$$|f(x) - (x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots + (-1)^{n-1}(n-1)!x^n)| \leq C(\delta)n!|x|^{n+1}$$

eşitsizliği elde edilir. Başka deyişle negatif x eksenini içermeyen herhangi bir dilimde \hat{f} formel serisi, f holomorfe fonksiyonuna asimptotiktir.

Halen fazlası söylenebilir. Euler'in işlemlerinin Hardy tarafın-

⁵⁹ G. H. Hardy. *Divergent series*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992. J. E. Littlewood'un önsözü ve L. S. Bosanquet'nin bir notuyla, (1963) edisyonunun tekrar basımı.

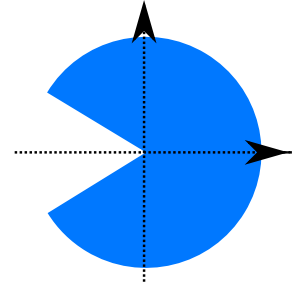


Uyarı: tehlikeli bir değişken değişimi!



"Gençler teorem kanıtla-sın, yaşlılar kitap yazsın." (Hardy 1877-1947).

Her n için $f(x) - \sum_{k=1}^n a_k x^k = o(x^n)$ ise $\sum_k a_k x^k$ serisi $f(x)$ fonksiyonuna asimptotik denir, hatırlatalım.



Dobişko.

dan sunumuna devam edelim.

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t} dt = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du \\ &= -\exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{li}\left(\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Burada li , $0 < v < 1$ için

$$\text{li}(v) = \int_0^v \frac{dt}{\log t} = - \int_{\log \frac{1}{v}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du.$$

olarak tanımlanan *integral logaritmasıdır*. Devamla

$$\begin{aligned} -\text{li}(\exp(-y)) &= \int_y^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du - \int_0^1 \frac{1 - \exp(-u)}{u} du \\ &\quad - \int_1^y \frac{du}{u} + \int_0^y \frac{1 - \exp(-u)}{u} du \\ &= -\gamma/e - \log y + y - \frac{1}{2 \cdot 2!} y^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!} y^3 - \dots \end{aligned}$$

buluruz. Burada γ 'ya ... tabii ki Euler sabiti denir. Sonuç olarak

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \log x + S\left(\frac{1}{x}\right)$$

bulmuş olduk; burada

$$S(y) = -\exp(y) \left(\gamma - y + \frac{1}{2 \cdot 2!} y^2 - \frac{1}{3 \cdot 3!} y^3 + \dots \right).$$

$S(y)$ 'nin bir tam fonksiyon, yani tüm karmaşık düzlemde holomorf ve düzgün yakınsak olduğunu da belirtelim.

Böylece $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 'ın evrensel örtüsü üzerine f 'nin bir holomorf genişlemesi de elde edilir. Başnokta çevresinde bir kez döndüğümüzde fonksiyon $2i\pi \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ artar.

$x > 1$ için de $\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$ has olmayan bir integral olarak tanımlanabilir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \right) \frac{dt}{\log t}.$$

Bu integral sayılar kuramında ünlüdür; x sonsuza giderken x 'ten küçük asal sayıların sayısı olan $\pi(x)$ değerine gayet kesin bir tahmin verir. Tam olarak, her $N \geq 1$ için

$$|\pi(x) - \text{li}(x)| = o\left(\frac{x}{(\log x)^N}\right).$$

Bu bölüm iraksak serilere ilişkin olduğuna göre şu iraksak asimptotik açılımı da anmak yerinde olacak:

$$\text{li}(x) = \frac{x}{\log x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\log x)^k} \right).$$

Bunu kısmi integralleme yardımıyla kendiniz kanıtlayabilirsiniz.

Bitirmeden f' 'nin özelliklerini toparlayalım.

- Tüm düzlemde tanımlı çokdeğerli holomorf bir fonksiyondur; daha kusursuz bir deyişle, logaritmanın Riemann yüzeyi üzerinde holomorf bir fonksiyondur.
- Açısı $< 2\pi$ olan bir dilimde, f fonksiyonu $\hat{f}(x) = x - 1!x^2 + 2!x^3 - \dots$ formel serisine asimptotiktir.
- Dolanım, yani x başnokta çevresinde döndüğünde $f(x)$ değerindeki değişim, $2i\pi \exp(\frac{1}{x})$ olur; bu da açısı $< 2\pi$ olan her dilimde düzdür. Bunu demekle şu kastediliyor: f' 'nin bir dilimde hangi tek değerli temsilcisini belirlersek belirleyelim asimptotik genişlemesi \hat{f}' 'dir.

\hat{f} formel serisinin ıraksaklığı, f fonksiyonunun “düz bir fonksiyon kadar değişebilmek üzere çokdeğerli” olma özelliğine karşılık gelir. Gerçek alemdeki bir olgunun karmaşık alemde başka bir olguyla açıklanması ilk değıl. Buna *Stokes olgusu* denir (1857’de Martın 19’unda öğleden sonra 3’te keşfedilmiştir).

Euler’in örneğı sadece bir örnek elbette. Burda kayda değer olan, örneğın anlamı ve güzel bir kuramın geliştirilmiş olması. Analitik, hatta cebirsel diferansiyel denklemlerin ıraksak seri çözümleri olabilir; yine de bunların toplamlarına, *çokdeğerli* holomorf fonksiyonlar cinsinden gayet iyi tanımlı anlamlar verilebilir.

Bu tarafa gitmekten kendimi alıkoyuyorum yoksa gezintimiz planladığım yere doğru gitmeyecek. Gezintilerde bile şöyle ya da böyle bir rotaya yelken açmak iyidir.

Bu kuramın tarihsel gelişiminin büyüleyici bir anlatımı için şunu⁶⁰ hararetle öneririm. Daha düzenli ve anlaşılabilir düzeyde bir anlatım için şu ders notları⁶¹ yararlı olacaktır.

Leonhard Euler’in 300. doğumgünü şerefine yayınlanmış şu makale⁶², ıraksak serilerin modern bir sunumudur.

“Logaritmanın Riemann yüzeyi üzerinde holomorf bir fonksiyon”, ϕ karmaşık düzlemde tanımlı holomorf bir fonksiyon olmak üzere $\phi(\log z)$ ’yi tarif etmenin eski moda bir yoludur. $\log z$ ’nin değeri “ $2i\pi$ ’ler kadar değışebileceğinden” bu $\phi(\log z)$ ifadesi çokdeğerlidir.

⁶⁰ J.-P. Ramis. [Poincaré et les développements asymptotiques \(première partie\)](#). *Gaz. Math.*, 133:33–72, 2012.; and J.-P. Ramis. [Les développements asymptotiques après Poincaré: continuité et divergences](#). *Gaz. Math.*, 134:17–36, 2012.

⁶¹ M. Loday-Richaud. [Divergent series and differential equations](#). Bir kitap bölümü. Teslim edilmiş. 2014, hal-01011050.

⁶² V. S. Varadarajan. [Euler and his work on infinite series](#). *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 44(4):515–539, 2007.



Augustin Cauchy.

Yakınsaklık

Cauchy'nin limitler hesabı

ŞİMDİ PUISEUX TEOREMİNİ İSPAT EDECEĞİM. Bu teorem karmaşık düzlemdeki bir cebirsel eğrinin, tekil bir nokta civarında, *yakınsak* kuvvet serileri cinsinden yerel bir parametrenmesini verir. Puiseux'nün kendi yaklaşımını takip etmeyeceğim. Onun yerine, Cauchy tarafından *Calcul des limites* adı altında matematiğe kazandırılmış bir yöntemi kullanacağım.⁶³

Örtük fonksiyon teoremi

Klasik örtük fonksiyon teoremi'nin *à la Cauchy* bir ispatıyla başlayalım. Bu, eski ders kitaplarındaki geleneksel ispatı ama günümüzde çoğunlukla ihmal edilmiş, yerini sabit nokta teoremlerine dayanan çok daha kuvvetli yöntemlere bırakmıştır. Yine de bu ispatın bazı üstünlükleri vardır: çok temel ve neredeyse tamamıyla kombinatoriktir. Tarihsel bir yaklaşımla ele alınışı için şu kitabı⁶⁴ tavsiye ederim.

K , karakteristiği 0 olan bir cisim olsun ve üstünde bir norm, yani $|1| = 1$, $|xy| = |x||y|$ ve $|x + y| \leq |x| + |y|$ şartlarını sağlayan bir $x \in K \mapsto |x| \in \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca $|x| = 0$ 'ın, ancak ve ancak $x = 0$ ise doğru olduğunu ve $||$ ile donatılmış K 'nin tam olduğunu, yani Cauchy dizilerinin yakınsak olduğunu, kabul edeceğiz.

Tabii ki aklımda \mathbb{C} ve \mathbb{R} var ama başka birçok örnek de mevcut (bilhassa p -adik cisimler).

RESUMÉ D'UN MÉMOIRE
DE
LA MÉCANIQUE CÉLESTE
ET DU
UN NOUVEAU CALCUL APPELÉ CALCUL DES LIMITES (1821).
—
(Im à l'Académie de Paris, dans le volume de la collection 1821.)

⁶³ A. Cauchy. *Œuvres complètes*, volume 12. Gauthier Villars, 1882.

Burada *limite* sözcüğü limit olarak değil, *sınır* olarak anlaşılmalı. Günümüzde "üstten sınırlama yöntemi" olarak ifade ediliyor.

⁶⁴ S. G. Krantz and H. R. Parks. *The implicit function theorem*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. History, theory, and applications.

Bir de, normun, sıfırdan farklı her x için $|x| = 1$ eşitliğini veren en basit normdan farklı olduğunu kabul ediyorum.

Şimdi uygun C ve $r > 0$ sayılarıyla

$$|u_k| \leq Cr^k$$

eşitsizliğini sağlayan, K 'nin u_k elemanları için

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} u_k x^k$$

biçiminde serilerin halkasını $K\{x\}$ 'le gösterelim. K tam olduğundan bu, 0 'ın uygun bir komşuluğunda mutlak yakınsak olan serilere (\mathbb{C} ve \mathbb{R} için analitik fonksiyonların tohumlarına) tekabül eder. Kolaylık olması için, $K\{x\}$ 'in elemanları *yakınsak serilerdir* diyeceğiz.

Benzer şekilde, a_{ij} 'ler K 'de olmak üzere

$$F(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$$

yakınsak serilerinin halkasını $K\{x, y\}$ diye göstereceğiz; yani uygun $C, r > 0$ sayesinde tüm i ve j 'ler için a_{ij} 'ler

$$|a_{ij}| \leq Cr^{i+j}$$

şartını sağlayacak.

Teorem (Örtük fonksiyon teoremi). $F \in K\{x, y\}$ serisi, $F(0, 0) = 0$ ve $\partial F / \partial y(0, 0) \neq 0$ şartlarını sağlasın. O zaman $f(0) = 0$ ve $F(x, f(x)) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in K\{x\}$ yakınsak serisi vardır. K^2 'de $(0, 0)$ civarında $F(x, y) = 0$ denkleminin bütün (x, y) çözümleri tam tamına $(x, f(x))$ ikilileridir.

İspat şöyle. Eğer $(a_{00} = 0)$ olmak üzere $\sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$ formel serisinde y yerine $\sum_{k \geq 1} u_k x^k$ koyarsak, katsayıları u_k 'lere ve a_{ij} 'lere bağlı olan bir $\sum_{l \geq 1} v_l x^l$ formel serisi elde ederiz. Nitekim

$$\sum_{i, j} a_{ij} x^i \left(\sum_{k \geq 1} u_k x^k \right)^j = \sum_{l \geq 1} v_l x^l$$

de ilk terimleri hesap edip

$$v_1 = a_{10} + a_{01} u_1$$

$$v_2 = a_{20} + a_{11} u_1 + a_{02} u_1^2 + a_{01} u_2$$

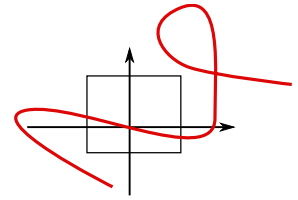
$$v_3 = a_{30} + a_{21} u_1 + a_{12} u_1^2 + a_{03} u_1^3 + a_{11} u_2 + 2a_{02} u_1 u_2 + a_{01} u_3$$

$$v_4 = a_{40} + a_{31} u_1 + a_{13} u_1^3 + a_{04} u_1^4 + a_{21} u_2 + 2a_{12} u_1 u_2 + 3a_{03} u_1^2 u_2 + a_{02} u_2^2 + a_{11} u_3 + 2a_{02} u_1 u_3 + a_{01} u_4$$

...



Olağan bir $F(x, y)$ fonksiyonunun eşyükselti eğrileri.



buluruz. Bu karışık gözükse bile, tümevarımla v_l 'nin

$$v_l = G_l((a_{ij})_{i+j \leq l}, (u_k)_{k \leq l-1}) + a_{01}u_l$$

şeklinde yazılabildiğini derhal ispat edebiliriz; burada, G_l katsayıları pozitif tamsayı olan ve içinde $i + j \leq l$ için a_{ij} 'leri ve $k \leq l - 1$ için u_k 'leri barındıran bir polinom.

Problemimiz, *yakınsak* F serisi verildiğinde, $F(x, f(x)) = 0$ olacak şekilde tek bir *yakınsak* $f(x)$ 'in var olduğunu göstermektir. Başka bir deyişle, a_{ij} 'lerin $|a_{ij}| \leq Cr^{i+j}$ eşitsizliğini sağladıklarını biliyoruz ve bilinmeyenleri u_l 'ler olan $v_l = 0$ denklemlerinin yakınsak tek çözümünün olduğunu göstermek istiyoruz.

Hipotezimize göre $a_{01} \neq 0$ dır, böylece F 'yi $-1/a_{01}$ ile çarparak $a_{01} = -1$ kabul edebiliriz. Aynı şekilde, x ve y 'yi birer sabitle çarparak $C = 1$ ve $r = 1$ kabul edebiliriz. Başka türlü söylersek, her $i, j \geq 0$ için $|a_{ij}| \leq 1$ olduğunu kabul ediyoruz.

G_l 'ler yalnızca $k \leq l - 1$ şartını sağlayan u_k 'lere (ve a_{ij} 'lere) bağlı olduğu için, önceki formül özyinelemeli olarak (a_{ij} 'lere bağlı olan) tek bir u_l serisi tanımlar:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{10} \\ u_2 &= a_{20} + a_{11}u_1 + a_{02}u_1^2 = a_{20} + a_{11}a_{10} + a_{02}a_{10}^2 \\ &\dots \\ u_l &= G_l((a_{ij})_{i+j \leq l}, (u_k)_{k \leq l-1}). \end{aligned}$$

Hedefimiz bu $\sum_l u_l x^l$ serisinin yakınsak olduğunu göstermektir.

Şimdi Cauchy'nin basit ve güzel fikri geliyor. (ayrıntılar için bakınız⁶⁵). Teoremin doğruluğunu *yalnız bir* özel örnekte kontrol edecek ve genel halin bundan çıktığını göstereceğiz.

Örneğimiz olarak, $\bar{a}_{01} = -1$ ve diğer tüm \bar{a}_{ij} 'lerin 1 olduğu \bar{F} 'yi seçelim:

$$\bar{F}(x, y) = -y + x + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + \dots$$

Bu \bar{F} seçimine tekabül eden seri \bar{u}_l olsun, yani \bar{u}_l aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\bar{u}_l = G_l((1), (\bar{u}_k)_{k \leq l-1}) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$\bar{F}(x, y) = 0$ denklemini çözmek kolay çünkü

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - 2y = 0$$

Alıştırma: Bu ispatı dikkatle okuyun ve örtük fonksiyon teoreminin en keskin halini bulun. $\{|x| < \alpha; |y| < \beta\}$ çift dairesinde F 'nin yakınsak olduğunu ve $|F(x, y)| < M$ eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Yarıçapı ρ olan açık dairede f 'nin yakınsak olmasını sağlayacak en yüksek $\rho(\alpha, \beta, M, |a_{01}|) > 0$ değeri nedir?

⁶⁵ U. Bottazzini and J. Gray. *Hidden harmony—geometric fantasies. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences.* Springer, New York, 2013. The rise of complex function theory.

G_l 'nin a_{01} 'i (1'e eşit olmayan biricik a_{ij} 'yi) içermediğine dikkat edin.

eşitliği $y = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1-9x}{1-x}} \right)$ eşitliğine denk. Biz 0 civarında $-$ işareti seçmek zorundayız. Böylece

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{\frac{1-9x}{1-x}} \right) \\ &= \bar{u}_1 x + \bar{u}_2 x^2 + \dots \\ &= x + 3x^2 + 13x^3 + 71x^4 + 441x^5 + 2955x^6 + \dots \end{aligned}$$

analitik çözümünü elde ederiz. 0 'ın bir komşuluğunda f analitik olduğu için, \bar{u}_k katsayıları ($\rho < 9$ olmak üzere) $\bar{u}_k \leq c\rho^k$ tipinde bir eşitsizliği sağlarlar.

Şimdi $|a_{ij}| \leq 1$ koşulunu varsaydığımız *genel* F haline geçelim. G_l 'ler *pozitif tamsayı katsayılı* polinomlar olduğundan tümevarımla $|u_l| \leq \bar{u}_l$ eşitsizliği şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned} |u_{l+1}| &= |G_l((a_{ij})_{i+j \leq l+1}, (u_k)_{k \leq l})| \\ &\leq |G_l((1), (|u_k|)_{k \leq l})| \\ &\leq |G_l((1), (\bar{u}_k)_{k \leq l})| \\ &\leq \bar{u}_{l+1}. \end{aligned}$$

Özellikle $|u_k| \leq c\rho^{k'}$ dir ve $f(x) = \sum_k u_k x^k$ serisi yakınsaktır. Teoremin ispatı neredeyse bitti. Yakınsak bir $y = f(x)$ çözümünü bulduk, şimdi $F(x, y) = 0$ 'ın başnokta civarında bütün çözümlerinin $(x, f(x))$ şeklinde olduğunu göstermemiz gerek.

$K\{x, y\}$ halkasında bir $F(x, y)$ elemanının y 'ye bölünebilmesi için gerek ve yeter şart, $F(x, 0)$ 'ın özdeş olarak sıfır olmasıdır; bu açık. $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ dönüşümü, $K\{x, y\}$ 'nin bir otomorfisine yol açar ve bu otomorfi y 'yi $(y - f(x))$ 'e gönderir. $F(x, y) = 0$ 'ın bir çözümünün $y = f(x)$ olduğunu biliyoruz; önceki cümle $K\{x, y\}$ içinde F 'nin $y - f(x)$ 'e bölünebildiğini gösterir. Bölüm, $(0, 0)$ 'da sıfır değildir çünkü

$$F(x, y) = -y + a_{10}x + \dots \quad \text{ve} \quad f(x) = a_{10}x + \dots$$

şeklinde. Dolayısıyla $U \in K\{x, y\}$ ve $U(0, 0) \neq 0$ olmak üzere $F(x, y) = U(x, y)(y - f(x))$ 'tir. Böylece $(0, 0)$ civarında $F(x, y) = 0$ denklemini gerçekten $y = f(x)$ 'e denktir. Örtük fonksiyon teoremi ispatlanmıştır. \square

Hille'nin kitabı⁶⁶ *calcul des limites*'i iyi anlatıyor; tavsiye ederim.

$K = \mathbb{C}$ iken, yani F , $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ noktasının bir komşuluğunda holomorf bir fonksiyon iken, Cauchy örtük fonksiyon için bir integral formülü verir:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{y \frac{\partial F}{\partial y}}{F(x, y)} dy.$$

Burada C , başnokta çevresinde küçük bir çemberdir. İspatlayın!

⁶⁶ E. Hille. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997. 1976 orijinalinin tekrar basımı.

Puiseux teoremi

K , karakteristiği 0 olan cebirsel kapalı bir cisim ve F de $K[[x, y]]$ 'de sıfır olmayan bir *formel* seriyken, $F(x, y) = 0$ örtük denklemini çözmüş olduğumuzu hatırlayın.

$K[[x, y]]$ 'nin sıfırdan farklı herhangi bir $F(x, y)$ elemanının (Newton ve Cramer'in yardımıyla)

$$F(x, y) = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x))$$

çarpımı olarak ayrıştığını göstermiştik; burada $A(0, 0) \neq 0$ 'dır ve n adet $f_i(x)$ çözümü $K[[x^*]]$ 'de formel *Puiseux serileridir*.

Şimdi hedefimiz, F yakınsakken $f_i(x)$ 'lerin de yakınsak olduğunu göstermektir.

K 'nin bir tam normla donatılmış cebirsel kapalı bir cisim olduğunu kabul edeceğiz.

$K[[x^*]]$ 'daki her $f(x)$ elemanı, uygun bir N için $K[[x^{1/N}]]$ halkasında bulunduğu yani $x^{1/N}$ değişkenli bir seri olduğu için, yakınsak Puiseux serilerinin tanımlanmasında zorluk çıkmaz.

Bir ve iki değişkenli yakınsak Puiseux serileri halkalarını $K\{x^*\}$ ve $K\{x^*, y^*\}$ diye gösterelim.

Her ne kadar $K\{x^*\}$ 'daki seriler yakınsalar da, tedbirli olmalıyız: onlar 0 civarında tanımlanmış fonksiyonlar değildir. Onlar x değişkeninin bir çok fonksiyonlarıdır.

Teorem ("Puiseux teoremi"). $K\{x, y\}$ 'nin sıfırdan farklı herhangi bir F elemanı, $A(0, 0) \neq 0$ ve n çözüm $f_i(x)$ 'ler yakınsak Puiseux serileri olmak üzere

$$F = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x))$$

şeklinde ayrışır.

İspat az bir karışıkmiş gibi gözükebilir ama okur bu teoremin, örtük fonksiyon teoreminin hafif bir genelleştirilmesi olduğunu hatırdan çıkarmamalıdır.

Aşağıdaki olguları hatırlayalım.

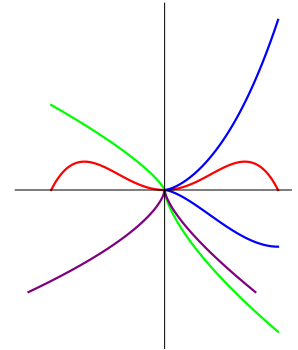
1. Bir formel $y = f(x)$ Puiseux serisi $F(x, y) = 0$ 'ın köküyse, her adımda Newton çokgeninin bir destek çizgisini seçen Newton algoritması kullanılarak elde edilir.



Victor Puiseux (1820 – 1883).

p -adic sayılar cisminin cebirsel kapanışının tamamlanışı buna iyi bir örnek olur.

Ümit ederim ki okurum, iki değişkenli yakınsak Puiseux serileri halkasının tanımını tahmin etmiştir: (x, y) 'nin yakınsak kuvvet serilerini göz önüne alıp, $m \geq 1$ için formel olarak x ve y yerine $x^{1/m}$ ve $y^{1/m}$ yazınız.



Dört Puiseux dalı tekil bir nokta.

2. Algoritmanın her adımında, bazı pozitif α_k, β_k tamsayılarıyla $x_k = x_{k+1}^{\alpha_k}$ ve $y_k = u_k x_k^{\beta_k} (1 + y_{k+1})$ tanımlarını yapar, (γ_k pozitif bir tamsayı olmak üzere) $F_k(x_k, y_k)$ 'nin yerine $F_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = x_{k+1}^{-\gamma_k} F_k(x_k, y_k)$ koyarız. Dolayısıyla $f(x)$ serisi $y_k(x_k)$ ($k \geq 1$) serileri tarafından tanımlanabilir. Açıktır ki bu $f(x)$ 'in veya $y_k(x_k)$ 'lerden herhangi birinin yakınsaklığını ispat etmeye denktir.
3. Belli sayıda adımdan sonra, $F_k(x_k, y_k)$ 'lerin katlılıkları (yani $F_k(0, y_k)$ 'lerin değerlenmeleri) artık k 'ye bağlı kalmaz, belli bir "nihai katlılığa", bir $kat \geq 1$ tamsayısına eşit olurlar (Cramer's theorem).
4. $F(x, y) = 0$ 'ın $y = f(x)$ köküyle ilişikleştirilmiş bu nihai sabit kat , aynı zamanda kökün katlılığıdır, yani F 'nin ayrışmasında gözükten $(y - f(x))$ 'e eşit çarpanların sayısıdır.

Artık Puiseux teoreminin ispatını tamamlayabiliriz.

$F, K\{x, y\}$ 'de yakınsak bir seri olsun ve F 'nin *a priori* formel Puiseux serilerinin çarpımı olarak ayrılışı

$$F = A(x, y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$$

olsun. N 'yi, $f_i(x)$ 'lerin hepsi $K[[x^{1/N}]]$ 'ye ait olacak şekilde seçim ve $\bar{x} = x^{1/N}$ diyelim; böylece F aynı zamanda $K\{\bar{x}, y\}$ 'nin de elemanı ve bütün f_i 'ler $K[[\bar{x}]]$ 'in elemanları olarak düşünülebilirler.

Böylece F 'nin $K\{x, y\}$ 'de olduğu ve her bir $f_i(x)$ 'nin $K[[x]]$ 'te formel seri olduğu duruma düştük; artık yapmamız gereken, f_i 'lerin yakınsak seriler olduklarını yani $K\{x\}$ 'e ait olduklarını göstermektir.

Eğer bir $y = f(x)$ kökünün kat dediğimiz "nihai katlılığı" 1 'e eşitse, biliyoruz ki Newton algoritmasında izlenen ve bizi $f(x)$ çözümüne götüren yol, katlılığı 1 olan bir $F_k(x_k, y_k)$ 'yi de meydana getirir. Örtük fonksiyon teorimi yakınsak F_k 'ye uygulanarak $f(x)$ çözümünün de yakınsak olduğu gösterilir.

Eğer bir polinomun katlı kökü varsa, bu kök onun türevinin de köküdür. Bizim bağlamımızda bu şunu gösteriyor: eğer $f(x) \in K[[x]]$ formel serisi $F(x, y) = 0$ 'ın $kat \geq 2$ katlı bir çözümlüyse, o zaman aynı seri $\partial F / \partial y(x, y) = 0$ 'ın daha küçük katlı

bir çözümdür. Eğer $F(x, y)$ yakınsaksa, elbette y' 'ye göre kısmi türevleri de yakınsaktır. Basit bir tümevarım ispatı tamamlar. \square

Sonuçlar

İşin en büyük ve önemli kısmını tamamladık. Şimdi sıra tatlıya geldi.

Her şeyden önce, formel seriler için elde ettiğimiz sonuçların aynısını, yine aynı ispatlarla elde ederiz.

K'nin cebirsel kapalı bir cisim olduğunu, karakteristiğinin 0 olduğunu ve bir tam normla donatılmış olduğunu kabul etmeyi sürüdüriyoruz.

Teorem (Weierstrass hazırlık teoremi). $F(x, y)$, $K\{x, y\}$ halkasında x' 'e bölünemeyen yakınsak bir seri olsun. O zaman F serisi, $A, P \in K\{x, y\}$ ve

- $A(0, 0) \neq 0$, yani A tersi olan bir eleman,
- $P(x, y)$, y' 'nin bir polinomu

olmak üzere $A(x, y)P(x, y)$ çarpımı şeklinde yazılabilir. \square

Teorem. $K\{x, y\}$ halkası, tek çarpanlama bölgesidir. \square

Puiseux teoreminin çok kullanışlı bir ifadesi, parametreleme cinsinden verilir.

Teorem (Puiseux parametrelemesi). $F(x, y)$, $K\{x, y\}$ halkasında sıfırdan farklı, yakınsak, başnoktada sıfır olan ve x' 'e bölünemeyen bir seri olsun. O zaman öyle

1. $m_i \geq 1$ tamsayıları,
2. $0'$ ı içeren ve (norm tarafından tanımlanan topolojiye göre) açık olan $U_i \subset K$ kümeleri,
3. U_i üzerinde yakınsak $g_i \in K\{x\}$ serileri

vardır ki $F(x, y) = 0$ eğrisiyle $(0, 0) \in K^2$ noktasının küçük bir komşuluğunun arakesiti,

$$\phi_i : t \in U_i \mapsto (t^{m_i}, g_i(t)) \in K^2$$

tasvirlerinin görüntülerinin birleşimidir. Üstelik bu ϕ_i tasvirleri birebirdirler ve görüntüleri yalnızca başnoktada kesişirler.

Öncelikle, $F(x, y) = 0$ denkleminin kökleri olan $f_1(x), \dots, f_n(x) \in K\{x^*\}$ serilerinin kümesinin, Galois grubu altında değişmez olduğunu fark edin. Her bir $f_i(x)$ için, $f_i(x) \in K\{x^{1/m_i}\}$ koşulunu sağlayan tamsayıların en küçüğü m_i olsun. Bu durumda $f_i(x)$ 'in m_i tane farklı Galois eşleniği vardır. Yeniden sıralayarak, f_1 'in m_1 adet eşleniğinin $f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)$ olduğunu varsayabiliriz. Bu $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, m_1$) serilerinin hiçbirisi, alışık olduğumuz anlamda x 'in "fonksiyonu" değildir. Bununla beraber, x 'in m_1 'inci kökü için yapılacak bir seçim, $f_i(x)$ 'ler ($i = 1, \dots, m_1$) için birer özel değer tanımlar. Eğer x 'in kökü değiştirilirse, $f_i(x)$ 'lerin ($i = 1, \dots, m_1$) değerleri permütasyona uğrar. Biraz farklı söylersek, öyle bir yakınsak $g_1(t) \in K\{t\}$ serisi vardır ki $f_1(x)$ 'in bu m_1 adet değeri, $\sqrt[m_1]{x}$ 'in mümkün olan m_1 adet seçimi için bulunacak m_1 adet $g_1(\sqrt[m_1]{x})$ değeridir. Bütün bu noktalar 0 'ın civarında

$$\phi_1 : t \in U \mapsto (t^{m_1}, g_1(t)) \in K^2$$

ile parametrelenmişlerdir. Bu şekilde, Galois grubunun kökler kümesindeki her bir yörüngesi için bir adet olmak üzere, teoremdaki gibi sonlu sayıda ϕ_i elde ederiz. Bu ϕ_i 'lerin görüntüleri F 'nin (hep başnoktanın civarında) sıfırları kümesini örter.

Şimdi ϕ_i 'lerin birebir olduklarını ve görüntülerinin yalnızca başnoktada kesiştiklerini göstermek kaldı.

Analitik fonksiyonların sıfırları yalıtılmış noktalardır. Aşağıdaki lemma, genel bir K için aynı şeyin $K\{x\}$ 'te de doğru olduğunu söylüyor sadece. İspatını alıştırma olarak okura bırakıyorum.

Lemma. $h \in K\{x\}$ yakınsak bir seri olsun. Eğer 0 'a yakınsayan ve $h(x_k) = 0$ şartını sağlayan bir $(x_k)_{k \geq 0} \in K \setminus \{0\}$ dizisi varsa, o zaman $h = 0$ 'dır. \square

Şimdi, sözgelimi ϕ_1 'in 0 'ın civarında birebir olmadığını farzedelim. Bu, $g_1(\omega_1 t) = g_1(t)$ 'nin çözümlerinin 0 'a yığılacağı şekilde birimin m_1 'inci kökü olan bir ω_1 'in var olmasını gerektirirdi. Lemmaya göre $g_1(\omega_1 t)$ ve $g_1(t)$ özdeş biçimde eşit olurdu ve bu da m_1 'in, $f_1(x) \in K\{x^{1/m_1}\}$ şartını sağlayan en küçük tamsayı olmasıyla çelişirdi.

Aynı akıl yürütme şunu da gösteriyor:

$$\phi_1 : t \in U \mapsto (t^{m_1}, g_1(t)) \in K^2 \quad ; \quad \phi_2 : t \in U_2 \mapsto (t^{m_2}, g_2(t)) \in K^2$$

tasvirlerinin görüntülerinin boş olmayan kesişime sahip olmaları (yani arakesitlerinin başnoktaya yığılmaları) için gerek ve yeter şart, $m_1 = m_2 = m$ olması ve özdeş olarak $g_2(t) = g_1(\omega t)$ eşitliğini sağlamak üzere birimin uygun bir m 'inci kökü ω 'nın var olmasıdır. Bu halde, iki görüntü aslında başnokta civarında çakışıktır.

□

ϕ_i 'lerin görüntülerine genellikle $F(x, y) = 0$ eğrisinin dalları denir. Bir dalın böyle Puiseux-vari parametrelenmesi, Galois grubunun etkisi hariç tutulmak üzere, tek bir tanedir.

Özellikle, başnoktanın $\{F(x, y) = 0\}$ 'da bir komşuluğu, K 'de bulunan ve tek bir noktada kesişen sonlu sayıda yuvarın birleşimine homeomorftur. Bir "yuvar"ın \mathbb{R} 'de aralık, \mathbb{C} 'de daire, p -adik sayılarda bir Cantor kümesi olduğuna dikkat edin.

Gerçek sayılar

Şimdiye kadar K cisminin cebirsel kapalı olduğunu farzettik. Şimdi gerçek sayılar durumunu inceleyeceğiz, ne de olsa gezintimizin başında onlar var.

$F(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$, sıfırdan farklı, yakınsak ve başnoktada sıfır olan bir seri olsun. Onun $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ olarak verilen sıfırları yeri, $(0, 0)$ civarında \mathbb{C}^2 'de karmaşık bir eğri olarak da, \mathbb{R}^2 'de gerçek bir eğri olarak da görülebilir. Burada bizi özellikle gerçeğin betimlemesi ilgilendiriyor.

Karmaşık sayılar üzerinde, bu sıfırlar yeri

$$\phi_i : t \in U_i \mapsto (t^{m_i}, g_i(t)) \in \mathbb{C}^2$$

ile parametrelenmiş birkaç dalın birleşimidir.

$F(x, y)$ 'nin katsayıları gerçek olduğundan, \mathbb{C}^2 'deki sıfırların yeri karmaşık eşlenik alma altında küme olarak değişmez. Başnokta dışında dallar ayrık olduklarından, başnoktadan farklı gerçek bir nokta, kendi eşleniğiyle çakışan bir dal üzerinde bulunmak zorundadır. ϕ_i altındaki görüntünün karmaşık eşleniği,

$$\overline{\phi_i} : t \in U_i \mapsto (t^{m_i}, \overline{g_i(t)}) \in \mathbb{C}^2$$

Kimi $F(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$ 'ler için sıfırlar yerinin gerçek kısmı başnoktadan ibaret olabilir. En bariz örnek $x^2 + y^2 = 0$ 'dır. Karmaşık sayılar üzerinde bu eğri yalnızca $(0, 0)$ 'da kesişen iki sanal daldan, $y = ix$ ve $y = -ix$ 'ten oluşur. Tabii bizi sadece sıfırlar yerinin gerçek kısmı ilgilendirdiğinden, F 'nin, sıfırlar yeri (gerçek sayılar üzerinde) başnoktadan ibaret olan bütün indirgenemez çarpanlarını göz ardı ediveriyoruz.

gönderiminin görüntüsüdür. Böylece, başnoktadan farklı bir gerçek nokta içeren dallar, ω birimin m_i 'nci bir kökü olmak üzere

$$\overline{g_i(\bar{t})} = g_i(\omega t)$$

ifadesiyle verilir. Eğer

$$g_i(t) = \sum_{k \geq 1} a_k t^k,$$

yazılırsa, bu şart

$$\overline{a_k} = a_k \omega^k$$

demek olur. ω 'nın iki karekökünden biri μ olsun ve $t = \mu s$ diyelim. O zaman

$$t^{m_i} = \mu^{m_i} s^{m_i} = \pm s^{m_i}$$

ve

$$g_i(t) = \sum_{k \geq 1} a_k t^k = \sum_{k \geq 1} a_k \mu^k s^k = \sum_{k \geq 1} b_k s^k$$

olur. Burada

$$\overline{b_k} = \overline{a_k} \overline{\mu}^k = a_k \omega^k \mu^{-k} = a_k \mu^k = b_k$$

olduğu için b_k katsayıları gerçektir.

Bu bahsi özetleyelim.

Teorem. $F(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$ sıfırdan farklı, gerçek katsayılı, başnoktada sıfır olan, x' e bölünmeyen yakınsak bir seri olsun. $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ civarında F' 'nin sıfırları yerinin, başnoktadan ibaret olmadığını kabul edelim. O zaman bu sıfır yeri, g_i gerçek katsayılı yakınsak bir seri olmak üzere

$$\phi_i : t \in (-\epsilon_i, +\epsilon_i) \mapsto (\pm t^{m_i}, g_i(t)) \in \mathbb{R}^2$$

şeklinde dir. Bu ϕ_i 'ler birebirdir ve görüntüleri yalnızca başnoktada kesişir. □

Bu ϕ_i eğrilerinin, merkezleri başnokta olan küçük yarıçaplı çemberleri çapraz kestiği kolaylıkla görülür. Zira teğet oldukları noktalar,

$$\frac{d}{dt}(t^{2n_i} + g_i^2(t)) = 2n_i t^{2n_i-1} + 2g_i(t)g_i'(t)$$

eşitliğinin sıfırlarıdır; bunlar da yalıtılmış noktalardır. Bu ifadenin özdeş olarak 0 olamayacağına dikkat edin, aksi taktirde eğri bir çember olurdu.

Gauss'un iddiasından fazlasını ispat etmiş bulunuyoruz. Analitik bir eğrinin, yerel olarak sonlu sayıda dalın birleşimi olduğunu ve bu dalların şu özelliklere sahip olduğunu ispat ettik:

- Her bir dal, $(-\epsilon, +\epsilon)$ açık aralığına homeomorftur; merkezi başnokta olan küçük çemberleri çaprazlama ve tam iki noktada keser (biri $t > 0$ için, biri $t < 0$ için).
- İki farklı dal, yalnızca başnoktada kesişirler.
- Bir dal boyunca t sıfıra giderken y/x değeri $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 'da bulunan bir limite gider. Yani her dalın, başnoktada iyi tanımlı bir teğeti vardır.

Bu yüzden bir cebirsel eğri, başnoktaya sonsuz spiral olarak varamaz.

Eğer $(0,0)$ noktası, $F(x,y) \in \mathbb{R}\{x,y\}$ serisinin sıfırlar yerinde yalıtılmış ise her karmaşık dalın karmaşık eşleniğiyle yalnızca başnoktada kesiştiğine de dikkat edin. Bu durumda ikişer ikişer eşlenik çift sayıda dal olması gerekir ve F 'nin katlılığı çifttir. Şimdi, derecesi tek olan her gerçek polinomun gerçek bir kökünün var olduğuna benzer, basit bir sonuç sunalım.

$F(x,y)$, sıfırdan farklı, gerçek katsayılı, yakınsak, başnoktada 0 olan, x 'le bölünmeyen, katlılığı tek sayı olan bir seri olsun. O zaman $F(x,y) = 0$ gerçek eğrisi başnoktadan ibaret değildir. Küçük gerçek x değerleri için, $F(x,y) = 0$ 'ın en az bir gerçek çözümü vardır.

Poincaré bu basit olguyu kudretli bir alete dönüştürmüş ve çok sayıda durumda kullanmıştır. Böyle durumlara bir örnek, 3 cisim probleminde periyodik yörüngelerin var oluşunu ispatlamasıdır (⁶⁷de 70. sayfaya bakınız). Bu onun *süreklilik yöntemi*dir.

⁶⁷ H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. 1892 orijinalinin tekrar basımı.

Kiriş diyagramları

Analitik eğrilerin tekil noktalar civarındaki yerel topolojisi, bu kitabın geri kalanında önemli olacak olan şu tanımla aklı getiriyor.

Tanım. 1. Bir *kiriş diyagramı*, bir çember üzerinde $2n$ noktadan oluşan ve sabit noktası olmayan, karesi birim olan bir gönderimle donatılmış bir kümedir. Başka bir deyişle, ikişer ikişer gruplandırılmış $2n$ adet noktadır.

2. İki kiriş diyagramını ele alınsın. Eğer çemberin, yönü koruyan, karesi birim olan gönderimle değişmeli olan ve ilk kiriş diyagramını ikincisine gönderen bir homeomorfisi varsa, bu iki kiriş diyagramına eşdeğer diyeceğiz. Başka bir ifadeyle, her harfin tam iki kez gözüktüğü $2n$ harfli dögüsel bir kelime göz önüne alıyoruz. Çift noktaları birleştiren kirişleri de çizebiliriz. Bağlama göre buna Gauss kelimesi veya eşleme veya çiftleşme dendiği de olur. Bir seçim yapmam gerekti, ben de "kiriş diyagramı"nu seçtim.
3. Bir analitik eğrinin (tekil) bir noktasıyla ilişikleştirilmiş kiriş diyagramı, o nokta merkezli küçük bir çemberle eğriyi kesitirerek ve aynı dala ait nokta çiftlerini bağlayarak elde edilen kiriş diyagramıdır. Böyle bir kiriş diyagramına analitik denir.

Analitik kiriş diyagramlarını ve gerçek analitik eğrilerin topolojisini anlamak istiyoruz.

Sabırlı olun! Oraya geliyoruz.

Kuş gagalarının biçimi hakkında bir ihtilaf mı var?

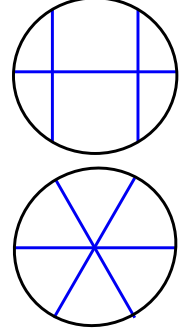
Euler 1751'de cebirsel eğrilerin biçimleri hakkında çok ilgi çekici (Fransızca) bir makale yazdı. Giriş kısmında şöyle der:

Her ne kadar çoğu zaman aksini ileri sürsek de, geometri bile ihtilaflardan ve bariz çelişkilerden muaf değildir.

Euler'in ele almak istediği tartışma, topuk noktaların biçimi hakkındaydı⁶⁸. Bay le Marquis de l'Hôpital ile Bay Guà de Malves arasında fikir ayrılığı vardı. Euler yargıçlık yaparak görünürdeki çelişkileri parlak bir şekilde ortadan kaldırdı.

Şimdiye kadar, tekil noktalar civarında dalların yalnızca topolojisini ele aldık. Geometrileri hakkında çok bir şey söylemedik. Yalnızca tekil noktada dalların teğetlerinin var olduğunu dile getirdik.

L'Hôpital'in kitabı *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Eğri çizgilerin anlaşılabilmesi için sonsuz küçükler analizi) başlığını taşır ve 1696'da basılmıştır. Türevli analiz konusunda ilk ders kitabıdır. İçinde, tekil dalların dört kategori altında sınıflandırılışı yer alır.



Üç kirişli iki diyagram.

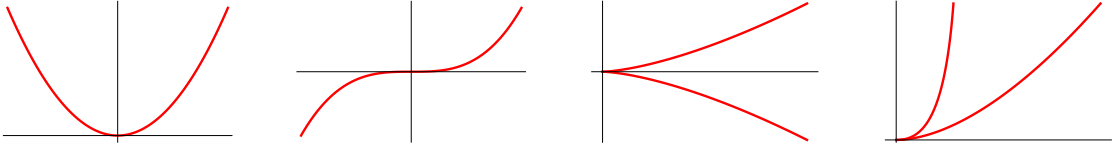
"Même la géométrie n'est pas exemte [sic] de controverses, & des contradictions apparentes, quoi qu'on soutienne souvent le contraire."

Günümüz ihtilaflarına örnek vermem gerekir mi?

⁶⁸ L. Euler. Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hôpital. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 5:203–221, 1751. İngilizce çeviriler ve yorumlar için bakınız [Euler arşivi](#).

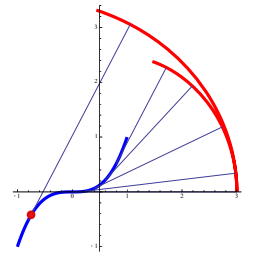
Bunları günümüz terimleriyle ifade edeyim. Koordinatları, teğet $y = 0$ olacak şekilde seçelim. $(-\epsilon, 0]$ ve $[0, \epsilon)$ şeklinde küçük aralıklarda tanımlanmış $h_1(x)$, $h_2(x)$ fonksiyonlarının grafiği olan iki *yarı dalın* birleşimi, yerel olarak dalımızı oluşturur. Başnoktanın dışında bu iki fonksiyon pürüzsüzdür. Dört hal şunlardır:

1. h_1 fonksiyonu $(-\epsilon, 0]$ aralığında, h_2 fonksiyonu $[0, \epsilon)$ aralığında tanımlanmıştır ve ikinci türevlerinin işaretleri aynıdır. Bu halde eğri içbükeydir (veya dışbükeydir) ve teğetinin bir tarafında yer alır.
2. *Büküm noktası*. İkinci türevlerin işareti farklı olması dışında bu durum yukarıdakinin aynıdır.
3. Bildiğimiz *topuk noktası*. Burada h_1 ve h_2 başnoktanın aynı tarafında tanımlanmışlardır ve ikinci türevlerinin işaretleri farklıdır. İki yarı dal zıt büyüklüklidir, yani biri içbükey diğeri dışbükeydir.
4. *Kuş gagası* ("point de rebroussement à bec d'oiseau"). Burada iki yarı dalda ikinci türevlerin işaretleri aynıdır.



İlk üç kategorinin örneklerini bulmak gayet kolaydır. Dördüncü kategori için l'Hôpital şu örneği verir. Büküm noktası olan bir eğriye iplik sarın ve ipliği eğrinin başka bir noktasına tutturun. İpliği gergin olarak açtığımız zaman ipliğin uç noktası (*mebus* adı verilen) bir eğri çizer ve öyle bir kuş gagası ortaya çıkarır. Büküm noktalı eğri olarak ben basitçe $y = x^3$ 'ü seçtim ve bilgisayarımdan l'Hôpital'in eğrisini çizmesini istedim. Sonuç, kenarda resmedilmiş bulunuyor. İddia edildiği gibi, gerçekten ipliğin uç noktası kırmızı eğriyi çizer ve iplik eğriye büküm noktasında teğet olduğunda ortaya bir kuş gagası çıkar. Yarı dalların

Geometri ile topoloji arasındaki sınır bulanıktır. Şöyle diyeyim: topoloji, homeomorfiler altında değişmez kalan özelliklerini, geometriyse ... daha küçük grupların değişmezlerini konu edinir; örneğin Öklit izometrilere, izdüşümsel otomorfiler veya basitçe difeomorfiler gibi. Mesela bir eğrinin teğetinin var olmasını geometrik özellik sayarım.



İpliğin uzunluğu ile eğri boyunca uzunluğun toplamı sabittir.

bükeyliği aynıdır. l'Hôpital için bunun böyle olduğu "mekanik" olarak besbelliydi.

Mr. Guà de Malves 1740'ta [şaşırtıcı bir kitap](#)⁶⁹ yayınladı. Bu kitabın amacı Newton's tekniklerinden kaçınmak ve yalnızca Descartes'ı kullanmaktı. Onsekizinci yüzyıl boyunca Descartes ve Newton'a dair Fransız-İngiliz didişmesini hatırlatmak gerek. Fransa ile İngiltere arasındaki bu savaşı gösteren bir örnek olarak Voltaire'in [Lettres sur Descartes et Newton](#)'unu tavsiye ederim.

Londra'ya varan bir Fransız, her şey gibi felsefeyi de çok değişmiş bulacaktır. Dünyayı dolu terk etmiştir, boş bulur. Paris'te evren, ince bir maddenin girdaplarından oluşmuş gibidir; Londra'dan hiç de öyle gözükmez. Bizde, denizlerin gelgitine neden olan, ayın basıncıdır; İngilizlerde denizdir aya doğru çekilen, öyle ki, siz ayın denizi yükselteceğini düşündüğünüz anda bu beyler denizin alçalması gerektiğine inanır; Ne yazık ki bu sınamamaz çünkü bu konuda aydınlanmak için ayı ve denizleri yaratılışın ilk anında incelemek gerekirdi.

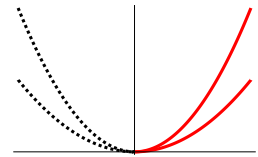
Her neyse, Guà'nın kitabı hala canlı olan bir tartışma hakkındadır: cebirsel geometri, diferansiyel geometrinin aşkın aletlerini kullanmalı mıdır? Kitabın "teoremleri" arasında, l'Hôpital'in yanılmış olduğu, kuş gagalarının var olmadığı iddiası bulunur.

Guà, l'Hôpital'in örneğini biliyordu ama şöyle eleştiriyordu. İki parabolü, $y = x^2$ ve $y = 2x^2$ 'yi göz önüne alın ama yalnızca $x \geq 0$ için... İki dışbükey yarıparabol elde edersiniz, bunların birleşimi kuş gagasına benzer. Guà'ya göre dolayısıyla l'Hôpital'in örneğinin yapay olduğunu görürüz: cebirsel eğrinin tamamında parabol örneğinde olduğu gibi iki dal vardır; eğrinin iplik kulanılarak mekanik yoldan inşası, şu veya bu şekilde, eğrinin yarısını göz ardı etmektedir. İkna oldunuz mu? Guà devam ederek bir cebirsel eğri için kuş gagalarının imkansız olduğunu "ispatlar".

"İspat" aşağı yukarı aşağıdaki yolu takip eder. Eğer 0'daki teğet $y = 0$ 'sa, p, q aralarında asal tamsayı çifti ve $p > q$ olmak üzere, dalımız $y = ax^{p/q} + o(x^{p/q})$ şeklindedir. Eğer gaga varsa, q çift olmak zorundadır, aksi taktirde pozitif ve negatif bütün x 'ler için y tanımlanmış olurdu. Bükeylik ikinci türevin işaretiyle verilir; ikinci türevse $a \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{p}{q} - 1\right) x^{\frac{p-2q}{q}}$ ile aynı mertebededir. Ama q çift ve $p - 2q$ tek olduğundan ikinci türevin iki değeri zıt

⁶⁹ J.-P. Gua de Malves. *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul Différentiel, les Propriétés, ou affectations principales des lignes géométriques de tous les ordres*. Briasson, 1740.

"Un Français qui arrive à Londres trouve les choses bien changées en philosophie comme dans tout le reste. Il a laissé le monde plein ; il le trouve vide. À Paris, on voit l'univers composé de tourbillons de matière subtile ; à Londres, on ne voit rien de cela. Chez nous, c'est la pression de la lune qui cause le flux de la mer ; chez les Anglais, c'est la mer qui gravite vers la lune, de façon que, quand vous croyez que la lune devrait nous donner marée haute, ces Messieurs croient qu'on doit avoir marée basse ; ce qui malheureusement ne peut se vérifier, car il aurait fallu, pour s'en éclaircir, examiner la lune et les marées au premier instant de la création."



işaretlidir ve böylece iki yarı dal zıt büyüklüdedir: bu gaga değildir.

İşte burada muhteşem Euler araya girer. Makalesi çok açıktır, tartışma götürmez. Önceleri Guà'nın akıl yürütüşü onu ikna etmişti, ama 1744'te bir hata buldu. Rob Bradley "Did Euler prove Cramer's rule" (Euler Cramer kuralını ispat etti mi) başlıklı [sütununda](#), Euler'in Cramer'e bu konuyu ele alan bir mektubundan söz eder.

Euler, Guà ve l'Hôpital, Puiseux serilerini kayıtsızca kullanır ve onların yakınsaklıkları hakkında hiç soru sormazlar. Euler'in makalesinde dikkat çeken şey, *gerçek* cebirsel eğrileri anlamak için *karmaşık* sayıların rolünün anlatımıdır (1751). İşte Euler'in örneklerinden biri:

$$y = x^{1/2} \pm x^{3/4}.$$

Kenardaki grafik gerçekten kartal gagasına benziyor. Bu \pm işaretli iki grafiğin aynı dala ait olduğunu, paraboller örneğimizdeki gibi tamamlanamayacaklarını nereden biliyoruz? Euler karmaşık sayıları kullanarak ikna edici şekilde akıl yürütür. Okurumu Guà'nın "ispatındaki" hatayı bulmaya hararetle davet ederim.

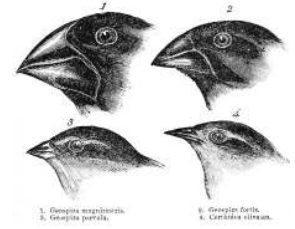
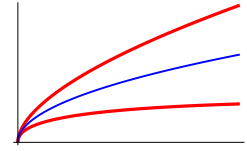
Kökleri yok ederek yeni bir denklem yazılabilir. Euler,

$$y^4 - 2xy^2 + x^2 - x^3 - 4yx^2 = 0$$

bulur. Siz de Newton çokgenini çizerek başnoktada gerçekten yalnız bir dal olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Bugün artık matematik kitaplarında kuş gagalarından söz edilmiyor. Bu noktalara şimdi daha renksiz ve cansız bir üslupla *ikinci mertebeden topuk noktası* deniyor. Bazen hala *ramfoïd eğrisi* adına rastlanır; bu Yunanca "rampho"dan, yem kuşlarının çarpık, sivri gagalarından gelmektedir

Yalnız bir öğüt verip bu bölümü bitireyim: bu kitabı okumayı bırakıp Euler'in çalışmalarını okuyun. Şimdi!



Galapagos adalarındaki [ispinoz](#) gagalarının şekilleri, Darwin'in evrimi keşfetmesinde önemli rol oynamışlardır.



IMPA'nın ana girişinde bir Möbius şeridi. Bu kitabın ilk halini IMPA'da yazdım.

Möbius ve şeridi



BU AYNI ZAMANDA 19. YÜZYIL ALMAN MATEMATİĞİ HAKKINDA BİR KİTABIN⁷⁰ adı. Bu bölümde, analitik eğrilerin *tekilliklerinin yok edilmesiyle* ilişkili topolojiyi tartışacağız ve Möbius şeritlerinden yapılmış bazı çok güzel kolyeler göreceğiz.

Kutupsal koordinatlar

Aşına olduğumuz bir tasvire bakalım:

$$\Phi : (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

Silindirden küreye bu gönderim, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\Phi, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}'$ ye kısıtlandığında, delinmiş $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ düzlemine örten bir difeomorfi olur.
2. $\Phi, \{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ çemberini başnoktaya “çökertir”.
3. Başnoktadan farklı bir noktanın Φ altındaki ters görüntüsü, (ρ, θ) ve $(-\rho, \theta + \pi)$ diye ifade edilebilecek tam iki noktadan oluşur.

Üçüncü özellik bir koordinat sistemi için çok da uygun değildir ve bu yüzden Φ' yi az sonra biraz değiştireceğiz. Bazen $\Phi, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}'$ ye kısıtlandırılır ama bu yapay bir kısıt olur.

İkinci özellik *tekilliği yok etme* bağlamında ilginçtir. Başnoktanın küçük bir komşuluğunda, Φ^{-1} bir mikroskop gibi davranır: $x^2 + y^2 = \epsilon^2$ şeklinde, çevresi $2\pi\epsilon$ olan minik çemberler, Φ^{-1} tarafından $\{\pm\epsilon\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ şeklinde, çevresi 2π olan iki büyük çembere gönderilirler.

August Ferdinand Möbius
(1825–1884). ©

⁷⁰ R. F. John Fauvel, Robin Wilson. *Moebius and his Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany*. OUP, 1993.



İlkin naif bir örnek olarak başnoktadan geçen bir D doğrusunu düşünelim. Bunun $\Phi^{-1}(D)$ ters görüntüsü, $\theta = \alpha$ ve $\theta = \alpha + \pi$ şeklindeki iki “doğru”dan ve $\{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ çemberinden oluşur. Eğer iki farklı D_1 ve D_2 doğrusu başnoktada kesişiyorsa, bunların ters görüntüleri bir şekilde ayrık hale gelir. “Bir şekilde” değişimizin sebebi, $\Phi^{-1}(D)$ 'nin $\Phi^{-1}(0,0)$ 'ı da içermesi ve bu yüzden kesişen doğruların ters görüntülerinin ayrık olmasının aslında mümkün olmaması.

Daha iyi bir prosedür ise şudur: düzlemin verili bir X altkümesi için, $\Phi^{-1}(X \setminus \{(0,0)\})$ önmgesinin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ içindeki kapanışını $\widehat{\Phi^{-1}(X)}$ diye gösterelim. Bu tanıma göre, $\widehat{\Phi^{-1}(D_1)}$ ve $\widehat{\Phi^{-1}(D_2)}$ hakikaten de ayrıktır. $\widehat{\Phi^{-1}}$ 'e *katı dönüşüm* diyeceğim.

Φ 'yi görselleştirmek için, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ içine gömülü, $x \sin \theta = y \cos \theta$ eşitliğiyle tanımlı S yüzeyine bakalım. S çifte sarmal bir merdiven gibidir. Yandaki resim, $\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$ 'deki basit bir merdiveni temsil ediyor. S 'nin pürüzsüz bir yüzey olduğunu gözden kaçırmayalım. Φ gönderimimiz, \mathbb{R}^2 yatay düzlemine izdüşüm almaya karşılık gelir; $\Phi^{-1}(0,0)$ ise $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}$ düşey parçasıdır.

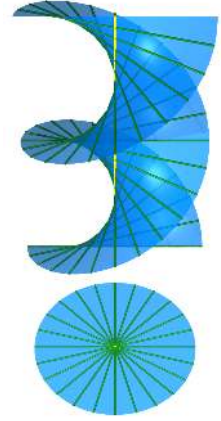
İkinci bir basit örnek olarak, başnoktada topuk tekil noktası olan $x^3 = y^2$ düzlemsel eğrisine bakalım. Bunun katı dönüşümünün denklemi $\rho = \sin^2 \theta / \cos^3 \theta$ 'dir (olması gerektiği gibi, iki parçası vardır) ve artık tekil değildir. Öte yandan pürüzsüzdür ve $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}$ çemberine teğettir.

Buradaki genel fikir bir eğrinin katı dönüşümünün, başnokta etrafında, ilk eğriden “daha az tekil” olmasıdır. İşlemi birkaç kere tekrar edersek tekil eğrinin pürüzsüz bir eğriye dönüşeceğini umabiliriz.

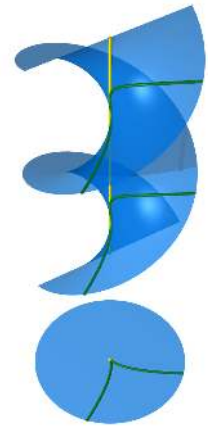
Devam etmeden önce, Φ altındaki ters görüntülerin iki noktaya sahip olması sorununu çözmemiz gerekli. İşlemi n kere tekrar edersek, 2^n tane nokta elde ederiz ve bununla baş etmesi de epey zor olur.

Möbius şeridi

(ρ, θ) 'yı $(-\rho, \theta + \pi)$ 'ye götüren ve karesi birim olan gönderimin sabit noktası yoktur. Φ 'nin çift ters görüntülerinden kurtulmanın



Yaprak 27, *Perspektif bilimine giriş*, H. Hondius (1625).



kolay bir yolu, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 'de (ρ, θ) ile $(-\rho, \theta + \pi)$ 'yi eşlemektir. Bahsi geçen karesi bir olan gönderim yönü ters çevirir zira Jakobi determinantı -1 'dir. Buradan bölüm yüzeyinin yönlü olmadığını anlarız; bu, *meşhur Möbius şerididir*⁷¹.

Aynı şey şöyle de görülebilir. Başnoktadan geçen doğruların kümesi bir çemberdir ve bu çemberi,

– ya *eğimiyle* (bu t eğimi, $P_{\mathbb{R}}^1 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, yani gerçek izdüşümsel doğrunun bir elemanıdır.)

– ya da $\text{mod } \pi$ verilen açısı θ ile parametreleyebiliriz. p düzlemde bir nokta, D bu noktadan ve başnoktadan geçen bir doğru olacak şekildeki (p, D) çiftlerinin oluşturduğu kümeye \mathcal{M} diyelim. Bu küme,

$$\mathcal{M} = \{((x, y), t) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \mid y = tx\}$$

ya da

$$\mathcal{M} = \{((x, y), \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \mid x \sin \theta = y \cos \theta\}$$

şeklinde görülebilir. İlk temsilin basit bir denkleme sahip olmak gibi bir avantajı ve \mathcal{M} 'nin $t = \infty$ etrafında pürüzsüz bir yüzey olduğunu hemen belli etmemesi gibi bir dezavantajı vardır. Fakat t' 'yi $t' = 1/t$ ile değiştirmeyi akıl ettiğimizde denklem $x = t'y$ haline gelir ve dezavantaj ortadan yok olur. İkinci temsil, \mathcal{M} 'nin hakikaten de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 'nin yukarıda bahsi geçen, karesi birim olan dönüşümle bölümü olduğunu gösterir.

$x = y = 0$, \mathcal{M} içinde gömülü bir E çemberini tanımlar; buna *istisnai bölün* denir.

Şöyle bir gönderim tanımlayalım:

$$\Psi : ((x, y), t) \in \mathcal{M} \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

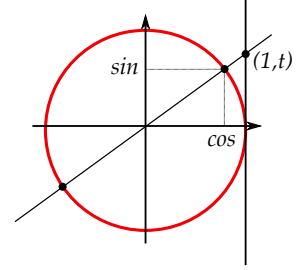
Bu gönderim, tam da istediğimiz özelliklere sahiptir:

1. Ψ 'yi istisnai bölünün tümleyenine kısıtladığımızda düzlemde başnoktanın tümleyenine bir difeomorfi olur.
2. Ψ , istisnai bölünü başnoktaya “çökertir”.

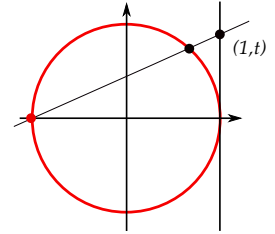
Bu yüzden, \mathcal{M} 'nin düzlemde başnoktayı patlatarak oluşturulduğunu söyleyeceğiz. Ters yönde, Ψ bir *söndürme gönderim*dir.

⁷¹ P. Popescu-Pampu. *La bande que tout le monde connaît. Images des Mathématiques*, 2010.

Henri Poincaré, 1895'te yazdığı *Analysis Situs*'da Möbius şeridinin adını geçirmiyor, fakat “La surface unilatère que tout le monde connaît” (herkesin bildiği tek taraflı yüzey) diyor.



Açıların $\text{mod } \pi$ oluşturduğu çember, bir gerçek izdüşümsel doğrudur.



Açıların $\text{mod } 2\pi$ oluşturduğu çember de bir gerçek izdüşümsel doğrudur.

Bölün terimi cebirsel geometriden geliyor ve aslında biraz kafa karıştırıcı olabiliyor, zira istisnai bölün, \mathcal{M} 'nin içine gömülü bir çember ve bir halkanın kernerinin tersine, yüzeyi iki parçaya *bölmüyor*.

Yerel olarak çalışmak istediğimiz için, kendimizi kenarlı ve tıktız

$$\overline{\mathcal{M}} = \{((x, y), \theta) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathcal{M}.$$

yüzeyine kısıtlamamız genelde faydalı olur.

$\overline{\mathcal{M}}$ 'nin, $[-1, +1] \times [0, \pi]$ 'den $(t, 0)$ ve $(-t, \pi)$ 'yi birbirine yapıştırarak elde edileceği açıktır. Bu, bildiğimiz Möbius şerididir: karşı iki kenarı bir bükmeden sonra birbiriyle eşlenen bir dikdörtgen.

$\overline{\mathcal{M}}$ 'nin kenarının bağlantılı olduğu açık olmalıdır; Ψ tarafından bir dairenin kenarına homeomorf olarak gönderilmektedir.

İstisnai bölenin $\overline{\mathcal{M}}$ 'deki tümleyeninin bağlantılı olduğu da açık olmalıdır. Bu, şeridi ortasından kestiğimizde elde edeceğimiz şeyin bildiğimiz halka olduğunu söylemenin biraz dolambaçlı bir yoludur. Gerçekten de E 'nin tümleyeni delinmiş daireye homeomorftur.

Son olarak, bir çemberin, örneğin $x^2 + y^2 = 1/2$ 'nin görüntüsü, $\overline{\mathcal{M}}$ içinde gömülü ve $\overline{\mathcal{M}}$ 'yi iki parçaya ayıran bir çemberdir. İlki bükülü olmayan bir halkadır ve Ψ tarafından $x^2 + y^2 \geq 1/2$ 'ye gönderilir; diğeri ise daha küçük bir Möbius şerididir ve Ψ tarafından $x^2 + y^2 \leq 1/2$ 'ye gönderilir.

Bazı resimler

Şüphesiz ki Möbius şeridi matematik dünyasının dışında da ünlü olan nadir matematiksel nesnelere biridir; örneğin bilim kurgu dünyasında, sanatta, felsefede, vb.

Sırf eğlence olsun diye, ünlü psikanalist Jacques Lacan⁷²'in 1972 yılında verdiği "l'Étourdit" adlı seminerinden bir alıntı yapayım:

Le non-enseignable, je l'ai fait mathème de l'assurer de la fixation de l'opinion vraie, fixation écrite avec un x mais non sans ressource d'équivoque. Ainsi un objet aussi facile à fabriquer que la bande de Möbius en tant qu'elle s' imagine, met à portée de toutes mains ce qui est unimaginable dès que son dire à s'oublier, fait le dit s'endurer. D'où a procédé ma fixation de ce point doxa que je n'ai pas dit, je ne le sais pas et ne peux donc - pas plus que FREUD - en rendre compte de ce que j'enseigne, sinon à suivre ses effets dans le discours analytique, effet de sa mathématisation qui ne

İstisnai terimi de cebirsel geometriden geliyor ve onu açıklamak biraz daha zor. Bir karmaşık yüzeydeki iki çapraz eğrinin pozitif bir kesişim sayısı vardır. Karmaşık bir yüzeyi patlatmak, karmaşık izdüşümsel doğru- dan ibaret bir istisnai bölene üretir. Bunun kendisiyle kesişme sayısını hesaplamak için holomorf olmayan şekil değiştirmeler kullanmamız gerekir. Bu kendisiyle kesişme hesabının sonucuysa -1 olur. Bu sonuç geçmişin cebirsel geometricileri tarafından şaşırtıcı ve istisnai bulunmuştu.



[Impact Earth](#) sitesi, size gezegenimizi istediğiniz noktada patlatma olanağı veriyor. ©

⁷² J. Lacan. *L'Étourdit*. Seuil, 1973.

Bunu İngilizce'ye (hatta anlaşılır bir Fransızca'ya bile) çeviremiyorum. (Dolayısıyla Türkçe'ye de çevirmiyoruz © ç.n.)

vient pas d'une machine, mais qui s'avère tenir du machin une fois qu'il l'a produite.

Möbius şeridi hakkında çok güzel (ve ciddi) yorumlar için, okuru J. Scott Carter'ın kitabına⁷³ *bakmaya* davet ediyorum.

Bu şerit, 1865 yılında onun hakkında yayın yapan Moebius'un adıyla anılıyor fakat bu tür durumlarda sıkça rastlandığı gibi, Möbius ilk değildi. Listing, aynı nesneyi 1862 yılında tarif etmişti.

Sırf değişik şekillerde ve renklere binbir çeşit Möbius şeridiyle dolu bir kitap oluşturabilirim. Burada sadece birkaç örnek vereyim.

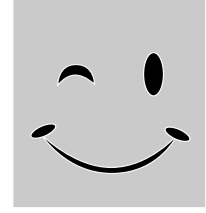
Bir şeritle basit bir düğüm yapın ve düğümü sıkılaştırın. Aşağıdaki resimdeki gibi bir şey elde edersiniz. Oluşan düzgün beşgeninizi kapadığınız zaman, bir Möbius şeridi elde etmiş olursunuz.



*Topolojik resim kitabı*⁷⁴ adlı harika kitabın dördüncü bölümü, *namümkün tribar'a* (Penrose üçgeni) adanmıştır.

Düzlemde bir daireyi ya da bir elipsin içini göz önüne alalım. Bunun dışarda kalan tarafı halkanın topolojisine sahiptir. Şimdi bu elipsi *gerçek izdüşümsel düzlemde* düşünelim; bu düzlemi elde etmek için sonsuzda bir doğru eklememiz gerekir ve bu doğru da topolojik olarak, her yön için bir nokta olarak oluşturulan çemberdir. İzdüşümsel düzlemde her doğru sonsuzu tek bir noktada keser.

Buradan, izdüşümsel düzlemde dairenin tümleyeninin bir Möbius şeridi olduğunu gösterin.



Bu durumda "bakmak" "okumak"tan daha uygun.

⁷³ J. S. Carter. *How surfaces intersect in space: an introduction to topology*. K & E series on knots and everything 2. World Scientific, 2nd edition, 1993.

⁷⁴ G. K. Francis. *A topological picturebook*. Springer-Verlag, 2006.

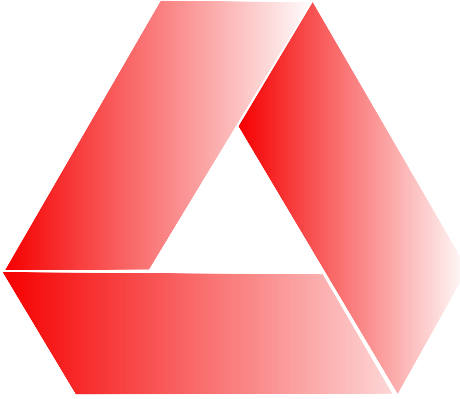
\mathbb{R}^2 düzlemine sonsuzda bir gerçek izdüşümsel doğru (yani bir çember) ekleyerek elde edilen izdüşümsel düzlemle, C' 'ye sonsuzda bir nokta ekleyerek elde edilen karmaşık izdüşümsel doğruyu birbiriyle karıştırmamaya dikkat edin.



Bu, Étienne [Lecroart](#)'ın hazırladığı bir Möbius çizgi hikayesi. Hikayeyi okurken baş aşağı şekilde başa dönüyorsunuz ve hikaye yeniden başlıyor! ©



J. Leys'in J.S. Bach'ın [yengeç kanonu](#) (1747) için yaptığı bir videodan bir görüntü. ©

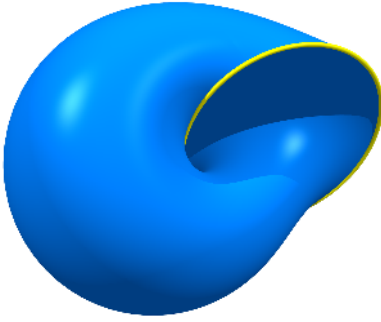


Bu size biraz yanıltıcı gelebilir. Bu resmi, görüldüğü gibi, üç tane *düzlemsel yamuk* kullanarak oluşturmak mümkün müdür? Eğer bu üç parça bükülüyse bu nesne uzayda bir Möbius şeridi oluşturur. Kenarı, olması gerektiği gibi bir çemberdir ama bu çember uzayda *düğümlüdür*; bu bir yonca düğümüdür. Bu resim, kenarın düğümlü olmadığı, bilindik resimden farklıdır.



İmkansız bir nesne.

©



Bilindik Möbius şeridiyle başlayıp kenarı bir yuvarlak çember haline gelene kadar deforme edersek *Möbius salyangozunu* elde ederiz

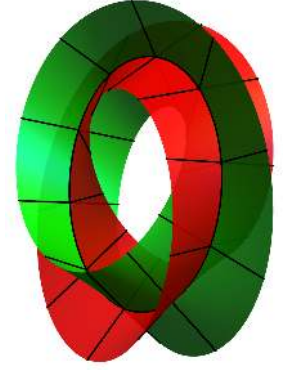
©



Geri dönüşüm sembolünün bir Möbius şeridi olduğunu fark etmiş miydiniz?

©

2016 Rio Olimpiyat Kazanına bakın. Çok sayıda dönen menteşenin bir araya gelmesiyle oluşan bir çember şeklindedir.



Her menteşenin dört kolu vardır, yani kazan çok sayıda bölümden oluşur. Bu, yandaki resimdeki gibi, ortak kemerleri boyunca kesişen iki Möbius şeridini temsil ediyor; kontrol edin.

Aşağıdaki resimler, bir Möbius şeridinde istisnai bölünün çöküşünü gösteriyor.

Anthony Howe'nin yaptığı hareketli bir heykel. ©



Son resim, küre içine daldırılmış, iki adet çifte noktası olan kapalı bir ilmek üzerinde bir konidir. Bir söndürme gönderiminden

"Möbius"ü indirgemek, levha üzerine renkli kurşun kalemler, tahta ve metal, Sylvie Pic. ©

bekleneceği gibi, bir çember üzerinde bir koni, dairedir. Koniyi bir düzlemlle keserek bir Descartes yaprağı elde ederiz. Koninin denklemi, aşağıdaki tel modellerdeki gibi, $x^3 + y^3 - 3xyz = 0$ olabilir.



Üçüncü dereceden bir koni.

©

Mikroskobumuzu sınyalım

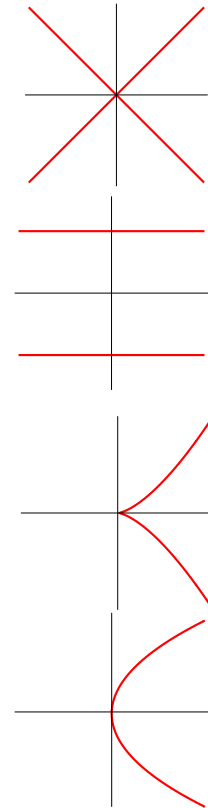
Ψ^{-1} mikroskobumuzun ne kadar verimli olduğunu sınyalım.

Herhangi bir $X \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin *katı dönüşümü*, $\Psi^{-1}(X \setminus \{(0,0)\})$ önimgesinin \mathcal{M}' deki kapanışıdır.

Önce $x^2 - y^2 = 0$ 'la verilen, kesişen iki doğru için deneyelim. $y/x = t$ alalım. Bu, $y = \pm x$ ile birlikte, $tx = \pm x$ verir. Katı dönüşümü hesapladığımız için başnoktanın dışında çalışıyoruz, bu yüzden $t = \pm 1$ elde ederiz. $t' = 1/t$ haritasında kolayca görülebileceği gibi $t = \infty$, katı dönüşümün içinde değildir. $t = \pm 1$ 'in \mathcal{M}' deki kapanışı, iki ayrık eğriden oluşur. Böylece, başnoktada çaprazlama kesişen iki pürüzsüz eğrinin katı dönüşümü, *ayrık pürüzsüz eğriler* oluşturur.

Peki ya $y^2 - x^3 = 0$ ile verilen topuk noktası için ne oluyor? Benzer biçimde, $t^2x^2 - x^3 = 0$ elde ederiz ve x^2 'yi sadeleştirerek $x = t^2$ buluruz. Böylece, \mathcal{M}' de (x, t) koordinatlarında katı dönüşüm, istisnai bölene ($x = 0$) teğet pürüzsüz bir parabol verir.

Şimdi de $y^2 - x^5 = 0$ bakalım. Katı dönüşüm, $t^2 = x^3$ 'tür, yani bir topuk noktasıdır. Tek bir patlatmanın yetersiz olduğu ve tekrar patlatmamız gerekeceği açık, tıpkı Newton'un algoritmasının her zaman ilk adımda sonlanmaması gibi.





Max Bill, "Unité tripartite", 1948-49, heykel, MAC/USP, São Paulo, Brezilya. Bu şekil, üç adet izdüşümsel düzlemin bağlantılı toplamından bir dairenin çıkarılmasıyla elde ediliyor. "Tripartite" (üç kısımlı) ifadesi, bununla mı ilgili acaba? ©

Möbius kolyeleri

Birkaç defa patlatmak

DÜZLEMDEKİ BİR NOKTAYI NASIL PATLATABİLECEĞİMİZİ GÖRDÜK. Bu yapıyı genelleştirmek mümkündür: *Pürüzsüz bir S yüzeyinde* verili bir p noktasını patlatarak, bir başka S_p pürüzsüz yüzeyi ve bir $\Psi_p : S_p \rightarrow S$ söndürmesi oluşturabiliriz. Burada p noktasının ters görüntüsü E_p istisnai bölendir; E_p 'nin elemanları p 'deki teğet doğrulardır ve E_p 'nin kendisi de S 'ye p noktasında teğet olan $T_p(S)$ düzleminden oluşturulan $P^1(T_p(S))$ izdüşümsel doğrusudur. İstisnai bölenin dışında Ψ_p gönderimi, $S \setminus \{p\}$ 'ye örten bir difeomorfidir.

Bu işlemi tekrarlayalım. İstisnai bölün $E_p = \Psi_p^{-1}(p)$ 'nin içinde bir p_1 noktası alalım ve S_{p_1} 'yi p_1 'de patlatalım. Sonuç, bir S_{p,p_1} pürüzsüz yüzeyi ve S_{p,p_1} 'den S_{p_1} 'ye bir Ψ_{p_1} söndürmesi olur. Bunun istisnai bölünü de $E_{p_1} \subset S_{p,p_1}$ 'dir. Ters görüntü $(\Psi_p \circ \Psi_{p_1})^{-1}(p)$, E_{p_1} 'nin Ψ_{p_1} altındaki katı dönüşümü ile E_p 'in birleşiminden oluşur. Bu birleşime $\Psi_p \circ \Psi_{p_1} : S_{p,p_1} \rightarrow S$ bileşik fonksiyonunun istisnai bölünü denir. Bu bölünün dışında, $\Psi_p \circ \Psi_{p_1}$ gönderimi $S \setminus \{p\}$ 'ye örten bir difeomorfidir.

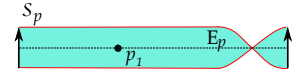
$(\Psi_p \circ \Psi_{p_1})^{-1}(p)$ 'nin içinde bir p_2 noktası seçelim ve işlemi sonlu kere olmak üzere istediğimiz kadar tekrarlayalım.

En sonunda ulaşacağımız sonuç şöyle olur:

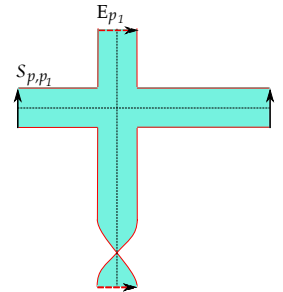
- Pürüzsüz bir \bar{S} yüzeyi ,
- $\bar{\Psi}^{-1}(S \setminus \{p\})$ 'yi $S \setminus \{p\}$ 'ye difeomorf şekilde gönderen pürüzsüz bir $\bar{\Psi} : \bar{S} \rightarrow S$ gönderimi.



Bir yüzeydeki bir noktayı patlatmak için o noktanın etrafındaki bir daireyi silin, o daireyi patlatın ve Möbius şeridinin kenarını dairenin tümleyeninin kenarına yapıştırın.

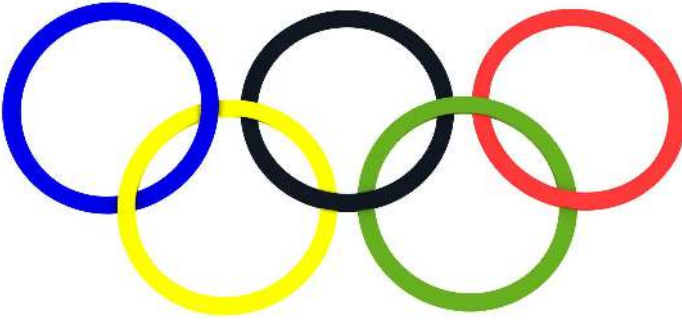


Bu resimlerde birbirine karşılık gelen oklar yapıştırılıyor. Bu bir Möbius şeridi.



İki kez patlatma.

\bar{S} 'nin kenarının bağlantılı olduğunu gözden kaçırmayalım. $\bar{\Psi}^{-1}(p)$ önimgesi *istisnai bölendir*; \bar{S} içine gömülü pürüzsüz çemberlerin sonlu bir birleşimidir. Bu çemberlerin herhangi ikisi ya ayrıktır ya da tek bir noktada çaprazlama kesişirler. Üç farklı çember kesişmez. Elde ettiğimiz resim olimpiyatların logosunu andırıyor. Aradaki fark olimpiyat halkalarının ayrıık olması; bizimkilerin bazıları kesişiyor.

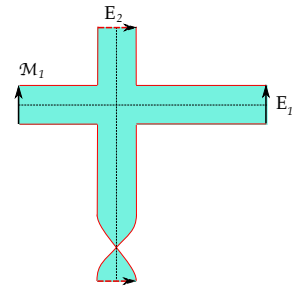


Patlatmaların bu bileşimi çok mercekli bir mikroskop olarak kullanılacak; tüm tekil noktaları incelememize de olanak verecek.

Mikroskop

Mikroskopumuzu kullanmadan önce onu biraz inceleyelim. Bir S dairesiyle başlayarak tek adımlık bir \bar{S} patlatması, bir Möbius şerididir. Sonlu sayıda patlatmalı genel durumda \bar{S} 'nin topolojisini resmedeceğiz.

İki adımlı patlatmayla başlayalım. Möbius şeridindeki bir noktayı patlatma işleminin sonucunu hayal etmemiz gerekiyor. Kemer olarak E istisnai bölgeni kabul eden \mathcal{M} diye bir Möbius şeridiyle başlayalım. Daha önceki gibi, E içinde bir p_1 noktası alalım ve \mathcal{M} 'yi p_1 'de patlatalım. Sonuç, bir noktada kesişen E_1 ve E_2 çemberlerini içeren bir \mathcal{M}_1 yüzeyi olacak. Burada E_1, E_2 'nin katı dönüşümü ve E_2 de ikinci patlatmanın istisnai bölgeni.



γ , bir S yüzeyinde bir ilmek olsun. S 'nin $\gamma(0)$ 'daki teğet uzayının bir yönlmesiyle başlayalım ve bunu γ boyunca takip edelim. İlmek başladığı noktaya geri döndüğü zaman yön ya ilk yönle aynı olur, ya da ters çevrilmiştir. Hangisinin geçerli olduğuna göre, γ 'ya *yönü koruyan* ya da *yönü ters çeviren* ilmek diyeceğim. Daha resmi bir dille bu, S 'nin temel grubundan (ya da ilk homolojisinden) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'ye bir homomorfi tanımlar.

Rio de Janeiro'daki olimpiyat oyunlarının logosuna ve bunun yön koruyan ve yönü ters çeviren ilmeklerine bir bakın.

Patlatılmış \mathcal{M}_1 Möbius şeridimize dönersek, E_1 'in yönü koruduğunu, E_2 'nin de yönü ters çevirdiğini göreceğiz.

E_2 'nin yönü ters çevirdiği açık olmalı. \mathcal{M} 'yi p_1 'de patlattığımız zaman, kemeri E_2 olan bir Möbius şeridi oluşturduk. E_1 'e dönersek, o da \mathcal{M} 'nin E kemerinin katı dönüşümü. E 'nin, \mathcal{M} 'de yönü ters çevirdiği bariz ama bu onun katı dönüşümünün de yönü ters çevirmesini gerektirmiyor. Aslında da bunun tam da tersinin olduğunu göreceğiz.

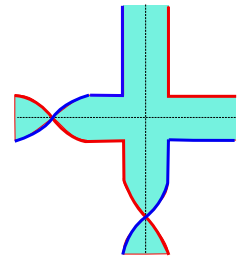
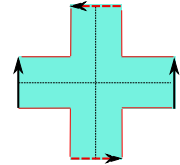
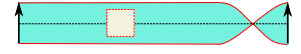
\mathcal{M}_1 'i oluşturmak için, ilk \mathcal{M} içinde bir delik açıyoruz ve kenarına bir başka Möbius şeridi yapıştırıyoruz. Topolojiyle uğraştığımız için pekala bir "kare delik" açabiliriz.

\mathcal{M} 'nin kenarının halka şeklinde küçük bir komşuluğunu silerek kare deliğimizin \mathcal{M} 'yi "kenardan kenara" kapladığını bile düşünebiliriz (Möbius şeridinin kenarının sadece bir çember olduğunu unutmadan). Bu durumda, karenin \mathcal{M} 'deki tümleyeni, bir başka kare olur. Öyleyse \mathcal{M}_1 'in inşası farklı bir şekilde yapılabilir. Bir Möbius şeridiyle başla, kenarında ayrık iki aralık seç, bir karenin karşı iki kenarını bu aralıklara yapıştır. Geriye bir soru kalıyor. İki kenarın yapıştırılması, iki farklı şekilde yapılabilir: bir bükmeyle ya da bükmeden.

Yukarıdaki inşa, şu şekilde görselleştirilebilir. Bir artı şekli düşünün. Üst ve alt kenarlarını bir bükmeyle yapıştırın, böylece artının düşey kısmı bir Möbius şeridi haline gelir. Düşey eksen, yönü ters çeviren E_2 eğrisidir.

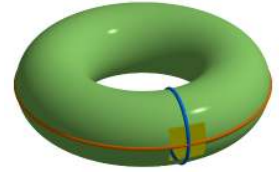
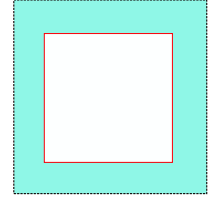
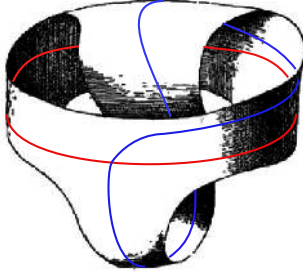
Şimdi, artının sağ ve sol kenarlarını birleştirmemiz, ve bunu da bükerek mi bükmeden mi yapacağımıza karar vermemiz gerek.

Önce bükerek yapmayı deneyelim. Ortaya çıkacak yüzeyin



kenarı bağlantılı değil; o zaman kendisi bizim \mathcal{M}_1 yüzeyimiz olamaz. Demek ki, bu iki kenar bükmeden yapıştırılmalı; zaten E_1 eğrisi gerçekten de yönü koruyor.

\mathcal{M}_1 için iyi bir resmimiz var. Bir arkadaşım, \mathcal{M}_1 'in en iyi resmini göstermemi tavsiye etti ☺! İstisnai bölüme kırmızı ve maviyle çizdim.



©

Birbirine geçirilmiş kalpler

Okuyurun aşağıdaki topoloji numaralarını denemesini öneririm.

Bir artı işaretiyle başlayalım, karşılıklı kenarları bükmeden yapıştıralım. Oluşan yüzeyi ortadaki artı boyunca (yani iki çember boyunca) kesip açalım. Sonuç kare şeklinde bir çerçevedir. Bunu tahmin eder miydiniz? Üç boyutlu uzayda bir simit düşünelim ve içinden bir kare çıkartalım. Sonra da onu meridyen ve paralel boyunca keselim. Geriye kalanın, içinde kare şeklinde bir boşluk olan bir kare olacağı aşikar; yani kare şeklinde bir çerçeve. . .

Şaşırtıcı ama, bu karşılıklı kenarları yapıştırılmış artı örneği, Gauss tarafından *Doppelring* adı altında incelenmişti. Stäckel⁷⁵, *Gauss als Geometer* başlıklı dikkat çekici makalesinde Gauss ve Möbius arasındaki bir sohbeti aktarıyor. Gauss, *Doppelring*'in bağlantılı bir kenarı olduğuna dikkat çekiyor. Daha da ilginç, kenarda *bağlı* iki nokta çiftini birleştiren birer *ayrık* yay olduğunu görüyor. Dairede bu tür bir kurulumun imkansızlığının, Gauss'un cebirin temel teoreminin ispatındaki kilit nokta olduğunu hatırlatırım.



©

⁷⁵ Stäckel. *Literaturberichte: Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß. Monatsh. Math. Phys.*, 32(1):A5, 1922. Gesammelt von F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger. Heft V: C. F. Gauß als Geometer. In Kommission bei B. G. Teubner in Leipzig, 1918.

Aynı artıyı tekrar ele alalım ve karşılıklı kenarları yine birbirine yapıştıralım, fakat bu sefer bükerek. Elde ettiğimiz şekli iki çember boyunca kesip açalım. Sonuç...

Aslında nasıl büküğünüze göre değişiyor. Esasen soyut bir yüzey olarak iyi tanımlı; her biri bir halkaya homeomorf olan iki tane bağlantılı parçası var. Ama uzay içindeki gömülüş şekli, bükmelere göre değişiyor. Deneyin!

En etkileyici sonuç, her iki taraf da büküldüğünde, ama birbirinden farklı şekilde (sağa ve sola diyelim) büküldüğünde, ortaya çıkıyor. Bu, bir çift birbirine geçmiş kalp ortaya çıkartıyor.



Okur, Tadashi Tokieda'nın Youtube'da bu konu hakkındaki (iki bölümlük) [Beklenmedik şekiller](#) adlı sunumuna mutlaka bakmalı.

©

Son olarak, bir tarafı bükerek, diğer tarafı bükmeden yapıştırdığımızda bağlantılı kenarıyla birlikte patlatılmış Möbius şeridimizi elde ederiz. Peki onu iki istisnai çemberi boyunca kesip açarsak ne elde ederiz? Bu kolay, zira patlatma işlemi istisnai bölgenin dışarısında bir homeomorfidir; yani delinmiş daireye homeomorf bir şey elde ederiz. Hakikaten de, elde ettiğimiz bir kare çerçevedir. Bu çerçevenin uzaya gömülme şekli kullandığımız bükmeye göre değişir. Bu toposihir numaralarına çalışın!

Daha çok noktayı patlatmak

Şimdi daha çok noktanın patlatıldığı durumu tarif edeceğim.

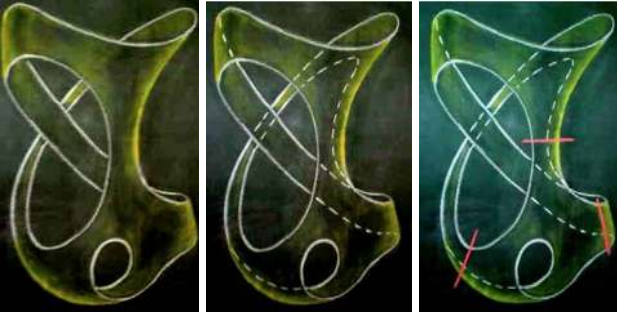
Ortaya çıkan yüzeyin topolojisini tarif etmek kolaydır. Bir noktayı patlatmak, yüzeyde bir delik açıp kenara bir Möbius

şeridi yapıştırmakla aynı şey. Diğer bir deyişle patlatma işlemi, izdüşümsel düzlemle *bağlantılı toplam* almaya denk.

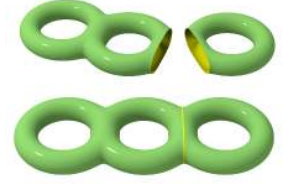
Verili M_1 ve M_2 diye iki yüzeyin $M_1 \# M_2$ diye gösterilen bağlantılı toplamı, bu yüzeylerden birer daire silip bunları yeni oluşan kenar boyunca yapıştırarak elde ediliyor. İzdüşümsel düzlemde bir daire silince bir Möbius şeridi elde ettiğimizi daha önce gördüğümüz için, patlatmanın topolojik etkisinin izdüşümsel düzlemle bağlantılı toplam olduğunu söyleyebiliriz.

Böylece, bir daireyi art arda k kere patlatınca ortaya çıkan yüzey, k tane izdüşümsel düzlemin bağlantılı toplamından bir daire eksiltilecek şekilde elde edilir. Tek bir kenar parçası olan her tıksız, yön verilemez yüzeyin bu tür bir yüzeye homeomorf olduğunu hatırlayalım; üstelik $1 - k$ sayısı da böyle bir yüzeyin Euler-Poincaré karakteristiği olarak bilinir. Örneğin ⁷⁶ ve ⁷⁷ kitaplarına bakabilirsiniz. Ancak bu, sonucun ancak bir kısmının tarifi zira hala istisnai bölünün konumunu ve doğasını tarif etmemiz gerekiyor. Buysa, yalnızca k 'ye değil, aynı zamanda patlatmak için seçtiğimiz k adet ardışık noktaya da bağlı.

Bu bölümün başındaki görsele, Max Bill'in nefis heykeline bakın. Ton Marar'ın makalesinin⁷⁸ bir paragrafı, bu heykelin *üç izdüşümsel düzlemin bağlantılı toplamını* (eksi bir daire) temsil ettiğini göstermeye adanmış. Bu, aynı makaleden alınmış aşağıdaki resimlerde açıklanıyor.



Yine aynı makale, bu yüzeyin, Francis'in daha önce adı geçen kitabından esinlenmiş bir başka versiyonunu da içeriyor (sayfa 101).



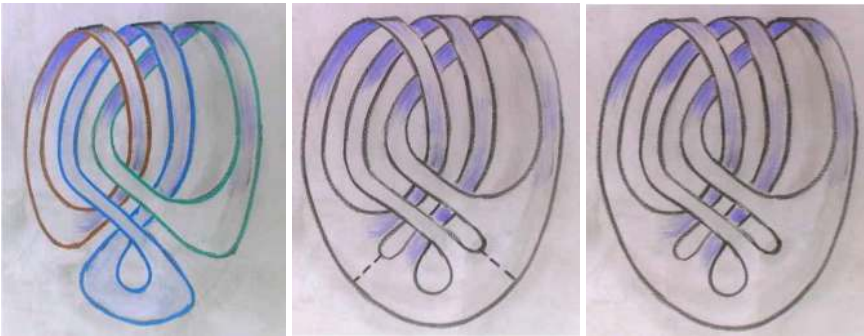
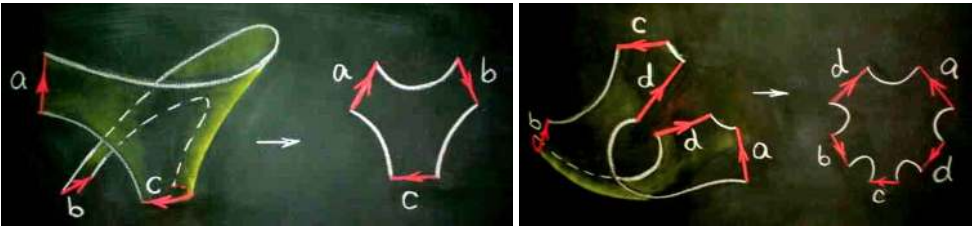
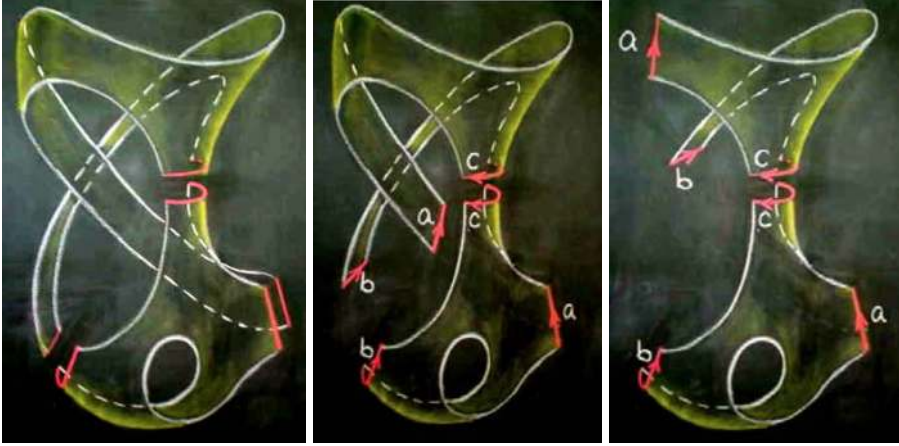
©

Burada yönlemeyle ilgili biraz hassas bir nokta var. Delinmiş iki yüzey iki farklı şekilde yapıştırılabilir zira kenar çemberinde iki farklı yön seçilebilir. Fakat yönlü yüzeylerin yönü ters çeviren homeomorfileri vardır. Bundan yola çıkarak, bağlantılı, yön verilmemiş yüzeylerde (bu yüzeylere yön verilebilse de verilemese de) bağlantılı toplamın hakikaten de iyi tanımlı olduğunu gösterin.

⁷⁶ S. Barr. *Experiments in topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1989. 1964 orijinalinin tekrar basımı.

⁷⁷ V. G. Boltyanskiĭ and V. A. Efremovich. *Intuitive combinatorial topology*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

⁷⁸ T. Marar. *Aspectos topológicos na arte concreta*, 2004. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, Universidade Federal da Bahia.



Bölenlerin kolyeleri

Hala izdüşümsel düzlemlerin bağlantılı toplamı *içindeki* istisnai bölenin topolojisini tarif etmemiz gerekiyor.

İlk adımda bir sürpriz yok: bölün, Möbius şeridinin kemeri.

İkinci adımda, Möbius şeridinin bir noktasını patlatıyoruz. İlgilendiğimiz durum, daha önce bahsettiğimiz E_1 üzerindeki bir noktanın patlatılması. Cebirsel geometriciler, izdüşümsel doğruyu bir doğru olarak düşünüyorlar. . . ve onu bir doğru olarak çiziyorlar, halbuki o aslında bir çembere homeomorf. . .

Üçüncü patlatmaya geldiğimizde noktayı E_1 üzerinde, E_2 üzerinde ya da E_1 ve E_2 'nin kesişiminde seçebiliriz. Tüm bu durumlarda, patlatılmış yüzey *üç izdüşümsel* düzlemin bağlantılı toplamıdır (eksi bir daire), yani Max Bill'in yüzeyi. Ancak, istisnai bölünün bu yüzey üzerindeki konumu aynı değildir. Okur, bir alıştırma olarak, mümkün olan üç istisnai bölüni heykelin üzerinde (zihninde) çizmeye çalışmalı.

Genel durumu tarif etmek artık kolay. Kombinatorik olarak, bir istisnai bölünün parçaları bir ağaç oluşturur.

Her patlatmayla bir önceki kolyeye yeni bir Möbius şeridi eklenir.

Ancak bu, yeni şeridin eklendiği şeridin yönlülüğünü değiştirir.

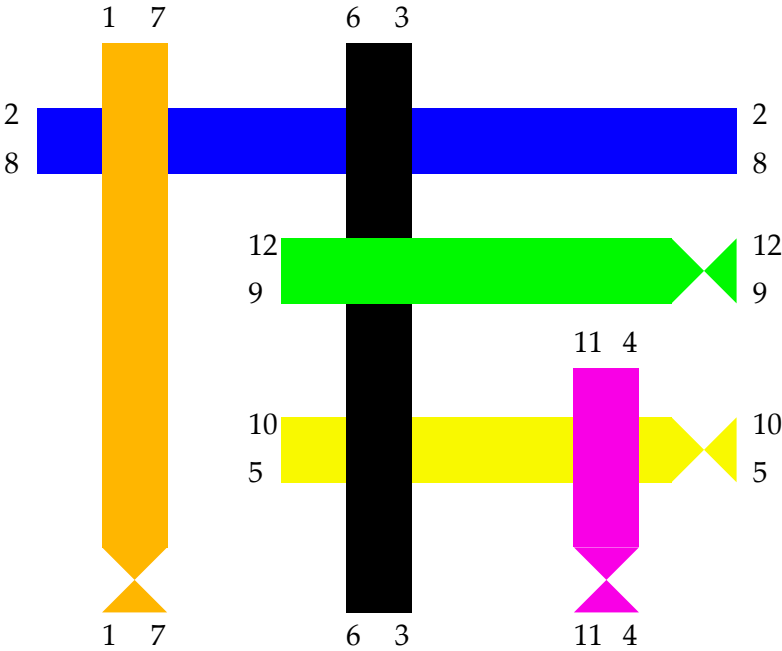
Bunu ispatlamak için bir S yüzeyinde kapalı bir γ eğrisini düşünelim. γ 'yı kendisine çapraz bir γ' oluşturacak şekilde hafifçe ittirelim ve $\gamma \cap \gamma'$ 'deki kesişim noktalarının sayısını mod 2'de sayalım. Buna γ 'nın *kendiyle kesişimi* denir. γ 'nın yönü korumasına ya da yönü ters çevirmesine göre bu sayı 0 ya da 1 olur.

Şimdi $\gamma \subset S$ 'nin bir p noktasını patlatacağız. Yine p 'den geçen bir γ' seçelim ve resmi p 'de patlatalım. $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\gamma}'$ katı dönüşümlerinin γ ve γ' 'nden tam olarak bir tane daha az kesişim noktası var çünkü p 'deki teğetler farklı. Buradan görürüz ki $\bar{\gamma}$ eğrisinin kendiyle kesişimi γ 'nın kendiyle kesişimi, eksi (ya da artı, zira mod 2'de sayıyoruz!) bir.

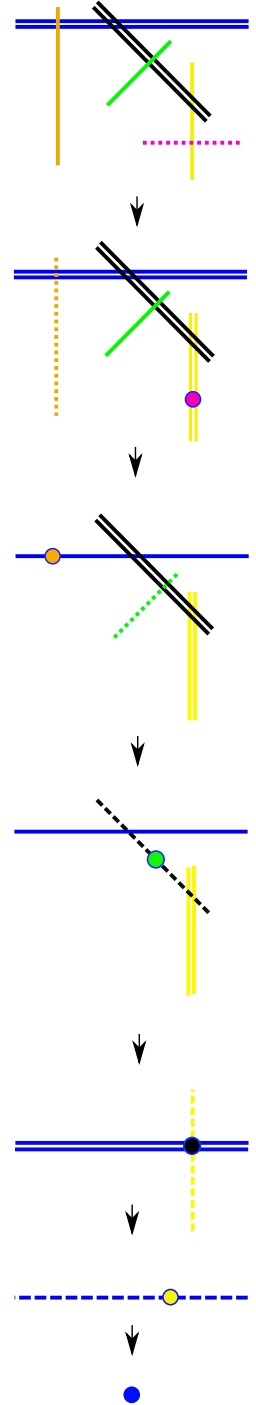
Onları bağışlamak için, karmaşık sayılar üzerindeki izdüşümsel doğrunun bir 2-küreye, p -sel sayılar üzerindeki de Cantor kümesine homeomorf olduğunu hatırlatmalıyım.

Bir örneğe bakalım. Kenardaki resim, altı ardışık patlatmayı gösteriyor. Büyük noktalar patlatmaların merkezlerini temsil ediyor. Doğrular izdüşümsel doğruları temsil ediyor (bunların aslında birer çember olduğunu unutmayalım). Her adımda ortaya çıkan kesikli çizgiler yeni bölenleri temsil ediyor. Böylece aşağı doğru oklarla temsil edilen söndürme gönderimleri, bu kesikli doğruları aynı renkli noktalara söndürüyor. Çift çizgiler, yönü koruyan parçaları temsil ediyor. Bu işlemin sonundaki istisnai bölen altı çemberden oluşuyor.

Artık buna karşılık gelen, dört Möbius şeridi ve iki halkadan oluşan kolyeyi çizebiliriz. Altı şeridin karşılıklı kenarları, resimde önerildiği şekilde yapılandırılmalı.

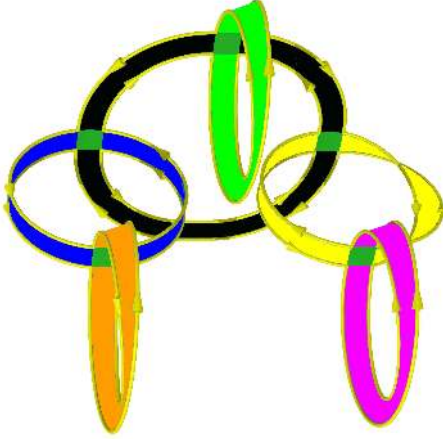


Kenarın hakikaten de olması gerektiği gibi bağlantılı olduğunu teyit etmelisiniz. Örneğin kenar boyunca gidin ve 1'den 12'ye sayıları takip edin, ta ki tekrar 1'e gelinceye kadar.



Tesisatçılık

Bir önceki örneğin bir başka görüntüsü şöyle.

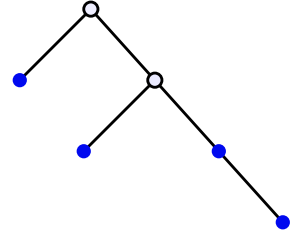


⁷⁹ B. Ozbagci and P. Popescu-Pampu. [Generalized plumbings and Murasugi sums](#). *Arnold Math. J.*, 2(1):69–119, 2016.

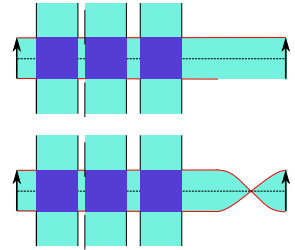
Bir topolog, bu yüzeyin birkaç Möbius şeridi ve halkadan *tesisat döşeyerek* elde edildiğini söylerdi. Bu işlem çok basit. Elinizde kenarı boş olmayan S_1 ve S_2 diye iki yüzey olduğunu varsayın. $[-1, 1]^2$ karesini S_1 ve S_2 içine gömen i_1 ve i_2 gönderimlerini seçin ama $i_1(\{\pm 1\} \times [-1, 1])$ ve $i_2([-1, 1] \times \{\pm 1\})$ görüntüleri S_1 ve S_2 'nin kenarlarının içinde kalsın. Şimdi, her $(x, y) \in [-1, 1]^2$ için, $i_1(x, y)$ ve $i_2(x, y)$ 'yi birbiriyle özdeşleştirin. Sonuç, S_1 ve S_2 'nin i_1, i_2 boyunca tesisatlamasıdır. Bu kenarı olan bir yüzeydir (ve köşeleri kolayca pürüzsüz hale getirilebilir). Bu inşanın bazı çeşitlemeleri için ⁷⁹ya bakın.

Şimdi köklü düzlemsel bir ağaçla başlayalım. Her boğum için, bir halka ya da bir Möbius şeridi alalım. Şimdi tüm bu şeritleri birlikte, ağaç tarafından verilen taslağı kullanarak tesisatlayalım. Her şerit, kenardaki resimdeki gibi, ağaçtaki çocuklarıyla ilişkilendirilmiş tüm şeritlere tesisatlanıyor. Halka ve Möbius şeridinin, karenin karşılıklı kenarlarını yer değiştirecek şekilde **dört homeomorfi olduğu**, bu yüzden bu tür bir şeridi tesisatlama işleminin iyi tanımlı olduğunu gözden kaçırmayın. Bu tesisatlama işleminin sonucu, kenarlı bir S yüzeyi.

Her şeridin (halkanın ya da Möbius şeridinin) kemerinde bir



Mavi noktalar Möbius şeritlerine karşılık geliyor, beyaz olanlar da halkalara.



çember var. Bu çemberlerin birleşimi bir $E \subset S$ çizgesi tanımlıyor. S yüzeyimiz bir dizi patlatmanın sonucu olarak inşa edilmemiş olsa bile, E' 'ye bölen diyebiliriz. S' 'nin E' 'ye öyle bir π izdüşümü vardır ki $\pi^{-1}(x)$ ters görüntüsü, eğer x E' 'nin bir olağan noktasıysa bir, değilse de iki yaydan oluşur. E' 'yi tek bir noktaya çökerterek oluşturulan topolojik uzayı S/E ile gösterelim. Eğer S , bir dizi patlatmanın sonucuysa S/E' 'nin kapalı bir daire olduğunu ve S' 'nin S/E' 'ye izdüşümünün de söndürme gönderimi olduğunu biliyoruz.

Alıştırma: S' 'nin bağlantılı parçalarının sayısı k olsun. S/E uzayının, tabanı k çemberin ayrık bileşiminden oluşan bir koniye homeomorf olduğunu gösterin.

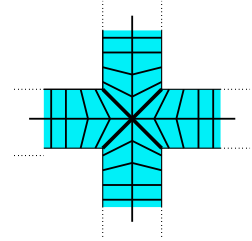
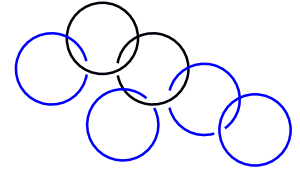
Özellikle, S/E bölüm uzayı, ancak ve ancak S' 'nin kenarı bağlantılıysa bir daireye homeomorftur.

Aşağıdaki alıştırmaya, S' 'nin kenarının bağlantılı olup olmadığını, doğrudan taslağı kullanarak kontrol etmemizi mümkün kılan bir ölçüt veriyor. Bu, bir kağıda resmi çizip kenarı dikkatle takip etmekten daha kolay. Bu alıştırmamızın çözümü, yüzeylerin homolojisini biraz bilmeyi gerektiriyor. Ağacın n tane boğumu olduğunu varsayalım. Girdileri $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'de olan, simetrik, $n \times n$ bir A matrisini şöyle tanımlayalım. Eğer i boğumu bir halkaysa $a_{ii} = 0$ alalım; bir Möbius şeridiyse de $a_{ii} = 1$ olsun. $i \neq j$ durumundaysa, i, j ağaçta komşu iken $a_{ij} = 1$ alalım, değilse de 0.

Alıştırma: S' 'nin kenarının bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ üzerinde) tersinin olmasıdır. Gösterin.

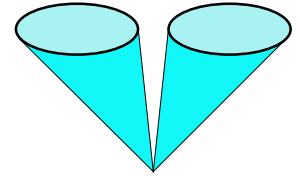
İpucu: Şunları kontrol edin:

- $\pi : S \rightarrow E$ izdüşümü ve birebir $E \subset S$ gönderimi, $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ve $H_1(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ arasında ters izomorfiler tanımlar.
- $H_1(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ uzayının bir tabanı, n adet şeridin kemerleri tarafından verilir.
- $H_1(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ üzerindeki simetrik kesişim formu, A matrisi tarafından verilir.
- Kesişim formunun çekirdeği, $H_1(\partial S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 'nin $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 'deki görüntüsüdür.



$\pi : S \rightarrow E$ izdüşümünün lifleri.

S' 'den E bölünene giden π' 'yi S' 'den S/E' 'ye giden Ψ söndürme gönderimiyle karıştırmayın.



İki çember üzerindeki koni.



1882 tarihli bir mikroskop. ©

Tekilliklerin çözümlenmesi

ŞİMDİ, MİKROSKOBUMUZU TEKİLLİKLERİN DOĞASINI İNCELEMELİK İÇİN KULLANACAĞIZ ve esas olarak Max Noether⁸⁰'e ait bir teoremi kanıtlayacağız.

Bir dalı patlatmak

Düzlemde $F(x, y) = 0$ şeklinde bir denklemlle tanımlanan gerçel analitik bir eğrinin tekil bir noktasına bakalım.

Bu eğrinin gerçel bir dalını, yani şu şekilde bir çözümlü bulduğumuzu varsayalım:

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y = \sum_{k \geq 1} a_k t^k.$$

$a_k \neq 0$ olacak şekildeki k tamsayılarının oluşturduğu $I \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ kümesine bakalım. m 'yle birlikte I 'nin elemanlarının en büyük ortak böleninin 1 olduğunu varsayabiliriz. Diğer bir deyişle, \mathbb{Z} 'nin I ve m tarafından üretilen altgrubu \mathbb{Z}' dir.

$a_\mu \neq 0$ olacak şekildeki en küçük tamsayıya $\mu \geq 1$ diyelim.

Eğer $\mu < m$ ise, $t \rightarrow 0$ 'a gittikçe y/x dizisi "sonsuzaya gider" ki bu da geometrik olarak $x = 0$ düşey ekseninin başnoktadaki dala teğet olduğu anlamına gelir.

Eğer $\mu = m$ ise, başnoktadaki teğet $y = a_m x$ doğrusudur.

Şu ana kadar Newton'un yaptığı gibi, y 'ye x 'in bir "fonksiyonu" olarak baktık. Şimdiyse daha çok $F(x, y) = 0$ eğrisiyle ilgileniyoruz, böylece x ve y 'nin rollerini değiştirebiliriz.

Böylece her zaman $\mu \geq m$ olduğunu varsayabiliriz. Gerçekten de τ 'yu $\pm y = \pm \sum_{k \geq \mu} a_k t^k$ 'nin bir μ 'üncü kökü olarak tanımlayarak

⁸⁰ M. Noether. [Rationale Ausführungen der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen.](#) *Math. Ann.*, 23:311–358, 1883.



Max Noether (1844–1921). ©

τ' 'yu t cinsinden bir kuvvet serisi yaparız. x ile y 'nin rollerini değiştirince artık $y = \tau''$ olur ve x de τ' 'nin tam kuvvetleri cinsinden bir seri olur.

Eğer dalımız tekilse, yani $m > 1$ ise, şu şekilde ilerliyoruz.

1. β_1 , I' 'nin içinde m 'nin tam katı olmayan en küçük tamsayı olsun.
2. β_2 , I' 'nin içinde olan ama m ve β_1 tarafından üretilen grubun içinde olmayan en küçük tamsayı olsun.

I' 'nin içinde \mathbb{Z}' 'yi üreten bir tamsayılar ailesi elde edene kadar bu şekilde devam edelim. Bu, $m < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_g$ şeklinde sonlu bir tamsayı dizisi tanımlar. Bu listeye *dalın Puiseux karakteristiği* denir. Daha önce de karşılaştığımız bir durum: Bu tanım Puiseux'nün değildir, daha sonradan Halphen ve Smith⁸¹ tarafından yapılmıştır. Zavallı Puiseux!

Dalımızdaki bir patlatmanın etkisine bakalım. Uygulamada, bunun başnoktadan ve (x, y) 'den geçen doğrunun eğimi $y_1 = y/x$ olacak şekilde (x, y_1) koordinatlarına bakmaya karşılık geldiğini hatırlayın. Bu (x, y_1) koordinatlarında şu eşitlikler geçerlidir:

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y_1 = \sum_{k \geq \mu} a_k t^{k-m}.$$

β_1 'in m 'ye Öklidyen bölümü

$$\beta_1 = mq + m_1 \quad \text{with} \quad (0 < m_1 < m)$$

verir ve böylece

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y_1 = a_m + a_{2m}t^m + \dots + a_{qm}t^{(q-1)m} + \sum_{k \geq \beta_1} a_k t^{k-m}$$

olur. Şimdi tekrar başnoktaya getirmek için tekilliği ötelimiz; başka deyişle $y_2 = y_1 - a_m$ diyerek

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y_2 = a_{2m}t^m + \dots + a_{qm}t^{(q-1)m} + \sum_{k \geq \beta_1} a_k t^{k-m}$$

elde ederiz. $q \geq 2$ ise tekrar patlatıp ötelimiz. q adımın ardından

$$x = \pm t^m \quad ; \quad y_q = \sum_{k \geq \beta_1} a_k t^{k-qm}$$



Bu prosedür karmaşık görünebilir. Öklit algoritmasına çok benzerdir. Verili iki $0 < a \leq b$ tamsayısı için, b' 'den a çıkararak elimizde $a, b - a$ kalır. Eğer $0 < a \leq b - a$ ise böyle devam eder, $a, b - 2a$ elde ederiz. İlk tamsayı ikinciden küçük olana kadar devam ederiz. Bu tam olarak b' 'nin a' 'ya Öklidyen bölümünden başka bir şey değildir. Sonra iki tamsayının yerlerini değiştirir ve devam ederiz. Algoritma sonlu sayıda adımda, ikinci tamsayı 0 olduğunda son bulur. Bu son adımda birinci sayı a ile b' 'nin en büyük ortak bölenidir. Örneğin $(6, 9) \rightarrow (6, 3) \rightarrow (3, 6) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 0)$. Bizim şu anki daha karmaşık durumumuzda da benzer şekilde hareket ediyoruz. Kaç kere gerekiyorsa o kadar kere patlatıyoruz ve sonra da x ile y' 'nin rollerini değiştiriyoruz ve devam ediyoruz. . .

⁸¹ E. R. Garcı a Barroso, P. D. González Pérez, and P. Popescu-Pampu. *Variations on inversion theorems for Newton–Puiseux series*. *Math. Ann.*, 368(3-4):1359–1397, 2017.

elde ederiz. $\beta_1 - qm = m_1 < m$ olduğundan düşey eksen bu son eğriye başnoktada teğettir. Daha önceki gibi iki koordinatın rollerini yer değiştirerek

$$y_q = \pm \tau^{m_1} \quad ; \quad x = \sum_{k \geq 1} b_k \tau^k.$$

elde ederiz. Diğer bir deyişle, belli bir sayıda patlatmadan sonra yeni eğrinin katlılık sayısı $m_1 < m$ olur. Bu şekilde devam ederek sonlu sayıda adımdan sonra eğri pürüzsüz olur.

Böylece şunu kanıtlamış olduk:

Teorem. *C, analitik bir $F(x, y) = 0$ eğrisinin başnokta civarında bir dalı olsun. O zaman, C'nin uygun bir patlatmalar silsilesi altındaki katı dönüşümü pürüzsüz bir eğridir.*

Tüm dalları patlatmak

Başnoktanın komşuluğunda bir $F(x, y) = 0$ eğrisi birkaç daldan oluşur. Bu dalların herbirinin tekilliklerini yok etmeyi öğrendik ama bu şekilde elde edeceğimiz çok sayıda pürüzsüz yüzeyin birbirlerine göre durumları epey karmaşa yaratabilir. Sicimleri birbirinden ayırmak için başka patlatmalar yapmak gerekir. Yukarıdaki teoremi kullanarak tüm dalların tekilliklerini birer birer yok edebiliriz. Elimizde,

– bir S yüzeyinden başnoktanın komşuluğuna bir Ψ söndürme gönderimi,

– Ψ tarafından başnoktaya gönderilen bir $E \subset S$ istisnai bölüme var; böylece eğrimizin katı dönüşümü belli sayıda pürüzsüz eğrinin birleşimi oluyor. Bu eğrilerin her biri istisnai bölüme tek bir noktada kesişir.

Eğer tüm bu noktalar birbirinden farklıysa görevimiz tamamlanmış olur: $F = 0$ tekil eğrimiz, ayrı pürüzsüz eğrilerin birleşimi olarak “tekilliklerinden arındırılmış”tır.

Geri kalan tek görevimiz, istisnai bölüme aynı p noktasından geçen belli bir sayıdaki pürüzsüz yüzeyi halletmek. Bu eğrilerin bir kısmının bölüme teğet olabileceğini unutmayalım.

p noktası E 'nin bir ya da iki parçasına ait olabilir. Bu parçayı (ya da parçaları) p' 'den geçen pürüzsüz yüzeyler listemize

İşin doğrusu, patlatma işlemini sadece gerçek yüzeylerin gönderimleri için tanımladık. Benzer gönderimler karmaşık sayılar üzerinde de tanımlanabilir. Bu durumda ardışık patlatmaların sonucu, birbiriyle çapraz şekilde kesişen artık karmaşık izdüşümsel doğruların birleşiminden müteşekkil bir istisnai bölüme içeren holomorf bir yüzeydir (yani karmaşık boyutu 2 olan bir uzay). Hatta bu patlatma işlemleri herhangi bir cisim üzerindeki cebirsel eğriler bağlamında bile tanımlanabilir. Bu bölümde öğrendiklerimizin büyük çoğunluğu, bu genel duruma harfi harfine uygulanabilir.

3 ya da daha çok boyutta, tekilliğin yok edilmesi çok daha ince bir iştir ve sadece noktaları patlatmak bu iş için yeterli olmaz. Hironaka, 1964'te karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde tanımlı herhangi bir cebirsel varyetenin tekilliklerinin yok edilebileceğini ispatladı. Bu ispatın sindirmesi çok zor bir beceri timsali olduğunu birçok defa duydum. Fakat J. Kollár, tekilliklerin yok edilmesi üzerine 2007 yılında verdiği bir dersin notlarında (Princeton University Press) şöyle diyor: “Tekilliklerin yok edilebileceğinin ispatının çok zor olduğuna dair süregelen algı yavaş yavaş gerçekten uzaklaştı. ... bu ispatı başlangıç düzeyinde bir cebirsel geometri dersinin son iki haftasında vermek mümkündür.” O zaman, neden Kollár'ın yazdıklarını okumayı denemiyorsunuz?

ekleyelim. Pürüzsüz yüzeylerin denklemleri p 'nin komşuluğunda, birbirinden farklı ve yakınsak f_i kuvvet serileri tarafından $y = f_i(x)$ diye verilecek şekilde (x, y) yerel koordinatları seçelim.

Sonra tekrar patlatarak yeni bir izdüşümsel doğru oluşturalım. Eğrilerin katı dönüşümleri pürüzsüz kalacak ve bölenin yeni parçasıyla, f_i 'lerin başnoktadaki türevlerine karşılık gelen bir noktada kesişecek. İki eğri başnoktada birbirine teğet olabilir yani iki f_i 'nin 0 'daki türevleri aynı olabilir, ama biz de tekrar patlatabiliriz. Bu işlem f_i 'leri bazı Taylor polinomlarıyla ayıracağız. Sonunda, birbiriyle ayrık ve istisnai bölene çapraz kesen pürüzsüz yüzeyler topluluğu elde ederiz. Hatta en sonunda elde ettiğimiz eğriler topluluğunun, bölene sadece olağan noktalarda kesiştiğini (yani iki çemberin kesişiminde kesişmediğini) varsayabiliriz.

Noether'in teoremi şu:

Teorem. C , başnokta civarında analitik bir eğri olsun. C 'nin uygun bir patlatmalar silsilesi altındaki katı dönüşümü, istisnai bölene çapraz pürüzsüz eğrilerin ayrık birleşimidir.

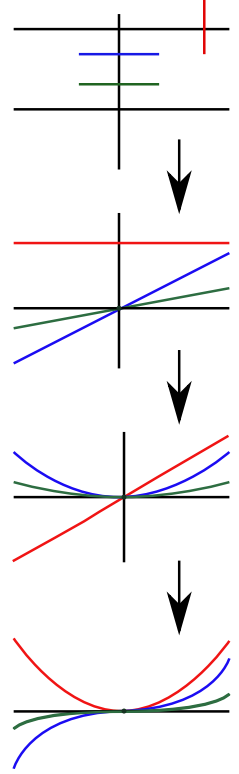
İkinci dereceden dönüşümler

Max Noether, *cebirsal eğrileri* global bağlamda çalışıyordu, analitik eğrilerin yerel tekillikleri bağlamında değil. Onun mikroskobu biraz daha farklıydı; *ikinci dereceden dönüşüm* adıyla anılıyordu.

Bir K cisimindeki $P^2(K)$ izdüşümsel düzleminin *Cremona* grubunu tanıtayım⁸². Bu grup, $K(x, y)$ iki değişkenli rasyonel fonksiyonlar cisminin *K-otomorfilerinden* oluşmaktadır. Böyle bir otomorfi, x ile y 'nin görüntüleri olan $f(x, y)$ ile $g(x, y)$ rasyonel fonksiyonlarıyla tamamen tanımlanır. f ve g diye iki fonksiyon, eğer $(x, y) \rightarrow (f(x, y), g(x, y))$ dönüşümü *birasyonel* ise, Cremona grubunun bir elemanını tanımlarlar.

$PGL(3, K)$ 'nin elemanlarıyla verilen izdüşümsel dönüşümler, düzlemin birasyonel izomorfileridir ama Cremona grubu çok daha büyüktür. Tipik bir örnek, karesi birim olan

$$\sigma : (x, y) \rightarrow (1/x, 1/y)$$



Kırmızı, mavi ve yeşil eğriler siyah bölene teğetler. Üç patlatma, bunları (yeni) bölene çapraz hale getiriyor.



Burada anayoldan biraz sapıyoruz.

⁸² S. Cantat. [The Cremona group in two variables](#). In *European Congress of Mathematics*, pages 211–225. Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.

kuadratik gönderimidir. Bunu homojen $[x : y : z]$ koordinatlarında da görmek mümkündür:

$$\sigma : [x : y : z] \rightarrow [yz : zx : xy].$$

Karesi birim olan bu gönderim, $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ ve $[0 : 0 : 1]$ noktalarında tanımlı değildir. Üstelik, bu noktaların ikisini içeren bir doğruyu, üçüncü noktaya çökertmektedir. O üç doğrudan uzakta, σ bir birebir eşlemedir ve hatta karesi birim olan bir gönderimdir. Ayrıca $[1 : 1 : 1]$ 'in σ 'nın bir sabit noktası olduğunu da gözden kaçırmayalım.

Eğer A, B, C, M noktaları $P^2(K)$ 'de bir izdüşümsel taban oluşturuyorsa (yani bunların herhangi üçü aynı doğru üzerinde değilse), bunları $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ ve $[1 : 1 : 1]$ 'e gönderen bir izdüşümsel ϕ dönüşümü vardır. Eşlenik $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$ gönderimi, A, B, C üçgeniyle (ve M sabit noktasıyla) ilişkilendirilmiş *kuadratik dönüşümdür*.

Max Noether patlatmalar yerine bu gönderimleri kullandı.

Buradaki avantaj, tüm işlemin yeni bir yüzeye bakmak gerekmeden izdüşümsel düzlemde yapılması. Dezavantaj ise, σ 'nın aynı anda hem patlatması, hem söndürmesi. Doğruları çökertiyor ve noktaları patlatıyor; böylece bazı tekillikleri yok ederken başkalarını yaratıyor.

Noether, $PGL(3, K)$ ve σ 'nın tüm Cremona grubunu ürettiğini gösterdi. Bu iddia gerçekten de doğru ama ispatı hatalıydı.

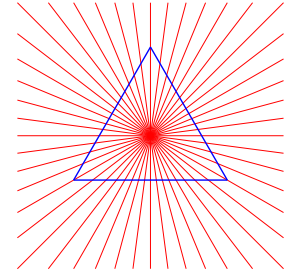
Bir $P(x, y) = 0$ polinom denkleminde tanımlı bir cebirsel eğriyle başlayalım. Tekil bir A noktası ve eğri üzerinde olmayan B, C noktaları seçelim, öyle ki AB, BC, CA , cebirsel eğriyi çapraz olarak kessinler (tabii ki A noktası hariç). Sonra, eğrinin A, B, C (ve şu an için önemli olmayan bir M sabit noktası) ile ilişkili ikinci dereceden dönüşüm altındaki görüntüsüne bakalım. A noktasını patlatalım. Eğrinin AB, BC, CA ile olan diğer kesişimleri, çapraz olarak kesişen pürüzsüz dallar oluşturur. Böylece, ne kadar kez gerekiyorsa o kadar patlatabiliriz ama karşılığında pürüzsüz eğrilerin çapraz olarak kesiştiği noktalar oluşturmuş oluruz.

Noether, teoremini şu şekilde ifade etti:

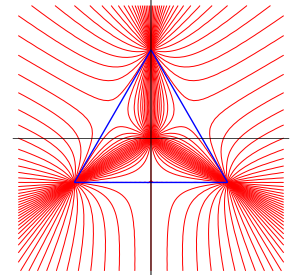
Teorem. Her cebirsel eğri, uygun bir Cremona otomorfişiyle tekillikleri sıradan olan (yani çapraz olarak kesişen pürüzsüz dallardan oluşan)



Luigi Cremona
(1830–1903).



Karesi birim olan, kuadratik bir dönüşüm, M 'den geçen doğruların oluşturduğu dergeyi A, B, C, M 'den geçen koniklerin oluşturduğu dergeye gönderir.

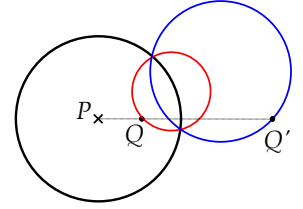


bir eğriye dönüştürülebilir.

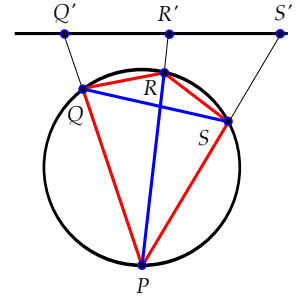
Düzlemde karesi birim olan bir başka ünlü dönüşüm vardır: *evirtim*. Altmış yıl kadar önce, tüm ortaöğretim öğrencileri buna aşinaydı. Ders kitapları şu tür alıştırmalarla doluydu: düzlem geometrideki en sevdiğiniz teoremi alın ve onu evirtim kullanarak dönüştürün; ve böylece yeni bir teorem elde edin. Tanımı çok basit. Düzlemde herhangi bir P noktası alın. Buna evirtimin *kutbu* diyeceğiz. Evirtim, her Q noktasını P, Q, Q' aynı doğru üzerinde olacak ve $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = 1$ eşitliği sağlanacak şekilde bir Q' noktasına gönderir. Bu evirtim, P kutbunda tanımlı değildir; P' yi içermeyen çemberleri çemberlere gönderir; P' yi içeren çemberleri P' yi içermeyen doğrulara gönderir. Eğer P , karmaşık düzlemin başnoktası ise bu $z \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/\bar{z} \in \mathbb{C}^*$ dönüşümünden başka bir şey değildir.

Sözgelimi, Fransız çocukların *Chasles bağıntısı* diye andığı teorem, yönlü bir doğru üzerindeki Q', R', S' noktaları için şu eşitliğin geçerli olduğunu söyler: $\overline{Q'R'} + \overline{R'S'} = \overline{Q'S'}$. Bunu evirtimle dönüştürürseniz Batlamyus teoremini keşfedersiniz: “Köşeleri bir çember üzerinde olan konveks bir $PQRS$ dörtgeninin karşıt kenarların çarpımının toplamı, köşegenlerin çarpımına eşit olur.”

Evirtim kuadratik dönüşümlerin özel bir halidir. Üçgenimizin ilk A köşesini $P^2(\mathbb{R})$ 'deki $[0 : 0 : 1]$ noktası, yani \mathbb{R}^2 düzleminin başnoktası, yani $0 \in \mathbb{C}$ noktası olarak seçelim. İkinci ve üçüncü B, C noktalarını *devirli noktalar* denen noktalar olarak seçelim, yani bir zamanlar öğrenciler arasında ünlü olan, aynı zamanda hem *sonsuzda* hem de *sanal* olan noktalar. Daha açıkçası, şu noktalar: $[1 : i : 0]$ ve $[1 : -i : 0]$ (burada $i, \sqrt{-1}$ demek). Bunlara *devirli* denmesini sebebi, Öklit düzlemindeki tüm çemberlerin bu noktalardan geçmesi. M sabit noktasını da örneğin $[1 : 0 : 1]$ olarak seçelim, yani $1 \in \mathbb{C}$ noktası. Okurumu bu örnekteki kuadratik dönüşümün tam olarak evirtim olduğunu göstermeye teşvik etmek isterim. Bu, rutin, otomatik bir hesapla ya da klasik izdüşümsel geometri kullanarak gösterilebilir. Bir (genel) doğrunun kuadratik dönüşüm altındaki görüntüsünün üçgenin üç köşesinden geçen bir konik olduğuna dikkat edin. Ayrıca devirli noktalardan geçen bir koniğin çember olması gerektiğine de fark



$$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = 1.$$

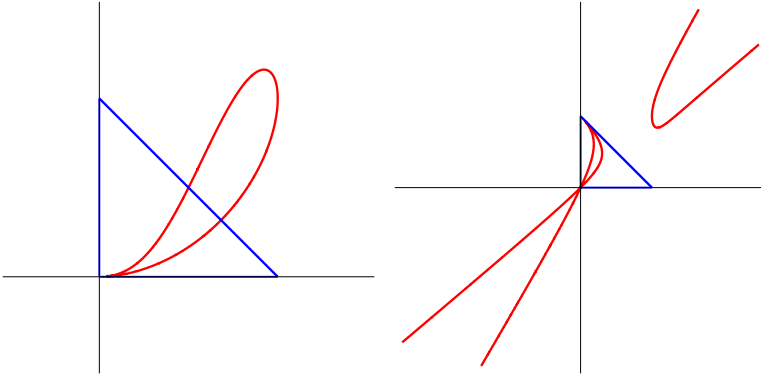


$$QR \cdot SP + PQ \cdot RS = PR \cdot QS.$$

Daha doğrusu, çemberlerin *karmaşılaştırılmasından* söz etmeliyim; bu, geçmiş sayfalarda örtük biçimde mevcuttu zaten. $[0 : 0 : 1]$, $[1 : i : 0]$ ve $[1 : -i : 0]$ noktalarının kümesi $P^2(\mathbb{R})$ 'de değil $P^2(\mathbb{C})$ 'de elbette. Yine de bunların $P^2(\mathbb{C})$ 'de tarif ettiği, karesi birim olan kuadratik dönüşüm $P^2(\mathbb{R})$ 'yi korur ve üstelik $P^2(\mathbb{R})$ 'de sonsuzdaki doğrunun tümleyeni olarak görülen gerçek Öklit düzleminde evirtim tanımlar. Kontrol edin!

edin. Kanıtın keyfine varın!

Bir örneği inceleyelim



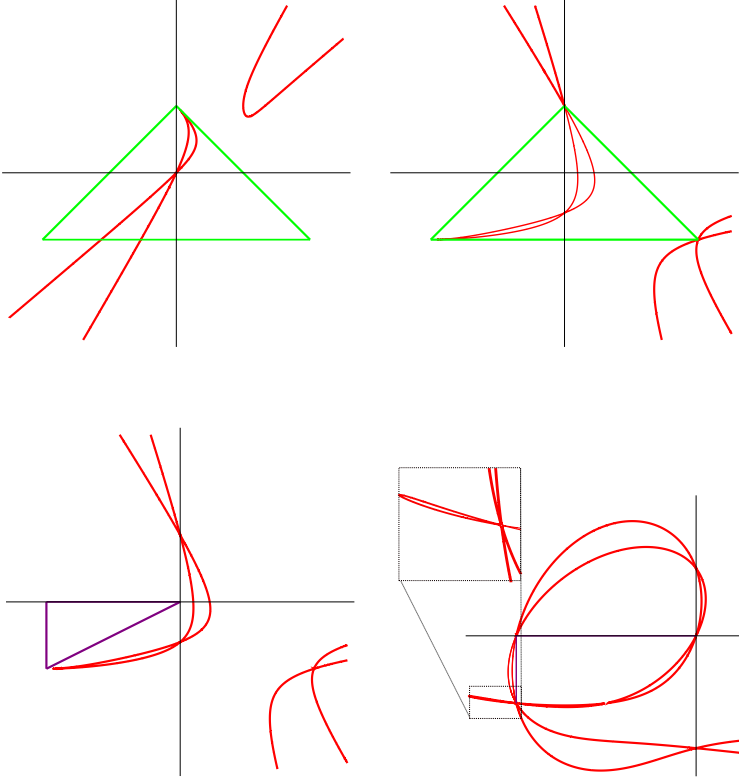
Denklemleri $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$ olan eğriye bakalım. Bu, Euler'in daha önce bahsettiğimiz *ramfoïd eğrilerine* bir örnektir, ve ikinci dereceden bir topuğa sahiptir.

Tekil noktada bir köşesi olan, geriye kalan her yerde eğriye çapraz olan (mavi) bir üçgen seçelim ve kuadratik bir dönüşüm uygulayalım. Sonuç yukarıda, sağdaki resimde (resmi biraz uzaktan çizdim). Ramfoïd eğrisinin tekil noktası üçgenin bir köşesi olduğundan dönüşüm bu noktanın komşuluğunda bir patlatma gibi davranır. Bu köşe üçgenin karşı kenarına patlatılır. Ama tekillik ilk adımda yok edilemeyecek kadar derindir. Yeni eğrinin hala (başka bir köşede) bir tekil noktası vardır. Üçgenin her kenarı karşı köşeye çökertilir ve bu da başnuktada bir çifte nokta yaratır.

Bir sonraki sayfadaki şekildeki gibi tekil noktada bir köşesi olan bir başka (büyük yeşil) üçgen seçelim. Karşılık gelen kuadratik dönüşümü bir kez daha uygulayalım. Sonuç sağ tarafta görülüyor. Yeni eğri sol alt köşede hala tekil ama diğer köşeler sıradan çifte nokta.

Bir başka (mor) üçgen seçelim. Bir kuadratik dönüşüm daha uygulamak, sonunda bizi tekillikleri pürüzsüz eğrilerin çapraz kesişimlerinden ibaret olan bir eğriye götürür.

Noether'in teoreminin güzelliği inkar edilemez ama bu *sıradan* tekillikler çok da basit değiller. Aşağıdaki alıştırma, çapraz olarak kesişen n tane pürüzsüz eğrinin hala gereğinden fazla bilgi içerdiğini gösteriyor.



Alıştırma (pek kolay sayılmaz): Diyelim ki bir noktada birbiriyle çapraz kesişen n tane pürüzsüz analitik eğrimiz var. $n = 1, 2, 3, 4$ için, düzlemde bunları n tane doğruya gönderen yerel analitik bir difeomorfi olduğunu gösterin. $n \geq 5$ için bunun doğru olmak zorunda olmadığını gösterin. Çapraz pürüzsüz n tane eğrinin *modül uzayını* (yerel difeomorfiler altında bölüm uzayını kastediyorum) tarif edebilir misiniz?

Bir başka yaklaşım daha mümkün. Bir K cismi üzerinde tanımlı d boyutlu $P^d(K)$ izdüşümsel uzayının teğet uzayını ele alalım. Bu teğet uzayı izdüşümsel hale getirelim ve böylece $2d - 1$ boyutlu bir cebirsel varyete üretelim. Bu varyete, daha yük-

k boyutlu pürüzsüz izdüşümsel bir cebirsel varyete, tanım itibarıyla, belli bir boyuttaki izdüşümsel uzaya gömülebilir. Genel konumda $2k + 1$ boyutlu izdüşümsel bir altuzaya izdüşümünü alarak bir gömme elde edebiliriz.

sek boyutlu bir $P^{2(2d-1)+1}(K)$ izdüşümsel uzayına gömülebilir. $P^d(K)$ 'de verili bir C cebirsel eğrisinin olağan noktalarındaki teğet doğrularının (Zariski) kapanışına bakabiliriz. Bu, d_1 boyutlu başka bir izdüşümsel uzayda tanımlı, başka bir C_1 cebirsel eğrisi verir. Bu işlemi yeteri kadar tekrarlayarak, d_n boyutlu bir izdüşümsel uzaya gömülü pürüzsüz bir C_n eğrisi elde ederiz. Şimdi $P^2(K)$ 'deki bir eğriye genel bir izdüşüm seçelim. Sonuç sonlu sayıda sıradan çifte noktası olan pürüzsüz bir \bar{C} eğrisi olur.

Theorem. Her cebirsel eğri, yegane tekillikleri iki pürüzsüz dalın çapraz olarak kesiştiği sıradan çifte noktalar olan bir başka eğriye birasyonel olarak denktir.

İyimser bir şekilde yaklaşp, her düzlemsel cebirsel eğrinin pürüzsüz bir düzlemsel eğriye birasyonel olarak denk olacağını bekleyebiliriz, ama bu beklenti, gerçekte olandan çok uzaktır. Derecesi d olan pürüzsüz düzlemsel bir eğrinin cinsi $(d-1)(d-2)/2$ 'dir, bu yüzden cebirsel bir eğrinin cinsi bu şekilde yazılabilen bir tamsayı değilse çifte noktalar var olmak zorundadır.

Biraz daha az iyimser bir şekilde yaklaşp, her cebirsel eğrinin bir Cremona dönüşümü kullanarak tekillikleri sıradan çifte noktalar olan bir eğriye dönüştürülebileceğini bekleyebiliriz. Heyhat! Bu da doğru değildir. Önceki teoremde verilen birasyonel denklik, bir Cremona dönüşümünden gelmeyebilir (bkz⁸³ sayfa 42).

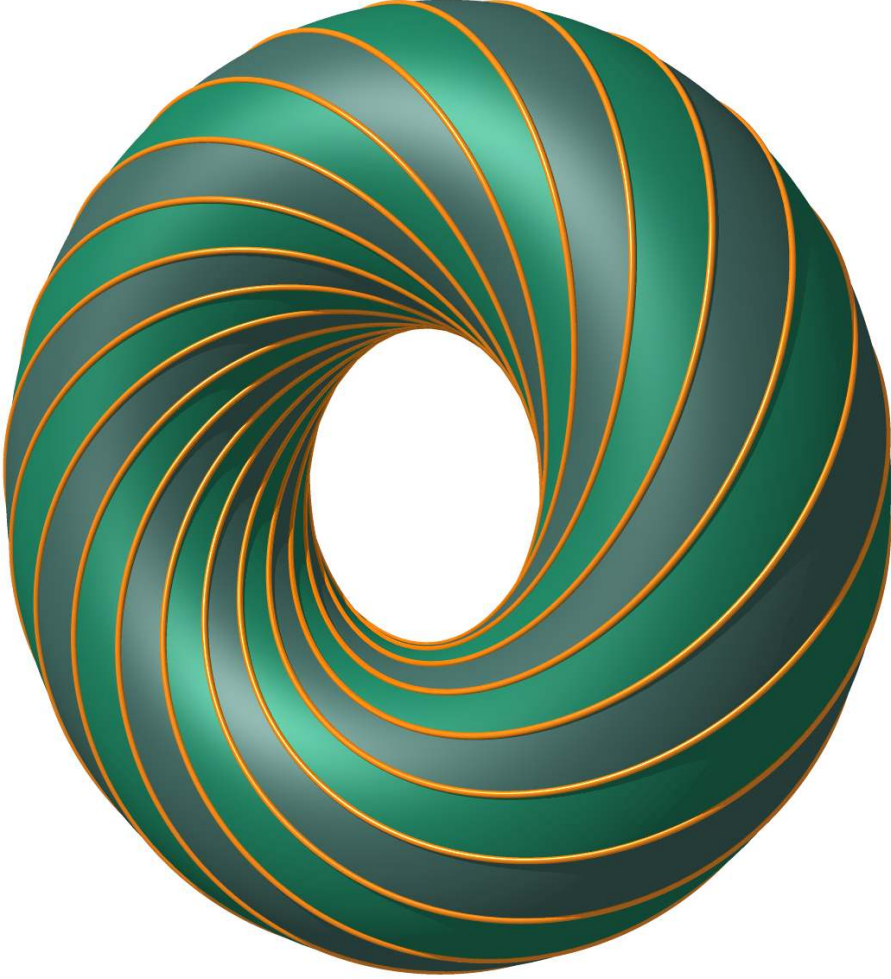
Tüm bu kavramların modern bir sunumu için, Wall ve Dolgachev'in kitaplarını^{84,85} tavsiye ederim; daha geleneksel bir yorum içinse Semple ve Roth'un kitabını⁸⁶...

⁸³ J. Kollár. *Lectures on resolution of singularities*, volume 166 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

⁸⁴ I. V. Dolgachev. *Classical algebraic geometry. A modern view*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

⁸⁵ C. T. C. Wall. *Singular points of plane curves*, volume 63 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

⁸⁶ J. G. Semple and L. Roth. *Introduction to algebraic geometry*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985. 1949 orijinalinin tekrar basımı.



Villarceau çemberleri adıyla anılan çemberlerle dolu bir Clifford simidi. Bu çemberlerden her biri, C^2 'de (orijinden geçen) bir doğruyla S^3 birim küresinin kesişimidir (ve 3 boyutlu uzaya stereografik izdüşümü alınmıştır). ©

3-küre ve Hopf liflenmesi

Karmaşık bir dünya

MATEMATİKÇİLERİN KARMAŞIK SAYILARI HAKİKİ BİRER SAYI OLARAK KABUL ETMESİ EPEY UZUN BİR SÜRE ALDI.

Cebirin yükselişiyle birlikte, gerçek denklemlerin karmaşık kökleri, kabul görmek için gittikçe artan bir ısrarla yaygara kopardılar.

Coolidge, o [harika kitabında](#)⁸⁷ karmaşık geometrinin yavaş yavaş doğuşunu bu sözlerle betimliyor. Gauss'un en önemli öncülerden biri olduğunu ve bir karmaşık sayıya düzlemde bir nokta olarak baktığını görmüştük. \mathbb{C}^2 gerçek sayılar üzerinde dört boyutlu olduğu için onu görselleştirmek çok daha zordu; 19'uncu yüzyılda ancak bazı ileri görüşlü insanlar dördüncü boyutu hayal edebiliyordu. Bu konudaki birçok başarısız girişim Coolidge'in kitabında anlatılıyor.

⁸⁷ J. L. Coolidge. *Geometry of the complex domain*. Clarendon Press, Oxford, 1924.



Göttingen Matematik Modelleri ve Araçları Koleksiyonu'ndan Riemann tarzı bir model. ©

Bugün *Riemann yüzeyi* adıyla anılan devrimci kavramı ortaya koyan Riemann bile bu yüzeyleri, \mathbb{C} üzerine yayılmış biçimde, 3 boyutlu gerçek uzay içinde kendini bazı garip *kesim çizgilerinde*

kesen yüzeyler olarak, sanal bir şekilde “görmek” zorunda kalıyordu. Karmaşık sayıların geometrisi etrafında bir gizem halesi olduğunu söylesek, abartmış olmayız.

Fakat karmaşık geometrinin aslında hiç de karmaşık olmadığını ve gerçek alemi anlamak için epey yararlı olduğu adım adım ortaya çıktı. Paul Painlevé'nin 1900 yılında yazdığı şu satırlar ⁸⁸ iyi bir örnek:

Ortaya çıktı ki, gerçek alemdeki iki hakikatin arasındaki en kolay ve en kısa yol, çoğunlukla karmaşık alemden geçiyor.

Günümüzde karmaşık geometri artık daha iyi anlaşılmuştur. Kabaca iki tür yaklaşımdan sözedebiliriz.

Birincisi, karmaşık sayıları görselleştirmeye hiç çalışmadan formel şekilde, cebirsel kapalı bir cismin elemanları olarak kullanmak. Bu yaklaşım modern cebirsel geometride çok verimli oldu, zira C 'nin cebirsel özellikleri son derece güçlü. Fakat bu yaklaşım takip edildiğinde gerçek sayılarla ilgili orijinal sorular genelde unutuluyor. Bir seferinde ünlü bir cebirsel geometriçi (karmaşık) Abelyen varyeteler hakkında bir ders anlatıyordu. Dersin sonunda gerçek Abelyen varyeteler hakkında bir soru geldi. Konuşmacı şaşırıp ve biraz durakladıktan sonra samimi bir şekilde şöyle dedi:

Üzgünüm, gerçeklik hakkında hiç düşünmemiştim!

İkinci yaklaşımsa izdüşümler, kesitler, *resimler çizmekten* geçiyor. Daha da önemlisi, bu yaklaşımda insan çok boyutlu uzaylar hakkında, muhtelif benzetmeler ve *paralellikler* kullanarak sezgisel bir anlayış geliştirmeye çalışıyor. Günümüz topologları ve geometriciler artık C^2 'deki nesnelere korkmuyorlar, hatta bu tür nesnelere gayet somut buluyorlar. Bu bölümde, bu türden bir sezgisel anlayış geliştirmeye çalışacağız.

İnternette dolanan bir aldatmaca hikayeye göre, Sophus Lie şöyle demiş:

Hayat karmaşıktır çünkü bir gerçek tarafı, bir de sanal tarafı vardır.

Lie gibi sert ve ciddi bir matematikçinin böyle bir söz söylemiş olabileceğine inanmak güç.

⁸⁸ P. Painlevé. *Ceuvres de Paul Painlevé. Tome I.* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1973. Analyse des travaux scientifiques, pages 72–73.

“Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.”

Yüvarlak 3-küre

Geometiciler, $P^1(\mathbb{C})$ 'nin iki boyutlu (Riemann) küresi olduğunu ve $P^2(\mathbb{C})$ 'nin de büzülemeyen 4 boyutlu bir manifold olduğunu, karatahtayla ortak pek bir şeyi olmadığını bildikleri halde, $P^2(\mathbb{C})$ 'nin içinde $P^1(\mathbb{C})$ 'den bahsetmek istediklerinde tahtaya genelde bir çizgi çizerler.

\mathbb{C}^2 'nin içinde bir 3-küreden bahsetmek istediklerindeyse düzlemde bir çember çizerler. Karmaşık sayılar üzerinde topolojinin çok daha zengin olduğunu bildikleri halde, $P(x, y) = 0$ eğrisinin bir gerçek dalını çizerler.

Bu “yanlış resimler”, karmaşık dünyanın içindeki “gerçekliğe” sıklıkla mümkün olan tek yaklaşım olduğu için bunları kullanıyoruz.

Amacımız, \mathbb{C}^2 içindeki $F(x, y) = 0$ analitik eğrisinin içindeki bir noktanın komşuluğunun mümkün olduğunca görsel bir tarifini vermek. Buradaki x ve y , x_1, x_2, y_1, y_2 gerçek sayılarıyla $x_1 + ix_2$ ve $y_1 + iy_2$ şeklinde ifade edilen birer karmaşık sayı. Aslında bahsi geçen eğri, \mathbb{R}^4 içinde iki denklem tarafından tarif ediliyor:

$$\Re(F(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)) = \Im(F(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)) = 0;$$

böylece gerçek sayıların bakış açısından, eğrimiz aslında bir yüzey. Burada son derece doğal sayılacak fikir şu: eğrimizi/yüzeyimizi ϵ yarıçaplı, küçük bir 3-küreyle kesiştirmek ve sonuç olarak (gerçek sayılar üstünde) 1 boyutlu bir şeyi görmeyi ummak.

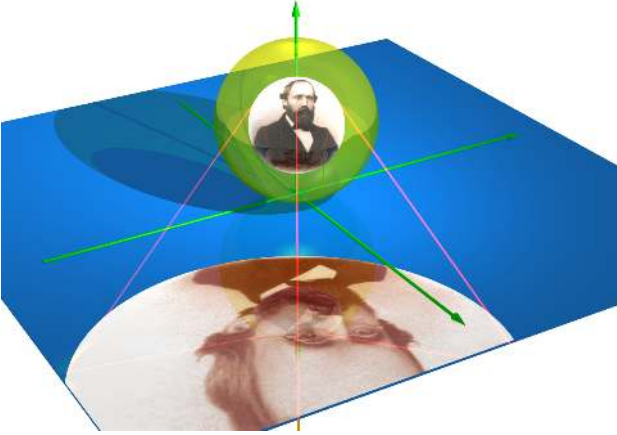
Bu yüzden önce 3-kürenin tarifıyla başlıyoruz. Eğrimizle kürenin kesişimini daha sonra resmedeceğiz.

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1\} \end{aligned}$$

diye verilen birim 3-küreyi görselleştirmenin birkaç yolu var.

Stereografik izdüşümü kullanabiliriz.

Örneğin \mathbb{R}^4 'teki $N = (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ noktasını S^3 'ün *kuzey kutbu* olarak alalım; $(0, 0, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ güney kutup noktasındaki teğet düzleme N 'den izdüşüm alalım. $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in S^3$ noktası ve bunun gittiği $(u, v, -1, w)$ noktası ve N noktası doğrusal olmalı.



Bernhard Riemann'ın stereografik izdüşümünü almak. ©

Formülle ifade edildiğinde, şu sonuç çıkıyor:

$$\Pi : (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \mapsto \left(\frac{2x_1}{1-y_1}, \frac{2x_2}{1-y_1}, \frac{2y_2}{1-y_1} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Dolayısıyla küreden bir nokta çıkınca bunu 3 boyutlu sıradan uzayla temsil edebiliyoruz. Burada bazı simetrisini kaybediyoruz zira kuzey kutbu seçimi aslında tamamen rastgele. Burası geometride hayal gücü üzerine yazılmış ünlü bir kitabı⁸⁹ tavsiye etmenin tam yeri. [Boyutlar](#) adlı filmi de tavsiye ederim.

Stereografik izdüşümün aşağıdaki özellikleri iyi bilinir.

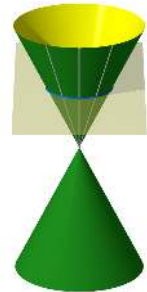
- İzdüşüm *konformaldir*: her bir noktadaki türevi bir benzerliktir.
- 3-küredeki bir çemberin görüntüsü 3 boyutlu uzayda bir çemberdir (ya da eğer orijinal çember kuzey kutbundan geçiyorsa, bir doğrudur).

Böylece, \mathbb{S}^3 küresinin pozitif döndürmelerinin grubu olan $SO(4)$, $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 'daki konformal difeomorfilerin grubu olarak görülebilir.

n -küredeki konformal difeomorfiler grubuysa $SO(n+1)$ 'den çok daha büyüktür; bu grup tıkmaz değildir. Sözelimi, \mathbb{R}^{n+2} üzerinde $q = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2$ olarak verilen, $(n+1, 1)$ işaretli bir kuadratik form tanımlayabiliriz. Böylece n -küre, izotropik $q = 0$ konisi ile $x_{n+2} = 1$ hiperdüzleminin kesişimi olarak düşünülebilir.

⁸⁹ D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952. P. Neményi tarafından çevrilmiş.

Kimi tarihlere göre bu özellikler (iki boyutlu durumda) bu kitapta daha önce tanıştığımız Hipparkos tarafından bulunmuştu.



Buna denk olarak, n -küre izotropik doğruların uzayı olarak düşünülebilir. Tıkız olmayan $SO(n+1, 1)$ grubu, n -kürenin üzerinde bir konformal etki oluşturur.

Kürelerin konformal geometrisi çok zengindir.

Sadece iki özellikten bahsedeyim. Boyutu en az üç olan bir kürede bağlantılı açık iki küme arasında bir konformal difeomorfi, global bir konformal difeomorfinin kısıtlanmış halidir (Liouville teoremi). Bu durumla 2 boyuttaki durum arasında keskin bir tezat vardır; 2 boyuttaki konformal difeomorfiler kümesi holomorf ya da antiholomorf difeomorfiler kümesiyle aynıdır. Holomorf gönderimler, Riemann küresi üzerindeki $(az+b)/(cz+d)$ olarak verilen Möbius otomorfilerine indirgenebilseydi eğer, matematiğin genel manzarasının güzelliği çok daha sınırlı olurdu.

Eğer bir Riemann manifoldunun konformal grubu tıkız değilse, bu manifold küreye ya da Öklit uzayına konformaldır. Bu, Obata ve Lelong-Ferrand teoremidir.

Bu doğrultuda devam etmekten imtina ediyorum zira burada kolaylıkla kaybolabiliriz ve matematiksel gezintimizden geri dönebiliriz. Berger'in ders kitabını⁹⁰ ve muazzam panoramasını⁹¹ tavsiye ederim. Eski moda sunumlardan hoşlanan okurlar için [Coolidge'in kitabı](#)⁹² nefistir.

"Kare" 3-küre

3-kürenin üzerinde $|x|^2 + |y|^2 = 1$ olduğu için, 3-küreyi şu şekilde tanımlayacağımız T_1 ve T_2 parçalarına ayırabiliriz:

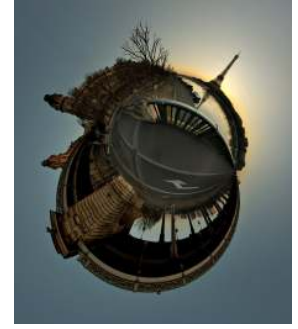
$$T_1 = \{(x, y) \in S^3 \mid |x|^2 \leq 1/2\} \quad , \quad T_2 = \{(x, y) \in S^3 \mid |y|^2 \leq 1/2\}.$$

T_1 ve T_2 'nin kesişimi, şöyle parametrelenebilen *Clifford simididir*:

$$(\theta, \phi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(i\phi) \right) \in S^3.$$

T_1 ve T_2 ise birer *dolu simittir*; bunları bir çember ile C 'deki D^2 birim dairesinin çarpımı olarak parametrellemek mümkündür:

$$(z, \phi) \in D^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z, \sqrt{1 - \frac{|z|^2}{2}} \exp(i\phi) \right) \in T_1 \subset S^3;$$



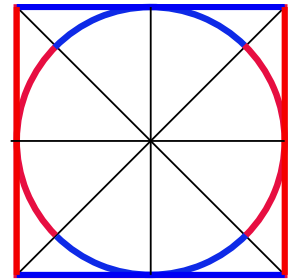
Paris'in konformal bir görüntüsü.

⁹⁰ M. Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

⁹¹ M. Berger. *Geometry revealed. A Jacob's ladder to modern higher geometry*. Springer, Heidelberg, 2010.

⁹² J. L. Coolidge. *A treatise on the circle and the sphere*. Clarendon Press, Oxford, 1916.

Çemberi kare yapmak.



$$(\theta, z) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times D^2 \mapsto \left(\sqrt{1 - \frac{|z|^2}{2}} \exp(i\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} z \right) \in T_2 \subset S^3.$$

Böylece 3-küreyi, kenarları boyunca birbirine yapıştırılmış iki dolu simidin birleşimi olarak görmek mümkün olur. ∂T_1 'in meridyenleri, yani T_1 içinde bir dairenin kenarı olan çemberler, ∂T_2 'nin paralellerine yapıştırılmıştır, yani T_2 'nin içinde bir dairenin kenarı olmayan çemberlere; ve bunun tersi.

Bunun yerine “kare küreyi” kullanabilirdik. Şu yuvara bakın:

$$D^2 \times D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ and } |y| \leq 1\}.$$

Bunun kenarı $T'_1 = \{|x| \leq 1 \text{ and } |y| = 1\}$ ve $T'_2 = \{|x| = 1 \text{ and } |y| \leq 1\}$ dolu simitlerinden oluşur. Radyal izdüşüm kullanarak T_1 ve T_2 dolu simitlerini T'_1 ve T'_2 ile özdeşleştirmek mümkündür. Kare küreyi kullanmak çoğunlukla daha kullanışlıdır çünkü böylece dolu simitte stereografik izdüşüm kullanmaksızın resimler çizmek mümkündür. Bu basit ama güçlü fikir Kähler⁹³'e aittir.

3-küre çok yuvarlaktır

Matematiğin görsel yanlarının ustalarından William Thurston⁹⁴, 3-kürenin diğer kürelerden “daha yuvarlak” olduğunu söylerdi. Bunu derken aklından geçen, n yalnızca 3 iken $SO(n+1)$ 'in basit bir grup *olmadığıydı* (tabii 0 ve 1 dışında). Bu, daha eski literatürde *Clifford paralelliği* denilen kavramla ilişkilidir.

Hatırlayacağınız gibi kuaterniyonlar $q = x_1 + ix_2 + jy_1 + ky_2$ şeklindeki formel ifadelerdir. Burada x_1, x_2, y_1, y_2 gerçekte sayılardır; i, j, k ise $ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j$ ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ eşitliklerini sağlayan formel sembollerdir. Bu, değişmeli olmayan \mathbb{H} bölme cebirini tanımlar. Eşlenik \bar{q} , $x_1 - ix_2 - jy_1 - ky_2$ şeklinde; norm $N(q)$ da $q\bar{q} = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$ diye tanımlanır. Bu norm çarpımsaldır: $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$. Sıfırdan farklı bir kuaterniyonun tersi $q^{-1} = \bar{q}/N(q)$ ile verilir.

Buradan 3-kürenin, $\{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$ diye tanımlanan birim kuaterniyonlar grubuyla eşlenebileceği ortaya çıkar. Yirminci yüzyıl matematiğinin büyük başarılarından biri, üzerlerinde bir topolojik grup yapısı tanımlanabilen yegane kürelerin $S^0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

⁹³ E. Kähler. *über die verzweigung einer algebraischen funktion zweier veränderlichen in der umgebung einer singulären stelle*. *Math. Z.*, 30(1):188–204, 1929.

⁹⁴ W. P. Thurston. How to see 3-manifolds. *Classical Quantum Gravity*, 15(9):2545–2571, 1998. Topology of the Universe Conference (Cleveland, OH, 1997).



Düğümlerden Narnia'ya videosundan bir görüntü. William Thurston (1946–2012), bir düğümün etrafından dolandığında “başka bir yere” geçtiğini gösteriyor. Bu eski videoyu mutlaka görmelisiniz. ©

$S^1 \simeq SO(2)$ ve S^3 olduğunu ispatlamasıdır. Bu konuya iyi bir başlangıç, *Sayılar* adlı kitaptr⁹⁵.

Ama 3-kürenin diğerlerinden daha yuvarlak olmasının tek sebebi bu değil. Diğer tüm gruplar gibi, homojen olduğu, sağ veya sol döndürmeler kullanılarak görülebilir; bu iki yol birbiriyle değişmelidir. q_1 ve q_2 birim kuaterniyonları verildiğinde, $q \in \mathbb{H} \mapsto q_1 q q_2^{-1} \in \mathbb{H}$ göndermesi bir izometridir ve $SO(4)$ 'te bir eleman tanımlar. $S^3 \times S^3$ 'ten $SO(4)$ 'e bu gönderim örtendir ve çekirdeğinde sadece $\pm(1, 1)$ vardır. Diğer bir deyişle 3-kürenin her döndürmesi, birbiriyle yer değiştirebilen bir *sağ döndürme* ile bir *sol döndürmenin* bileşimidir. Bu durum 3 boyuta özeldir zira diğer tüm döndürme grupları (aşık bir istisna olan $SO(2)$ dışında) basittir.

Hopf liflenmesi

Artık \mathbb{C}^2 'deki cebirsel eğrilerin topolojisi hakkında konuşmaya başlayabiliriz. Mümkün olan en basit eğriyle başlıyoruz: *düz bir çizgi*.

$x = 0$ ve $y = 0$ doğrularının birim küreyle kesişimlerine bakalım.

$x = 0$ kuzey kutbundan geçtiği için, bu doğrunun stereografik izdüşüm altındaki görüntüsü düşey bir düz çizgidir. $y = 0$ doğrusunun izdüşümü ise " $x = 0$ düşey doğrusu etrafında dolanan bir çemberdir".

Az önceki iki dolu simide ayrıştırma resminde $x = 0$, T_1 'in merkezi olan $\{0\} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ çemberine karşılık gelir. Öte taraftan, $y = 0$ da T_2 'nin merkezi olan $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \{0\}$ çemberine karşılık gelir. Bu çemberlerin geçmişmiş olduklarını gözden kaçırmayalım.

$y = x$ doğrusu küreyi hem T_1 'e hem T_2 'ye ait olan bir çemberde keser. Ne meridyen ne de paralel olan bu çemberin homotopi sınıfı hem T_1 'de hem T_2 'de $(1, 1)$ 'dir.

Tüm bu yapı global olarak *Hopf liflenmesi* denen yapıyla betimlenir. Delinmiş $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ düzleminin her (x, y) noktası, başnoktadan geçen biricik bir karmaşık çizgiye aittir; yani $P^1(\mathbb{C})$ 'nin bir elemanını tanımlar. Başka bir deyişle, başnoktadan geçen her doğru, Riemann küresi ya da 2 boyutlu S^2 küresiyle eş-

⁹⁵ H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, and R. Remmert. *Numbers*, volume 123 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990.

Normal has altgrubu olmayan birden çok elemanlı bir gruba basit denir. Her normal Lie altgrubu ya açık ya da ayrılan bir Lie gruba sıklıkla basit denir. Denk olarak grubun Lie cebiri basittir, yani has bir ideali yoktur. $SO(n)$ 'nin ($n \neq 1$) tek normal has altgrubu n çift iken $\{\pm br\}$ altgrubudur. Bu yüzden $SO(n)$, n çift iken grup olarak basit değildir ama Lie grup olarak basittir.



Heinz Hopf (1894–1971); Eberhard Hopf (1902–1983) ile karıştırmayın (1936'da ABD'den Almanya'ya göç eden tek matematikçi mi?) ©



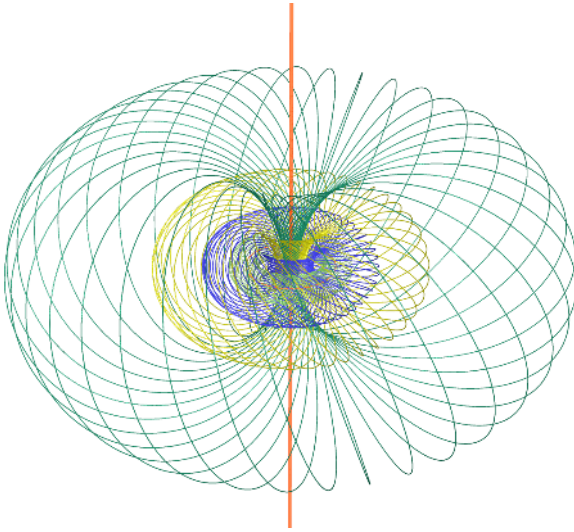
Simitte bir meridyen, bir paralel ve bir $(1, 1)$ -çemberi. ©

lenebilecek $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesinin bir λ elemanı için $y = \lambda x$ eşitliğiyle verilir. Böylece

$$\pi : S^3 \rightarrow S^2$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlanır; bu fonksiyonun lifleri, karmaşık doğruların küreyle kesişimindeki çemberlerdir. Herhangi iki lif birbiriyle geçmiştir.

Aşağıda, Hopf liflenmesinin [Boyutlar](#) adlı filmde alınmış, stereografik izdüşüm kullanarak elde edilmiş bazı resimlerini görebilirsiniz.



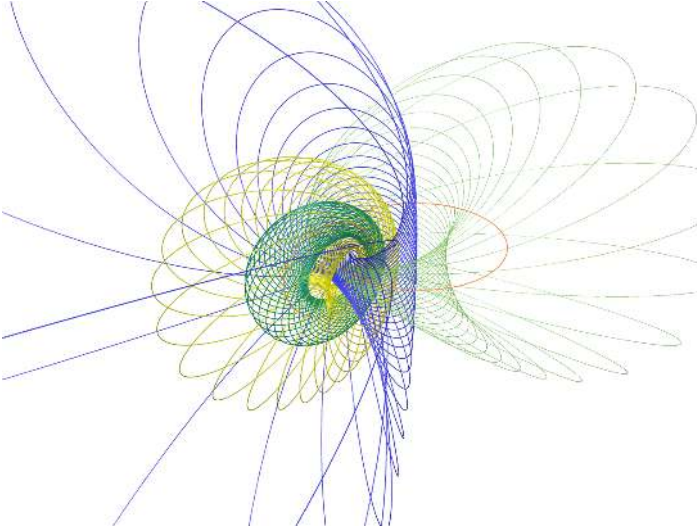
Tabii ki, bu fonksiyon Hopf tarafından icat edilmedi! Onun katkısı, bu fonksiyonun sabit fonksiyona homotopik olmadığını göstermekti; ama bu başka bir hikaye.

Hopf liflenmesi: her çember π 'nin bir lifini oluşturuyor. Bir çemberin π altındaki ters görüntüsü, bir Clifford simidi oluyor ki bu da (resimde aynı renkle gösterilen) liflerin birleşimi. ©

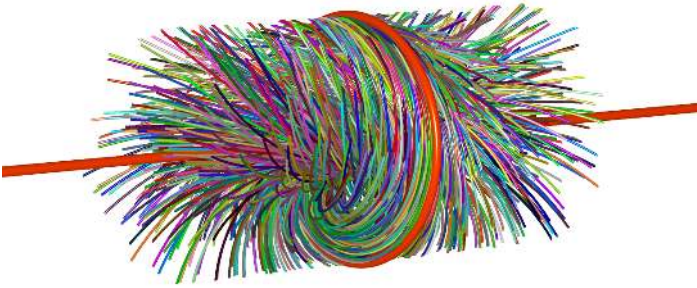
Hopf liflenmesinin gerçek versiyonu nedir? Esasen böyle bir şey vardır ama bu gerçek hal biraz düş kırıklığı yaratır. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 'nin her (x, y) noktası, merkezden geçen biricik bir doğruya aittir, ve $P^1(\mathbb{R})$ 'nin bir elemanını tanımlar. Bu doğru, 1 boyutlu S^1 küresi, yani çember olan $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ içinde bir λ için $y = \lambda x$ ile verilir. Bu, lifleri gerçek doğruların birim çemberle kesişimindeki S^0 'lar olan,

$$\pi : S^1 \rightarrow S^1$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlar. Bu da \mathbb{R}/\mathbb{Z} 'de 2'yle çarpmadır. Sıfır boyutlu kürenin bir çift noktadan ibaret olduğunu unutmayın.



Yukarıdaki resmin 3-kürenin döndürülmesinden sonraki hali; bu döndürme $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ üzerinde bir konformal gönderime karşılık gelir. ©

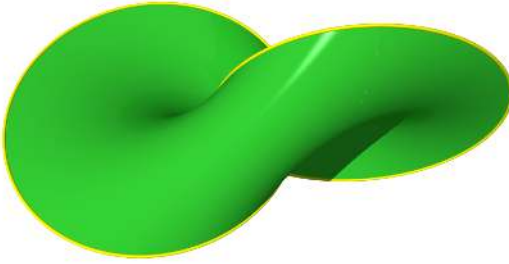


Hopf çemberlerinden uzayda izdüşümü (kırmızı) bir çizgi olan birinin komşuluğunda diğer çemberler. Bir okurum bu resmin ona "ürkütücü" görüldüğünü söyledi. Ona katlıyor musunuz? ©

Hopf bağları

Bir Hopf lifi, kürede bir çemberdir; hakkında söylenecek çok bir şey yok. (Aslında böyle demek çok da doğru olmaz: 3 boyutlu uzaydaki çemberlerin uzayının geometrisi harikuladedir. Cecil'in kitabına⁹⁶ ya da Blaschke'nin klasik Vorlesungen'ine⁹⁷ bakabilirsiniz.)

İki tane Hopf çemberi daha ilginçtir, zira, birlikte bir bağ oluştururlar. Geçişmiş oldukları halde bir halkanın kenarını oluşturduklarına dikkat edin. Sahiden de, iki noktayı birleştiren bir yayın Hopf liflenmesi altında önimesi bir halkadır.



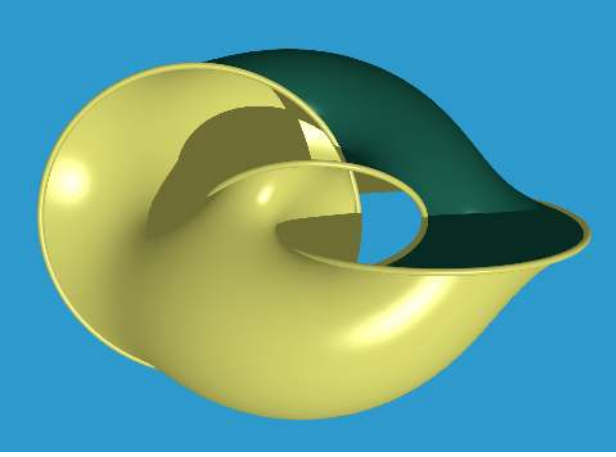
Üç (ya da daha çok) Hopf çemberi bir Hopf bağı oluşturur. Her parça bir çemberdir ve herhangi iki parça birbiriyle bir kere geçişmiştir. Kenarı böyle bir bağ olan yönlü bir yüzey bulmak kolay. Nitekim $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ karmaşık sayılarını ve

$$F(x, y) = (y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x) \cdots (y - \lambda_n x).$$

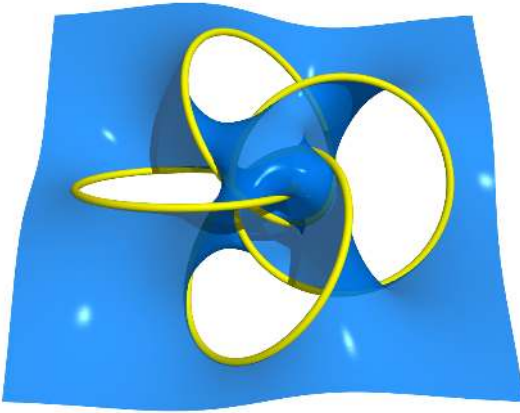
polinomunu düşünelim. $F(x, y)$ pozitif gerçekte bir sayı olacak şekildeki (x, y) noktalarının kümesiyle 3-kürenin kesişimi n adet Hopf çemberinden oluşur. Önümüzdeki bölümlerde tüm bunların çok daha genel hallerine bakacağız.

⁹⁶ T. E. Cecil. *Lie sphere geometry. With applications to submanifolds.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

⁹⁷ W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Band I. Elementare Differentialgeometrie.* Dover Publications, New York, N. Y., 1945. 3rd ed. Bir halkanın kenarı olan iki Hopf çemberi. ©



Bir yüzeyin kenarı olan üç Hopf çemberi. ©



Bir yüzeyin kenarı olan dört Hopf çemberi. ©

Dante, İlahi Komedyaya ve 3-küreye

Mark Peterson⁹⁸, *İlahi Komedyaya*'da betimlendiği kadarıyla, Dante'nin evreninin 3-küreye homeomorf olduğunu iddia ediyor. "Manifold kavramını Dante'nin icat ettiğinin aşikar olması"⁹⁹ na tam ikna olmasam da bu kozmolojik bakışı seviyorum. Hepimizin çocukken ana babalarımıza sorduğumuz bir soruya cevap veriyor en azından: evrenin kenarına ulaştığımda ne olur? İşte, Dante'nin evreni kenarı olmayan tıkız bir 3-manifolddur!



Flammarion gravürü (1888). ◉

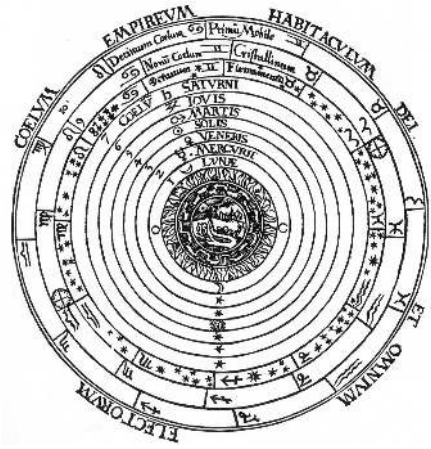
Eski Yunandan miras kalan dünyanın sonlu olduğunu hatırlatayım¹⁰⁰. Aristo-Batlamyus sisteminde Dünya evrenin merkezinde sabittir ve yedi gök küresiyle çevrelenmiştir; her bir küre bir "gezegen" taşır: Ay, Merkür, Venüs, Güneş, Mars, Jüpiter ve Satürn. Sekizinci bir küre de *sabit yıldızları* taşır. Son olarak, *İlk Devindirici* denen dokuzuncu bir küre tüm sistemin kabı olarak hizmet görür ve diğer kürelerin hareketlerini üretir. Algılayabildiğimiz alem bu yüzden 3 boyutlu bir yuvardır, kenarı da İlk Devindirici'dir. Bu kenarın ötesinde *Empyrean* diye adlandırılan alem başlar; bu alemin özellikleri pek açık değildir. Aristo'ya göre¹⁰¹ "ne uzay ne boşluk ne de zaman [içermediği] besbelli".

İlahi Komedyaya 1320'de yazılmış uzun bir şiir. 14. yüzyıldaki Hristiyan dünyasının büyüleyici bir anlatımını sunuyor¹⁰². Dante

Bu kısım kitabın geri kalanı için gerekli değil tabii ki.

⁹⁸ M. A. Peterson. [Dante and the 3-sphere](#). *American Journal of Physics*, 47:1031–1035, 1979.

⁹⁹ M. A. Peterson. The geometry of *paradise*. *Math. Intelligencer*, 30(4):14–19, 2008.



Aristo-Batlamyus dünya merkezli sistemi. ◉

¹⁰⁰ A. Koyré. [From the Closed World to the Infinite Universe](#). Johns Hopkins University Press, 1957.

Ay ve Güneş gezegen değil elbette; yine de Dünya etrafında dönüyorlar... dünya merkezli sistemde.

¹⁰¹ Aristotle. [On the Heavens](#), volume I, 9, 278b–279a. J. L. Stocks. tarafından çevrilmiş.

¹⁰² Dante Alighieri. [Divina Commedia](#). Digital edition, Columbia University. Birçok edisyon ve çevirisi arasında, İngilizcesi ve yorumları bakımından ben bu harika 2017 edisyonunu öneriyorum.

bize Cehennem, Araf ve Cennet'ten geçerek yaptığı yolculuğu anlatır; bu, ruhların kurtuluşuna bir kinayedir. Paradiso adlı son kısımda Beatrice adındaki ilham perisi, onun dokuz gök küresini teker teker ziyaret etmesine yardımcı olur. İlk Devindirici'ye ulaştığında kenarından alemini izler. Merkezinde ufak Dünya bulunmaktadır. Aniden arkasını döndüğünde Empyrean'ın da algılayabildiğimiz alemle tam tamına aynı yapıda olduğunu fark eder. Aynı sayıda küre ve merkezlerinde Tanrı vardır. Bu meleklerle özgü küreler gök kürelerine simetriktir ve (Tanrı'dan İlk Devindirici'ye doğru) adları şöyledir: Seraflar, Kerubiler, Tahtlar, Egemenler, Erdemliler, Güçlüler, Prenslükler, Kutlular ve Melekler. (Bu sayfadaki Türkçe adlandırmalar ve aşağıdaki Türkçe alıntı için bakınız¹⁰³.)

Bu nedenle Dante'nin evreni, İlk Devindirici'den birbirine yapışmış iki tane 3-yuvarın birleşimidir ve dolayısıyla bir 3-küredir! □

Evrene Ortaçağ bakışının çok daha derin bir tartışması için bakınız¹⁰⁴; şiir ve matematiğe ilişkin daha çok şey için bakınız¹⁰⁵.



¹⁰³ Dante Alighieri. *İlahi Komedya*. Oğlak Yayınları, 1998. Çeviren: Rekin Teksoy.

¹⁰⁴ J. Grzybowski. *Cosmological and Philosophical World of Dante Alighieri: "The Divine Comedy"*. Peter Lang GmbH, 1st new edition, 2015.

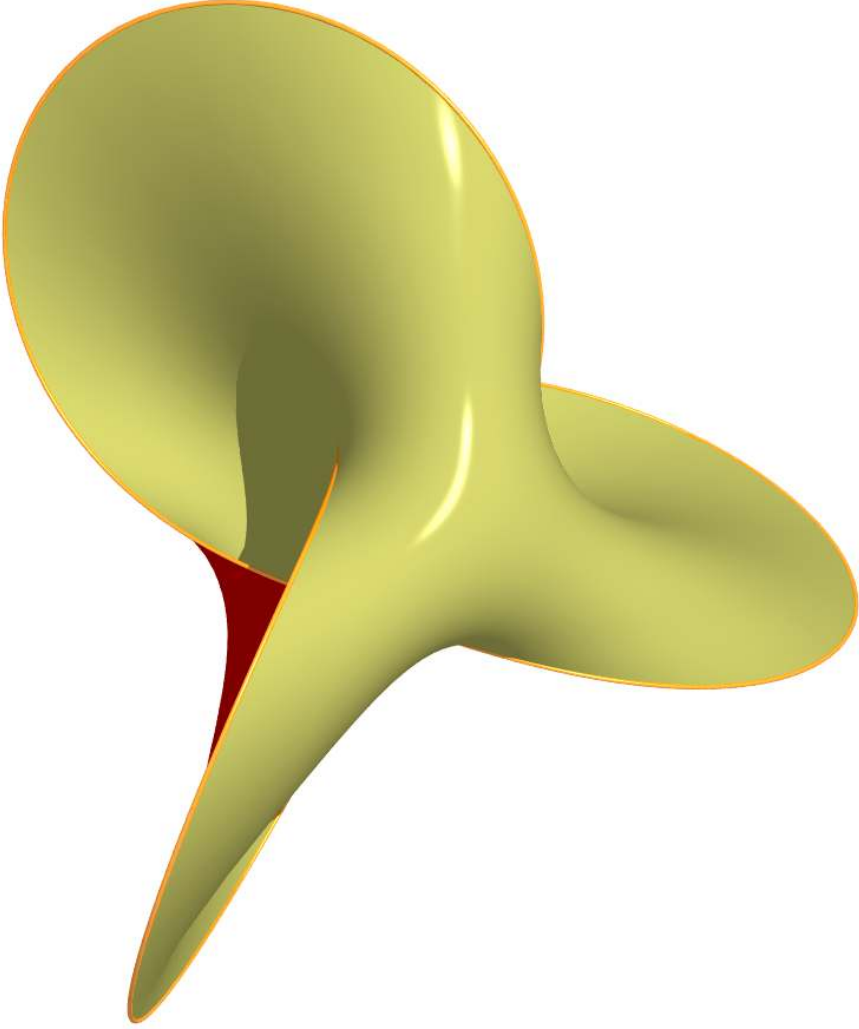
¹⁰⁵ R. Osserman. *Poetry of the universe, From the Divine Comedy to Riemann and Einstein*. Anchor, 1995.

Rosa Celeste: Dante ve Beatrice en yüksek Göklerden Empyrean'a dalıp gitmişler (gravür: Gustave Doré). ©

Komedya'nın son dizeleri:

*"All'alta fantasia qui mancò
possa ; ma già volgeva il mio
disiro e il velle, l'amor che move
il sole e l'altre stelle."*

*"Düşlemin gücü burada
tükenmiş;
artık isteğimi, istencimi
dengeli bir çark gibi döndürü-
yordu,
güneşi yıldızları döndüren
sevgi."*



$y^2 - x^3 = 0$ eğrisiyle ilişkilendirilmiş Milnor açık kitabının bir sayfası. ©

Topuk ve yonca

GEZİNTİMİZİN DAĞINIK AMACI, *gerçek* analitik eğrilerin tekilliklerinin topolojisini tarif etmek. Daha önce de açıkladığımız gibi, *karmaşık* alemden geçen bir kestirme yolun “gerçek” tartışmamıza da ışık tutması mümkündür. Fakat biz bu kitapta kestirmelerden çok yan yollarla ilgileniyoruz.

Karmaşık cebirsel eğrilerin tekilliklerinin kapsamlı bir tartışması için Brieskorn ve Knörrer’in 721 sayfalık mükemmel kitabını¹⁰⁶ şiddetle tavsiye ederim. Fakat Jules Tannery’nin Galois kuramına kısa, öz ve hoş giriş kitabının¹⁰⁷ önsözünde dediği gibi:

Un petit livre est rassurant.

Bu tavsiyeye uyararak, burada kendimi kuramın temel özellikleriyle sınırlandıracağım.

Tek amacım, okuru *karmaşık* alemdeki bir tekilliğin topolojisinin inanılmaz derecede zengin olduğuna ikna etmek.

Bir tekilliğin bağı

$F(x, y) = 0$ şeklindeki *karmaşık* analitik bir eğriyi $S_\varepsilon^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$ şeklindeki ufak bir küreyle kesiştirme fikri muhtemelen oldukça eskidir. Bu çatki ilk olarak Brauner’in¹⁰⁸, danışmanı Wirtinger’in 1905’teki bir fikrini takip ederek yazdığı, 1928’deki bir makalesinde yer almıştır. Bu fikirlerin tarihsel gelişiminin ilham verici bir sunumu için şu makaleye¹⁰⁹ bakabilirsiniz.

¹⁰⁶ E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.

¹⁰⁷ H. Vogt. *Leçons sur la résolution algébrique des équations*. Librairie Nony, 1895.

Küçük bir kitap güven vericidir.

¹⁰⁸ K. Brauner. Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderliche. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6(1):1–55, 1928.

¹⁰⁹ M. Epple. Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory. *Historia Math.*, 22(4):371–401, 1995.

Karmaşık sayılar üzerindeki bir eğrinin \mathbb{C} üzerinde bir boyutlu olduğunu, yani \mathbb{R} üzerinde iki boyutlu olduğunu hatırlamakta fayda var. Yani *karmaşık* bir eğri gerçek bir yüzeydir. Eğrilerle yüzeyler arasındaki bu daimi denge, kuramın cazibelerinden biridir.

En basit örnek olan $F(x, y) = y - \lambda x$ bizi Hopf liflenmesine götürmüştü. Şimdi, ikinci önemli örnek olan *topuk tekilliğe* bakalım. Diğer bir deyişle, $F(x, y) = y^2 - x^3$ 'ü inceleyeceğiz.

Belki ilk akla gelen soru, ε küçük yarıçapını nasıl seçeceğimiz, ya da elipsoid gibi başka bir hiperyüzey seçmenin daha uygun olup olmadığı. Cevap, son derece zayıf varsayımlar altında tüm bu kesişimlerin *homomorfi düzeyinde aynı* topolojik nesneyi tanımlaması. $y^2 - x^3 = 0$ örneği, iyice de basit. \mathbb{C}^2 üzerinde tanımlı, aşağıdaki doğrusal akışı düşünelim:

$$\phi^t(x, y) = (e^{2t}x, e^{3t}y) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 'da ϕ^t 'nin yörüngelerinin oluşturduğu \mathcal{O} uzayı, S^3 'e homeomorftur. Gerçekten de, böyle bir yörünge üzerinde, $|x|^2 + |y|^2$ sürekli artar ve her yörünge küreyi sadece bir kere keser. Aynı çıkarım, başnoktayı merkez alan bir elipsoid için ya da $\max(|x|, |y|) = \varepsilon$ şeklindeki "kare küre" miz için, ya da birçok başka hiperyüzey için tekrarlanabilir.

Şimdi ϕ^t akışının, denklemi $y^2 - x^3 = 0$ olan eğrimizi koruduğunu ve böylece eğrinin *kanonik* bir şekilde \mathcal{O} 'nun bir K alt kümesini tanımladığını görebiliriz. \mathcal{O} 'yu S^3 ile eşlersek görebiliriz ki, eğrinin küreyle kesişimi ε 'dan homeomorfi düzeyinde bağımsızdır ve istersek kare küreyi de kullanabiliriz.

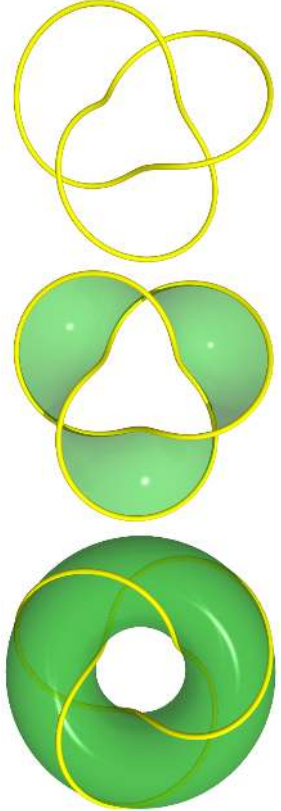
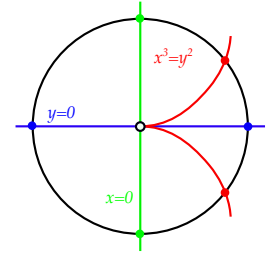
O zaman $y^2 - x^3 = 0$ ile $\max(|x|, |y|) = \varepsilon$ 'u kesiştirelim. Eğer $\varepsilon < 1$ ise, dolu simit içinde, $|x| = \varepsilon$ ve $|y| \leq \varepsilon$ olacak şekilde, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ile şu şekilde bir parametreleme bulabiliriz:

$$x = \varepsilon \exp(2i\theta) \quad ; \quad y = \varepsilon^{3/2} \exp(3i\theta).$$

Bu, *yonca düğümü*dür. Burada 3 boyutlu uzayda, standart bir simidin üzerinde, meridyenin etrafında 3 kere dolanırken, paralelin etrafında 2 kere dolanan, bir $(3, 2)$ *simit düğümü* olarak görünüyor.

Düğümlerin topolojisi hakkında birçok iyi kitap var. Sossinsky'nin¹¹⁰ "petit livre"ini ve Kaufmann'ın¹¹¹ göze hitap eden kitabını tavsiye ederim.

$y^2 - x^3 = 0$ topuk eğrisinin $|x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2$ şeklindeki küçük bir *yuvuar* ile kesişimini anlamak için, tüm eşmerkezli kürelerin eğrimizle bu türden bir yonca üzerinde kesiştiğini fark etmek



Yonca düğümü. ©

¹¹⁰ A. Sossinsky. *Knots. Mathematics with a twist.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

¹¹¹ L. H. Kauffman. *On knots*, volume 115 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.

yeterli olacaktır. Böylece küçük bir yuvar içinde eğrimizin yonca düğümünü taban alan bir topolojik *koni* olduğunu görebiliriz. Yonca, düğümlü bir şekilde gömülmüş bir çemberdir. Bu yüzden bahsi geçen koni, 4 boyutlu uzay içine biraz dolambaçlı bir şekilde gömülmüş bir dairedir. Eğrimiz karmaşık sayılar üzerinde topolojik olarak pürüzsüzdür, yani yerel olarak bir daireye homeomorftur fakat bu eğrinin \mathbb{C}^2 içine gömülüşü düğümlüdür. Bu, karmaşık sayılar üzerinde gözlenen ama gerçek sayılar üzerinde görünmez olan tipik bir durumdur. $y^2 - x^3 = 0$ gerçek eğrisi ve hatta *gerçek analitik bir eğrinin her bir dalı, yerel olarak düzlemdeki bir doğruya homeomorftur* ki bu da daha önce Gauss'un iddiası diye adlandırdığımız durumdur.

Milnor'ın liflenmesi

Topuk eğrisini biraz daha ayrıntılı şekilde tarif edelim ve Milnor'ın daha sonra üzerine eğileceğimiz bir teoreminin özel bir durumunu gösterelim.

Şu gönderime bakalım:

$$\mu : (x, y) \in \mathbb{S}^3 \mapsto y^2 - x^3 \in \mathbb{C}.$$

0'ın ters görüntüsü yonca düğümüdür. Başnoktadan çıkan ve denklemi $\text{açı}(z) = \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ olan bir yarıdoğrunun Σ_θ ters görüntüsüne bakalım. Diğer bir deyişle, yonca düğümünün tümleyeni üzerinde tanımlı ve $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ çemberinde değerler alan $\text{açı} \circ \mu$ gönderiminin liflerine bakıyoruz.

$\text{açı} \circ \mu$ 'nün bir batırma olduğunu görmek kolay. Gerçekten de,

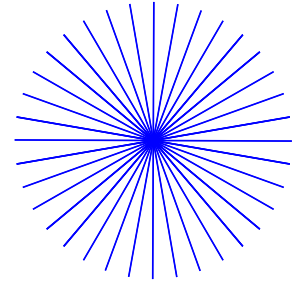
$$\psi^s(x, y) = (e^{2is}x, e^{3is}y)$$

diye verilen akış küreleri korur ve $\text{açı}(\mu \circ \psi^s) = \text{açı}(\mu) + 6s$ eşitliğini sağlar. Buradan da, ψ^s ile ilişkili vektör alanının $\text{açı} \circ \mu$ 'nün türevinin çekirdeğinde olmadığını görebiliriz. ψ^s 'nin Σ_θ liflerini birbirlerine götürdüğünü de fark edin.

Yonca düğümünün komşuluğunda durumu irdelemek son derece kolaydır. Kare küremiz hala kullanılabilir zira ϕ^t altında $\text{açı} \circ \mu$ değişmezdir ve biz de esasen \mathcal{O} yörünge uzayında çalışmaktayız. Yoncanın bir komşuluğunu, ζ bir karmaşık sayı ve



Bir dalın yerel resmi (3 boyutlu uzaya izdüşüm. . . Dal bu uzaya gömülü değildir.) ©



Sabit açılı radyal yarı doğrular.

$\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ olacak şekilde (α, ζ) çiftleriyle şöyle parametreleyelim:

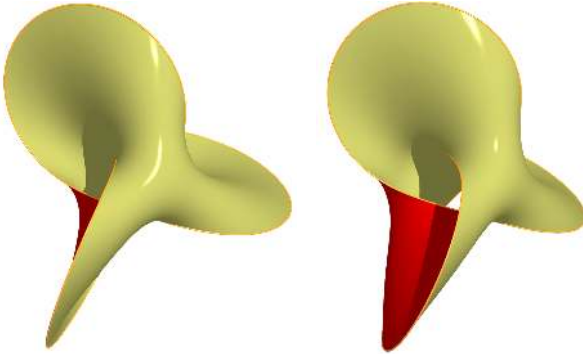
$$x = \varepsilon \exp(2i\alpha) \quad ; \quad y = \varepsilon^{3/2} (\exp(3i\alpha) + \exp(-3i\alpha)\zeta).$$

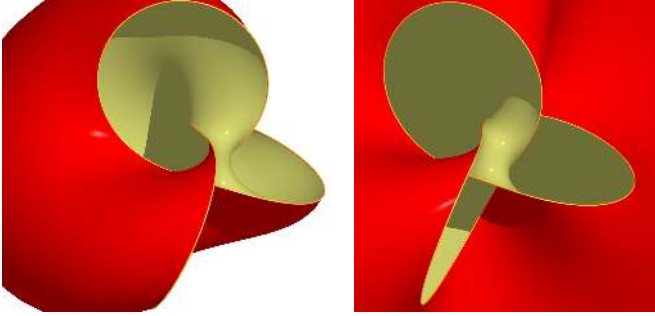
Bu koordinatlarda, birinci mertebede açı $\circ \mu$, açı (ζ) 'ya eşittir. Buradan, yoncanın bir komşuluğunda Σ_α 'ların, bir kitabın cildi etrafında kitabın sayfaları gibi olduğu görülür.



Sayfaları döngüsel şekilde dizilmiş, ilk sayfası olmayan tuhaf bir kitap... Sonsuza dek okuyacağınız rüya kitap... En azından sayfaları yönlü.

Yonca düğümünün *lifli* olduğunu ya da tümleyeninin çember üzerinde liflendiğini söyleyeceğim. Lifler, 3-küredeki ayrı *sayfalar*; kapanışlarının ortak kenarları aynı düğüm. Sayfalardan biri, stereografik izdüşümün de merkezi olan 3-küredeki kuzey kutbunu içeriyor. Bu sayfanın 3-boyutlu Öklit uzayındaki izdüşümü tıkHz değildir.





Bazı sayfalar.

©

Dolanım

$\psi^s(x, y) = (e^{2is}x, e^{3is}y)$ akışı, sayfalarımızı birbirlerine götürüyor. Daha dikkatle söylersek, ψ^s gönderimi Σ_θ sayfasını $\Sigma_{\theta+6s}$ sayfasına gönderiyor. Buradan $\psi^{2\pi}$ 'nin birim fonksiyon olduğunu, $\psi^{\pi/3}$ 'ün de her bir sayfayı tümünden sabitlediğini, böylece topuğun *dolanımı* adıyla anılan, her sayfada derecesi 6 olan bir homeomorfi yarattığını görebiliriz.

Şimdiki amacımız, sayfaların topolojisini ve dolanımın etkisini tarif etmek.

Tanım itibarıyla bir Σ sayfası, $y^2 - x^3$ karmaşık sayısı bir yarıdoğruda (örneğin pozitif gerçekte $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C}$ eksenini) kalacak şekilde, \mathbb{S}^3 'teki (x, y) 'lerin kümesidir. \mathbb{C}^2 içinde $y^2 - x^3 = 1$ ile tanımlı cebirsel eğriye \mathcal{C} diyelim. 3-küreyi, $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ uzayına etki eden $\phi^t(x, y) = (e^{2t}x, e^{3t}y)$ akışının yörünge uzayı olarak düşünelim. Σ ve \mathcal{C} gerçekteki yüzeyleri bu yörünge uzayında aynı yörüngeyi tanımlar, bu yüzden \mathcal{C} 'yle ilgileneceğiz. Dolanımın etkisi

$$(x, y) \in \mathcal{C} \mapsto (\omega^2 x, \omega^3 y) \in \mathcal{C}$$

ifadesine karşılık gelir; burada $\omega = \exp(2i\pi/6)$, 1'in basit 6'ncı köküdür.

\mathcal{C} 'nin topolojisi kolayca tarif edilebilir... eğer Riemann yüzeylerinin/cebirsel eğrilerin cinsleri hakkında birkaç şey biliyorsanız. Homojenleştirilmiş $y^2z - x^3 = z^3$ kübik eğrisi, $P^2(\mathbb{C})$ 'de sonsuzdaki doğruyla $[0 : 1 : 0]$ noktasında kesişen pürüzsüz bir eliptik eğridir. "Böylece" \mathcal{C} afin eğrisi tek yerden delinmiş simide

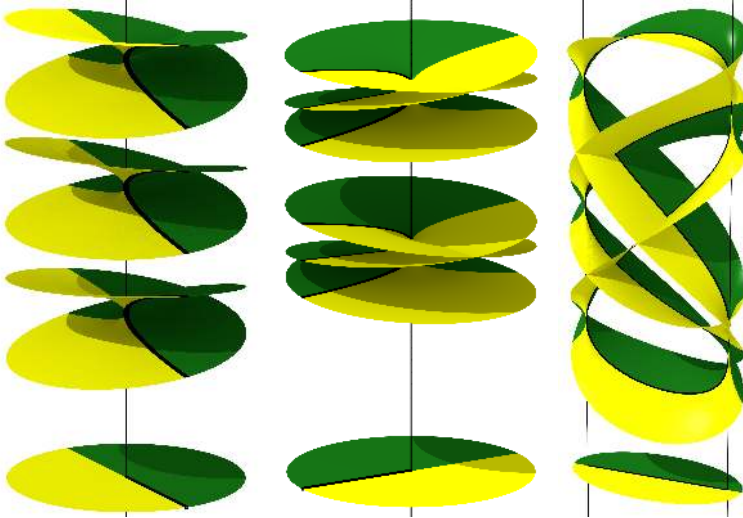


homeomorf olur.

Ayağımızı yere basarak baktığımızda şöyle de yaklaşabiliriz: $Y = y^2$ alalım, böylece $(x, y) \in \mathcal{C} \mapsto Y$ gönderimi \mathcal{C} 'nin altı katlı, çatalı bir örtüsü olur; çatalanma 0 ve 1'dedir, buralarda 2 ve 3 kat vardır.

Karmaşık düzlemde $Y = 0$ 'ı $Y = 1$ 'e bağlayan bir yay çizelim. Bu yay, \mathcal{C} içinde altı adete yaya karşılık gelir.

$Y = 0$ 'ın üzerindeki 3 noktada 6 yay 3 tane ikili grup oluşturur. Aşağıdaki resmin sol tarafında görülebileceği gibi, merkezi 0'da olan ufak bir dairenin üzerinde 3 tane çift plaka vardır. $Y = 1$ 'in üzerinde, ikinci resimdeki gibi, 2 nokta vardır; burada yaylar 2 tane üçlü grupta birleşir.

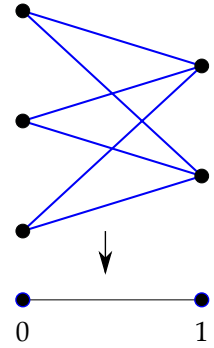


4-boyutlu \mathcal{C}^2 'de çizim yapmak imkansız olduğu için bu resimler $\sqrt{Y} + \sqrt[3]{1-Y}$ 'nin gerçek ve sanal kısımlarının uygun bir bileşiminin grafiğini temsil ediyor.

Altı yayın kombinatoriği kenarda görülebilir.

$-\infty$ 'dan 0'a, 0'dan 1'e ve 1'den ∞ 'a üç yay boyunca \mathcal{C} 'yi keserek, sanal kısım pozitif ya da negatif olacak şekilde (resimde sarı ve yeşil) iki üçgene ayırıyoruz. Bunlar köşeleri 0, 1 ve ∞ olan üçgenlerdir. Bu işlem \mathcal{C} 'de toplam 18 yay ve $12 = 6 \times 2$ üçgen oluşturur.

$(-1,0)$, $(\exp(2i\pi/6),0)$ ve $(-\exp(2i\pi/6),0)$ noktaları 0'a gidiyor; $(0,1)$ ve $(0,-1)$ noktalarıysa 1'e gidiyor.



Aynı resmi bir de şu şekilde görebiliriz. Bir düzgün altıgenin karşılıklı kenarlarını birbiriyle ötelemelerle özdeşleştiririm. Bu bize bir simit verir. Merkezi silerseniz delinmiş simit elde ederiz.

Altıgenin merkezinden köşelere giden 6 doğru parçası ve kenarlara giden 6 yükseklik çizin. Simidimiz toplamda 18 kenardan oluşan 12 üçgene bölündü. 1'in altıncı dereceden kökleri, delinmiş altıgene döndürmeler olarak etki ediyor ve tıpkı C örneğinde olduğu gibi üçgenlerin yerlerini değiştiriyor.

Özetle, *topukla ilişkilendirilmiş bu kitabın her bir sayfası, yukarıdaki gibi, delinmiş bir simittir ve dolanım fonksiyonu da bir tam turun $1/6$ 'sı olan bir döndürmedir.*

Simit düğümleri

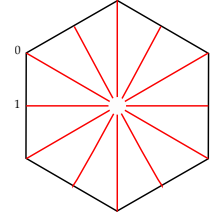
$y^2 = x^3$ topuğu için gördüğümüz özelliklerin çoğu, $F(x, y) = 0$ genel eğrisi için de geçerli olacak. Bunu görmek biraz uğraş gerektirecek ama elimizde en azından fazla uğraş gerektirmeyen bir örnekler ailesi var. p ve q , aralarında asal olan iki pozitif tamsayı olsun ve $y^p - x^q = 0$ eğrisine bakalım. $q > p$ olduğunu varsayabiliriz.

Daha önceki gibi, kare küreyle olan kesişime bakalım:

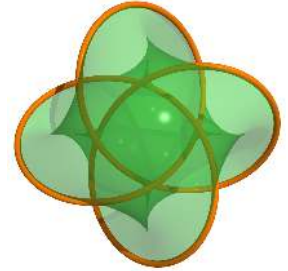
$$x = \varepsilon \exp(ip\theta) \quad ; \quad y = \varepsilon^{q/p} \exp(iq\theta).$$

Bu, 3 boyutlu uzayda çizilmiş alışıldık simitte, p kere paralelin q kere de meridyenin etrafında dolanan bir (p, q) simit düğümüdür; bunu $K_{p,q}$ diye gösterelim.

Tam olarak aynı sebepten, çember üzerinde bir liflenme ve bir açık kitap ayrışması vardır. Her sayfa, topolojisi aynı yolla tarif edilebilen $y^p - x^q = 1$ afin cebirsel eğrisine homeomorftur. $Y = y^p$ alalım ve eğrinin 0 ve 1'de çatallanmış şekilde Y üzerinde yayılmasına bakalım. 0 ve 1'den farklı bir Y noktası üzerinde pq nokta vardır. 0 (ve sırasıyla 1) üzerinde, q (sırasıyla p) nokta vardır ama bunların katlılığı p 'dir (sırasıyla q 'dur). Altıgeni pq -genle değiştirince de aynı durumla karşılaşırız. $3pq$ kenar ve (her renkte pq tane olmak üzere) $2pq$ üçgen vardır. 0 üzerinde p köşe vardır, 1 üzerinde q köşe vardır ve sonsuz üzerinde 1 köşe vardır.



Simidin bir kare kullanarak yapılan daha basit tarifi daha bilindikdir ama altıgen kullanarak yaptığımız bu tarif daha da güzel. Altı kenarın simitte altı yay tanımladığını ver altı köşenin de yine simitte iki noktaya karşılık geldiğine dikkat edin.



Bir $(3, 4)$ simit düğümü. ©

Bu bize şöyle bir Euler-Poincaré sayısı verir:

$$p + q + 1 - 3pq + 2pq = 2 - 2 \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Artık sayfalar, cinsi $(p-1)(q-1)/2$ olan delinmiş yüzeyler.

Şu temel gerçeğin bir ispatının taslağını vereceğim: topoloji, $y^p = x^q$ cebirsel eğrisinin kayda değer bir kısmını anlatır.

Teorem. *Eğer 3-kürenin bir homeomorfisi (p_1, q_1) simit düğümünü (p_2, q_2) 'ye gönderiyorsa, $\{p_1, q_1\}$ ve $\{p_2, q_2\}$ kümeleri eşittir.*

İspat biraz temel cebirsel topoloji gerektirecek. Simit düğümlerinin topolojisini kullanarak, p ve q 'yu elde etmemize olanak verecek bir cebirsel cihaz oluşturacağız.

(p, q) simit düğümünün 3-küredeki tümleyeni açık bir 3-manifolddur. Bunun en ilkel değişmezi, $\Gamma_{p,q}$ ile gösterilen temel grubudur. Kilit nokta, p ve q 'yu bu gruptan cebirsel bir yöntemle elde etmek. Γ_{p_1, q_1} 'in Γ_{p_2, q_2} 'ye ancak $\{p_1, q_1\} = \{p_2, q_2\}$ olduğunda izomorf olduğunu ispat edeceğiz.

Öncelikle, 3-küredeki (p, q) simit düğümünden $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 'ye giden açı $\mu = \text{açı}(y^p - x^q)$ gönderiminin, temel gruplar arasında

$$\lambda : \Gamma_{p,q} \rightarrow \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

diye örten bir homomorfi yarattığını görmeliyiz. Gerçekten de birim kürede $t \in [0, 1]$ için

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}(1 + \zeta(t))}{2|(1 + \zeta(t))|} \exp(2ip\pi t) \quad ; \quad y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp(2iq\pi t)$$

olarak tanımlı ilmeği göz önüne alalım. ζ 'nin küçük değerleri için bu ilmek, (p, q) düğümünün etrafında dolandır. İlmek üzerinde μ 'nün açısı, yaklaşık olarak

$$\pi + \text{açı } \zeta(t) + 2\pi pqt$$

olur ve böylece bu ilmeğin λ altındaki görüntüsünün 1 olmasını garanti etmek için $\zeta(t) = \varepsilon \exp(i(1 - 2pqt)\pi)$ seçebiliriz.

İlk adımda, bu homomorfinin (olası bir işaret farkı haricinde), $\Gamma_{p,q}$ 'dan \mathbb{Z} 'ye giden tek örten homomorfi olduğunu göstereceğiz. Buradan, λ 'nın çekirdeğinin sadece düğümün topolojisine bağlı olduğu anlaşılır.

Önsözde kendimin lisans öğrencisi halinin anlayabileceği bir kitap yazmaya çalıştığımı söylemişim. Koruyum bu bölümün sonu için geçerli olmayacak bu. Eğer bu yazdıklarım size fazla kaba bir taslak gibi gelirse, okumadan geçin!



Yeni başlayanların Henri Paul de Saint Gervais'in [Analysis Situs](#)'a adanmış olağanüstü web sitesine bakmalarını şiddetle tavsiye ederim.

İkinci adımda, λ' 'nin çekirdeğinin abelyenleştirilmesini inceleyeceğiz ve bunun sonlu eleman tarafından üretilmiş serbest abelyen bir grup olduğunu gösterip, mertebesini bulacağız. Bu da $\Gamma_{p,q}$ grubundan $\{p,q\}$ 'yu elde etmemizi sağlayacak.

İlk adım, hemen hepsi *Lefschetz dualitesine* dayanan ve bazıları daha sofistike sayılabilecek çeşitli şekillerde açıklanabilir. Kapalı ve yönlü bir X manifoldunun, örneğin çemberin, bir küreye, örneğin 3 boyutlu küreye gömüldüğünü düşünelim. X 'in tümleyeninin homolojisi, X 'in küre içine nasıl gömüldüğünden bağımsızdır. O zaman 3-küredeki bir düğümün tümleyeninin homolojisi, basit düğümünkiyle aynıdır. Bu yüzden birinci homoloji, \mathbb{Z} 'ye izomorftur.

Aynı gerçeği şu şekilde de sunabilirdim. $S^3 \setminus K_{p,q}'$ da pürüzsüz bir γ ilmeği alalım. Küre basit bağlantılı olduğu için γ , illa bir gömme olması gerekmeyen, pürüzsüz bir $D \rightarrow S^3$ gönderiminin kenarı olur. Bu daire ile $K_{p,q}'$ 'yu genel konuma koyalım; böylece kesişimleri çapraz olsun. D ile $K_{p,q}'$ 'nin kesişimlerini, yönleri göz önüne alarak cebirsel bir şekilde sayalım. Elde edeceğimiz sayı, $ge(\gamma)$ diye gösterilen *geçişme sayısıdır*. Bu sayı, sadece $S^3 \setminus K_{p,q}$ içindeki γ' 'nin homoloji sınıfına bağlıdır, zira S^3 içinde kenarı olmayan bir yüzeyin herhangi bir kapalı eğriyle cebirsel kesişimi sıfırdır.

Böylece örten bir

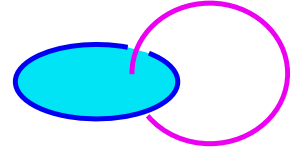
$$ge : H_1(S^3 \setminus K(p,q), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

homomorfisi tanımlanır. γ' 'nin ge' 'nin çekirdeğinde olması, kesişimdeki + ve - işaretlerinin ikiye ikiye eşlenebilmesi demektir. D 'de kesişme noktaları etrafında delikler açalım ve bunların kenarlarını tüpler kullanarak ikiye ikiye birbirine bağlayalım. Böylece kenarı yine γ olan ama artık $K(p,q)$ ile kesişmeyen bir yüzey elde ederiz. Buradan da ge' 'nin çekirdeğindeki elemanların homolojik olarak sifira denk olduklarını görürüz. Diğer bir deyişle ge bir izomorftur. Son olarak birinci homoloji grubunun, temel grubun abelyenleştirilmesi olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla $\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \mathbb{Z}$ şeklindeki herhangi bir homomorfi, ge üzerinden geçmek zorundadır. Yani ge , olası bir işaret değişikliği dışında, daha önce tanımladığımız λ ile aynı şeydir. Bu, birinci adım.

S^1 'den S^3 'e her gönderim, birim D^2 dairesine genişletilebilir. Eğer bu genişletme bir gömme ise γ bir basit düğümdür. Yine de herhangi bir düğüm cinsi daha yüksek ve gömülü bir yönlü yüzeyin kenarıdır; bu yüzeye Seifert yüzeyi denir.

3-kürede geçişmemiş bir çemberin tümleyeninin $\mathbb{R}^2 \times S^1$ 'e homeomorf olduğunu not düşelim.

Daha doğrusu bu, γ ile $K_{p,q}'$ 'nin geçişme sayısıdır. Bunu, kitabın ileriki bölümlerinde tartışacağız.



Geçişme sayısı.



İki kesişme noktasını çıkartmak. ©

Şimdi ikinci adıma geçiyoruz. ge' 'nin çekirdeğini $G(p, q)$ ile gösterelim. O zaman bu, $S^3 \setminus K(p, q)$ 'nin bir Galois örtüsünün temel grubudur; bu örtünün otomorfi grubu sonsuz döngüselidir: $\mathbb{Z} = \Gamma_{p,q}/\ker ge$. Bu örtünün, bir sayfayla \mathbb{R} 'nin çarpımı, yani $\Sigma \times \mathbb{R}$ olduğu açık; örtü dönüşümleri grubu da basitçe

$$(p, t) \in \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow (M(p), t + 2\pi) \in \Sigma \times \mathbb{R}$$

tarafından üretilir; burada M dolanım fonksiyonudur. Buradan $G(p, q)$ 'nin bir Σ sayfasının temel grubu olduğu görülür. Bir sayfanın topolojisini zaten tarif etmiştik. $G(p, q)$ abelyen olmadığı için, onu abelyenleştirmek işi kolaylaştırabilir. Bu abelyenleştirmenin sonucuna $H(p, q)$ diyelim; elbette bu sayfanın birinci homoloji grubundan başka bir şey değildir.

Bu abelyen $H(p, q)$ grubunu ve M 'nin etkisini tarif edelim. 0 ile 1'i birleştiren yayın yukarıya kaldırılmasıyla Σ' da elde edilen pq adet yayı içeren bir çizge vardır. Bu çizge, 0'ın üzerinde q tane ve 1'in üzerinde p tane köşe içerir. Kapalı, üçgenlenmiş bir yüzeyden tüm üçgenlerin ortak bir köşesinin çıkartılmasıyla Σ' 'nin elde edildiğini hatırlayalım. Dolayısıyla Σ delinmiş yüzeyi, bu köşenin karşısındaki tüm kenarların birleşimine deforme edilebilir ki bu da bizim pq tane kenarı olan çizgemizdir. Bu çizgeye genellikle *iki gövdeli tam çizge* denir. Bu $H(p, q)$ 'nin hesaplanmasını sağlayan çok basit bir 1-kompleks oluşturur.

1-zincirlerin oluşturduğu abelyen grup, $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve $j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ olacak şekilde $c_{i,j}$ yayları tarafından serbest şekilde üretilir. 0-zincirlerin oluşturduğu abelyen grup, $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve $j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ olacak şekilde, p tane a_i noktası ve q tane b_j noktası tarafından üretilir. Kenar operatörü ∂ , $c_{i,j}$ 'yi $b_j - a_i$ 'ye gönderir. Son olarak, $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dolanımının i ve j 'ye etkisiyse aşıkardır.

$H(p, q)$ homolojisi, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 'nin etkilerine göre her seviyede ahenkli olan

$$0 \rightarrow H(p, q) \rightarrow \mathbb{Z}^p \otimes \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^p \oplus \mathbb{Z}^q \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

tam dizisinin içine oturur. Dolanımın M üretici, $(1, 1)$ 'in etkisiyle ilişkilendirir. Vektör uzayları ve doğrusal gönderimler elde etmek için \mathbb{R} 'yle tensör çarpımı alınca $H(p, q) \otimes \mathbb{R}$ 'nin boyutunun $pq - (p + q) + 1$, yani $(p - 1)(q - 1)$ olduğu ortaya çıkar. Hatta

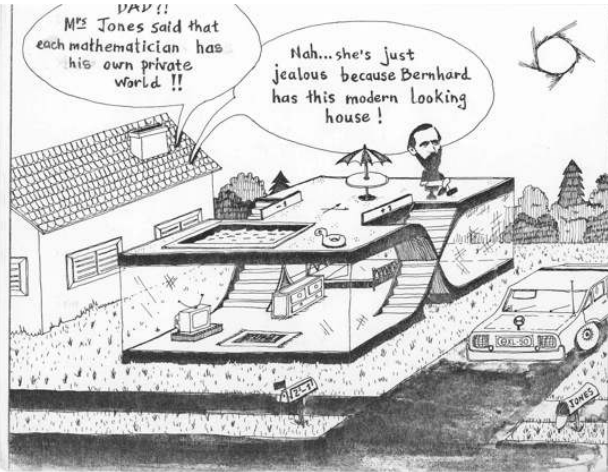
M' 'nin $H(p, q)$ üzerindeki M_* etkisinin karakteristik polinomu, tam diziyi kullanarak

$$P(X) = \frac{(X^{pq} - 1)(X - 1)}{(X^p - 1)(X^q - 1)}.$$

olarak hesaplanır. P' 'nin kökleri, yani M_* 'nin özdeğerleri, 1 'in pq 'uncu köklerinden p 'inci ve q 'uncu kökler atılıp 1 dahil edilerek elde edilir. Bu yelpazeden p ve q 'nun değerleri bulunabilir.

Teoremin ispatı bitti. $K(p, q)$ düğümünün (tümleyeninin) temel grubu Γ 'dan, ilk türetilmiş grubu $\Gamma_1 = [\Gamma, \Gamma]$ 'yı oluşturun; gördüğümüz gibi bu, aynı zamanda ge 'nin çekirdeğidir. Sonra, Γ_1 'i abelyen hale getirin ve $\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1]$ grubunu tanımlayın. Şimdi Γ 'nın içinde $ge(g) = \pm 1$ olacak şekilde bir g elemanına ve $(\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1]) \otimes \mathbb{R}$ içinde g 'yle eşlenik almaya bakın. p ve q 'nun değerleri, bu doğrusal gönderimin özdeğerlerinden elde edilebilir. \square

Bu cebirsel numara aslında oldukça genel ve güçlü bir tekniktir ve uygulaması sadece düğümlere sınırlı değildir. Verili herhangi bir Γ grubu için, $\Gamma_{ab} = \Gamma/\Gamma_1 = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ abelyenleştirmesinin $(\Gamma_1/[\Gamma_1, \Gamma_1]) \otimes \mathbb{R}$ üzerine eşlenikle etkisine bakın. Birbiriyle değişmeli bir otomorfiler ailesi tanımlanmış olur; bunların eşlenik sınıfları Γ grubunun değişmezleridir. Bu inşaya Γ 'nın *Alexander modülü* denir. Bu, bir grubun en ilkel değişmezlerinden biridir.



André Nachbin'in [web sitesinde](#).



Puisseux zirvesi.



Victor Puiseux, nihayet!

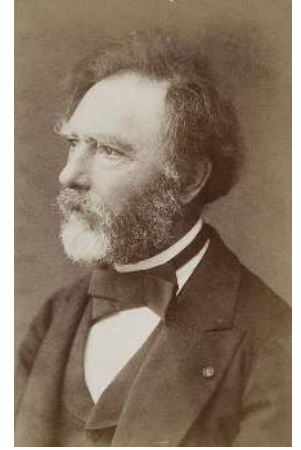
ADI BU KİTAPTA ŞU ANA KADAR BİRKAÇ KEZ GEÇMİŞ OLAN PUISEUX'NÜN esasen ne yapmış olduğunu okur merak etmiştir. Ne yazık ki "iyi bilinen Puiseux teoremi" ona değil, daha önce gördüğümüz gibi Newton'a aittir; ardından Cramer'in de çorbada tuzu vardır.

Ortaya çıkan serinin yakınsaklığını ne Newton'ın ne Cramer'in kanıtlamadığını söyleyerek buna itiraz edilebilir ama yakınsaklık Cauchy'nin *calcul des limites –limitler hesabı–* sayesinde kolayca kanıtlanabilir.

Öte yandan Puiseux, tekilliklerin yerel yapıları problemine tamamen farklı bir açıdan yaklaşmış, temel bir katkı yapmıştır. Bu bölümde kendisinin bakış açısını sunmak istiyorum. Orijinal sunumuna sadık kalmak ne yazık ki yararsız olacak.

Bir matematikçi için garip bir talih: bir yandan kendisinden çok zaman önce bilinen bir teoremlerle "ünlü" olması diğer yandan da ondan çok daha sonra edinilmiş yöntemler sayesinde bizim kavrayışımızın onunkinden daha fazla olması.

Neyse ki, Puiseux'nün Alp dağcıları arasında ünü daha da fazladır. Massif des Écrins'deki Pelvoux dağının en yüksek noktası (3,946 m) *Puiseux zirvesidir*. Puiseux bu zirveye 9 Ağustos 1848'de ulaştı. Ne yazık ki bunun bile "ilk" olduğu şüpheli çünkü Kaptan Durand zirveye 18 yıl önce ulaştığını iddia etmiştir. Ebedi ikincilik Puiseux'nin makus talihi mi?



Victor Puiseux (1820–1883) ©

Puiseux'nün topolojik yaklaşımı

Çoğunlukla Puiseux teoremi denen teoremi hatırlayalım.

Teorem. \mathbb{C}^2 'de başnoktanın bir komşuluğunda tanımlı, sıfır fonksiyon olmayan, holomorf bir $F(x, y)$ fonksiyonu alalım. $F(0, 0) = 0$ olsun. Bu durumda $0 \in \mathbb{C}$ civarında tanımlı, holomorf, sonlu sayıda öyle g_1, \dots, g_n fonksiyonları ve öyle pozitif m_1, \dots, m_n tamsayıları vardır ki, hala $(0, 0)$ 'in komşuluğunda, $F(x, y) = 0$ eğrisi $i = 1, \dots, n$ olmak üzere n adet $t \mapsto (t^{m_i}, g_i(t))$ dalının (ve belki de y -ekseninin) birleşimidir. Ayrıca bu dallar sadece başnoktada kesişirler ve parametrelemeleri birebirdir.

Puiseux öncesi bir kanıtı zaten tartışmıştık. Kanıtın özü cebirseldi; önce g_i formel serilerini buluyor, sonra bunların yakınsak olduğunu gösteriyorduk. 1850'de Puiseux topolojik bir yaklaşım önerdi¹¹²; Riemann'ın cebirsel geometriye topolojik fikirler sokmak için hazırladığı muhteşem makalelerinden hemen önceydi bu. Riemann yüzeyleri cinsinden kendini tabii ki ifade edememiş olması konusunda Puiseux'yü "affedebiliriz".

Böyle bir topolojik kanıtın taslağını anlatayım. Önce $F(0, y)$ fonksiyonunu düşünelim. Eğer bu hepten sıfırsa, problemi bozmadan, F' 'yi x 'in bir üssüne böleriz. Dolayısıyla $F(0, y)$ 'nin değerlemesinin (katlılığı da deniyor) bir $m > 0$ pozitif tamsayısı olduğunu kabul edebiliriz. Özel bir sonuç olarak, $F(0, y)$ başnoktada (katlılığı m olan) yalıtılmış bir sifıra sahiptir. $F(0, y) = 0$ 'ın $|y| \leq \varepsilon$ 'da tek kökü 0 olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçin. $F(x, y) = 0$ 'ın $\{(x, y) \mid |x| \leq \eta; |y| = \varepsilon\}$ dolu simidinde hiçbir kökü olmayacak şekilde bir $\eta > 0$ değeri seçilebileceği, süreklilikten basitçe çıkar. Böylece x ve y 'yi ε ve η 'ya bölerek $\varepsilon = \eta = 1$ olduğunu kabul edebiliriz.

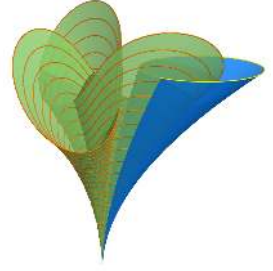
İleride ayrıntısıyla irdelenecek bir varsayımda bulunalım.

$\partial F/\partial y$ kısmi türevinin $F(x, y) = 0$ eğrisi üstünde başnokta dışında hiçbir yerde sıfır olmadığını kabul edelim.

Bir noktadan delinmiş

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0); F(x, y) = 0; |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$$

eğrisi C^* olsun. Ana gözlemimiz şu: C^* 'dan $D^* = \{x \mid |x| \leq 1\} \setminus \{0\}$ delik dairesine örten izdüşüm bir örtü fonksiyonudur.



İki dal geçişmiş olabilir. ©



Göttingen Matematiksel Modeller ve Gereçler Koleksiyonu'ndan iki model; burayı okur mutlaka ziyaret etmeli. ©

¹¹² V. Puiseux. *Recherches sur les fonctions algébriques*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 15:365–480, 1850.

Tüm bu tartışmanın yerel olduğunu unutmayın. Bu yüzden, "sıfır değildir", dediğimde "başnoktanın bir komşuluğunda sıfır değildir" demek istiyorum.

Burada da Henri Paul de Saint-Gervais'ye ait *Analysis Situs* sitesini kaçırmayın.

Örtü fonksiyonlarının tanımını ve yerel homeomorfilerden nasıl farklı olduklarını hızlıca hatırlatayım.

Şu koşulu sağlayan sürekli bir $p : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna *yerel homeomorfi* (bazen de *étale* fonksiyon) diyoruz: X 'in her bir noktası için, $p(U)$ açık olacak ve p 'nin U 'ya kısıtlanması, $p(U)$ 'ya örten bir homeomorfi verecek biçimde açık bir U komşuluğu olmalıdır.

Şu koşulu sağlayan örten, sürekli bir $p : X \rightarrow Y$ fonksiyonu naysa bir *örtü fonksiyonu* denir: Y 'nin her bir noktası için, $p^{-1}(V)$ kümesi ayrık, açık kimi U_i kümelerinin birleşimi olacak ve p 'nin her bir U_i 'ye kısıtlanması, V 'ye örten bir homeomorfi verecek biçimde açık bir V komşuluğu olmalıdır.

Bir örtü fonksiyonunun bir yerel homeomorfi olduğu açık; oysa basit örnekler tersinin doğru olmadığını gösteriyor. Yerel bir homeomorfinin *has* olması durumunda bir örtü fonksiyonu olacağı kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi C^* 'in delik daire üzerinde örtü uzayı olduğu gözlemi-mizi kanıtlayalım. İzdüşümün yerel homeomorfi olduğu gerçeği $\partial F/\partial y$ türevinin C^* üzerinde sıfır olmaması kabulümüzden ve örtük fonksiyon teoreminden hemen çıkar. Ayrıca izdüşümün *has* olduğu bariz, zira C^* içinde bir nokta dizisinin tıkHz bir kümeden kaçması için gerek yeter koşul başnoktaya yakınsamasıdır.

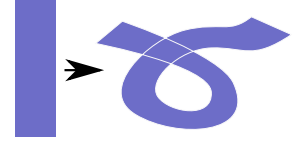
Örtü uzayları kuramının ana teoremi şudur: bağlantılı (ve yerel olarak basit bağlantılı) bir uzayın bağlantılı örtü uzayları, temel grubunun altgrupları tarafından (izomorfilerle değişebil-mek izniyle) belirlenir. Örneğin D^* 'in bağlantılı örtü uzayları, $m \geq 1$ tamsayı olmak üzere $x \in D^* \mapsto x^m \in D^*$ üssel fonksiyonlarıyla ya da $\Re(x) \leq 0$ yarı düzlemine kısıtlanmış karmaşık eksponansiyel fonksiyonla verilir (daha doğrusu izomorftur).

Şimdi C^* 'in bir C_0^* bağlantılı parçasını seçelim. $C_0^* \rightarrow D^*$ örtüsü sonlu liflere sahip olduğundan $x \in D^* \mapsto x^m \in D^*$ şeklinde bir örtüye izomorftur. Başka deyişle

$$\phi : x \in D^* \mapsto (x^m, g(x)) \in C_0^*$$

şeklinde bir *homeomorfi* vardır. Delik dairede holomorf olduğu aşikar olan bu ϕ 'nin daireye holomorf bir fonksiyon olarak genişletilebileceğini göstermeliyiz hala. Ama bu da Riemann genişleme teoreminden çıkar: delik bir dairede sınırlı holomorf

Étale sözcüğü Fransız cebirsel geometricileri tarafından kullanıma sokulmuştur. "stationary" anlamına gelir ve sıklıkla kımıltısız bir deniz yüzeyini betimlemek için kullanılır.



Yerel homeomorfi olup da örtü olmayan bir fonksiyon.

Bir fonksiyon altında her tıkHz kümenin ters görüntüsü de tıkHzsa fonksiyona *has* denir. Ters doğru değildir elbette; bir örtü fonksiyonu *has* olmayabilir (örnek olarak: $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(it) \in S^1$).

Puiseux, x 'in başnokta çevresinde izlediği bir takım ilmekleri ve $F(x, y) = 0$ eşitliğini sağlayan y değerlerinin bu ilmeklerle ilintili permütasyonlarını tarif ederken, esasen kapalı biçimde örtü uzaylarını kullanıyordu.

Zamanda ileri geri bir gidiş daha!

bir fonksiyon tüm daireye holomorf olarak genişler.

$\partial F/\partial y$ kısmi türevinin delinmiş $F(x, y) = 0$ eğrisinde sıfır olmadığı varsayımıyla teorem kanıtlanmış oldu. Bu varsayımı gelecek paragrafta tartışacağız.

Basit kökler

Karmaşık tek y değişkenli holomorf bir fonksiyonun ve türevinin y_0 'da birlikte sıfır olmaları için gerek yeter koşul bu sıfırın katlı olmasıdır. Dolayısıyla Puiseux'nün teoreminde, F 'nin şu özelliği sağladığını göstermeliyiz: sıfırdan farklı küçük bir x_0 için $F(x_0, y) = 0$ 'ın küçük katlı kökleri yoktur.

Bu noktada Puiseux genel holomorf $F(x, y)$ fonksiyonlarıyla değil x, y cinsinden polinomlarla çalışmış. O durumda katlı köklerle uğraşmak kolay; nitekim Puiseux bu problemi (135 sayfalık makalede) bir cümlede bertaraf etmiş. Biz kendisinden birazcık daha dikkatli olalım.

F polinomunu, $\mathbb{C}[x][y]$ 'nin elemanı olarak düşünelim. Bu F , katsayıları bir tek çarpanlama bölgesinden gelen, tek y değişkenli bir polinom olarak görülebilir. F 'yi indirgenemez terimlerin çarpımı olarak yazabiliriz ve böylece $F(x, y) = 0$ eğrisi bu indirgenemez çarpanlara karşılık gelen eğrilerin birleşimi olur. Dolayısıyla F 'yi indirgenemez varsayabiliriz.

Şimdi $x_k \neq 0$ ve y_k ise $F(x_k, y) = 0$ denkleminin bir katlı kökü olmak üzere, $(0, 0)$ 'a yakınsayan bir (x_k, y_k) dizisi olduğunu varsayalım. O zaman $F(x_k, y)$ polinomunun diskriminantı 0 olur. O zaman F 'nin diskriminantının sonsuz adet kökü olacağından $\mathbb{C}[x]$ 'in bir elemanı olan bu diskriminant tamamen sıfır olur. Bir P polinomun diskriminantı sıfırsa P ve türevinin ortak böleni vardır. P indirgenemez ise bu olanaksızdır.

Dolayısıyla $\mathbb{C}[x][y]$ 'de F indirgenemezse ve x küçük ve sıfırdan farklıysa y 'de bir polinom denklemi olarak $F(x, y) = 0$ 'ın küçük ve katlı kökü olamaz. *Polinom* $F(x, y) = 0$ için Puiseux teoreminin kanıtındaki eksik içerik budur.

Genel holomorf $F(x, y) = 0$ içinse halledilmesi gereken (ve Puiseux'nün yine yapmadığı) bir miktar daha iş var.

Bir polinomun diskriminantı, polinom ile türevinin birleşkesidir.

Weierstrass'ın hazırlık teoremi

Weierstrass'ın hazırlık teoremiyle daha önce karşılaşmıştık. İlk kez formel seriler bağlamında kanıtladığımız teoreme ardından yakınsaklığı göstermiştik. Şimdiki hedefimizse aynı teoremi karmaşık analiz kullanarak kanıtlamak.

İfadeyi hatırlayalım.

Teorem. \mathbb{C}^2 'de başnoktanın bir komşuluğunda tanımlı, sıfırdan farklı, holomorf bir $F(x, y)$ fonksiyonu verildiğinde,

$$F(x, y) = x^r U(x, y) (y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x))$$

eşitliğini sağlayacak bir $r \geq 0$ tamsayısı; başnoktada sıfır olmayan, holomorf bir $U(x, y)$ fonksiyonu ve $0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı, $a_0(x), \dots, a_{m-1}(x)$ diye m adet holomorf fonksiyon vardır.

Tam bize lazım olan teorem bu. Asla sıfır olmayan fonksiyonlarla değiştirebilmek koşuluyla, incelenen F fonksiyonunun değişkenini y olarak düşünebileceğimizi ve katsayılarını da x 'in yakınsak serilerinin halkası olan $\mathbb{C}\{x\}$ 'ten seçebileceğimi söylüyor. Dolayısıyla Puiseux'nün ($\partial F/\partial y$ 'nin orijin hariç eğride sıfır değerini almadığını kabul edebileceğimizi gösteren) önceki kanıtı (x 'e göre polinomların halkası yerine yakınsak serilerin halkasını kullanarak) sözcüğü sözcüğüne tekrarlanabilir. Böylece Weierstrass teoremini kullanarak Puiseux'nün teoremi kanıtlanır.

Şimdi Weierstrass'ın klasik analitik kanıtını anlatacağım.

F 'yi bir x^r 'ye bölerek $F(x, y)$ 'nin $|x| \leq 1$ ve $|y| = 1$ için asla sıfır olmadığını varsayalım. $|x| \leq 1$ olmak üzere sabit bir x için birim dairede $y \mapsto F(x, y)$ fonksiyonunun katlılıkları da sayarak $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ diye sonlu adet sıfırı vardır. Buradaki ana zorluk, bu $y_i(x)$ fonksiyonlarını x cinsinden holomorf, hatta sürekli fonksiyonlar olarak seçmenin olanaksız olmasıdır; bunun tam nedeni de $F(x, y) = 0$ 'da örtük $y(x)$ 'in çokdeğerli olmasıdır. Yine de, $y_i(x)$ 'lerin tüm simetrik fonksiyonlarının gerçekten de holomorf olduğunu göstereceğiz.

En basit kanıt Cauchy formülünü kullanıyor. İlk

$$s_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=1} \frac{y^k F'_y(x, y)}{F(x, y)} dy$$



Karl Weierstrass
(1815–1897).

©

ifadelerine bakalım. y 'nin bir fonksiyonu olarak $y^k F'_y(x, y)/F(x, y)$ ifadesinin köklerden biri olan $y_i(x)$ 'de kalıntısı, $y_i(x)^k$ 'nin k 'inci kuvvetidir ve böylece $s_k(x)$, köklerin k 'inci kuvvetlerinin toplamı olur. İntegral, $s_k(x)$ 'in x 'in holomorf bir fonksiyonu olduğunu açıkça gösterir.

Üstelik s_k 'ler simetrik fonksiyonları ürettiği için $y_i(x)$ 'lerin tüm simetrik fonksiyonları ve özel bir örnek olarak temel simetrik $a_i(x)$ fonksiyonları, x 'in holomorf fonksiyonlarıdır. Viète'nin teoreminden,

$$y^m - a_{m-1}(x)y^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1}a_1(x)y + (-1)^m a_0(x)$$

polinomu F 'nin sıfırlarıyla aynı yerde, aynı katlılıkta sıfır olur ve böylece $U(x, y)$ bölümü asla sıfır olmaz.

Weierstrass hazırlık teoremi ve Puiseux'nün teoremi kanıtlanmış oldu. \square

Weierstrass'ın hazırlık teoremini kim kanıtladı?

Bu basit soruya cevabın kesinlikle Weierstrass olmadığını okurum çoktan tahmin etmiş olmalı. Matematik tarihçileri, "bunu ilk kim kanıtladı?" türünden soruların haddinden fazla naif olduğunu ve asıl noktayı çoğunlukla iskaladığını iyi bilirler. Bununla birlikte, yirminci yüzyılın iki önemli matematikçisi Henri Cartan¹¹³ ve Carl Siegel'in¹¹⁴, bu teoremin etrafında gelişen fikirleri sergilemeye çalışan ayrıntılı makaleler yazmış olduklarını görmek ilginç. Yine de makalelerinin tümüyle yakınsak olduğunu söyleyemem. Yalnızca birkaç adımdan söz edeyim.

– y bilinmeyen ve x parametre olmak üzere $F(x, y) = 0$ gibi bir holomorf denklemin köklerinin simetrik fonksiyonlarının x 'e holomorf bağlı olduğunu Cauchy 1831'de biliyordu; benim verdiğim kanıtı da.

– Weierstrass kanıtını 1886'da yayınladı fakat bir dipnotta, 1860'dan beri bu teoreme ilişkin dersler anlattığından söz eder. Cauchy'nin kalıntılarından tümüyle olmasa da mümkün olduğunca kaçınıp serilerle çalışmış olması şaşırtıcı değil. Kanıtının yalnızca bir kısmı cebirseldir.

– Poincaré, teoremi 1879'da tezinde Cauchy'ye hiçbir atıfta

s_0 , köklerin sayısıdır. x 'in holomorf bir fonksiyonu ve tamsayı olduğuna göre sabittir. Bu gerçek, örtük biçimde birkaç satır önce kullanılmıştı!

Newton'un çok bilinen bir başka teoremi.

¹¹³ H. Cartan. Sur le théorème de préparation de Weierstrass. In *Festschr. Gedächtnisfeier K. Weierstrass*, pages 155–168. Westdeutscher Verlag, Cologne, 1966.

¹¹⁴ C. L. Siegel. Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstrass. In *Number Theory and Analysis (Papers in Honor of Edmund Landau)*, pages 297–306. Plenum, New York, 1969.

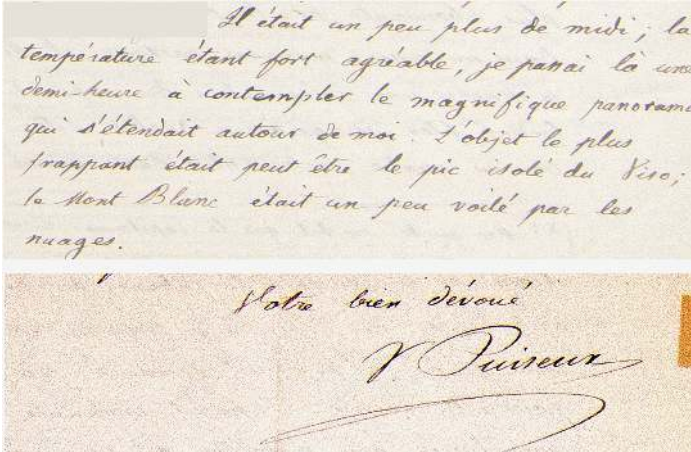
bulunmadan kanıtladı. Her zaman olduğu gibi, Poincaré'nin yazılarında "kanıt" sözcüğü dikkatle kullanılmalı; bu uyarı, bu erken çalışmasında özellikle geçerli. Çok daha sonra, örneğin *Méthodes Nouvelles* eserinde, daha iyi bir kanıt sunmaksızın ve Weierstrass'tan söz etmeksizin tezine atıfta bulunmuştur. İşin ilginç yanı, Bourbaki'nin kurucu babalarından Henri Cartan da makalesinde Poincaré'den söz etmemiştir.

– 1905'te Lasker¹¹⁵ tümüyle cebirsel bir kanıt sundu ve formel ve yakınsak seri halkaları için cebirsel çıkarsamalar elde etti.

– Siegel, kendisine göre en kısa kanıtın 1887'de Stickelberger¹¹⁶ tarafından yayınlandığını vurgular.

Teoremin temel ve güncel bir sunumu için Ebeling'in kitabına¹¹⁷ bakın. Teoremin birçok çeşitlemesini dikkatle anlatan ve tarihsel yorumlar katan Grauert ve Remmert'e¹¹⁸ de bakın.

Şunu da söylemeden bu bölümü kapamayayım. Teoremin, C^∞ fonksiyonlar için Thom tarafından sanı olarak ileri sürülmüş ve Malgrange¹¹⁹ tarafından kanıtlanmış bir hali de bulunuyor. Ama bu başka bir öykü¹²⁰...



Victor Puiseux'nun, Pelvoux Dağı keşif seferini anlatan bir mektubundan: "Etrafımı saran o muhteşem panoramaya dalıp gitmişim". Caspar David Friedrich Sis denizi üzerinde gezgin tablosunu yapan Victor Puiseux ona modellik yapabirmiş ama Pelvoux seferi 30 yıl sonra gerçekleşti!

¹¹⁵ E. Lasker. *Zur Theorie der Moduln und Ideale*. *Math. Ann.*, 60(1):20–116, 1905.

¹¹⁶ L. Stickelberger. *Ueber einen Satz des Herrn Noether*. *Math. Ann.*, 30(3):401–409, 1887.

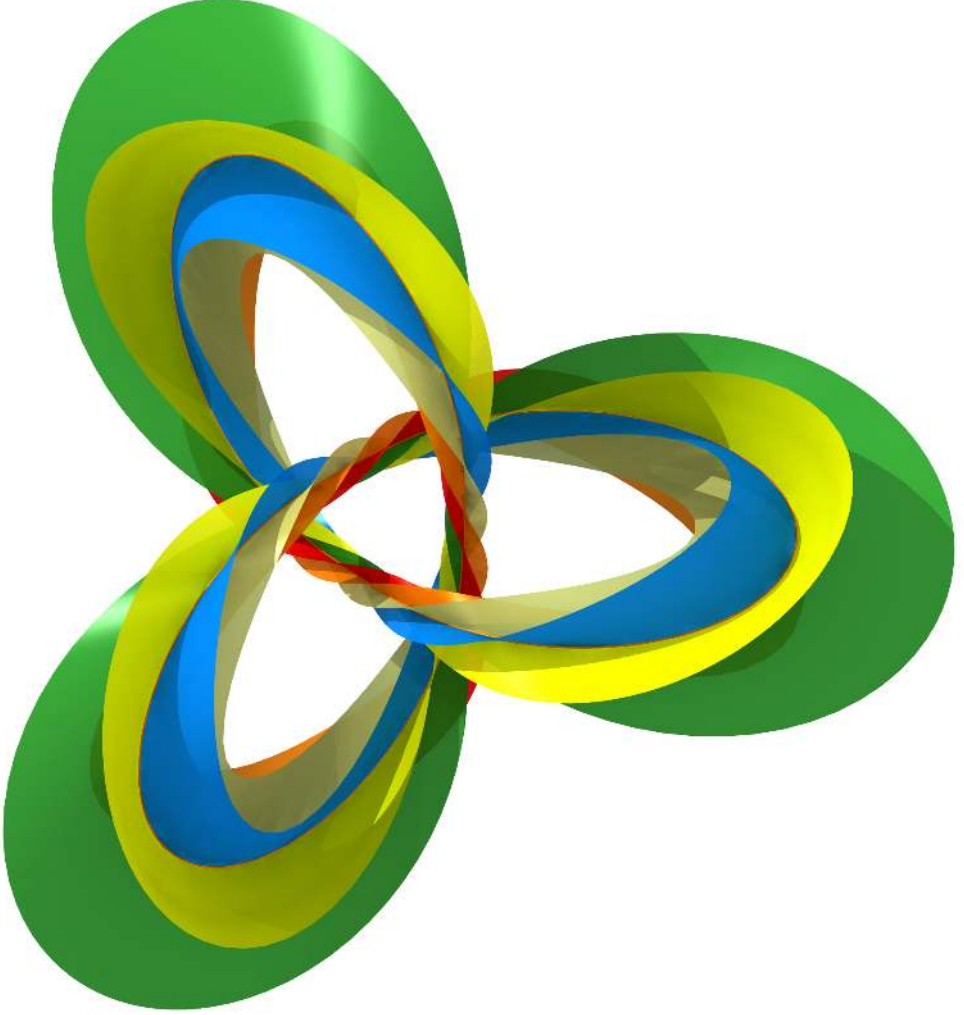
¹¹⁷ W. Ebeling. *Functions of several complex variables and their singularities*. GSMo83. AMS, 2007.

¹¹⁸ R. R. H. Grauert. *Analytische Stellenalgebren*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 176. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.

¹¹⁹ B. Malgrange. *Ideals of differentiable functions*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1967.

¹²⁰ V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Classification of critical points, caustics and wave fronts*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2012. 1985 edisyonunun yeniden basımı.

"Il était un peu plus de midi, la température étant fort agréable, je passai là une demi-heure à contempler le magnifique panorama qui s'étendait autour de moi. L'objet le plus frappant était peut-être le pic isolé du Viso; le Mont Blanc était un peu voilé par les nuages."



$x^3 - y^2$ 'nin Milnor lifleri. ©

Jack Milnor ve liflenmesi

BİR MATEMATİK KÜTÜPHANESİNE GİRDİĞİMDE ya da *Mathematical Reviews* sitesinde dolaştığımda ya da *google'*da arama yaptığımda, matematik dünyasının enginliği karşısında çoğu kez ezilirim. Örneğin sokaktaki insanlara, cebirsel eğrilerin topolojisi gibi, mikroskopik görünebilecek konular, keşifleri muhtemelen birkaç ömür alacak devasa sahalardır aslında. Ruh halime göre bu duygu yılgınlık verici de olabilir, keyif verici de ☺. Bu *petit* kitapta elimden gelenin en iyisi, kayda değer bir örneği anlatmak, başlıca birkaç sonuçtan söz etmek ve son teknolojinin eksiksiz bir tartışmasını sunan (uzun) kitaplardan birkaçına değinmektir.

Nereden bakarsanız bakın, tek bir kitap var ki bir mücevermişçesine altı çizilmeli ve bu konuya ilgi duyan *her öğrenci tarafından okunmalı*: matematik yazarlığı sanatının büyük ustası Milnor'ın *Karmaşık hiperyüzeylerin tekil noktaları*¹²¹ adlı kitabı. . .

Bir örnek

$$F(x, y) = x^9 - x^{10} + 6x^8y - 3x^6y^2 + 2x^5y^3 + 3x^3y^4 - y^6 = 0$$

eğrisine bakalım. Bu F' 'yi rastgele seçmedim. Her $F = 0$ denklemi Puiseux serileriyle çözülebilir elbette ama bu örnekte hile yaptım,

$$y = x^{3/2} + x^{5/3}$$

çözümünden başlayarak olması gereken denklemi aradım! Önce

$$(y - x^{3/2})^3 = x^5$$



John Milnor. ©

¹²¹ J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968.

eşitliği var. Bunu açıp üslerin kesirlerini yok etmek için uygun bir üssünü alarak tam da $F(x, y) = 0$ buluyoruz. Sağlayalım: $F(x, y) = 0$ için Newton algoritmasını kullanırken yapılacağı üzere, $x = x_1^2$ ve $y = x_1^3(1 + y_1)$ koyunca, beklendiği gibi ifade çarpanlara ayrılıyor:

$$F(x_1^2, x_1^3(1 + y_1)) = -x_1^{18} (x_1 - y_1^3) (-8 + x_1 - 12y_1 - 6y_1^2 - y_1^3).$$

Buradan da görülüyor ki başnokta çevresinde F 'nin sıfır kümesi bir tek $x_1 = y_1^3$ dalını içeriyor. Bu dalı

$$x = t^6 \quad ; \quad y = t^9 + t^{10}$$

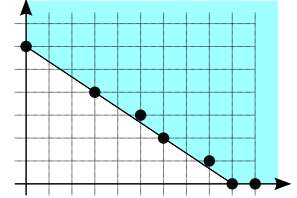
olarak da yazabiliriz ve böylece beklediğimiz gibi $y = x^{3/2} + x^{5/3}$ buluruz. Rastgele bir F hatta bir polinom için bile *sonsuz* bir Puiseux serisi beklenir. Ama öncelikle bu özel örneğe bakalım.

Tekilliğin bağı, yani $F = 0$ eğrisinin orjin merkezli küçük bir S_ϵ^3 küresiyle kesişimini inceleyelim. Eğrinin böyle küçük küreleri, kesiştikleri her noktada çaprazlama kestiğini görmek kolay. Şöyle ki, eğrideki noktaların normunun karesini veren ifade

$$\phi : t \in \mathbb{C} \mapsto |t^6|^2 + |t^9 + t^{10}|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Bu ifade t çok küçükken yaklaşık $|t|^{12}$ olur. Öte yandan $\phi(t) = \epsilon^2$ denklemi \mathbb{C} 'de kapalı bir ilmek tanımlar. Bu ilmek $|t| = \epsilon^{1/6}$ eğrisine yakındır ve radyal ışınları çaprazlama keser. Başka deyişle, $F = 0$ 'ın küçük S_ϵ^3 küresiyle kesişimi, o ilmeğin ϕ altında görüntüsü olan gömülü bir çemberdir, yani bir *düğümdür*.

Küreyi bir homeomorfiyle değiştirebilmek koşuluyla, bu düğüm ϵ değiştiğinde değişmez. Hatta küreler yerine elipsoidleri ve hatta $\max(|x|, |y|) = \epsilon$ ile verdiğimiz şu bizim kare küremizi de kullanabilirdik. Bunun ayrıntılı kanıtı teknik ve sıkıcı olmakla birlikte kilit noktası gayet basit. \mathbb{R}^4 'te N_0 ve N_1 diye iki Öklit normu verildiğinde, $F(x, y) = 0$ eğrisini $N_0 = \epsilon$ ve $N_1 = \epsilon$ küçük küreleriyle kesiştirebiliriz. Bu bize küreye homeomorf iki manifoldda iki düğüm verir. Şimdi $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda N_1 + (1 - \lambda)N_0$ ile verilen bir norm patikası inşa edebiliriz ve bu sayede kürelerde sürekli bir gömülü çemberler ailesi elde etmiş oluruz. Böylece bu çemberlerin hepsi "aynı düğümü" tanımlar. Benzer bir açıklama "kare küre" için de kullanılabilirdi. Bu işe



F 'nin Newton poligonu.

Bir *düğüm* çemberin 3 boyutlu küreye gömülmesidir. Bir bağ ise sonlu sayıda düğümün ayrık birleşimidir. Eğer iki düğümden (ya da bağdan) birincisini ikincisine götüren, küreden kendisine yön koruyan bir homeomorfi varsa bu iki düğüm (bağ) denk sayılır.

Kanıt olamayan bu kanıt, türevli topolojide temel bir gerçeği gizliyor. Tıkız bir X manifoldunu başka bir Y manifolduna gömen $i_\lambda : X \rightarrow Y$ (burada $0 \leq \lambda \leq 1$) fonksiyonlar ailesi varsa o zaman bir *izotopi* vardır, yani $i_\lambda = \Phi_\lambda \circ i_0$ olacak biçimde, Y 'nin bir Φ_λ difeomorfi ailesi vardır.

yeni başlayan bir aceminin yapabileceği olası hataların birkaç örneği için şuraya bakın¹²².

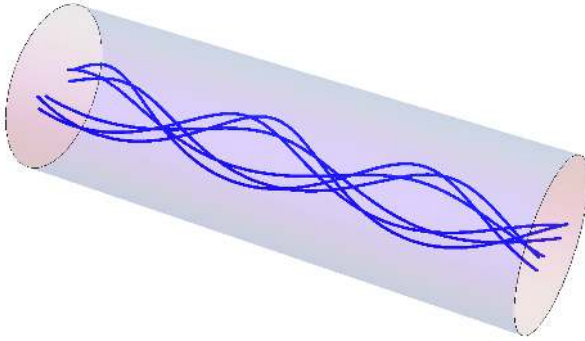
Şimdi, o düğümü K_F olarak gösterelim. Bizim için en elverişli olan, $\max(|x|, |y|) = \epsilon$ kare küresini kullanmak. Eğriyle kesişim, $|x| = \epsilon$ ve $|y| \leq \epsilon$ ile verilen dolu simitte yer alır ve bu yüzden de $|t| = \epsilon^{1/6}$ olur. Yeniden ölçeklendirerek $X = x/\epsilon$, $Y = y/\epsilon$ diyelim. Dolayısıyla X birim çemberde, Y birim dairede bulunur. Eğer $t = \epsilon^{1/6}\tau$ ise

$$X = \tau^6 \quad ; \quad Y = \epsilon^{1/2}\tau^9 + \epsilon^{2/3}\tau^{10}$$

elde ederiz; burada τ birim çemberi kat ediyor.

Aşağıdaki tüm resimlerde, $S^1 \times D^2$ dolu simidini $[0, 2\pi[\times D^2$ silindiri olarak çiziyoruz; ön ve arka yüzler olan $\{0\} \times D^2$ ve $\{2\pi\} \times D^2$ birbirine yapıştırılmalı.

Birim çemberdeki her bir X için tam altı adet Y değeri var; bunlar τ 'nın birimin altıncı kökleriyle çarpılmasına karşılık geliyor. Bu durumda K_F düğümüne örgü biçiminde diyoruz: K_F , tüm $\{*\} \times D^2$ dairelerini çaprazlama keser. Çemberde dönerken bu altı nokta şimdi tarif edeceğimiz düzende yer değiştirir.



Öncelikle, küçük ϵ 'lar için $\epsilon^{2/3}$ değeri $\epsilon^{1/2}$ 'den daha küçüktür. Ayrıca τ değeri birimin altıncı kökleriyle çarpıldığında, $\epsilon^{1/2}\tau^9$ sadece iki farklı değer alır. Öyleyse

$$X = \tau^6 \quad ; \quad Y_0 = \epsilon^{1/2}\tau^9$$

¹²² F. Deloup. [The fundamental group of the circle is trivial](#). *Amer. Math. Monthly*, 112(5):417–425, 2005.



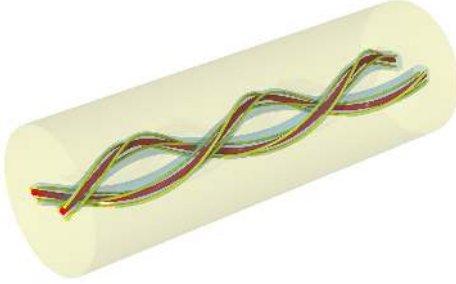
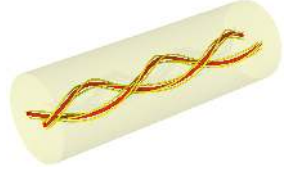
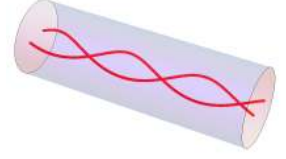
Yavaş yavaş ilerleyin! Bu bölümdeki resimlere dikkatle bakın. Kavramak çok kolay değil.

düğümü bizim eski dost yonca düğümü yani $x^3 = y^2$ 'nin ta kendisidir. X çember boyunca dönerken $\{X\} \times D^2$ dairesinde karşılık gelen iki adet nokta üçer kez yarım tur dönerek yonca düğümünü oluştururlar.

Y_0 'ın birazcık oynatılmışı olan $Y = \epsilon^{1/2}\tau^9 + \epsilon^{2/3}\tau^{10} = Y_0 + Y_1$ ifadesini düşünelim. X 'in birim çemberdeki her bir değeri için

$$X = \tau^6 \quad ; \quad Y_1 = \epsilon^{2/3}\tau^{10}$$

ifadesi Y_1 için (çok küçük) üç değer verir. Böylece her $\{\star\} \times D^2$ dairesinde Y 'nin altı noktası üçerli iki öbek olarak görünür. Başka deyişle, K_F düğümü yonca düğümünün dar bir boru komşuluğunda yer alır ve komşulukta yoncaya dik küçük daireleri üçer noktada keser.



Yoncanın bu boru komşuluğu şöyle parametrelenebilir:

$$(\mu, \zeta) \in \mathbb{S}^1 \times D^2 \mapsto (X = \mu^2, Y = \epsilon^{1/2}\mu^3 - 2\epsilon^{2/3}\mu^{-3}\zeta).$$

Buradaki dolu simidin kılıcı olan $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ çemberi, yonca düğümüne gidiyor. $\epsilon^{1/2}\mu^3 - 2\epsilon^{2/3}\mu^{-3}\zeta$ yerine basitçe niye $\epsilon^{1/2}\mu^3 + 2\epsilon^{2/3}\zeta$ ifadesini seçmediğimi sorabilirsiniz; öyle ya, ikisi de parametrelene! Buradaki fikir, bu koordinat seçimiyle bu boru komşuluğunda $x^3 - y^2$ ifadesinin

$$\epsilon^3(\mu^2)^3 - \epsilon^2(\epsilon^{1/2}\mu^3 - 2\epsilon^{2/3}\mu^{-3}\zeta)^2$$

olması ve 0'a yakın ζ için $4\epsilon^{19/6}\zeta$ mertebesinde olması. Bu sayede $x^3 - y^2$ karmaşık sayısının açısı ζ 'ninkine yakın olacak ve böylece $x^3 - y^2 = 0$ 'ın boru komşuluğunda Milnor lifleri açığı $(\zeta) = \text{sabit eşitliğiyle verilen sayfalara yakın kalacak.}$

$\epsilon^{2/3}\mu^{-3}$ 'ün önündeki 2 katsayısı önemsiz: yaptığı tek şey, boruyu yeterince genişleterek borunun düğümümüzü içermesini sağlamak.

Bu koordinatlarda Y 'nin $\epsilon^{1/2}\mu^3 - 2\epsilon^{2/3}\mu^{-3}$ ile $\epsilon^{1/2}\tau^9 + \epsilon^{2/3}\tau^{10}$ ifadelerini ilişkilendirebiliriz. $\mu = \tau^3$ olduğundan K_F düğümü-
müz

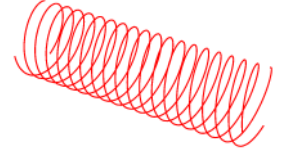
$$\tau \in S^1 \mapsto (\mu, \zeta) = \left(\tau^3, -\frac{1}{2}\tau^{19}\right) \in S^1 \times D^2$$

fonksiyonunun imgesidir.

Bu da (19,3) simit düğümüdür.

Bu 19 sayısı tuhaf gelebilir. Dolu simit $S^1 \times D^2$ üzerinde her k için (19,3) simit düğümünü $(19 - 3k, 3)$ düğümüne (örneğin çok daha basit olan (1,3) düğümüne) götüren bir homeomorfinin var olduğunu hatırlayın. Ancak böyle bir homeomorfi, kenarda birim fonksiyonu (-na homotopik) olamaz ve bu nedenle tüm küreye genişletilemez.

Demek ki K_F , (3,2) simit düğümünün bir komşuluğuna (19,3) düğümü yerleştirilerek elde ediliyor. *Yinelenmiş simit düğümlerinin* tipik bir örneği bu. Bunlara bazen örülerek bir araya getirilmiş sarmal kablolarla benzediklerinden *kablo düğümleri*, bazen de güneş çevresinde dönen gezegenlere atfen *uydu düğüm* denir.



$(\tau, \zeta) \mapsto (\tau, \tau^k \zeta)$
fonksiyonu bir homeomorfi-
dir; dolu simidi bükür.



Milnor liflenmesi

Yonca örneğinde, açığı $(x^3 - y^2)$ fonksiyonunun eşdüzey yüzeyleri, adeta sırtı yonca düğümü olan bir kitabın sayfalarıymışçasına düğümün dışını doldurur. Bu sayfaların topolojisini delinmiş simit olarak belirlemiştik.

1968'de yazdığı ufuk açıcı kitabında Milnor bunun genel bir olgu olduğunu gösterdi. Teoremini aslen tüm boyutlar için kanıtlamıştı; biz kendimizi (karmaşık) 2 boyuta kısıtlayacağız.

Teorem. \mathbb{C}^2 'de başnokta çevresinde tanımlı ve $F(0,0) = 0$ olacak biçimde, sıfır olmayan indirgenmiş holomorf bir $F(x,y)$ fonksiyonu olsun. Eğer $\epsilon > 0$ yeterince küçükse,

– $F(x,y) = 0$ eğrisi \mathbb{S}_ϵ^3 küçük kürelerini bir $L_\epsilon \subset \mathbb{S}_\epsilon^3$ bağı boyunca çaprazlama keser ve kesişimin topolojisi ϵ' 'dan bağımsızdır.

– Üstelik

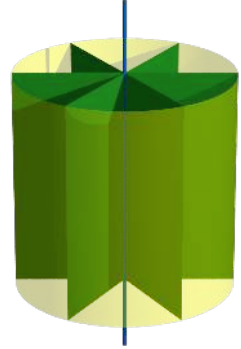
$$(x,y) \in \mathbb{S}_\epsilon^3 \setminus L_\epsilon \mapsto \text{açığı}(F(x,y)) = \frac{F(x,y)}{|F(x,y)|} \in \mathbb{S}^1$$

fonksiyonu yerel olarak basit bir liflenmedir. Liflerin kapanışları tıkkız yüzeylerdir. Kenarları L_ϵ ile çakışır ve L_ϵ bağıının bir boru komşuluğunda açık bir kitaba benzerler: lifler yerel olarak bir doğru parçası ile D^2 'de radyal bir ışın parçasının çarpımıdır.

Bu teorem, tekilliklerin yerel olarak incelenmesinde temel araçtır. Yine de, uzun süre kanıtına bakmadığımı ve kanıtın kolayca anlaşılabilir, basit olması gerektiğine bir biçimde ikna olmuş olduğumu itiraf ediyorum. Çembere giden çok doğal bir fonksiyonumuz var, neden liflenme olmasın ki! Fakat hatalıydım; esasen kanıt epey incelikliydi. Bununla ilgili kitapların iki tür olması da şaşırtıcıdır. İlk tür kitaplar, kanıtın kilit noktasına geldiğinde gayet ketum bir tarzda “Milnor, Bölüm 2'ye bakınız” yazar. İkinci türse, aynı kilit noktada “Milnor, Bölüm 2”yi neredeyse kelimesi kelimesine kopyalar. Aslına bakarsanız her ikisi de haklı; “Milnor, Bölüm 2”den daha iyisini yapmak çok zor. Buradaki amacım kanıtta yenilik yapmak değil de daha çok teoreme ilişkin bir sezgi vermek.

Önce şunu görelim: 1 boyutta teorem doğru ve basittir. \mathbb{C} 'de başnoktanın bir komşuluğunda tanımlı, sıfır olmayan ama

Bir $F(x,y)$ serisi indirgenemez çarpanlarına ayrıldığında yinelenen çarpanı yoksa, F 'ye indirgenmiş denir.



$f(0) = 0$ olacak şekilde holomorf bir f fonksiyonu alalım. $a \neq 0$ kaydıyla $f(x) = ax^n + \dots$ yazalım ve

$$x \in S_\epsilon^1 \mapsto \text{açı}(f(x)) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \in S^1$$

fonksiyonuna bakalım. ϵ yeterince küçükken bunun bir örtü fonksiyonu olduğu açık zira bu fonksiyon C^1 topolojide $x \mapsto \text{açı}(a)\text{açı}(x)^n$ örtü fonksiyonuna yakın.

Bu en basit durumdan sonra $F(x, y) = 0$ eğrisine bakalım. F indirgenmiş olsun; böylece $\partial F/\partial y$ kısmi türevi $F = 0$ 'da (başnokta dışında) sıfırdan farklı olur. Yuvarlak küre yerine bizim kare küremizi ($\max(|x|, |y|) = \epsilon$) kullanacağız. Sade olsun diye bizim eğrinin yalnızca $|x| = \epsilon$, $|y| < \epsilon$ ile verilen T_1 dolu simidiyle kesiştiğini kabul edelim.

İlkin $F(x, y)$ 'nin açısının dolu simide kısıtlandığında, $F = 0$ eğrisi dışında, bir batırma olduğunu göstermek istiyoruz. Başka deyişle, T_1 'de bir (x, y) noktası verildiğinde, bu noktada T_1 'e teğet öyle bir yön arıyoruz ki $\text{açı}(F)$ 'nin bu yönde türevi sıfır olmasın. İlk deneme olarak x 'i sabit tutarak buna dik bir yöne bakabiliriz. Bu yönde $F(x, y)$ 'nin değişimi $\partial F/\partial y$ olacağı için *en azından $\partial F/\partial y$ 'nin sıfır kümesi dışında $\text{açı}(F)$ gerçekten bir batırma olur.*

Öte yandan bu $\partial F/\partial y(x, y) = 0$ sıfır kümesi, $F = 0$ eğrisiyle de yalnızca başnoktada kesişen başka bir eğri. Bu yeni eğri, à la Puiseux, $x = t^n$ ve $y = f(t)$ diye parametrelenebilir. Basit 1 boyutlu durumumuzdan,

$$t \in S_{\epsilon^{1/n}}^1 \mapsto \text{açı}(F(t^n, f(t))) \in S^1$$

fonksiyonunun bir örtü fonksiyonu olduğunu söyleyebiliriz. Böylece, $\partial F/\partial y(x, y) = 0$ eşitliğini sağlayan noktalarda da öyle bir yön bulmuş olduk ki bu yönde açının türevi sıfır olmuyor.

Bu açıklama Milnor'un teoreminin tam bir kanıtı değil kuşkusuz. Birkaç nedenden. . .

Öncelikle yuvarlak bir küre yerine köşeli bir küre kullandık. Neyse ki bu o kadar önemli değil; tartışma yuvarlak küreye kolaylıkla uyarlanabilir.

İkincisi, liflere dair kimi tıkkılık kabulleri olmaksızın bir batırma bir liflenme olmak zorunda değil. $L_\epsilon \subset S_\epsilon^3$ bağının civarında

Sıfırdan farklı bir z karmaşık sayısının *açısı* birkaç yolla tanımlanabilir. $[0, 2\pi[$ ya da $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ kümelerinin elemanı olabileceği gibi birim çemberde $z/|z|$ değeri de olabilir. Aşağıda hangisi daha uygunsu onu seçiyorum. Bunun zorluk çıkarmayacağına inanıyorum.

bizim batırmanın yerel yapısını incelememiz gerekiyor. Bu da zor değil. Kilit nokta şu: eğer $F(x, y) = 0$ ise ve \mathbb{C}^2 'de (x, y) 'yi içeren, eğriyi çaprazlama kesen bir karmaşık doğru alırsak (x, y) 'nin yakınında $\text{açı}(F)$ 'yi incelemek için basit 1 boyutlu duruma başvurabiliriz; böylelikle bağ civarında yerel resmi elde ederiz.

Bu sade sunumumuzun 2 boyutla sınırlı olduğunu, oysa Milnor'un teoreminin tüm boyutlar için çalıştığını unutmayın.

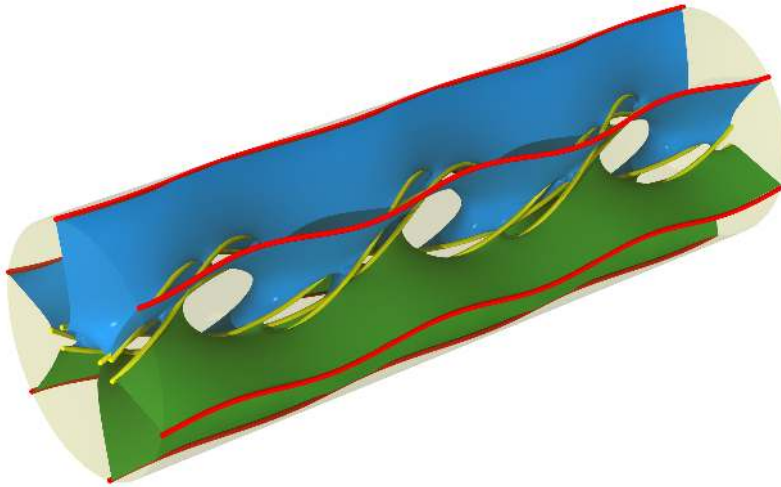
Mükemmel bir sunum için, Milnor, Bölüm 2'ye atıfta bulunuyoruz ☺.

Örneğimizde Milnor'un liflenmesi

Örneğimize geri gelelim:

$$F(x, y) = x^9 - x^{10} + 6x^8y - 3x^6y^2 + 2x^5y^3 + 3x^3y^4 - y^6 = 0.$$

$F(x, y) = 0$ eğrisi küçük bir küreyi yonca düğümünün bir uydu düğümü boyunca kesiyor. $\text{açı}(F(x, y)) = \text{sabit}$ olarak verilen Milnor liflerinin topolojisini tarif etmek istiyoruz. Bilgisayarımızdan bu liflerden birini çizmesini istediğimde çıkan şekil şöyle:



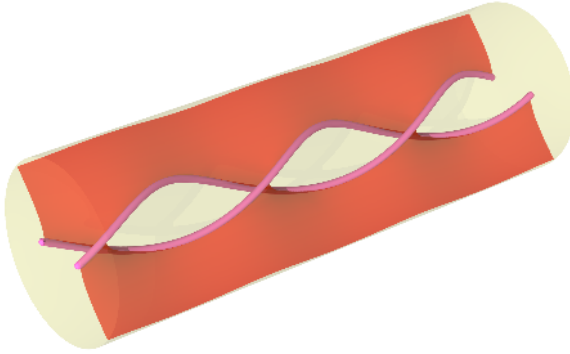
Bu karışık resmi dikkatle incelemek gerekir. En azından şunu görün: bu yüzey dolu simidin kenarını 6 (kırmızı) eğride kesiyor.



Bu bölümün sonu, kitabın devamı için gerekli olmasa da, büyük dikkat istiyor. ©

Sarıyla gösterilmiş düğüm de yüzeyin kenarının bir parçası. İki yüzün mavi ve yeşil renkleri, yüzeyin yönlü olduğunu gösteriyor. Bu dolu simitte yüzeyin kenarının 7 parçası olduğuna dikkat edin.

Bu resmi anlamak için, p ile q aralarında asal ve $p > q$ olmak üzere $x^p - y^q = 0$ diye verilen p, q eğrisinin Milnor liflerine bakalım. Bunların, cinsi $(p-1)(q-1)/2$ olan, bir dairesi oyulmuş yüzeyler olduğunu biliyoruz. Bizim kare küreye $(\max(|x|, |y|) = \epsilon)$ göre bunların konumuna bakalım. $p > q$ olduğundan $x^p - y^q = 0$ ile kesişim T_1 dolu simidinde $(|x| = \epsilon)$ yatar. $|x| = \epsilon$ ve $|y| = \epsilon$ ile verilen kenar simitte, $x^p - y^q$ 'nin değeri y^q 'ya çok yakındır; $x^p - y^q$ 'nin açısıysa y 'nin açısının q katına yaklaşık eşittir. Demek ki $x^p - y^q$ 'nin Milnor lifleri T_1 'in kenarını q adet eğride keser ve bunlar q adet paralele çok yakındır.

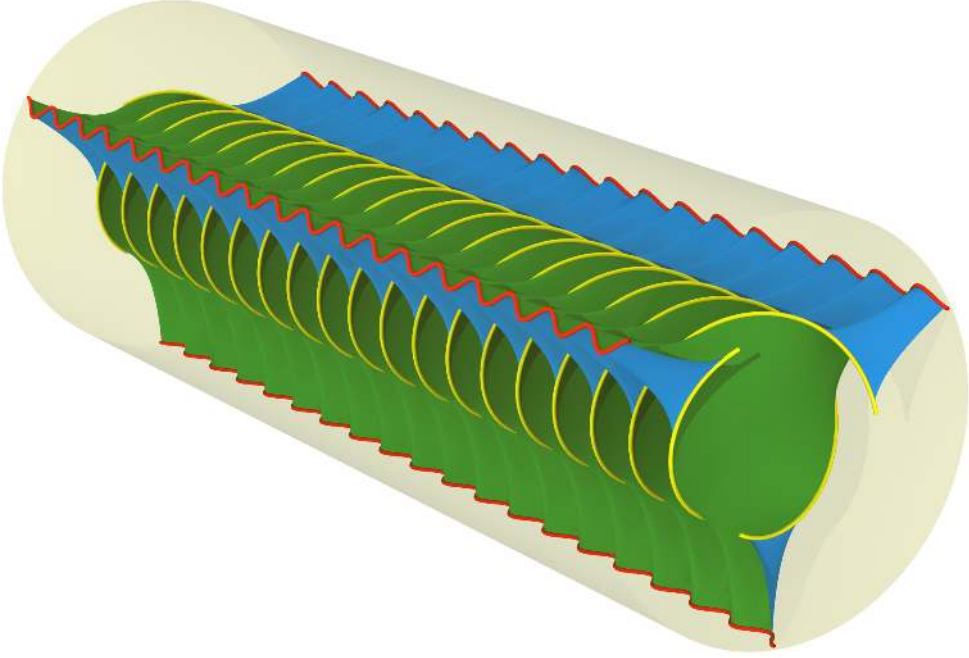


(3,2)-simit düğümü olan yoncanın Milnor lifi. Yüzeyin kenarı tam o düğüm; yüzeyin silindirin kenarıyla kesişimiye iki paralelden oluşuyor. ©

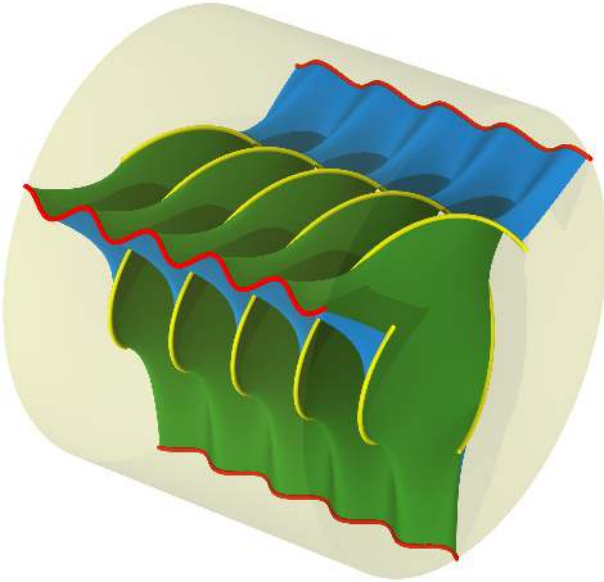
Aynı nedenden, $|y| = \epsilon$ ile verilen T_2 dolu simidinde bir Milnor lifi q adet daireyle neredeyse çakışıktır; burada y 'nin q adet değeri vardır ve her biri için x 'ler, ϵ yarıçaplı daireyi oluşturur. Demek ki, $x^p - y^q$ 'nin bir Milnor lifinin T_1 'le kesişimi, cinsi $(p-1)(q-1)/2$ olan ve $1+q$ tane dairesi çıkarılmış bir yüzeydir. Çıkarılmış birinci dairesinin kenarı T_1 'in içinde bulunan simit düğümüdür; diğer q dairesinin kenarları, T_1 'in kenarındaki q adet çemberdir.

Şimdi $F(x, y) = 0$ ile verilen daha karmaşık örneğimize dönelim. Newton poligonunda baskın terimleri çekerek şunu buluyoruz:

$$F(x, y) = (x^3 - y^2)^3 - x^{10} + 6x^8y + 2x^5y^3.$$



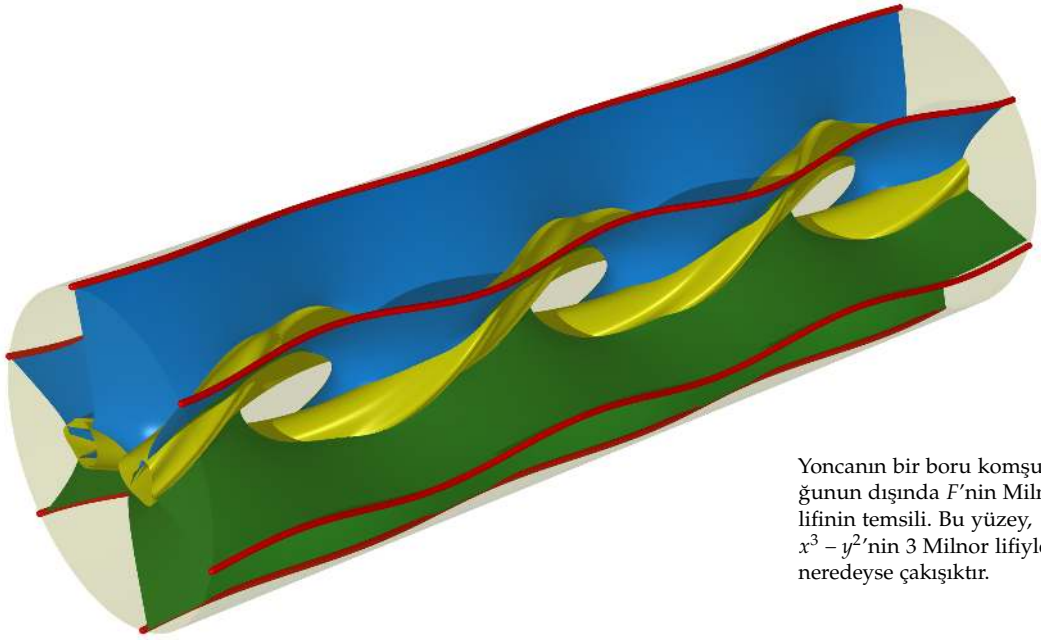
(19,3)-simit düğümünün bir Milnor lifi. Yüzeyin kenarı (sarı) düğüm; yüzeyin silindirin kenarıyla kesişiyse 3 (kırmızı) paralelden oluşuyor. ©



Bir önceki resmi daha iyi anlamak için küçük bir dilim. Mavi ve yeşil renkler, yüzeyin gerçekten de yönlü olduğunu gösteriyor. ©

Yonca düğümünün \mathcal{T}_ϵ boru komşuluğunu inşa etmiş ve bunu $(\mu, \zeta) \in \mathbb{S}^1 \times D^2$ ile parametrelendirdik; burada $x^3 - y^2$ ifadesi $4\epsilon^{19/6}\zeta$ mertebesindeydi. Bu dolu simidin kenarında, yani $|\zeta| = 1$ iken, $|(x^3 - y^2)^3| \simeq 64\epsilon^{57/6}$ ve $|x|, |y| \leq \epsilon$ olur; böylece $F(x, y)/(x^3 - y^2)^3$ değeri 1'e ve $F(x, y)$ 'nin açısı açığı $(\zeta)^3$ 'e çok yakın olur. Dolayısıyla \mathcal{T}_ϵ 'un kenarında F 'nin her bir Milnor lifi, açığı $(\zeta) = \text{sabit}$ olarak verilen üç paralele çok yakın duruyor.

\mathcal{T}_ϵ 'un dışında da bu geçerli: F 'nin, \mathcal{T}_ϵ 'un dışındaki her Milnor lifi $x^3 - y^2 = 0$ 'ın üç Milnor lifine çok yakın. $x^3 - y^2 = 0$ 'ın Milnor liflerinin delinmiş simitler olduğunu hatırlayın. Bunların T_2 ile kesişimleri iki daireden ibaretti. T_1 'le kesişimlerininse üç kenar parçası vardı; bunlardan ikisi T_1 'in kenarındaydı, biri de düğümün kendisiydi. \mathcal{T}_ϵ 'un içinde kalanları saklarsak, görülecek olan tam da şudur.



Yoncanın bir boru komşuluğunun dışında F 'nin Milnor lifinin temsili. Bu yüzey, $x^3 - y^2$ 'nin 3 Milnor lifiyle neredeyse çakışık. ©

\mathcal{T}_ϵ 'un içi, borunun içine konmuş $(19, 3)$ düğümünün yaşadığı yerdir. Borunun içinde (μ, ζ) koordinatlarında $F(x, y) = F(\epsilon X, \epsilon Y)$ değerinin

$$F(\epsilon\mu^2, \epsilon^{3/2}\mu^3 - 2\epsilon^{5/3}\mu^{-3}\zeta)$$

olduğunu görüyoruz. Bu ifade tam tamına $64\zeta^3 = -6\mu^{19}$ iken (birinci mertebede) sıfır olur. Dolayısıyla \mathcal{T}_ϵ içinde F 'nin bir Milnor lifi, $y^3 = x^{19}$ 'un bir Milnor lifine yakındır. Bu da cinsi $(3-1)(19-1)/2 = 18$ olan ve 4 dairesi oyulmuş bir yüzeydir. Kenarlarından biri tam da bizim düğümdür; diğer üçü ise \mathcal{T}_ϵ 'un kenarında üç adet paraleldir.

Özetlersek, $F(x, y) = 0$ 'ın bir Milnor lifi, cinsi 18 olan kapalı yönlü bir yüzeye, bağlantılı toplamla üç simit ekleyerek ve bundan bir daire oyularak elde edilmiş bir yüzeydir. Bu da cinsi 21 olan bir yüzeydir. Epey çetrefilli. . .

Bölümün geri kalanı gayet muğlak olacak. Kurama ancak bir göz atabileceğim.

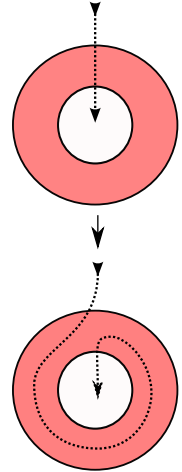
K_F 'nin tümleyenini bir Σ Milnor lifiyle yarıp parçalarsak $\Sigma \times [0, 1]$ çarpımını elde ederiz. Düğümün tümleyenini geri kazanmak için $\Sigma \times \{0\}$ ile $\Sigma \times \{1\}$ yüzeylerini, Σ' 'nin bir difeomorfiyle yapıştırmak gerekir. İzotopilerle değiştirebilmek kaydıyla iyi tanımlı bu difeomorfiye düğümün *dolanım fonksiyonu* denir. Dolanımın birinci homolojiye etkisinin karakteristik polinomu düğümün *Alexander polinomu* olarak adlandırılır. Örneğimizde bunların hepsi epey somut bir biçimde betimlenebilir.

Sonucu vermekle yetineyim. Σ yüzeyinin inşasında üç kapalı eğri boyunca bağlantılı toplam aldık; Σ' 'daki bu eğrilere γ_i ($i = 1, 2, 3$) diyelim. γ_i 'ler boyunca keserek dört parça elde ediyoruz: S ve Σ_i 'ler; burada S , 18 cinsli bir yüzeyden 4 daire oyularak elde edilmiş; Σ_i 'lerse delinmiş simitler. ψ dolanım fonksiyonu, γ_i eğrilerini korur; bu eğriler etrafında birer halkada *Dehn bükümü*dür; yani ψ , bu eğrilerin etrafında yandaki resimdeki gibi davranır. Bu da dolanımın homoloji üzerine etkisinin periyodik olduğunu gösterir. Oysa homotopide bu doğru olmak zorunda değil. Zira γ_i 'ler sıfıra homolog ama homotopik değil.

Σ' 'yı γ_i eğrilerinden kesip açarsak $x^3 - y^2$ 'nin dolanımını üç kez, $x^{19} - y^3$ 'ünkinyse bir kez buluruz. Dolayısıyla Alexander polinomu $x^3 - y^2$ 'nin polinomunun küpüyle $x^{19} - y^3$ 'ünkinin çarpımına eşit olur:

$$\frac{(X^6 - 1)^3 (X - 1)^3 (X^{57} - 1)(X - 1)}{(X^2 - 1)^3 (X^3 - 1)^3 (X^{19} - 1)(X^3 - 1)}.$$

Çünkü bir lifin tümleyeninde Milnor liflenmesi, $[0, 1]$ üzerinde bir liflenmedir; üstelik basit liflenmedir zira $[0, 1]$ büzülebilir.



Bir Dehn bükümü. . . Bu homeomorfi halkanın kenarında birim gönderimdir; eşmerkezli iççe çemberleri korur ve resimdeki gibi bükür.

Sadeleştirip açarak

$$(1 - X + X^2)^3(1 - X + X^3 - X^4 + X^6 - X^7 + X^9 - X^{10} + X^{12} - X^{13} + X^{15} - X^{16} + X^{18} - X^{20} + X^{21} - X^{23} + X^{24} - X^{26} + X^{27} - X^{29} + X^{30} - X^{32} + X^{33} - X^{35} + X^{36}).$$

buluruz.

Genel resim

Yalnızca en çarpıcı sonuçlardan söz edeyim.

Bir eğrinin bir dalına karşılık gelen düğümler daima yinelenmiş simit düğümleridir.

$F_1(x, y) = 0$ ve $F_2(x, y) = 0$ ile verilmiş *indirgenemez* iki eğriden gelen düğümlerin, 3-kürenin bir homeomorfisiyle topolojik olarak denk olmaları için gerek ve yeter koşul, karşılık gelen iki dalın Puiseux karakteristik sabitlerinin aynı olmasıdır. Bu düğümler, Alexander polinomlarıyla ayırt edilebilirler. Düğümler ve hatta iki dallı eğriler için bu çok önceleri kanıtlanmıştı. *Birden çok* ayrık düğümden oluşan *bağlar* üreten indirgenebilir eğriler içinse benzer bir iddia, ancak kısa süre önce kanıtlanabilmiştir.

Genel eğriler için *dolanım* A'Campo tarafından harikulade bir biçimde tarif edilmiştir¹²³.

Olguların artık çok iyi anlaşılması söyleyebilirim.

Gezintimize devam etmek istiyorsak bu tali keşfimizi burada bitirmek akıllıca olur; daha uğranacak çok yer var. Bu kadar güzel görünen (ve öyle de olan) bir patikadan geri dönmek zorunda kalacak olan okurun düş kırıklığını da gayet iyi anlarım kuşkusuz.

Bu konuda çok çok çok çok fazlası ve tarihsel bir derinlik için, okurlarımız Weber'in olağanüstü incelemesine¹²⁴ ve daha önce de sözünü ettiğimiz şu kaynağa¹²⁵ bakabilirler.

¹²³ N. A'Campo. [Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes](#). *Invent. Math.*, 20:147–169, 1973.

¹²⁴ C. Weber. On the topology of singularities. In *Singularities II*, volume 475 of *Contemp. Math.*, pages 217–251. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

¹²⁵ E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986.



Dürer'in *Melankoli* adlı ünlü gravürü (1514). Buradaki politop K_5 değil! Bu konuda Günter Ziegler'in *The Guardian*'daki makalesini öneririm: [Dürer'in çokyüz-lüsü: Melankoli'deki çığır küpü açığıklayan beş teori.](#) ©

Hipparkos-Schröder-Tamari-Stasheff asosiahedronu

ANALİTİK EĞRİLERİ ŞİMDİLİK UNUTUP ağaçlar, sözcükler ve kombinatoriğe geri döneceğiz. Şu üç çeşit nesne arasında doğal bir sözlük var:

- (n yapraklı) *ikili, köklü düzlemsel ağaçlar*.
- (n uzunluğunda bir sözcükte) *ikili parantezlemeler*.
- (Birine kök denmek üzere $n + 1$ kenarı olan) *dışbükey bir çokgenin (n adet üçgene) bölünmeleri*.

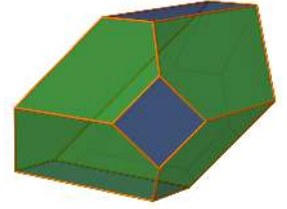
Bunları kenarda resmettik.

Her iç boğumunun *en az* iki yavruya sahip olduğu n yapraklı, köklü düzlemsel ağaçlarla daha önce ilgilenmiştik. Bu ağaçlar illa ikili olması gerekmeyen n uzunluğunda sözcüklerin Schröder parantezlemeleriyle ilişkiliydi. Bunlar da $n + 1$ kenarlı dışbükey bir çokgenin birbirini kesmeyen k adet ($0 \leq k \leq n$) köşegenine karşılık gelir. Bu nesnelerin sayısı n -inci (küçük) Hipparkos-Schröder sayısıdır.

Soyut bir politop

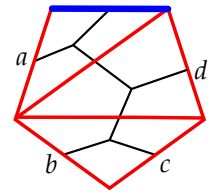
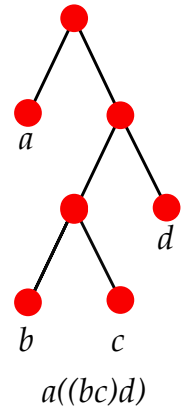
Şimdi $n - 2$ boyutlu K_n denen politoplardan oluşan bir dizi inşa edeceğiz; bu K_n 'lere *asosiahedronlar* denecek. K_2 bir nokta olsun.

Bir aralık çizelim ve tek bir kökü ve kökünün 3 yavrusu olan, başka da boğumu olmayan (bu koşulları sağlayan biricik) köklü

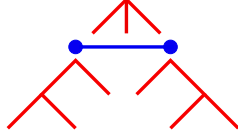


K_5 'in bir modeli.

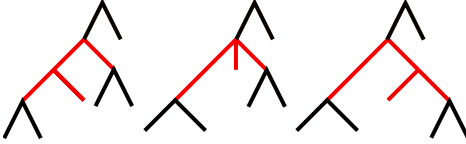
©



ağaçla bu aralığı etiketleyelim. Bu aralığın uç noktalarını da 3 yapraklı, ikili, köklü düzlemsel ağaçlarla (bunlardan tam 2 adet var) etiketleyelim. Aşağıdaki resmi elde ediyoruz. Bir aralıktan başka bir şey olmayan bu nesneye K_3 diyeceğiz.



Eğer iki adet ikili ağaçtan birinden diğerine yukarıdaki resimdeki gibi yerel bir dönüşümle geçilebiliyorsa bu iki ağacı bir kenarla bağlamak istiyoruz. Bir ikili ağaçta 3 yapraklı bir altağaç saptarsak bunu silip yerine 3 yapraklı diğer ağacı koyuyoruz; böylece asosiahedronda bir kenar tanımlamış oluruz.

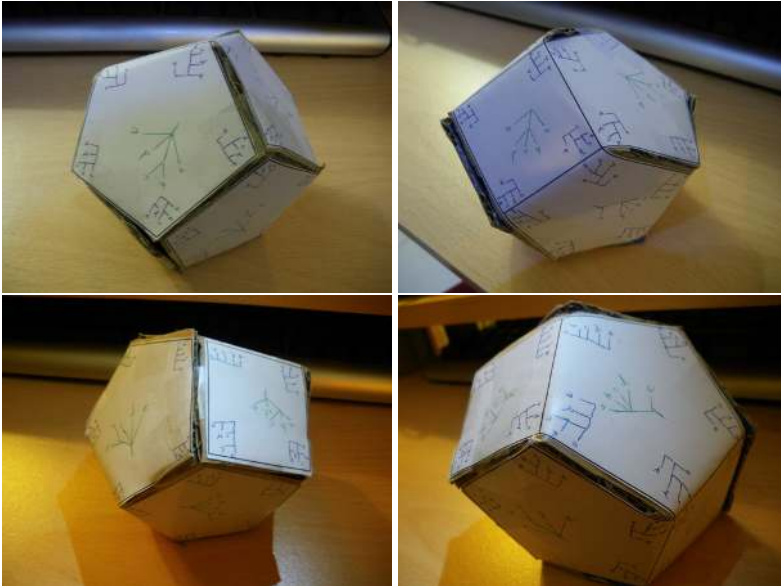
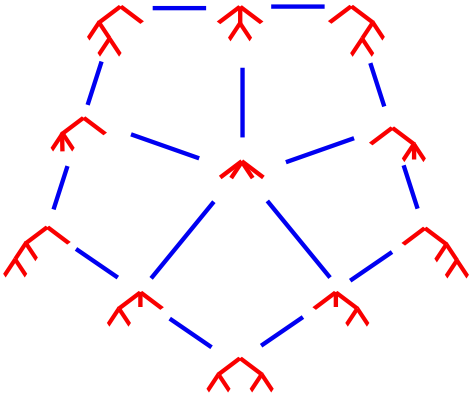


Öyleyse $n = 4$ için bir resim çizelim. 4 yapraklı tam 5 adet *ikili* ağaç var. Bunları bir beşgenin köşenoktalarına yerleştiriyoruz. 4 yaprağı ve 3 yavrulu tam 1 boğumu olan 5 adet düzlemsel ağaçla beşgenin 5 kenarı etiketleniyor. Bir tane daha 4 yapraklı düzlemsel ağaç var: 4 yavrulu 1 köklü olan. . . Bunu da beşgenin ortasına, beşgenin 2 boyutlu yüzüne etiket olsun diye yerleştiriyoruz. Oluşan bu nesneye K_4 diyoruz (sonraki sayfa).

Böylece $n - 2$ boyutlu bir *politopun* tanımı konusunda da fikrimiz olur: köşenoktaları n yapraklı ikili ağaçlarla, kenarları 3 yavrulu tek bir boğumu olan ağaçlarla vs. ve en üst (yani $n - 2$) boyutlu tek yüzüyse n yavrulu bir kökü olan (çoğunlukla *taç* diye adlandırılan) ağaçla etiketlenen bir politop. . .

$n = 5$ 'e çıktığımızda hala bir resim çizebiliriz (sonraki sayfa).

Her n değeri için böyle bir politop inşa edilebilir gerçekten de. İlk problem elbette *kombinatorik bir bağlamda politop* sözcüğüne kesin bir tanım verebilmek. *Öklit uzayında* bir politopa ilişkin



geometrik sezgimizden esinlenen fakat herhangi bir uzaya gömülü olmayı dikkate almayan bir tanıma ihtiyaç var.

Yüzleri doğru parçaları, üçgenler ve genel olarak simpleksler olan, iyi tanımlı bir *kombinatorik çokyüzlü* kavramı mevcut. *Köşenoktası* adı verilen noktalardan oluşuk bir K kümesiyle başlayalım. K 'nin *yüz* denecek bazı altkümelerini seçeceğiz. Yüzler şu tek koşulu sağlamalı: her bir yüzün her altkümesi de yüz olmalı. Eğer bir yüz $k + 1$ elemana sahipse, bu yüze k boyutlu simpleks diyoruz. Bu epey kolay tanım, bizim durumumuza uygun değil. Örneğin 3 boyutlu bir politop olan yukardaki K_5 'in 2 boyutlu yüzleri kareler ve beşgenler; üçgenler değil.

Esasen *soyut politoplar* için birbirine denk olmayan birkaç kombinatorik tanım var ama biz bunları kullanmayacağız çünkü bizim politoplar önünde sonunda Öklit uzaylarında geometrik nesnelere olacak. Yine de bir *soyut politop* belirli boyutlara sahip *yüzlerden* oluşmalı ve bitişikliğe dair sezgisel fikre uyacak biçimde, yüzler arasında kısmi bir sıralama bulunmalı. Böylece yüksekliği $n - 2$ olan kısmi sıralanmış bir K_n kümesini tanımlamakla yetinebiliriz. Bunu tanımlamak da çok kolay.

Basit olsun diye, $n + 1$ köşenoktalı bir dışbükey çokgen Π_{n+1} seçelim; aşağıdaki inşa bu çokgenin seçiminden bağımsız. Çokgenin bir kenarını seçelim ve buna *kök* diyelim.

K_n 'nin d boyutlu bir yüzünü, Π_{n+1} 'in $n - 2 - d$ adet birbirini kesmeyen köşegenini eleman kabul eden F kümesi olarak tanımlayalım. Bitişiklik ilişkisini de *ters* içerme ilişkisiyle şöyle tanımlayalım: eğer $F_2 \subset F_1$ ise F_1 'e karşılık gelen yüz F_2 'ye karşılık gelen yüzün *altyüzüdür* diyeceğiz. Örneğin K_n 'nin her bir köşenoktası (0 boyutlu yüzü), Π_{n+1} 'in $n - 2$ tane köşegeniyle $n - 1$ üçgene parçalanmasına karşılık gelir. Kök vasıtasıyla, bu köşenoktalar ikili düzlemsel ağaçlarla eşlenir; tam istendiği gibi. . .

K_n 'nin q ekboyutlu bir yüzü, n yaprağı ve tam tamına q adet iç (kökten ve yapraklardan farklı) boğumu olan, denk bir deyişle q adet iç kenarı olan, köklü düzlemsel bir ağaca karşılık gelir. Resme "ağacın gözünden" bakarsak, eğer T_2 ağacı, T_1 ağacının bazı kenarları yok edilerek oluşmuşsa T_1 ağacına karşılık gelen yüz T_2 'ye karşılık gelenin altyüzüdür denebilir.

Kısmi sıralanmış bir kümenin yüksekliğini, tam sıralanmış en büyük altkümünün eleman sayısı eksi 1 olarak tanımlayalım.

Şimdilik yalnızca kısmi sıralanmış bir küme tanımladım. Bu kümenin soyut politopları tanımlayan belitleri sağladığını denetlemek zor değil; bunu burda açıkça yapmıyorum.

Böylece *Hipparkos-Schröder-Tamari-Stasheff asosiahedronu* tanımlamış olduk.

Bir parça tarih

Her zaman olduğu gibi matematiksel bir nesneye tek bir ad vermek neredeyse olanaksız.

Bildiğimiz üzere, Catalan K_n 'nin köşenoktalarını, Hipparkos ve Schröder ise yüzlerini saydı.

Dov Tamari (önceki adıyla Bernhard Teitler) 1951'de doktora tezinde kombinatorik nesneyi tanımladı.

Tamari'nin biyografisi ve hedeflerinin hikayesi için (Almanya, Filistin, Fransa, İsrail, A.B.D., Brezilya ve Hollanda'da ve yirminci yüzyıl içinde bir "gezinti") Tamari Memorial Festschrift'in¹²⁶ ilk bölümünü okumanızı öneririm. Oradan örneğin şunu öğreniyoruz:

En azından 1948'den sonra Tamari, İsraililerin Filistinlilere yaptığı adaletsizliklere, diğer yandan da Orta Doğu ülkelerinin Yahudi göçmenlerin aleyhine ayrımcılıklarına karşı durmuştur. Bu tutum o günlerde geniş kabul görmekten çok uzaktı.

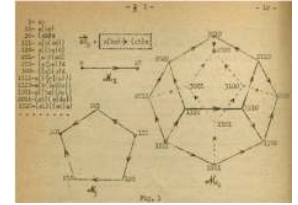
J. Stasheff de 1963'te doktora tezinde aynı nesneyi tanımladı; ama bir sonraki bölümde ayrıntısıyla tartışacağımız gibi bu bambaşka bir topolojik bağlamdaydı. Stasheff, Tamari'nin işinden haberdar değildi. Kenardaki *kavisli politop*, kendisinin orijinal makalesinden alınmadır.

Bir Öklit uzayında dışbükey politop inşası gayet doğal bir problem. Bir anekdota göre, Stasheff'in doktora savunmasına Milnor elinde K_5 'in kartondan bir modeliyle gelmiş.

Asosiahedron ismi, \mathbb{R}^n 'de K_{n-2} 'yi cisimleştiren geometrik (soyut olmayan) dışbükey bir politop olup olmadığını Haiman'a soran Kalai tarafından koyuldu. Haiman 1984'te bir inşa önerdi ama bunu yayınlamadı. 1989'da Lee kendi inşasını yayınladı. Birkaç başka yazar başka inşalar önerdiler. Bu konuda Tamari Festschrift'te Ceballos ve Ziegler'in yazdığı bölüme bakınız.

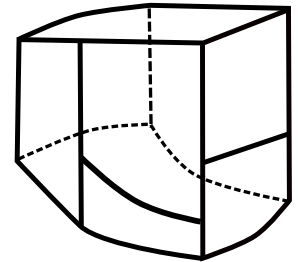


Dov Tamari (1911-2006).



Tamari'nin tezinden bir resim.

¹²⁶ F. Müller-Hoissen, J. M. Pallo, and J. Stasheff, editors. *Associahedra, Tamari lattices and related structures. Tamari memorial Festschrift*, volume 299 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.



Stasheff'ten bir resim.

Loday'in inşası

Şimdi *Öklit uzayında* dışbükey bir politopun 2004'te Jean-Louis Loday¹²⁷ tarafından önerilen güzel bir inşasını anlatacağım. Bu politopun yüzleri, Hipparkos ve diğerlerinin tarif ettiği asosiahedronun kombinatoriğini (geometrik bakımdan) tam tamına cisimleştiriyor.

Köklü, ikili düzlemsel bir T ağacı alalım ve bunu K_n 'nin bir köşenoktası olarak düşünelim. Yaprakları soldan sağa 1'den n 'ye işaretleyelim.

T ağacında bir i, j yaprak ikilisinin en küçük ortak atası olan boğumu $i \vee j$ olarak gösterelim. $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere her i tamsayısı için $i \vee (i+1)$ boğumunu alalım; bu boğumdan aşağıya sola (ve sağa) doğru giden dallardaki yaprakların sayısını $\nu_{so}(i)$ (ve sağ için $\nu_{sa}(i)$) diye gösterelim. T ağacıyla

$$M(T) = (\nu_{so}(1)\nu_{sa}(1), \nu_{so}(2)\nu_{sa}(2), \dots, \nu_{so}(n-1)\nu_{sa}(n-1)) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

noktasını eşleştirelim.

Teorem. T tüm ikili, köklü düzlemsel ağaçlarda gezinirken oluşan $M(T) \in \mathbb{R}^{n-1}$ noktalarının kümesinin dışbükey hazinesi bir dışbükey politoptur ve kombinatoriği tam tamına Hipparkos-Schröder-Tamari-Stasheff asosiahedronudur.

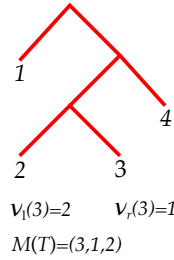
Öncelikle $M(T)$ noktalarının \mathbb{R}^{n-1} 'de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

denklemleriyle verilen hiperdüzlem üzerinde olduğunu gösterelim. Bunu kanıtlamanın bir yolu, $a < b$ olmak üzere a, b ve $v = a \vee b$ yapraklarının oluşturacağı (a, b, v) üçlülerini saymaktır. v yaprağı a ve b 'yle belirlendiğinden, bu sayı $a < b$ olmak üzere a, b çiftlerinin sayısına yani $n(n-1)/2$ 'ye eşittir. Aynı sayıyı v boğumuna göre sayarsak, $i = 1$ 'den $n-1$ 'e $\nu_{so}(i)\nu_{sa}(i)$ çarpımlarının toplamını buluruz. Bu da iddiayı kanıtlar. \square

Loday'in teoremini kanıtlamak içinse, ilkin K_n 'nin 1 ekboyutlu yüzlerini teşhis edeceğiz. Bunlar tek bir iç boğumu olan (ve ikili olmayan) ağaçlarla etiketlenirler. $1 \leq p < p+q-1 \leq n$ olmak üzere iki tamsayıyla, p ve q 'yla belirlenirler; $(n-q+1)$ -li tacın p -inci

¹²⁷ J.-L. Loday. Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3):267–278, 2004.



boğumuna q -lu bir taç ekleyerek, aşılıyarak elde edilirler. p, q ile belirlenmiş yüzün köşenoktalarından oluşan $F_{p,q}$ kümesinin temsil ettiği ağaçlar, $n - q + 1$ yapraklı, ikili, köklü düzlemsel herhangi bir ağacın p -inci yaprağına, q yapraklı, ikili, köklü düzlemsel herhangi bir ağacın aşılanmasıyla oluşmuş (köklü düzlemsel) *ikili* ağaçlardır.

Aynı şey daha başka bir biçimde de ifade edilebilir. İkili bir T ağacının $F_{p,q}$ 'da olması için gerek ve yeter koşul, $\{p, \dots, p + q - 1\}$ yapraklarının tek bir boğumun döllerinden olmasıdır.

Şimdi \mathbb{R}^{n-1} 'de doğrusal bir $l_{p,q}$ fonksiyonu tanımlayalım:

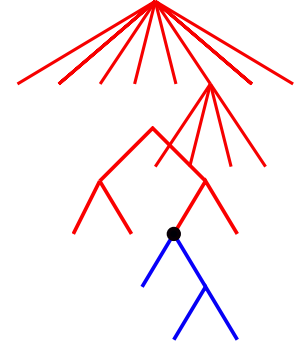
$$l_{p,q}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_p + x_{p+1} + \dots + x_{p+q-1}.$$

T köşenoktasının ekboyutu 1 olan $F_{p,q}$ yüzünde bulunduğu durumda $l_{p,q}(M(T))$ 'nin değerini bulalım. $n - q + 1$ yapraklı, ikili, köklü düzlemsel bir T_0 ağacının p -inci yaprağına q yapraklı, ikili, köklü düzlemsel bir T_1 ağacının aşılanmasıyla T 'nin oluşturulduğunu biliyoruz. $p \leq i \leq p + q - 1$ olmak üzere, $M(T)$ noktasının i -inci koordinatının $M(T_1) \in \mathbb{R}^{q-1}$ noktasının $(i - p)$ -inci koordinatı olduğu açık; dolayısıyla daha önce saptadığımız gibi $l_{p,q}(T) = q(q - 1)/2$ olur.

Şimdi de T köşenoktasının $F_{p,q}$ 'da olmadığını varsayalım. Bu durumda $\{p, \dots, p + q - 1\}$ aralığında öyle bir i yaprağı bulunur ki $i \vee (i + 1)$ boğumu bu aralıkta bulunmayan bir dölle sahiptir. $l_{p,q}(M(T))$ değerini hesaplariken sadece $i \vee (i + 1)$ boğumunun $\{p, p + q - 1\}$ aralığında olan döleri sayılırsa $q(q - 1)/2$ bulunur; bu aralıkta olmayan döleri de hesaba katarsak daha büyük bir toplama ulaşılır.

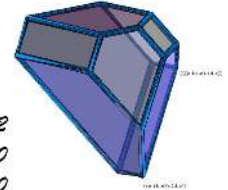
Böylece teoremin kanıtı bitmiş oldu zira K_n 'nin ekboyutu 1 olan bir $F_{p,q}$ yüzü için, $l_{p,q} - q(q - 1)/2$ afin fonksiyonu $F_{p,q}$ 'nın her bir T köşenoktasına karşılık gelen $M(T)$ noktasında sıfır ve K_n 'nin $F_{p,q}$ 'da olmayan T köşenoktalarına karşılık gelen $M(T)$ noktalarında pozitif. Başka deyişle, $M(T)$ noktalarının dışbükey haznesinin bizim soyut politopun kombinatoriğine sahip olduğunu gösteren afin destek fonksiyonları bulmuş olduk.

Jean-Louis Loday bu gömülü politopun keşfini zarif bir çevrimiçi makalede açıklamıştır¹²⁸. Leibniz'e hayranlığı nedeniyle sıklıkla Guillaume William Zinbiel mahlasını kullanmıştır.



C.I.R.M.

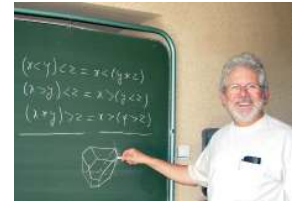
(Centre International de Recherche Mathématique)



2
0
0
5

ASOSİAHEDRON

CIRM'in 2005 dönemi için bastırıldığı kutlama kartında K5 resmedilmiş. Bundan bir de tişört bastılar. ©



Jean-Louis Loday (1946-2012) asosiahedron konusunda bir ders veriyor. ©

¹²⁸ J.-L. Loday. [Comment j'ai trouvé l'associaèdre.](#)



"Kiraz ağacı"
Kiraz ve Akçağaç'tan,
altın varak üstüne renkli
boyama (1592).

Jim Stasheff veilmek uzayları

GENELDE MATEMATİKTE VE ÖZELDE TOPOLOJİDE, grupların önemini hatırlatmaya gerek yok. Bu bölümde açıklayacağımız gibi, problemlerden biri bu kavramın *homotopi kuramında* epey incelikli olmasıdır.

Birkaç şeyi hatırlayarak başlayalım. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ diye sürekli iki fonksiyon için, eğer $F(x, 0) = f_0(x)$ ve $F(x, 1) = f_1(x)$ olacak biçimde sürekli bir $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa f_0 ve f_1 'e *homotopik*, F 'ye de *homotopi* denir. Eğer $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ gibi iki *homotopi denkliği* varsa, yani $f \circ g$ and $g \circ f$ birim fonksiyonlara homotopikse, X ve Y aynı *homotopi türüne* sahip diyoruz. Homotopi kuramı, nesnelere topolojik uzaylar olan, oklarıysa fonksiyonların homotopi sınıfları olan *homotopi kategorisini* inceler.

En basit örnek olarak, kapalı bir aralık bir topolojik gruba *homeomorf* olamaz çünkü herhangi bir homeomorfi altında uç noktalar sabit kalmalıdır oysa bir grup, ötelemelerle kendi üzerine geçişken biçimde etki eder. Öte yandan aralık büzülebilir, yani bir noktayla aynı homotopi türüne sahiptir; nokta da (en basit) gruptur. 1961'de doktora tezinde (1963'te yayınlanmıştır¹²⁹), Jim Stasheff hangi uzayların bir topolojik grupla aynı homotopi türüne sahip olduğunu belirleme sorusunu ele almıştır.

Topolojik gruplar, asıl demetler

Bu kısımda homotopi kuramında topolojik grupların rolüne ilişkin çok kısa bir özet vereceğim. Tek amacım Stasheff'in



Jim Stasheff.

©



Tali yol! Kitabın geri kalanı için bu bölümün gerekli olmadığını açıkça söyleyelim. Bu bölüm operad kavramını tanıtmaya yarayacak. Bu kavram da gerekli olmakla birlikte büyük resme bir miktar ışık tutacak. Bu bölüm, gezintimizin belki de en meşakkatli kısmı.

©

¹²⁹ J. D. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces. I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; aynı yerde, 108:293-312, 1963.*

katkısını açıklamaya yetecek kadar terimi ve temel gerçekleri sunmak. Yineleyeyim: burası büyük bir saha. Birkaç mükemmel kitaplara atıf yapmam lazım; örneğin karakteristik sınıf denen nesnelere uğraşan. . . Milnor ve Stasheff'in kitabı¹³⁰.

G topolojik bir grup, yani gruptaki işlemi ve ters almayı sürekli yapan bir topolojiyle donatılmış bir grup olsun. *Asıl bir G -demeti*, bir X uzayı üstüne bir G grubunun "iyi bir B bölüm uzayı" veren bir *serbest etkisidir*. X 'in her noktasının, G 'ye göre sabit ve $U \times G$ çarpımına homoemorf bir komşuluğu bulunmalı, burada G 'nin etkisi, ikinci çarpanda öteleme olmalıdır. Bir demeti çoğu zaman G -yörüngelerinin uzayı olan B 'ye bir $p : X \rightarrow B$ izdüşüm fonksiyonu olarak düşünmek yerinde olur. $p' : X' \rightarrow B$ diye bir G -demetinin bir p demetine *izomorf* olması, X ile X' arasında, B üzerinde birim olacak biçimde, G 'ye göre ahenkli bir homeomorfinin var olması demektir. Bu halde *bütün uzay X , taban uzay B 'nin üzerindedir* diyeceğiz ve bir noktanın p altında önimge kümesini *lif* olarak adlandıracağız. Bir lif, X 'te G 'nin bir yörüngesidir.

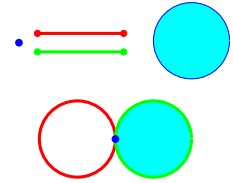
Şu noktada kullanılacak topolojik uzay türleri konusunda çok tedbirli olmalıyız. Uzaylar Hausdorff olmalı ve patolojik olmamalı. Çalışmalar çoğunlukla *CW komplekslerine* kısıtlanır. Niyetim burada bu uzayların eksiksiz bir tarifini yapmak değil. Bu tür bir X uzayının, n -inci *iskelet* denen $Sk_n(X)$ altuzaylarının gittikçe büyüyen bir birleşimi olduğunu söylemekle yetineyim. $(n+1)$ -inci iskelet $Sk_{n+1}(X)$, $(n+1)$ boyutlu birkaç B^{n+1} yuvarının $u : \partial B^{n+1} \rightarrow Sk_n(X)$ şeklinde bir "yapıştırma gönderimi" aracılığıyla $Sk_n(X)$ 'e eklenmesiyle oluşur. Hatcher'ın internette [ücretsiz ulaşılabilen](#) kitabı¹³¹ harika bir kaynak.

Asıl demetler (türevli) topolojide temel nesnelere. Sözelimi m boyutlu pürüzsüz bir M manifoldu verildiğinde x , M 'nin bir noktası ve f , x 'te bir *çatı* (yani $T_x(M)$ teğet uzayının bir tabanı) olmak üzere tüm (x, f) ikililerinin uzayı $Fr(M)$ 'ye bakalım. $GL(m, \mathbb{R})$ doğrusal grubunun $Fr(M)$ üzerinde doğal bir serbest etkisi vardır. Üstelik $(x, f) \in Fr(M)$ noktasını $x \in M$ noktasına gönderen p fonksiyonu asıl bir demettir.

$p : X \rightarrow B$ asıl bir G -demeti ve $i : B_1 \rightarrow B$ fonksiyonu verildiğinde p *geri çekilerek* yeni asıl bir G -demeti $p_1 : X_1 \rightarrow B_1$ elde

¹³⁰ J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. *Annals of Mathematics Studies*, No. 76.

Asıl demetler söz konusuken geleneksel olarak gruplar *sağdan* etki ederler.



Bir nokta, iki aralık ve bir daire alın. Aralıkların uç noktalarını noktaya yapıştırarak bir sekiz şekli oluşturun. Dairenin kenarını sekizin bir tarafına yapıştırın. Böylece çok basit bir CW kompleksi elde ettiniz. Yapıştırma gönderimleri genelde çok daha karmaşıktır elbette.

¹³¹ A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

edilebilir. Tam olarak $X_1, B_1 \times X$ 'nin altuzayıdır ve $i(b_1) = p(x)$ ve $p_1(b_1, x) = b_1$ olacak biçimde (b_1, x) çiftlerinden oluşmuştur. Örneğin eğer i içerilme fonksiyonuysa " X 'te $i(B_1)$ 'in üstünde olan şeyler" p_1 'i verir.

Şimdi önemli bir örnek... \mathbb{R}^n 'nin k boyutlu doğrusal altuzaylarının uzayı $Gr_{k,n}$ olsun. Bu tıkHz uzay *Grassmann manifoldu* olarak adlandırılır. $Gr_{k,n}$ üstünde, bir altkümesinin üstündeki lif o altkümenin tabanlarından oluşacak biçimde bir *totolojik* $GL(k, \mathbb{R})$ -demeti bulunur. Eğer k boyutlu M manifoldu \mathbb{R}^n 'ye daldırılmışsa daldırma fonksiyonunun türevi M' den $Gr_{k,n}$ 'ye bir fonksiyon verir. Totolojik $GL(k, \mathbb{R})$ -demetinin böylece geri çekilmesiyle oluşan demet, M' 'deki çatıların demetine izomorftur.

Asıl demetlere ilişkin iki önemli gözlemi aktarayım.

– B tabanı büzülebilen bir demet, basit bir demettir, yani $B \times G$ 'ye izomorftur. Bu teoremin geçmişi için şuraya¹³² bakın.

– Eğer $i, i' : B_1 \rightarrow B$ homotopikse, p 'nin i ve i' ile geri çekilmesiyle oluşan asıl demetler izomorftur.

Bu iki özellik bir B uzayı üstündeki asıl G -demetlerinin izomorfi sınıflarının yalnızca B 'nin homotopi türüne bağlı olduğunu ve böylelikle homotopi kategorisi üstünde kontravaryant bir izleç tanımladığını gösterir.

Sınıflayan uzaylar

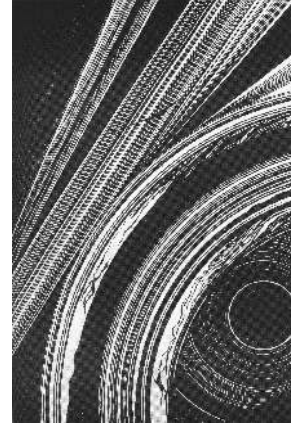
$p_G : E(G) \rightarrow B(G)$ asıl bir G -demeti olsun. Eğer her $p : X \rightarrow B$ asıl G -demeti, bir $i : B \rightarrow B(G)$ aracılığıyla p_G 'nin geri çekilmesiyle oluşuyorsa p_G 'ye *evrensel* denir. Burada i gönderimi homotopilerle değişebilmek kaydıyla biriciktir. İleride şu teoremin kanıtını kabataslak yapacağız.

Teorem. Her G topolojik grubu için bir evrensel lif demeti $p_G : E(G) \rightarrow B(G)$ vardır.

Başka deyişle,

– Bir B üzerinde asıl G -demetleri (-nin izomorfi sınıfları) ile
– B' den $B(G)$ 'ye gönderimlerin homotopi sınıfları ($[B, B(G)]$) arasında birebir eşleme vardır. $B(G)$ 'ye G 'nin *sınıflayan uzayı* diyeceğiz.

¹³² M. Audin. *Publier sous l'Occupation. I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences. Rev. Histoire Math.*, 15(1):7–57, 2009.



Spektral diziler ve grup etkilerinin yörüngeleri, A. Fomenko.

İki önemli örnekten bahsedeyim. Öncelikle G bir *ayrık grup* olsun. Bu durumda asıl bir G -demeti, Galois grubu G olan bir Galois örtüsünden başka bir şey değildir. Bir B uzayının örtü uzayları temel grubunun altgruplarınca tarif edilir. Bizim durumda $B(G)$ Eilenberg-MacLane uzayı $K(G, 1)$ 'dir: yani temel grubu G 'dir ve evrensel örtüsü $E(G)$ büzülebilir (denk söyleyişle $K(G, 1)$ 'in tüm daha yüksek homotopi grupları basit gruptur). B 'nin G -Galois örtüleri, B 'den $K(G, 1)$ 'e gönderimlerin homotopi sınıflarına denktir.

Önemli bir uyarı. Bir X uzayının temel grubunu tanımlayabilmek için bir pivot noktası $x \in X$ gerekir. $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ gibi bir gösterim $f(x) = y$ olduğunu ima eder. Fonksiyonların homotopisini tartışırken homotopinin pivotları koruyup korumadığını da açıkça belirtmem gerek ... ama belirtmeyeceğim! Çünkü o durumda uzun ve teknik cümleler gerekecek; oysa okurların fark etmiş olduğu üzere bu kitap eksiksiz bir ansiklopedi değil. Okurlarım bu kesinlik zaafını affederler umarım.

İkinci bir örnek için uzunluğu 1 olan karmaşık sayıların grubu $U(1)$ 'i ele alalım. Her n için $U(1)$ 'in \mathbb{C}^n 'deki S^{2n-1} birim küresi üstünde bir etkisi vardır: ω sayısı, (z_1, \dots, z_n) 'e $(\omega z_1, \dots, \omega z_n)$ olarak etki eder. Bu da karmaşık izdüşümsel uzay üzerinde asıl bir $U(1)$ -demeti tanımlar:

$$p_n : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n.$$

Tüm bu küreler ve izdüşümsel uzaylar, (z_1, \dots, z_n) noktasını $(z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$ noktasına götüren gömme fonksiyonları sayesinde, doğal bir biçimde içiçedirler. Bu sayede bütün uzayı sonsuz boyutlu küre, tabanysa sonsuz boyutlu izdüşümsel uzay olan asıl bir $U(1)$ -demeti tarif edebiliriz:

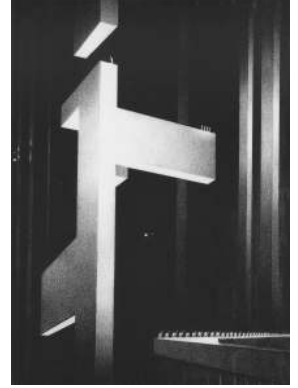
$$p_\infty : S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty.$$

Bunun $G = U(1)$ için evrensel demet olduğunu göreceğiz. Esas nokta şu:

Önerme. Bir G -demetinin evrensel olması bütün uzayının büzülebilmesine denktir.

Bu temel gözlemin kanıtı, engel kuramının tipik bir uygulamasıdır. Şöyle ki, $E(G)$ 'nin büzülebilmesi koşuluyla bir G -demeti

Örtü uzayları kuramı için, Hatcher'ın kitabına ya da [Analysis Situs](#)'a bakın.



Çokyüzlüler ve simpleks zincirleri 1973, A. Fomenko.

©

$p_G : E(G) \rightarrow B(G)$ ile başlayalım ve bu demetin evrensel olduğunu gösterelim. Herhangi başka bir G -demeti $p : E \rightarrow B$ alalım. Bunun bir $i : B \rightarrow B(G)$ gönderimi aracılığıyla p_G 'nin geri çekilmesi olduğunu göstermeliyiz. Her zaman CW kompleks olduğunu kabul ettiğimiz B 'nin iskeletleri üzerinde, boyutlarına göre tümevarımla, i gönderimini kuracağız. Her adımda sürekli bir gönderimin bir üst iskelete yayılması gerekiyor; $E(G)$ 'nin büzülebilmesi, bu inşa için tam da gereken özellik. Ayrıntılar ve kanıtın ters yönü için Milnor ve Stasheff'in kitabına bakınız.

Örneğin $U(1)$ 'in $B(U(1))$ sınıflayan uzayı, CP^∞ olmalı zira sonsuz boyutlu küre büzülebilen bir uzay.

Milnor'ın kaynak inşası

Milnor'ın $B(G)$ için verdiği inşa güzel ve kolay¹³³. Herhangi bir topolojik G grubunun kendi üstüne serbest etkisi vardır ama grup büzülebilmek zorunda değildir elbette. Öyleyse serbest bir grup etkisini koruyarak büzülebilirliği sağlamalıyız. $E(G)$, G üzerinde simpleks olsun: $E(G)$ 'nin her bir elemanı G 'nin elemanlarının sonlu bir ortamerkezcil bileşimi, yani $\sum_i \lambda_i = 1$ sağlanacak biçimde kimi $\lambda_i \geq 0$ için

$$\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k$$

şeklinde bir formel toplam olsun. Bu uzay dışbükeydir, dolayısıyla büzülebilirdir. Ayrıca üstünde serbest bir G etkisi vardır. Öyleyse $E(G)$ 'nin $B(G)$ üzerine izdüşümü bir sınıflayan uzaydır. İşte ispat!

Öte yandan $E(G)$ 'nin tarifinde daha dikkatli olmalıyız.

$$\Delta_n = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \geq 0 \text{ and } \sum_i \lambda_i = 1\}$$

standart simpleksi göstermek üzere, tüm $G^{n+1} \times \Delta_n$ çarpımlarının ayrık birleşimini alalım. Bunun üzerine

$$\begin{aligned} & ((g_0, \dots, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n), (\lambda_0, \dots, \lambda_i, 0, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)) \in G^{n+1} \times \Delta_n \\ & \equiv ((g_0, \dots, g_i, g_{i+2}, \dots, g_n), (\lambda_0, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_n)) \in G^n \times \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

diye verilen "aşıkâr" denklik bağıntısını koyalım ve $E(G)$ 'yi böylece elde edilecek bölüm uzayı olarak tanımlayalım. İşte

Önerilen kitapları çok fazla açmadan her şeyi kendiniz kontrol edin! Niye S^∞ küresi büzülebilir?



Hücreli uzaylar, A. Fomenko.

©

¹³³ J. Milnor. [Construction of universal bundles. II.](#) *Ann. of Math. (2)*, 63:430–436, 1956.

Milnor'ın kaynak inşası bu. G' deki noktaları birbirine kaynatacak biçimde “sanal bağlantılar” yaratıldığı için bu adla anılıyor.

İlmekler ve bileşkeleri

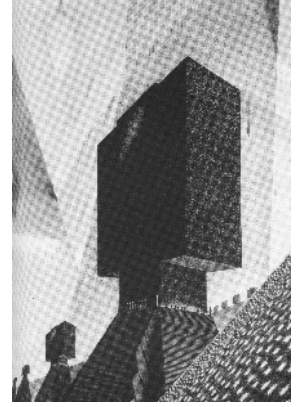
Bir B uzayı ve $\star \in B$ pivot noktası verildiğinde, $\Omega(B, \star)$ olarak gösterilen *pivotlu ilmekler uzayı*, pivotlu ilmeklerin uzayıdır $\odot \dots$ yani, $\gamma(0) = \gamma(1) = \star$ eşitliğini sağlayan sürekli $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ fonksiyonlarından oluşur ve üstünde tıkız-açık topoloji vardır. Pivotlu iki ilmek γ_1 ve γ_2 *uç uca eklenebilir*. Bunun olası bir tanımı, $\gamma_1 \bullet \gamma_2(t)$ noktasını, $0 \leq t \leq 1/2$ için $\gamma_1(2t)$ 'ye, $1/2 \leq t \leq 1$ için $\gamma_2(2t - 1)$ 'e eşit istemektir. Böylelikle

$$\Omega(B, \star) \times \Omega(B, \star) \rightarrow \Omega(B, \star)$$

uzaylarında tanımlanan bileşke fonksiyonu elbette birleşme özelliğine sahip değil. $(\gamma_1 \bullet \gamma_2) \bullet \gamma_3$ bileşkesinde $t \in [0, 1/4]$ iken γ_1 , $t \in [1/4, 1/2]$ iken γ_2 ve en sonunda $t \in [1/2, 1]$ iken γ_3 boyunca gidiyoruz. Bu yol ile $\gamma_1 \bullet (\gamma_2 \bullet \gamma_3)$ homotopikler ama aynı yol değil elbette.

Tanımlarla biraz oynayarak, her şeyi homotopilerle değiştirebilmek kaydıyla ancak birleşmeli olan bu ilmek uzayını *tam olarak birleşmeli* bir gruba dönüştürebiliriz. Bunun için *Moore ilmekleri* denilen ilmekleri kullanacağız. Bu ilmekler, bir uzunluk olarak düşünülecek $l \geq 0$ sayısı ve sürekli bir $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow B$ gönderiminden oluşur ve bunlar $\gamma(0) = \star$ ve $\gamma(t) = \star, t \geq l$, ilişkilerini sağlarlar. $\Omega_M(B, \star)$ olarak göstereceğimiz bu tuhaf ilmeklerin uzayı üstünde doğal bir topoloji vardır ve bu topolojik uzay, $\Omega(B, \star)$ ile aynı homotopi türüne sahiptir. (l_1, γ_1) ve (l_2, γ_2) ilmeklerinin bileşkesi, $(l_1 + l_2, \tilde{\gamma})$ olarak gösterilir ve $t \leq l_1$ için $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(t)$ ve $t \geq l_1$ için $\gamma_2(t - l_1)$ eşitlikleriyle tanımlanır. Bu işlemin birleşmeli olduğu bariz.

Öte yandan, $\Omega(B, \star)$ uzayıyla aynı homotopik türe sahip ve üstelik bir *topolojik grup* olan bir uzayı inşa eden, daha az bilinen bir numara var. Milnor'a ait (yine o!) bu numara, Stasheff'in bir kitabında¹³⁴ anlatılıyor. Epey küçük bir kabulle başlayalım: B , sayılabilir çoklukta yüzü olan bir simpleksli kompleksin geometrik cisimleşirmesi olsun. $G(B)$ grubunu şöyle tanımlayalım. $n \geq 0$



Simpleksli kompleks 1973, A. Fomenko. ©

¹³⁴ J. Stasheff. *H-spaces from a homotopy point of view*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 161. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

Simpleksli kompleks kombinatorik bir kavramdır. Elemanlarına *köşenokta* denen bir V kümesi ve V 'nin *yüz* denecek sonlu altkümelerinin bir seçkisinden oluşur. Gerekli tek belit, bir yüzün boş olmayan her altkümesinin yine bir yüz olmasıdır. Bir simpleksli komplekse karşılık gelen ve *geometrik cisimleşirme* denen bir topolojik uzay vardır. Bu uzay $\sum_{x \in V} t(x) = 1$ eşitlikleri sağlanacak ve $\{x | t(x) \neq 0\}$ kümeleri birer yüz olacak biçimde tüm $t : V \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonlarından oluşur.

olmak üzere tüm B^n 'lerin ayrık birleşimini alalım. B^n 'nin elemanlarını, b_1, \dots, b_n noktalarını n adımda hoplayarak kateden, sürekli olmayan ayrık yollar olarak düşüneceğiz. Eğer $b_i = b_{i+1}$ ya da $b_{i-1} = b_i$ ise $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$ ve $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$ yollarına denk diyeceğiz. $b_1 = b_n = *$ eşitliğini sağlayan ve ardışık her bir b_i, b_{i+1} ikilisi aynı simplekste olan (yani adeta bir doğru parçasıyla birleştirilebilen) (b_1, \dots, b_n) yollarının temsil ettiği denklik sınıflarını düşünelim. Bu sınıfların, denklik bağıntısıyla elde edilen bölüm uzayında oluşturdukları altuzaya $G(B)$ diyeceğiz; üstündeki grup işlemiyse uç uca eklemek olacak. Bunun bir topolojik grup olduğunu ve $\Omega(B, *)$ ile aynı homotopi türüne sahip olduğunu göstermek kolay bir alıştırma.

Bu inşa o kadar karmaşık olmasa da B 'nin çok basit olduğu durumlarda bile inşa edilen grubun devasa olduğunu unutmayalım. Bu grup "uygulamada" çok seyrek kullanılıyor.

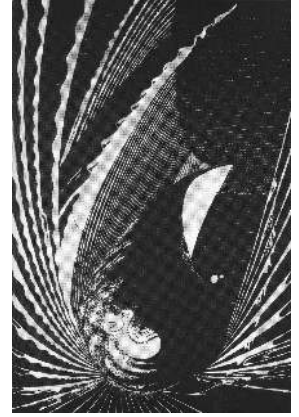
Her neyse, sonuç olarak $(B, *)$ uzayı, üzerinde bir uç uca ekleme işlemi olan işe yarar bir $\Omega(B, *)$ uzayı tarif eder. İşlem birleşmeli olmasa da bir miktar topolojik yamultma pahasına birleşmeli yapılabilir ve hatta uzay, topolojik bir gruba dönüştürülebilir.

Bu bölümde son bir saptama:

Önerme. *Bir topolojik grup, sınıflandıran uzayının ilmek uzayıyla aynı homotopi türüne sahiptir.*

Topolojinin bu kısmında atılacak taklalara dair bir fikir vermek açısından kanıttaki anahtar sözcükleri sıralıyorum. Pivotlu bir (X, x) uzayının $S(X, x)$ diye gösterilen *askısı*, $X \times [0, 1]$ uzayında $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ ve $\{x\} \times [0, 1]$ altuzaylarının tek bir noktayla özdeşleştirilmesiyle elde edilir. $S(X, x)$ 'ten başka bir (Y, y) uzayına bir gönderim, (X, x) 'ten $\Omega(Y, y)$ ilmek uzayına bir gönderime denktir. Şu aşağıdaki nesnelere birbirlerine denktir:

- (X, x) 'ten $\Omega(B(G), e)$ 'ye gönderimlerin bir homotopi sınıfı (burada e , G 'nin etkisiz elemanı),
- $S(X, x)$ 'ten $(B(G), e)$ 'ye gönderimlerin bir homotopi sınıfı,
- $X \times [0, 1]$ üstünde, $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ ve $\{x\} \times [0, 1]$ üstündeki kısmı basit demete dönüştürülmüş G -demetlerinin bir izomorfi sınıfı,



Bir lif uzayı, A. Fomenko. ©

– X üzerinde G -demetlerinden oluşan bir p_t yolu ve p_0 ile p_1 'den $X \times G$ basit demetine izomorfiler.

Basit bir $X \times G \rightarrow X$ demeti verildiğinde diğer basitleştirmeler $X \rightarrow G$ gönderimleriyle tarif edilirler zira $X \times G \rightarrow X$ demetinden kendisine bir izomorfi, (b, g) 'yi $(b, u(g)g)$ 'ye götürür (böyle uygun bir $u : B \rightarrow G$ vardır). Dolayısıyla (X, x) 'ten $\Omega(B(G), e)$ 'ye gönderimlerin homotopi sınıfları, (X, x) 'ten (G, e) 'ye gönderimlerin homotopi sınıflarıyla doğal olarak birebir eşlenir. \square

Sağ ve sol ötelemelerin değişmeli oluşunun birleşmelilikle aynı şey olduğunu gözlemleyin.

Stasheff'in H -uzaylarına dair teoremi

Eğer bir (X, \star) uzayı

$$m_2 : X \times X \rightarrow X, m_2(x, \star) = m_2(\star, x) = x$$

olacak biçimde bir "çarpmaya" sahipse bu uzaya bir H -uzayı denir.

(X, x) 'ten $\Omega(Y, y)$ ilmek uzayına bir *homotopi denkliği* var olacak şekilde ve bu denklik m_2 'yi $\Omega(Y, y)$ 'deki uç uca ekleme işlemine götürecek şekilde bir Y uzayı var mıdır? Bu, bir homotopiyle değişmek kaydıyla topolojik grupları H -uzayları arasında tanımayaya denktir. Stasheff'in üstünde çalıştığı problem bu *tanıma problemidir*.

Bunun derinindeki temel problem aslen şudur:

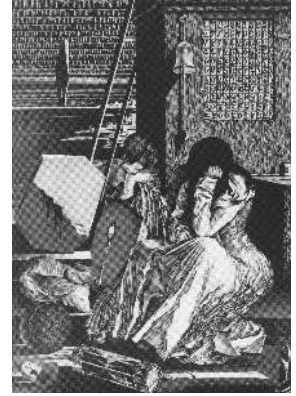
Homotopi kategorisinde grup yerine kullanabilecek doğru kavram nedir?

Okur elbette tahmin etmiştir: Stasheff'in verdiği cevap, geçen bölümde tanıtılmış olan asosiahedronu kullanıyor.

(X, x) 'in gerçekten de bir $\Omega(Y, y)$ ilmek uzayının homotopi türüne sahip olduğunu ve böylece m_2 'nin uç uca ekleme işlemine homotopik olduğunu kabul edelim. Burada Moore ilmek uzayı $\Omega_M(Y, y)$ 'yi ve *birleşmeli uç uca ekleme işlemi* μ 'yü kullanmak daha elverişli olacak. μ birleşmeli olduğundan şu iki gönderim homotopik olur:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \in X^3 &\mapsto m_2(m_2(x_1, x_2), x_3) \in X \\ &\mapsto m_2(x_1, m_2(x_2, x_3)) \in X. \end{aligned}$$

H harfi Homotopinin değil Heinz Hopf'un şerefine!



Anti-Dürer - 16. yüzyılın yazarlarıyla söyleşi serisinden 1975, A. Fomenko. ©

Şimdi, birleşmelilik genelde geçerli değil elbette. Geçerli olduğunda H -uzay, bir homotopiyle değiştirmek kaydıyla birleşmelidir ve bu durumda (X, m_2) H -uzayına A_1 -uzay deriz. Yukardaki iki gönderimin homotopisiyse $X^3 \times [0, 1]$ 'den X 'e olur; burada $[0, 1]$ çarpanını K_3 asosiahedronu olarak düşüneceğiz.

Dört terimle başlarsak X^4 'ten X 'e beş gönderim elde ederiz; bunlar da beş adet dört yapraklı, ikili, köklü düzlemsel ağaca karşılık gelir. Bu beş ağaç K_4 beşgeninin köşenoktaları olarak görülebilir. Beş gönderim, $[0, 1] \times X^4$ 'ten X 'e çalışıyor. Bunlar kenarlarda birbirleriyle uyumlu olduğundan, $\partial K_4 \times X^4$ 'ten X 'e bir gönderim tanımlarlar. Eğer X , tam olarak birleşmeli μ çarpmasına sahip bir $\Omega_M(Y)$ ilmek uzayının homotopi türüne sahip olacaksa, bu gönderim tüm beşgene $K_4 \times X^4 \rightarrow X$ şeklinde yayılır. Tam bu son koşulun gerçekleştiği durumda X 'e bir A_2 -uzay diyoruz.

Bu resmin tüm boyutlarda devam ettiği aşık olmalı.

Nihayet Stasheff'in teoremini yazabiliriz:

Teorem. $m_2 : X \times X \rightarrow X$ diye verilmiş bir H -uzayının bir ilmek uzayına homotopik olarak denk olması için gerek ve yeter koşul bir A_∞ -uzay olmasıdır, yani K_n asosiahedronlarının yüzleriyle uyumlu olan $m_n : K_n \times X^n \rightarrow X$ tutarlı gönderimlerinin var olmasıdır ($n \geq 1$).

Şu noktada gerek koşul açık olmalı. Teoremin en ilginç noktası şüphesiz yeter koşul iddiası; aşağıda bunu kanıtlamayacağım.

$m_n : K_n \times X^n \rightarrow X$ uyumlu gönderimleriyle verilmiş X diye bir A_∞ -uzay alalım. Amacımız öyle bir Y uzayı yaratmak ki bunun ilmek uzayı X 'le aynı homotopik türe sahip olsun. $\Omega(Y, y)$ 'nin bir G topolojik uzayıyla aynı homotopi türüne sahip olduğunu, bu G 'nin de $\Omega(B(G), *)$ ile aynı homotopi türüne sahip olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $Y = B(G)$ seçmek cazip geliyor ama G 'yi bilmiyoruz.

Bildiğimiz, bir bakıma bir grup yapısının yerine geçebilecek bir $m_n : K_n \times X^n \rightarrow X$ silsilesinin olduğu. Öyleyse stratejimiz açık: Milnor'ın $B(G)$ için kaynak inşasını şu daha genel A_∞ -yapılarına uyarlayacağız. Bu proje Stasheff tarafından gerçekleştirildi.

$G^{n+1} \times \Delta_n$ uzaylarının ayrı birleşimiyle başlayıp "bariz" bir denklik bağıntısıyla noktaları özdeşleştirmek yerine, $K_n \times X^n$



Homotopik topolojide uzayları öldürme yöntemi, A. Fomenko.

uzaylarının ayrık birleşimiyle başlayarak “bariz” bir denklik bağıntısı tanımlayın. Bu da A_∞ -uzay X 'in sınıflayan uzayı olan $B(X)$ 'i verecektir.

“Hala göstermemiz gereken tek şey”, beklendiği gibi, $B(X)$ 'in ilmek uzayının problemimize bir cevap olduğu, yani X 'in *ilmeklerini çözdüğü*. Kolay olmayan bu adımı Stasheff, X 'in topolojisi üstüne fazladan (küçük) bir hipotez koyarak kanıtladı.

Kiraz ağaçları

Bu $B(X)$ 'e dair biraz sezgi kazanmak için Boardman ve Vogt'un¹³⁵ tanımladığı *kiraz ağaçlarını* kısaca tarif edeyim. İlk n yapraklı, ikili, köklü düzlemsel bir ağaç alın. $n - 2$ adet iç kenarının her birine $[0, 1]$ 'de birer uzunluk atanınca *metrik* bir ağacımız olur. Her ikili ağaç için bu metrik ağaçların uzayı bir $[0, 1]^{n-2}$ küpü tanımlar.

Eğer bir ya da daha çok iç kenarın uzunluğu 0 ise bu kenarlar büzülerek tüm iç kenarları hala bir uzunluğa sahip, köklü düzlemsel bir ağaç elde edilebilir; bu ağaç artık ikili değildir. Bu işlem, ikili ağaçlara karşılık gelen küplerin kenarlarında kimi özdeşleştirmeler oluşturur. Metrik ağaçların bu kümesi, K_n 'yi küplere parçalar. Böylece K_n , metrik ağaçlar uzayı olarak düşünülebilir. Örneğin beşgen beş kareye parçalanır. K_n 'nin metrik ağaçlar uzayı olarak temsili sayesinde metrik ağaçların yapraklarına metrik ağaçlar yapıştırarak

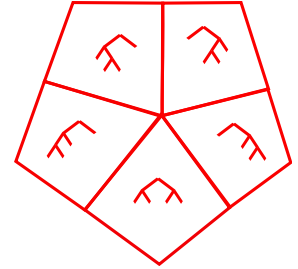
$$l_{k_1, \dots, k_n} : K_n \times (K_{k_1} \times K_{k_2} \times \dots \times K_{k_n}) \rightarrow K_{k_1 + \dots + k_n}$$

şeklinde *aşı fonksiyonları* elde ederiz.

Şimdi $K_n \times X^n$ 'yi resmetmek istiyoruz. Metrik ağaçlarımızın her bir yaprağının X 'in bir elemanını, bir kirazı, taşıdığını hayal edin. İşte bu bir *kiraz ağacı* olacak: yapraklarında kirazlar olan bir metrik ağaç. . .

$B(X)$ sınıflayan uzayı da bu terimleri kullanarak tarif edilebilir. *Tamamen büyümüş*, yani uzunluğu 1 olan bir e kenarına sahip bir T kiraz ağacı olsun. e 'yi silerek, T iki metrik ağaca ayrılabilir. e 'nin bitiş noktasının dölllerinden oluşuk kısma T_1 diyelim: bu da $k \leq n$ yapraklı bir kiraz ağacıdır. T 'nin kökünü içeren diğer ağaç,

¹³⁵ J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.



T_0 , tam bir kiraz ağacı değil çünkü e 'nin başlangıç noktasında yeni yaratılan yaprağın bir kirazı yok. Şimdi m_k fonksiyonunun T_1 kiraz ağacında değerine bakabiliriz ve bu değeri T_0 'da kiraz verilmeyi bekleyen yaprağın kirazı olarak atayabiliriz. Böylece T_0 'dan yeni bir kiraz ağacı üretmiş olduk.

Tanım gereği, $B(X)$ sınıflayan uzayı, kiraz ağaçlarının uzayını bu işleme (yani tam büyümüş kenarları silip m_k 'yi anlattığımız gibi uygulama işlemine) bölerek elde edilir.

$B(X)$ 'in ilmek uzayının X 'in homotopi türüne sahip olduğunu göstermeyeceğim. Andığım kaynaklar kanıtları içeriyor ama bunları okumanın kolay olmadığını itiraf ediyorum ☺.

Bildiğim en okunabilir kaynak şu¹³⁶.

¹³⁶ E. Hoefel, M. Livernet, and J. Stasheff. [A_∞-actions and recognition of relative loop spaces](#). 2013.





Örgütlü bir ağaç,
acaba bir operadı mı res-
mediyor?

Operadlar

BU BÖLÜME PETER MAY'DEN BİR ALINTIYLA¹³⁷ başlayayım.

Bir hafta boyunca başka hiçbir şey düşünmeyip sadece bunu düşünerek 'operad' ismini buldum. Kulağa hoş gelmesi bir yana bu ismin hem işlemleri hem de monadları akla getirmesi amaçlanmıştı. [...] Kavramın bu kadar esnek olacağını, felsefi olarak onca değişik biçimde kullanılabileceğini tahmin etmemiştim. Temelde birbirinden farklı ne kadar çok matematiksel bağlamda doğal bir rolü oldu.

Wikipedia'ya göre, bu ismin başka bir nedeni, May'in annesinin bir opera sanatçısı olmasıymış. Şu ana kadar gördüğümüz neredeyse tüm kavramlar gibi operadlar da doğumundan¹³⁸, daha doğrusu vaftiz edilmesinden çok daha önce "vardı". May'in tanımı, çoğu daha önce karşılaştığımız ağaç aşılama işlemini çağrıştıran birçok işlemi içinde toparlayan bir tanımdır.

Bir grup, birkaç beliti sağlayan bir çarpma ile donatılmış bir kümeden çok daha fazlasıdır. Gruplar yalnızca "bir şeyin" otomorfisi olarak temsili üzerinden var olurlar. Aynı biçimde operadlar yalnızca temsilleri üzerinden var olurlar. Dolayısıyla soyut tanımlar üzerinde gereğinden çok zaman harcamayacağız.

Bir operad şunlardan meydana gelir:

- $n \geq 0$ olmak üzere \mathcal{O}_n kümeleri (elemanları n -li işlemler olacak).
- \mathcal{O}_1 'de birim denecek bir 1 elemanı.
- her n, k_1, \dots, k_n için bir operad işlemi, yani

$$\mathcal{O}_n \times (\mathcal{O}_{k_1} \times \mathcal{O}_{k_2} \times \dots \times \mathcal{O}_{k_n}) \rightarrow \mathcal{O}_{k_1 + \dots + k_n}$$

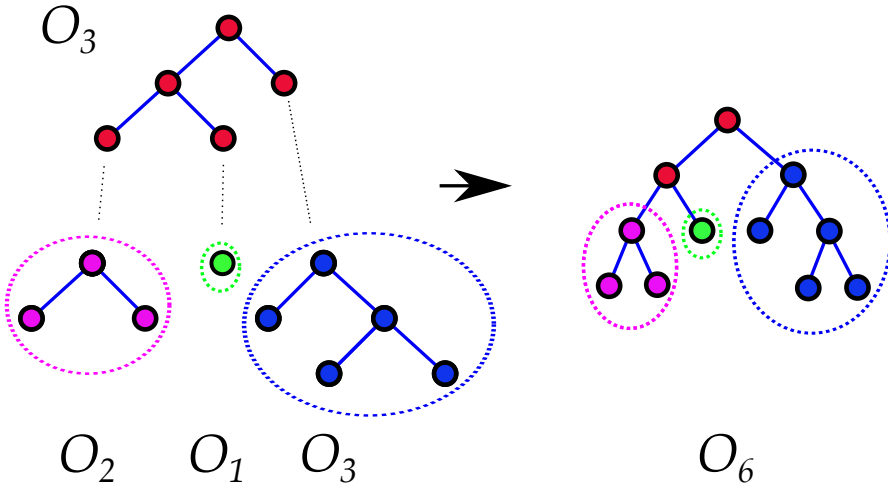
¹³⁷ J. P. May. Operads, algebras and modules. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, volume 202 of *Contemp. Math.*, pages 15–31. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

¹³⁸ J. Stasheff. The pre-history of operads. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, volume 202 of *Contemp. Math.*, pages 9–14. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

Matematik öğretme üzerine adlı konuşmasında V. Arnold grup kuramına, Fransa'da genellikle öğretim biçimi olan belitlerle yaklaşımı şiddetle eleştirir. Tamamen hemfikirim.

şeklinde, bazı... belitleri sağlayan gönderimler. Bu belitleri ifade eden formülleri buraya yazmak istemiyorum çünkü yazdığım formülleri ben de okuyamayabilirim. Belitleri sözcüklerle anlatmadan önce (okurunun muhtemelen çoktan tahmin ettiği) bir örnek vermek istiyorum.

Örnek ikili, köklü düzlemsel ağaçlardan geliyor. n yapraklı ikili, köklü düzlemsel ağaçların kümesini \mathcal{O}_n diye gösterelim ve kökü aynı zamanda tek yaprağı olan ağaca 1 diyelim. Birkaç kez kullandığımız aşılama işlemi operadların en kolay örneğidir.



Peki genel bir operad için belitler nedir? Bir ağaca 1'i aşılama ağacı değiştirmez. Bir A ağacına B 'yi aşılama ve sonuca C 'yi aşılama yerine C 'yi B 'ye aşılama ve sonuca A 'ya aşılama aynı sonucu verir. Operad belitleri *aşılama* sözcüğü yerine operad işlemi koymaktan başka bir şey değil. Bir birim koşulu ve bir çeşit birleşmelilik yeterli.

İlla ikili olmayan köklü düzlemsel ağaçları da aşılatabilirdik şüphesiz. Örneğin *budanmış ağaçları*, yani her iç boğumu en az iki yavruya sahip köklü düzlemsel ağaçları kullanabilirdik. Bu da *Hipparkos-Schröder-Tamari-Stasheff operadını* verirdi.

Operadlara iki sayfalık bir giriş için bakınız¹³⁹. 27 sayfalık bir sunum için bakınız¹⁴⁰. Aynı konuda 634 sayfalık, yeni çıkmış bir kitap için bakınız¹⁴¹.

Bilgisayar bilimcileri bize \mathbb{N} 'den \mathbb{N} 'ye hesaplanabilir birebir eşlemlerden bazılarınun değerlerinin kolayca bulunabildiğini ama çok karışık terslerinin olduğunu öğrettiler. Bir formül yazmak genellikle kolaydır ama onu anlamak felaket çetrefil olabilir.

¹³⁹ J. Stasheff. *What is ... an operad?* *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(6):630–631, 2004.

¹⁴⁰ F. Chapoton. *Operads and algebraic combinatorics of trees*, journal = *Sém. Lothar. Combin.* 58:Art. B58c, 27, 2007/08.

¹⁴¹ J.-L. Loday and B. Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.

Başka bir naif operad örneği... Bir E kümesi seçerek $E^{n'}$ 'den E' 'ye gönderimlerin kümesine \mathcal{O}_n diyelim. Bu örnekte 1 birim gönderim ve operad işlemleri basitçe *yerine koyma* olur. Bir $f : E^n \rightarrow E$ ve n adet $f_i : E^{k_i} \rightarrow E$ gönderimi verildiğinde $f(x_1, \dots, x_n)$ 'de x_i 'yi f_i ile yer değiştirerek $E^{k_1 + \dots + k_n} \rightarrow E$ şeklinde bir gönderim elde edilir. $End(E)$ olarak gösterilen bu operad açıkça yazmadığımız belitleri sağlar.

Bir \mathcal{O} operadı üstünde bir *cebiri* (temsil de denir), bir E kümesi ve \mathcal{O} 'dan $End(E)$ 'ye bir operad gönderimidir. Başka deyişle \mathcal{O}_n 'nin her elemanı, $E^{n'}$ 'den E' 'ye *uyumlu olacak biçimde* n -li bir işlem olarak boy gösterir.

Birçok değişik kategoride çalışabiliriz. Kümeler yerine topolojik uzayları, homotopi türlerini, vektör uzaylarını vs. kullanabiliriz.

Şimdi daha ilginç operad örnekleri anlatacağım. Daha fazlası ileriki bölümlerde gelecek.

Permütasyonlar

Bu kitabın başında *örüntü tanıma* konusunda bazı kombinatorik soruları incelediğimizi hatırlayın. Bu sorular aşağıdaki operada gayet uygun düşüyor.

$\mathcal{O}_n, \{1, \dots, n\}$ kümesinin permütasyonları kümesi olsun. Bu permütasyonların bileşmelerini almayacağımız için "*grup*" değil "*küme*" yazdım. Bunun yerine bir permütasyonu $\{1, \dots, n\}$ kümesinin bir tam sıralaması olarak göreceğiz.

$\{1, \dots, n\}$ ve $\{1, \dots, k_1\}, \dots, \{1, \dots, k_n\}$ kümeleri üzerinde $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ tam sıralamaları alalım. $\{1, \dots, k_1 + \dots + k_n\}$ kümesini, boyları k_1, k_2, \dots, k_n olan n adet ardışık aralığın ayrık birleşimi olarak yazalım. Bu aralıkları σ' 'ya göre sıralayalım ve ardından i -inci aralıktaki elemanları σ_i 'ye göre sıralayalım. Böylece $\{1, \dots, k_1 + \dots + k_n\}$ üzerinde doğal bir sıralama elde ederiz. Sıralamalar üzerinde bu *aşılama işlemlerinin* operad belitlerini sağladığı açık.

Ayrışabilen permütasyonlara ilişkin bölümde, budanmış bir köklü düzlemsel ağacın, yaprakların bir permütasyonunu tarif ettiğini saptamıştık.

Başka bir ifadeyle, bu ilişki, Hipparkos-Schröder-Tamari-Stasheff operadından Permütasyon operadına bir operad gönderimi tarif eder. Ayrıca, permütasyon verildiğinde ağacı yeniden inşa edebildiğimiz için, bu gönderimin bir gömme olduğunu kanıtlamıştık.

Serbest operad: bir kez daha Hipparkos-Schröder

Bir $(E_n)_{n \geq 1}$ küme dizisi için E_n 'ler tarafından üretilen *serbest operad* tanımlayalım. E_n 'lerin elemanlarından operad işlemleri aracılığıyla üretilen elemanlardan oluşan \mathcal{O}_n kümelerini yaratmalıyız. *Serbest bir operad* istediğimizden, tüm bu yeni elemanlar birbirinden değişik varsayılmalı, tabii bazılarının ille birbirine eşit olduğunda ısrar eden belitler kullanılmadıkça. Bu serbest operadı inşa etmek zor değil.

\mathcal{O}_n 'nin bir elemanı, n yapraklı köklü bir düzlemsel ağaç olacak ve i yavrulu her bir boğum, E_i 'den gelen bir etiketle işaretlenecek. Operad işlemleri yine aşılama ile tanımlanabilir.

Bir örnek olarak E_2 'nin bir elemana sahip, diğer tüm E_n 'lerin boş olduğunu düşünelim. O zaman "derecesi 2" olan bir eleman üstünde serbest operad, ikili köklü ağaçların operadıdır. Bu operad üstünde bir cebir, basitçe ikili işleme sahip bir kümedir.

Başka bir örnek için her E_n kümesinin ($n \geq 2$) tek bir elemana sahip olduğunu düşünelim. İlla ikili olmayan köklü düzlemsel ağaçları elde ederiz ve böylece Hipparkos-Schröder parantezlemesine geri döneriz. Bu operad üstünde bir cebir, basitçe her bir n için n -li işleme sahip bir kümedir.

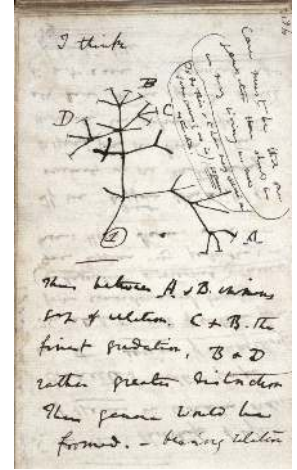
Simetrik olan ve olmayan

Daha özenli konuşursak, şu ana kadar yalnızca *simetrik olmayan* operadlarla ilgilendik. Birçok durumda Σ_n simetrik gruplarının \mathcal{O}_n üzerinde,

$$\mathcal{O}_n \times (\mathcal{O}_{k_1} \times \mathcal{O}_{k_2} \times \cdots \times \mathcal{O}_{k_n}) \rightarrow \mathcal{O}_{k_1 + \cdots + k_n}$$

operad işlemleriyle uyumlu etkileri vardır. Böyle bir durumda operada *simetrik* denir. Çoğu zaman "simetrik" sıfatı es geçilir.

Kesin bir tanım yapmadığının farkındayım. Kategoriler diliyle konuşup başlangıç nesnelere denen kavramları kullanarak bir tanım yapmak konusunda isteksizim.



Charles Darwin'in bir defterinden, evrim ağacının ilk taslağı, 1837. ©

Doğru tanımı kendiniz bulun!

Okuru daha önceki örneklerin hangilerinin simetrik olduğunu belirlemeye davet ediyorum.

Küçük küpler ve yine Stasheff

K_n asosiahedronlarını her bir iç kenarının $[0,1]$ 'de bir uzunluğa sahip olduğu metrik ağaçların uzayı olarak yorumlamıştık. Bu ağaçları aşılama işlemi,

$$K_n \times (K_{k_1} \times K_{k_2} \times \cdots \times K_{k_n}) \rightarrow K_{k_1+\cdots+k_n}$$

şeklinde gönderimler üretir. Başka deyişle, K_n politopları dizisinin hakiki doğası bir operadınkiyle aynıdır: *Stasheff'in operadı*. \mathcal{O}_n şimdi bir topolojik uzay olarak düşünüldüğünden bu bir topolojik operaddir.

Tanım gereği, K_n üstünde bir cebir, bir $K_n \times X^n \rightarrow X$ gönderimler ailesidir ve bir operad homomorfisi tanımlar. Belli ki tanımlar, *operad homomorfisi* koşulu A_∞ -uzay tanımıyla örtüşsün diye hazırlanmış. Stasheff'in teoremi tekrar şöylece ifade edilebilir.

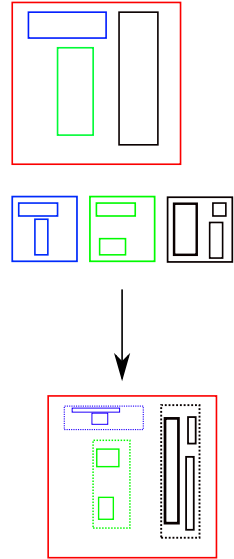
Teorem. $m_2 : X \times X \rightarrow X$ diye verilmiş bir H -uzayın bir ilmek uzayına homotopik olarak denk olması için gerek ve yeter koşul Stasheff operadı üstüne bir cebir olarak genişleyebilmesidir.

Boardman ve Vogt bu önermeyi daha da başka bir şekle dönüştürüp *küçük küpler operadını* tanımladılar. Bir $d \geq 1$ boyutu seçerek Cub_d topolojik operadını şöyle tanımlayalım.

- $Cub_d(n)$ uzayının elemanları (c_1, c_2, \dots, c_n) n -lileridir. Burada $c_i : [0,1]^d \rightarrow [0,1]^d$ gömme fonksiyonlarıdır ve bu n adet gömmenin görüntülerinin içleri birbirinden ayrıktır. Üstelik c_i 'lerin afin olmasını istiyoruz, hatta daha kesin bir ifadeyle $c_i(x_1, \dots, x_d) = (\alpha_{1i}x_1 + \beta_{1i}, \dots, \alpha_{di}x_d + \beta_{di})$ ($\alpha_{ij} > 0$) olmalıdır.
- Ayrıca

$$Cub_d(n) \times (Cub_d(k_1) \times \cdots \times Cub_d(k_n)) \rightarrow Cub_d(k_1 + \cdots + k_n)$$

operad işlemleri "aşıklar". Küpleri diğerlerinin içine şekildeki gibi yerleştirin.



(Y, \star) bir topolojik uzaysa (esasen her zamanki gibi bir CW-kompleks ise), $\Omega^d(Y, \star)$ olarak gösterilen d -ilmek uzayı, d boyutlu küreden Y 'ye sürekli (pivotlu) gönderimlerin uzayı olarak tanımlanır. $\Omega^d(Y, \star)$ uzayını, $[0, 1]^{d'}$ den Y 'ye giden, küpün kenarını pivota götüren gönderimlerin uzayı olarak da tanımlayabiliriz.

Y 'nin d -ilmek uzayı, küçük küpler operadı üzerinde bir cebir olarak doğallıkla ortaya çıkar.

$$\text{Cub}_d(n) \times \Omega^d(Y, \star)^n \rightarrow \Omega^d(Y, \star)$$

biçiminde operad işlemleriyse "aşıkâr". Verili n adet küçük küp (c_1, c_2, \dots, c_n) ve $\Omega^d(Y, \star)$ uzayının n adet elemanı $\gamma_i : [0, 1]^d \rightarrow Y$ için $[0, 1]^{d'}$ den Y 'ye bir gönderimi şöyle tanımlıyoruz. c_i 'nin görüntüsü içinde c_i ile γ_i 'nin bileşkesini kullanın; dışındaysa her şeyi pivota götüren sabit fonksiyonu kullanın.

Markl, Shinder ve Stasheff'in operadlar konulu kitabına¹⁴² yazdığı [inceleme](#) yazısında John Baez operadlarla çalışmanın bir *gayesini* şöyle açıklıyor:

Homotopi kuramcılarının çoğu, rastgele bir uzayın homotopi gruplarını hesaplayabilmek için ruhlarını memnuniyetle satardı.

Nitekim Boardman, Vogt¹⁴³ ve May¹⁴⁴ Stasheff'in tanıma teoremini genelleştirmişlerdir:

Teorem. *Eğer bağlantılı bir X uzayı Cub_d küçük küpler operadı üzerinde bir cebirse o zaman bir Y uzayının $\Omega^d(Y)$ d -ilmek uzayına homotopik olarak denktir.*

Daha fazla operad

Matematikte hemen hemen her yerde ve temel düzeyde operadların ortaya çıktığını, genç okurumun anlamış olduğuna inanıyorum. Acaba kuramın bu muazzam genelliği onu biraz fazla mı soyut yapıyor?

Bazı matematikçiler serbest grubun grup olamayacak denli soyut olduğundan, yalnızca laf kalabalığı olduğundan yakınır!r!

¹⁴² M. Markl, S. Shinder, and J. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

¹⁴³ J. M. Boardman and R. M. Vogt. [Homotopy-everything \$H\$ -spaces](#). *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:1117–1122, 1968.

¹⁴⁴ J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. *Lectures Notes in Mathematics*, Vol. 271.

Bu kavramsal bölümü bitirmeden birkaç örnek daha vereyim. Bir matematik programına bir formül girin, örneğin *Mathematica*'ya

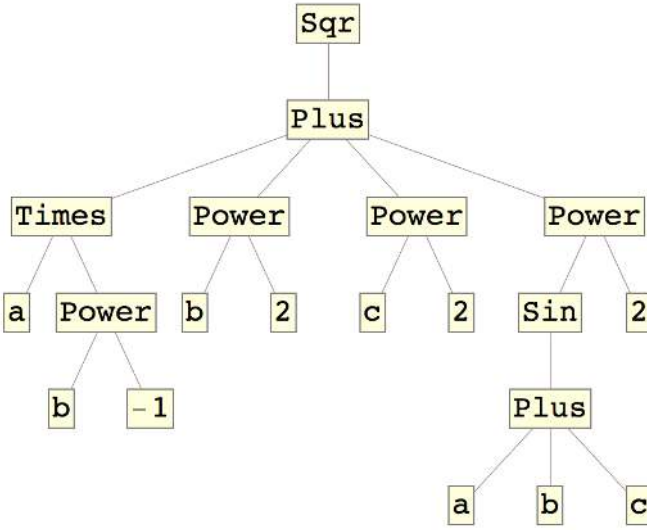
$$\text{Sqrt}[\text{Sin}[a + b + c]^2 + b^2 + c^2 + a/b]$$

$$\sqrt{\frac{a}{b} + b^2 + c^2 + \text{Sin}[a + b + c]^2}$$

yazın. Bilgisayarınızın bu formülü nasıl "anladığını" bilmek istiyorsanız

TreeForm[Sqrt[Sin[a + b + c]^2 + b^2 + c^2 + a/b]]

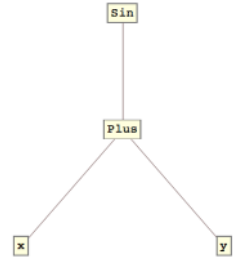
yazmanız yeterli. Elde ettiğiniz şey, evet, bir ağaç olacak.



Boğumlar n -li işlemlerle adlandırılmıştır; n herhangi bir değer olabilir. Yapraklar "atom"lardır. Demek ki *Mathematica* gibi bir yazılımın dili esasen bir operatördür.

Ancak bu operadın serbest olmadığına dikkat edin. Sözgelimi $\sin(x + y)$ için TreeForm çalıştırıldığında yandaki ağaç çıkar.

x yerine a , y yerine $\pi - a$ koyar ve karşılık gelen ağacı istersem:



TreeForm[Sin[x + y] /. x → a /. y → Pi - a]

tek boğumu 0 ile etiketlenmiş en basit ağacı elde ederim. *Mathematica* $\sin(\pi) = 0$ olduğunu “bilmektedir” ve bu yüzden ağacı çökertmiştir. Başka deyişle *Mathematica* operadı, yazılımın içine gömülü *üreteçler ve ilişkilerle* birlikte tanımlanmıştır. Kullanıcının kendi kurallarını ekleme izni vardır ve böylece bölüm operadında çalışır.

Riemann yüzeyleri operadlar için diğer bir kaynak sunar. Σ_1, Σ_2 diye kenarlı iki Riemann yüzeyimiz olsun. Riemann yüzeylerinin kendiliğinden bir yöne sahip olduğunu ve bu yönün kenarda bir yön belirlediğini hatırlayın. $\partial\Sigma_1$ kenarındaki bir S_1 çemberinden $\partial\Sigma_2$ 'deki bir S_2 çemberine yönü *ters çeviren* bir f difeomorfisi var olsun. İki yüzeyi f aracılığıyla yapıştırarak yeni bir (yönlü!) yüzey elde edersiniz.

Öte yandan bu yeni yüzey de kendiliğinden bir Riemann yüzeyi olur, yani 1 boyutlu holomorf bir manifold yapısına sahiptir. f gerçek analitikse bunu görmek kolay zira bu durumda çemberler çevresinde küçük halkalarda f , bir holomorf difeomorfiye genişletilebilir ve bu da yapıştırılmış yüzeyde bir holomorf yapı tanımlanması için kullanılabilir. Riemann yüzeylerini analitik olmayan difeomorfilerle de yapıştırabilirsiniz ama bizim tartışmamızda bunun önemi yok.

Bu yapıştırma işlemi bir operad tanımlar. \mathcal{O}_n 'nin elemanları, $n + 1$ adet işaretli kenar parçası olan tıkkız Riemann yüzeylerinin izomorfi sınıflarıdır; bu kenar parçalarından birine giren, diğer n tanesineyse çıkan denir. Ayrıca her bir kenar parçasından çembere bir difeomorfi atanmıştır. Yüzeyleri kenarlarından bir *Lego* oyunundaki gibi yapıştırmak bir operad örneğidir.

Bazı *izleçlerin* operadlara uygulanmasıyla başka operadlar üretilebilir. Örneğin küçük karelerin operadı Cub_2 'yi düşünelim. $Cub_2(n)$, karede n değişik noktayı elemanları olarak alan uzayın homotopi türüne sahiptir. Temel grubu PB_n 'ye *saf örgü grubu* denir.

PB_n 'nin bir elemanı, $1, 2, \dots, n$ olarak numaralanmış, birbirle-



Riemann yüzeylerini yapıştırma. ©

rini kesmeden n adet ilmek boyunca bir karede (ya da dairede) dolanan n adet küçük kareyle belirlenir. İlmeklerin sonunda kareler başlangıç konumlarına geri gelirler; *saf* derken bu kastedilmektedir.

Temel grupları kullanarak

$$PB_n \times (PB_{k_1} \times \cdots \times PB_{k_n}) \rightarrow PB_{k_1+\cdots+k_n}$$

fonksiyonlarını ve böylece bir grup operadı elde ederiz. Bunu yapmak o kadar karmaşık değil. PB_n 'nin bir elemanı $[0, 1]^2 \times [0, 1]$ silindirin içinde n adet boru verir. Operad yapısı boruları boruların içine sokmaya dayanır.

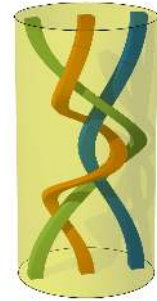
Kendimizi 2 boyuta ve temel gruba kısıtlamanın özel bir nedeni yok. Bir X topolojik uzayı ve negatif olmayan bir n tamsayısı verildiğinde, $X^{[n]}$ olarak göstereceğimiz kurulum uzayı, X 'te *değişik* noktaların oluşturduğu sıralı n -lilerin uzayı olarak tanımlanır. X bir daireyken bu uzayın evrensel örtüsü büzülebilir ve bu yüzden, homotopi açısından, yalnızca temel grubu ilginçtir; bu grup da henüz tanıttığımız saf örgü grubudur. Öte yandan X daha yüksek boyutlu bir yuvarken $X^{[n]}$ basit bağlantılıdır. Bu yüzden topolojisini açıklamak konusunda merakımız uyanır.

Örneğin $X = \mathbb{R}^3$ ve $n = 2$ için yanıt kolay: uzayda herhangi x ve y noktaları, $(x + y)/2$ orta noktası ile sıfırdan farklı $x - y$ vektörü tarafından tam tamına belirlenirler. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^3)^{[2]}$ uzayı 2 boyutlu küreyle aynı homotopi türüne sahiptir. Hemen sonraki $n = 3$, yani uzayda 3 cisim için durum çok çetrefillidir.

Bu uzayların teker teker her bir n değeri için homoloji ya da kohomolojisini incelemek yerine hepsini tümünden, yani küçük küpler operadının kohomolojisini incelemek iyi bir yaklaşım olabilir.

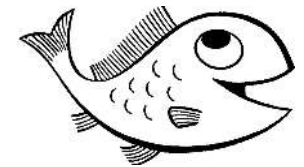
Operad kuramına giriş kapısı olarak iş göreceğ, kolayca okunabilen şu makaleyi¹⁴⁵ okurumun dikkatine ısrarla sunuyorum. Örneğin "Küçük d -küpler operadının homolojisi, d dereceli *Poisson* operadıdır" türünden şeyler öğreneceksiniz (her ne demekse).

Temel grup tanımı bir pivot ister. Dolayısıyla PB_n 'yi tanımlamak için, örgülerimizin "başlangıç noktası" olsun diye karede n adet değişik nokta seçmek gerekir. Operad fonksiyonlarını doğru dürüst tanımlamak üzere, bu başlangıç noktalarını okurun kendisinin bulmasını öneriyorum.

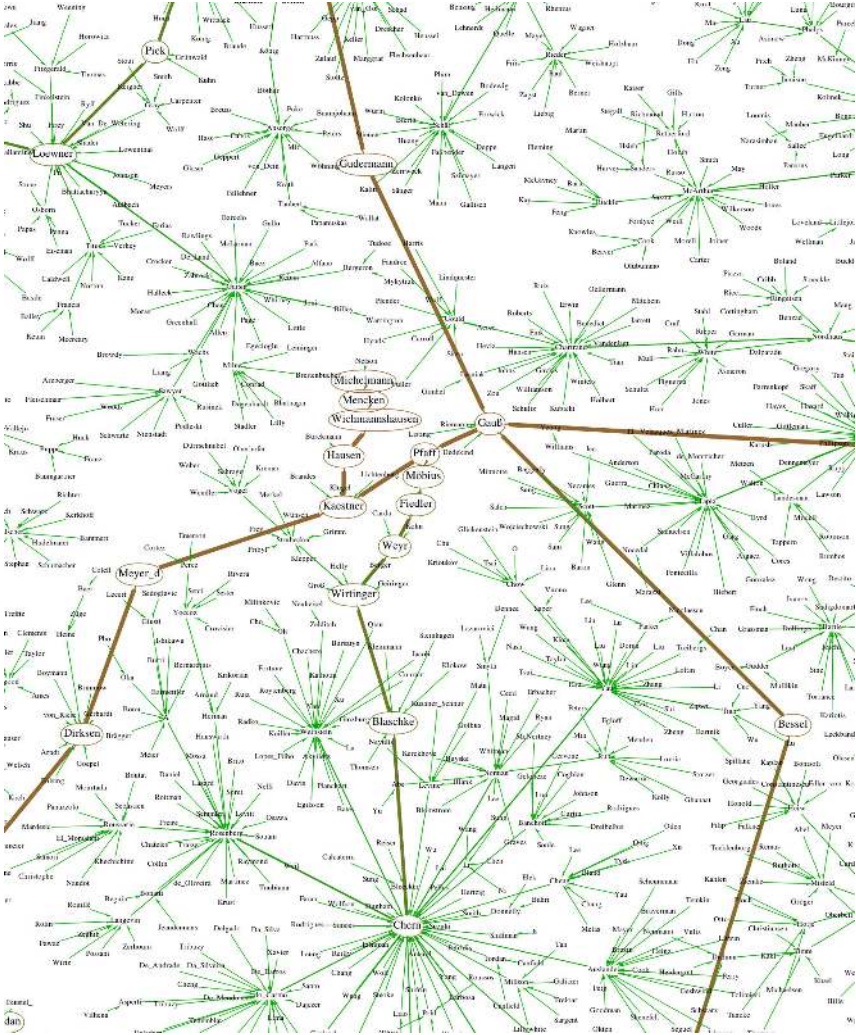


Bir ilmeği takip eden üç küçük kare.

¹⁴⁵ D. P. Sinha. [The \(non-equivariant\) homology of the little disks operad](#). In *OPERADS 2009*, volume 26 of *Sémin. Congr.*, pages 253–279. Soc. Math. France, Paris, 2013.



Poisson operadı



Merkezde Gauss olmak üzere “matematikçiler ağacı”... Bir matematikçi diğerinin tez hocasıya bu iki kişi bir çizgiyle birleştirilmiş.

Tekil operadlar

BİR POLİNOM AİLESİNİN GRAFİKLERİNİN görelî konumlarına dair baştaki tartışmamıza geri dönüyoruz.

Gerçek polinomlar operadı

$\mathbb{R}[x]$ 'te birbirinden farklı ve başnoktada sıfır olan polinomlardan oluşmuş iki adet sıralı n -li (P_1, P_2, \dots, P_n) ve (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) alalım. Sıfır olmayan ve küçük x 'ler için eğer $(P_1(x), \dots, P_n(x))$ ve $(Q_1(x), \dots, Q_n(x))$ gerçekte sayı n -lilerinin sıralanmaları birbiriyle aynıysa baştaki polinom n -lilerine *topolojik olarak denk* diyeceğim.

Öyle n -lilerin denklik sınıflarının (sonlu) kümesi $Pol_{\mathbb{R}}(n)$ olsun. Bunun üstünde çok basit bir operad yapısı inşa edelim.

Diyelim ki

- $Pol_{\mathbb{R}}(n)$ 'nin (P_1, P_2, \dots, P_n) diye bir elemanı(-nın bir temsilcisi),
- her $i = 1, \dots, n$ için $(P_{i;1}, \dots, P_{i;k_i})$ (-nin sınıfı) ile belirlenmiş, $Pol_{\mathbb{R}}(k_i)$ 'nin bir elemanı

verilmiş olsun. $P_{i;j}$ 'leri P_i 'lere *aşılama* istiyoruz. Bunun için yalnızca şu $k_1 + \dots + k_n$ adet polinomu düşünün:

$$P_i(x) + x^{2N} P_{i;j}(x) \quad (1 \leq i \leq n \text{ ve } 1 \leq j \leq k_i)$$

ve bunları (i, j) 'lerin sözlük sıralamasıyla sıralayın. Burada N büyük bir tamsayı.

Birkaç açıklama faydalı olabilir. Burada x^{2N} 'nin görevi, P_i 'lere eklenen terimleri $P_i - P_j$ ($i \neq j$) farklarından çok daha



Kökler mi dallar mı?
(Rio Preguiças, Brezilya).



Kökler ve dallar.
(Hong Kong).

küçük yapmak. Bu özelliği sağlamak için $2N'$ 'yi tüm $v(P_i - P_j)$ ($i \neq j$) değerlerinden büyük seçmek yeter. Sabit bir i için, k_i adet $P_i(x) + x^{2N} P_{i;j}(x)$ polinomunun grafiği P_i 'ninkine çok yakındır. $2N'$ 'nin çift olması, i sabitken, $P_i(x) + x^{2N} P_{i;j}(x)$ 'lerin sıralanmasının $P_{i;j}(x)$ 'lerin sıralanmasıyla aynı olmasını sağlar. Topolojik bakımdan analırsak, P_i 'lerin grafikleri ince kamalara dönüştürülmüş ve bu bölgelere $P_{i;j}$ 'ler yerleştirilmiştir.

Bunun iyi tanımlı olduğu ve $Pol_{\mathbb{R}}(n)$ 'ler üzerinde bir operad yapısı verdiği açık olmalı. (P_1, P_2, \dots, P_n) polinomlarının sırası değiştirilebildiğinden bu operad simetriktr.

Bu operadın ayrışabilen permütasyonların (simetrik olmayan) operadına çok yakın olduğu da kitabın ilk bölümleri sayesinde berrak olmalı.

Karmaşık polinomlar operadı

Şimdi benzer bir oyunu *karmaşık* polinomlarla oynayalım. Eğer $(P_1, P_2, \dots, P_n), \mathbb{C}[x]$ 'de başnuktada sıfır olan değişik polinomlar n -lisiyse $\mathbb{C}'de$ ($1 \leq i \leq n$ için)

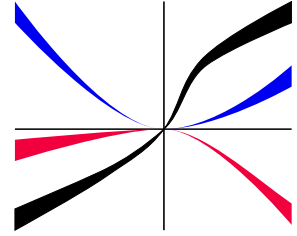
$$\gamma_i : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto P_i(\varepsilon \exp(\sqrt{-1}\theta)) \in \mathbb{C}$$

ilmeklerine bakalım. ε 'u çok küçük seçelim. Bu durumda her θ için n adet nokta $\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta), \dots$ birbirinden farklıdır. Bu da düzlemde değişik noktalar n -lilerinin uzayında bir ilmek tanımlar, demek ki *saf örgü grubu* PB_n 'nin bir elemanını tanımlar. Daha kesin bir dille bir saf örgünün eşlenik sınıfı demeliyim çünkü $\gamma_i(0)$ başlangıç noktaları herhangi bir yerde olabilir fakat saf örgü grubunun tanımı bir pivot noktası ister. Bu eşlenik sınıfı küçük ε seçiminden bağımsızdır.

Eğer karşılıklı gelen örgüleri PB_n 'de eşlenikseler (P_1, P_2, \dots, P_n) ve (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) 'ye *topolojik olarak denk* diyelim. Denklik sınıfının kümesini $Pol_{\mathbb{C}}(n)$ diye gösterelim.

Saf örgü gruplarının operad örneklerimizden birini verdiğini hatırlayın; burada işlem, örgüleri bir diğerinin tellerinin bir komşuluğuna yerleştirmeye dayanıyordu. Böylece $Pol_{\mathbb{C}}(n)$ operadının PB_n 'nin bir altoperadı olabileceğini seziyoruz ki şimdi göstereceğim gibi durum tam da bu.

$v(P), P'$ 'nin değerlemesiydi.



Bu iki operad arasında açık bir ilişki bulabilir misiniz?



Yayınlanmamış bir eserinde Gauss örgülerin topolojik incelemesini başlatıyor.

Bu tanım, her bir $P_i = 0$ karmaşık eğrisini $Q_i = 0$ eğrisine götüren, \mathbb{C}^2 'nin başnuktada çevresinde bir homeomorfisinin varlığına denk midir?

$\exp(-v(P_i - P_j))$ ifadesinin $\{P_1, \dots, P_n\}$ üzerinde bir ultrametric uzaklığı tarif ettiğini ve bunun bilgisinin de bir köklü ağaçla verilebildiğini biliyoruz. Kök, $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesinin tümüne karşılık gelir. Yavruları, $v(P_i - P_j) \geq 2$ bağıntısının denklik sınıflarıdır vs. Böyle böyle tek elemanlı $\{P_i\}$ kümelerine kadar ineriz; bunlar yapraklar olur ve $1, 2, \dots, n$ ile etiketlenir.

Gerçek polinomlar durumuyla başlıca iki fark var burada.

– Boğumlar üzerinde doğal bir sıralama yapısı yoktur ve bu yüzden ağacımız düzlemsel değildir (zaten doğadaki çoğu ağaç düzlemsel değildir).

– Gerçek durumda ağaç üstünde bir miktar budama yapmıştık çünkü örneğin x ve x^3 aynı işarete sahip olduğundan $(0, x)$ ve $(0, x^3)$, gerçek sayılar üzerinde topolojik olarak denktir. Oysa karmaşık alemde bu artık doğru değildir: $x, 0$ merkezli küçük bir dairenin kenarını dolanırken $(0, x^3)$ 'e karşılık gelen örgü 3 kez dönmesine karşın $(0, x)$ yalnızca bir kez döner.

Aşağıdaki (temel) önerme $Pol_{\mathbb{C}}(n)$ kümesini tam olarak tarif eder.

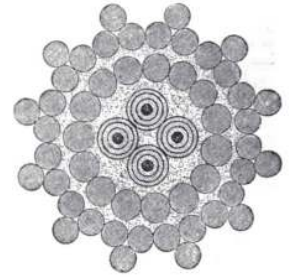
Teorem. (P_1, P_2, \dots, P_n) ve (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) dieyi iki karmaşık polinom n -lisinin topolojik olarak denk olması için gerek ve yeter koşul aynı köklü ağacı tanımlamaları ya da denk bir deyişle her i, j için $v(P_i - P_j) = v(Q_i - Q_j)$ olmasıdır.

Öncelikle polinomlara karşılık gelen ağacın, örgüyü belirlediğini gösterelim. Kökten başlayın ve p kenar kadar inerek $q \geq 2$ adet yavrusu olan ilk boğuma ulaşın. Bu an, tüm P_i 'lerin p -inci Taylor polinomunun eşit olması ve değişik $(p + 1)$ -inci Taylor polinomlarından q adet var olması demektir.

Bu ortak p -inci Taylor polinomunu tüm P_i 'lerden çıkaralım; karşılık gelen örgüler değişmez elbette. $(p + 1)$ -inci dereceden yeni Taylor polinomları a_v 'ler ($v = 1, \dots, q$) karmaşık sayılar olmak üzere $a_v x^{p+1}$ şeklindedir. P_i 'lerden ikisinin $(p + 1)$ -inci dereceden Taylor polinomu aynıysa bunları aynı bölüğe koyarak (P_1, P_2, \dots, P_n) 'i q adet bölüğe ayırırız. Dolayısıyla x, ε yarıçaplı çemberi katederken $a_v x^{p+1}$ şeklinde q adet nokta, düzlemin aynı katı döndürmeleriyle küçük çemberler tarif ederler; noktaların her biri $p + 1$ tam tur atar. PB_q 'daki bu örgü ($-$ nün eşlenik sınıfı) yalnızca q ve p 'ye bağlıdır; a_v 'lere bağlı değildir: q nokta bir blok



Düzlemsel olmayan bir ağaç, Jardim Botânico, Rio de Janeiro.



İngiltere-Hollanda deniz altı telgraf kablosu ve arakesiti, 1858.

halinde basitçe $p + 1$ tam tur atmaktadır.

Her bir $a_n \varepsilon^{p+1} \exp(\sqrt{-1}(p+1)\theta)$ noktası etrafına, $(p+1)$ -inci Taylor polinomu $a_n x^{p+1}$ olan tüm P_i 'ler için $P_i(\varepsilon \exp(\sqrt{-1}\theta))$ noktalarını içeren küçük daireler çizin. Her bir dairenin içinde her bölüğü daha yüksek Taylor polinomlarına göre parçalayarak bu işlemi sürdürün.

Sonuç olarak örgümüz, merkezleri daha büyük bir çemberi kateden daha küçük çemberleri yörünge kabul eden, yani epikiklos (çemberin üstünde yürüyen çember) oluşturan, Hipparkos-vari Güneş Sistemine benzer. q adet küçük daire öbeği blok halinde $p+1$ tur dönmektedir. Her bir dairenin içinde de benzer resim yer alır, ta ki $\gamma_i(\theta)$ 'lara ulaşıncaya dek. . . Tüm bu daireler için tüm bu p, q sayıları ağacın kombinatorik verisiyle tarif edilir dolayısıyla örgü (-nün eşlenik sınıfı) ağaç tarafından somut biçimde, tam tamına belirlenir.

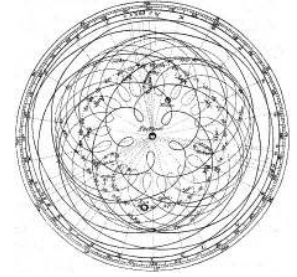
Şimdi de *örgüden başlayarak* ağacı nasıl inşa ettiğimizi anlatacağım.

$1 \leq i < j \leq n$ olacak biçimde iki tamsayı seçin. PB_n 'de bir saf örgü, düzlemde n adet değişik noktadan oluşan (x_1, \dots, x_n) n -lilerinin çizdiği bir ilmeğin homotopi sınıfıdır. Her i, j için x_i ve x_j dışında tüm noktaları unutarak PB_n 'den PB_2 'ye bir homomorfi tanımlanabilir. PB_2 'nin yapısı gayet basittir: \mathbb{Z} 'ye izomorftur. İki farklı nokta, dolanıp ilk konumlarına geri döndüğünde, $x_i - x_j$ vektörü de 0 'da deliği olan düzlemde bir ilmek boyunca hareket eder ve böylece 0 'a göre bir indise sahip olur. PB_2 ve \mathbb{Z} arasındaki izomorfi budur. Böylece $lk_{i,j} : PB_n \rightarrow \mathbb{Z}$ şeklinde $n(n-1)/2$ adet homomorfi tanımlanır, bir örgünün görüntüsü basitçe $x_i - x_j$ 'nin dönme sayısıdır. Eşlenik iki örgünün $lk_{i,j}$ altında görüntüsü aynıdır elbette.

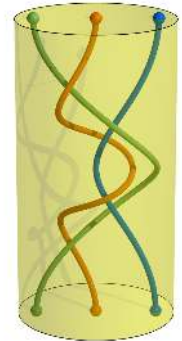
Artık γ_i 'lerin betimlediği örgümüze geri dönelim. $lk_{i,j}$ 'lerin bu örgüdeki değerine bakarak, x başnokta merkezli küçük bir dairenin kenarında dönerken $P_i(x) - P_j(x)$ 'in attığı turu saymış oluyoruz. Bunun da $v(P_i - P_j)$ değerlemesi olduğu aşikar. Sonuç olarak $v(P_i - P_j)$ değerlemeleri örgünün eşlenik sınıfından okunabiliyor, tam istendiği gibi. \square

Teoremin diğer yönü için, n yapraklı bir köklü ağaç verildiğinde, karşılık gelen ağacı tam bu ağaç olan n adet polinom inşa

Yine o!



Güneş, Merkür ve Venüs'ün Dünya'ya göre bağlı hareketleri. \odot



Üç telli bir saf örgü. \odot

etmek kolay.

Ağaçlarımız düzlemsel olmasa da, yaprakları 1'den n 'ye etiketleyerek düzlemsel olmayan köklü ağaçları birbirine aşılayabiliriz. n adet yaprağı $1, \dots, n$ olarak işaretlenmiş köklü bir T ağacı ve T_1, \dots, T_n diye n adet ağaç verildiğinde, T_i ağacını T 'nin i etiketli yaprağına aşılayabiliriz. Bu da *işaretli, köklü, düzlemsel olmayan ağaçlar* operadını tanımlar.

Böylece bu aşılama işlemi $Pol_{\mathbb{C}}(n)$ üzerinde doğal bir operad yapısı tanımlar. Üstelik yukarıdaki tartışma, $Pol_{\mathbb{C}}(n)$ 'nin saf örgü operadının bir altoperadı olduğunu da gösterir.

Bu yapıyı polinomlar cinsinden formüllerle doğrudan anlatabiliriz. Bir (P_1, \dots, P_n) polinom n -lisi için

$$\delta_i = \max_{j \neq i} v(P_i - P_j)$$

olsun. (P_1, \dots, P_n) 'nin bir $(P_{i;j})$ ($1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq k_i$) polinom ailesi üzerine operad etkisi, (sözlük sıralamasında)

$$P_i(x) + x^{\delta_i} P_{i;j}(x) \quad (1 \leq i \leq n \text{ and } 1 \leq j \leq k_i)$$

olarak verilen polinom $(k_1 + \dots + k_n)$ -lisi olarak tanımlanır.

Özet olarak $Pol_{\mathbb{C}}(n)$ operadı, *etiketli, köklü, düzlemsel olmayan ağaçlar operadına izomorftur; saf örgü operadı PB_n 'nin bir altoperadı olarak ortaya çıkar.*

Tekil karmaşık eğriler için bir operad

Başnoktada sıfır olan $P_i(x)$ ve $P_j(x)$ diye iki karmaşık polinom için $v(P_i - P_j)$ değerlemesine, $y = P_i(x)$ ve $y = P_j(x)$ pürüzsüz eğrilerinin başnoktada kesişiminin *katlılığı* da denir aynı zamanda. Bu tam da $(P_j - P_i)(x)$ polinomunun 0 kökünün alışılmış anlamda katlılığı olduğundan bu adlandırmada şaşılacak bir şey yok. Bir önceki paragraf şöyle de yorumlanabilir.

\mathbb{C}^2 'de $y - P_i(x) = 0$ eğrileri pürüzsüzdür. İkisi de ufak S^3 küresini geçişmemiş, basit bir düğümde çaprazlama keserler. Bunları $\max(|x|, |y|) = \varepsilon$ kare küresinde inceleyip γ_i olarak adlandırmıştık. γ_i ve γ_j 'nin *geçişme sayısı*, kesişimlerinin katlılığından başka bir şey değil. Katlılığın topolojik yorumu böyle.

Polinomların sırası değiştirilebildiğinden bu bir *simetrik* operad'dır da.

δ_i, P_i 'nin ağaca yapıştırıldığı düzey.

Bu tanımın gerçekten de karşılık gelen etiketli ağaçları aşıladığını kontrol edin.

Kitabımızın son iki bölümü geçişme sayısıyla daha yakından ilgileniyor.

Yön verilmiş k_1 ve k_2 diye iki düğümün S^3 'te geçişme sayısı şöyle tarif edilir. Yönlü kenarı k_1 olan, yönlü gömülü bir yüzey seçin ve bu yüzeyin k_2 ile (cebirsal) kesişimini sayın.

Basit durumumuzda pürüzsüz eğrimiz $y - P_i(x) = 0$ 'ın 3 boyutlu küredeki bağı, $y - P_i(x)$ gerçek ve pozitif olmak üzere elde edilen Milnor lifinin kenarı olarak düşünün. 3 boyutlu kürede $y - P_i(x) = 0$ ve $y - P_j(x) = 0$ eğrilerinin geçişme sayısını hesaplamak için $y - P_j(x) = 0$ düğümüyle $y - P_i(x) \in \mathbb{R}_+$ Milnor lifinin (cebirsal) kesişimini saymalıyız. $(P_j - P_i)(x) = ax^{v(P_i - P_j)} + \dots$ olduğundan ikinci düğüm birincinin Milnor lifini tam $v(P_i - P_j)$ kez keser. (Kesişimlerin hepsinin pozitif olduğu kontrol edilmeli.) Dolayısıyla γ_i ile γ_j 'nin geçişme sayısı tam da $v(P_i - P_j)$ katlılık sayısıdır.

Şu ana kadar söylenenlerin çoğunun pürüzsüz olmayan eğrilerin dalları için de doğru olduğu görülebilir. $F(x, y) = 0$, n tane dalı olan indirgenmiş tekil karmaşık analitik bir eğri olsun. İndirgenemez çarpanlarına ayrıştırarak $F = F_1 \cdots F_n$ şeklinde yazalım. Her bir $F_i = 0$ dalı

$$t \in \mathbb{C} \mapsto (t^{m_i}, g_i(t))$$

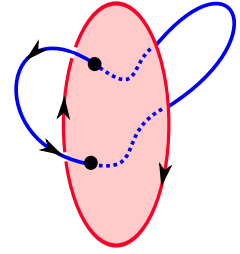
biçiminde bir Puiseux parametresine sahiptir. Burada m_i tamsayısı dalın derecesidir. Her bir dalın küçük bir küreyle kesişimi bir k_i düğümüdür; dal pürüzsüz değilse k_i geçmiş bir düğümdür. k_i ile k_j 'nin geçişme sayısı olan m_{ij} , iki dalın kesişimlerinin katlılık sayısıdır. Zihni topolojik çalışan okurlar bunu bir tanım olarak düşünebilir. Cebir tercih edenler şöyle devam edebilir. Bir dalın parametresini diğerinin denklemi içinde yerine koyun ve

$$t \in \mathbb{C} \mapsto F_j(t^{m_i}, g_i(t))$$

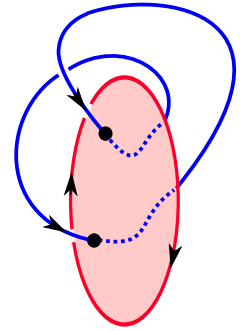
ifadesinin bir sıfırı olarak $t = 0$ 'ın katlılığına bakın. "İki dalın kesişiminin cebirsal katlılığı" ile "iki düğümün geçişme sayısı" tanımlarının paralelliği dikkate değer. İkisi de asimetrik görünürler ama simetrikler.

Dallar arasında m_{ij} kesişim katlılıkları da, pürüzsüz eğriler için saptadığımız önemli özellikleri halen sağlıyor:

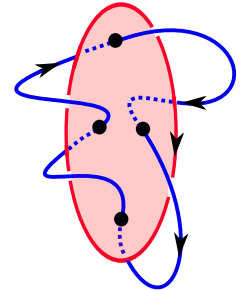
- m_{ij} pozitif bir tamsayı. Bu kolay.



Geçişme sayısı = 1 - 1 = 0.



Geçişme sayısı = 1 + 1 = 2.



Geçişme sayısı = 4.

Bir dalın geçmemiş bir düğüm vermesi için gerek ve yeter koşul dalın pürüzsüz olmasıdır. Kanıtlayabilir misiniz?

- $m_{ij}/m_i m_j$ 'ler bir çeşit *ultrametrik eşitsizliği* sağlıyor. Başka deyişle, her $\varepsilon > 0$ için $m_{ij}/m_i m_j \geq \varepsilon$ ilişkisi $\{1, \dots, n\}$ üstünde bir denklik bağıntısı; böylece daha önce yaptığımız gibi bir ağaç inşa edebiliyoruz (bir farkla: uzunluklar artık illa tamsayı değiller ama kesirli sayılar).

İkinci özellik Płoski'nin 1985 işinden¹⁴⁶. Modern bir sunum ve uygulama için bakınız¹⁴⁷; geniş bir genelleştirme için bakınız¹⁴⁸.

Şimdi bir *karmaşık tekil eğriler operadı* inşa edebiliriz. Esasen daha önceki gibi, $y = P_1(x), \dots, y = P_n(x)$ eğrimizin dallarının bir etiketlemesi lazım (burada P_i 'ler artık $g_i(x^{1/m_i})$ Puiseux serileri). Başka deyişle değişik Puiseux serilerinden oluşmuş n -lilerin kümesini (Eğri _{n} olarak göstereyim) *etiketlenmiş dallı karmaşık eğriler* olarak görüyoruz. Tam polinomlarla yaptığımız gibi Eğri _{n} 'ler üzerinde bir operad yapısı tarif edebiliriz. $(P_1, \dots, P_n) \in$ Eğri _{n} elemanına karşılık gelecek

$$\delta_i = \max_{j \neq i} v(P_i - P_j)$$

şeklinde $\delta_1, \dots, \delta_n$ kesirli sayılarını tanımlayalım; burada v , Puiseux serisinde sıfırdan farklı terimlerin kesirli üslerinden en küçüğü.

Şimdi Eğri _{k_1, \dots, k_n} kümelerinin, $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq k_i$ olmak üzere $P_{i;j}$ Puiseux serileriyle belirlenen elemanları için Eğri _{$k_1 + \dots + k_n$} kümesinin bir elemanını

$$P_i(x) + x^{\delta_i} P_{i;j}(x) \quad (1 \leq i \leq n \text{ and } 1 \leq j \leq k_i)$$

olacak biçimde ve sözlük sıralamasında bir $(k_1 + \dots + k_n)$ -lisi olarak tarif edebiliriz. Bu (simetrik) bir operad tanımlar.

Alıştırma:

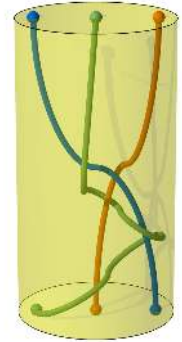
$F(x, y) = 0$ 'ın $|x| = \varepsilon$ ile kesişimi bir örgüdür ama saf bir örgü değildir artık. Her dal $x = \varepsilon$ ile kendi derecesi m_i kadar kesişir. Önceki durumdan farklı olarak dallar tarafından belirlenen düğümler artık geçişmesiz değildir.

Üstteki operad için topolojik bir yorum bulun; yani dalları etiketlenmiş $F(x, y) = 0$ eğrileri arasında, belirledikleri örgüler cinsinden ifade edilmiş doğal bir denklik bağıntısı kurun. Bu bağıntı, operadımız denklik sınıfları üzerinde etki edecek biçimde tanımlanmalıdır.

¹⁴⁶ A. Płoski. Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 33(11-12):601-605 (1985), 1985.

¹⁴⁷ I. Abío, M. Alberich-Carramiñana, and V. González-Alonso. [The ultrametric space of plane branches](#). *Comm. Algebra*, 39(11):4206-4220, 2011.

¹⁴⁸ E. García Barroso, P. González Pérez, and P. Popescu-Pampu. [Ultrametric spaces of branches on arborescent singularities](#). 2016.



3 telli "saf olmayan" bir örgü.



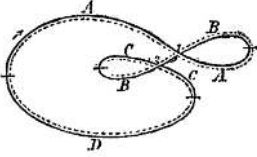
1840 yılında Gauss.

Gauss'un dönüşü: düzlemde eğriler

GEÇMİŞTE YA DA GÜNÜMÜZDE, BİRÇOK BÜYÜK MATEMATİKÇİ EĞRİLER ÇİZMEYE BAYILIR/DI. Bir sınav olarak birkaç resim veriyorum; okuyucu çizerlerinin kimler olduğunu bulsun bakalım.



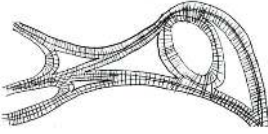
Tali yol! Benim pek sevdiğim bu bölüm, kitabın geri kalanından tamamen bağımsız.



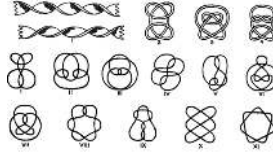
1



2



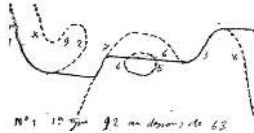
3



4



5



6

Çözüm: sonraki sayfada.

- 1. Resim** Gauss tarafından bu bölümde tartışacağımız probleme ilişkin gizliymiş; Nachlass'ından (geride bıraktığı eserleri)...
- 2. Resim** Newton tarafından gizliymiş bir kübik eğri; *Enumeratio Linearum tertii Ordinis* çalışmasından (1667)... Modern dille ifade edersek Newton bu cebirsel eğrileri izdüşümsel dönüşümlere göre sınıflandırmaya çalışıyor. "Eğrileri gölgelerle üretmek"ten söz ediyor ki bu da izdüşümsel geometrinin harika bir tanımı.
- 3. Resim** Thurston'un çok etkili olmuş *Notes on the topology and geometry of 3-manifolds* (1980) adlı çalışmasından bir çizim. Bu resim, Teichmüller uzayının kenarını anlatmak için kullanışlı olan önemli bir kavram, *tren raylarını* temsil ediyor.
- 4. Resim** *Tait*'in düşünme izdüşümü çizimi (1884): düşünüm sınıflandırmasına yönelik ilk ciddi girişimi yansıtan bir makale dizisinden...
- 5. Resim** Euler şerefine basılmış bir İsviçre parasını gösteriyor. *Lettres à une princesse d'Allemagne*'de genç bir Alman prensesine elipslerle çevrelenmiş diagramlar kullanarak *Boolean* mantığının anlatılması. Dört elipsin olası tüm kesişim düzenlemelerini bulmuş. Bunlardan bir doğru kağıt parçanın arka yüzünde bulunuyor.
- 6. Resim** *Poincaré* tarafından "son teoremi" kanıtlamaya giriştiğinde gizliymiş. Bu teorem, bir halkanın alanı koruyan bir diffeomorfizi altında sabit kalan nokta sayısına ilişkindir. Bundan birkaç ay sonra hayatını kaybettiğinden aslında teoremi kanıtlayamadı. Ölümlüğünün üstünden çok geçmeden, kanıt Birkhoff tarafından verildi.

Gauss'un imzası, 1794
(Gauss 17 yaşındaydı).

Gauss sözcükleri

Bu bölümde düzlemde eğriler üzerine Gauss tarafından ortaya atılmış güzel bir soruyu inceleyeceğiz. Gauss'un cebirin temel teoremine verdiği ilk kanıtın, bir dairedeki eğrilerin niteliksel davranışlarını temel aldığını hatırlayın.

Gauss'un Eserleri'nin 8. cildi, düzleme batırılmış eğrilere dair birkaç sayfa içerir¹⁴⁹ (272. ve 282.-286. sayfalar). Bir konuda dikkatli olmalıyız: bunlar *Nachlasse* denen, Gauss'un yaşamı boyunca yayınlanmadan kalmış notlar. Düsturunu hatırlayın: *Pauca sed matura* (Az ama olgun). Bu sayfalar gerçek bir yayın olarak değil de daha çok kişisel müsveddeler gibi düşünülmesi.

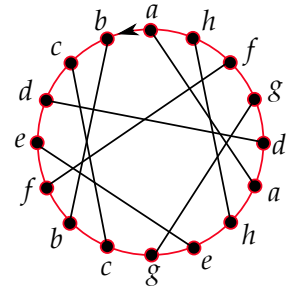
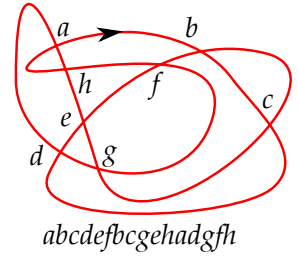
Düzlemde $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diye kapalı, yönlü, genel bir batırılmış eğri çizin. Genel demek, eğrinin kendini kestiği katlı noktaların, iki farklı teğetin var olduğu çifte noktalar olması demektir. Çifte noktaları, (Gauss'un *Knoten* dediği) a_1, \dots, a_n diye n adet simgeyle etiketleyin. Eğri boyunca dönerken bu a_i 'lerin her birinden iki kez geçersiz ve böylece a_i 'lerin ikişer kez görüldüğü, $2n$ uzunluğunda bir döngüsel sözcük elde ederiz. Her bir a_i için bir giriş olmak üzere, *kapalı eğri bir giriş diyagramı tanımlar*.

Gauss'un gündeme getirdiği soru, hangi giriş diyagramlarının bir düzlemsel eğriden doğduğunu tanıma problemidir. Gauss önce $n \leq 8$ için tüm olasılıkları eliyle listeler! Sonra bir *gerek* koşul bulur: sözcük bir çembere yazıldığında aynı a_i 'nin iki kopyası arasında *çift* sayıda harf bulunmalıdır. Yandaki örnekte d girişi çemberi 6 ve 8 harfli iki aralığa ayırıyor.

Bazı günümüz yazarları bunun Gauss'un bir sanısı olduğunu, aslında kanıtı yapmadığını iddia ediyor. Ne büyük saygısızlık! Bana öyle geliyor ki Gauss kanıtı yaptı ama özel defterine yazmaya zaman ayırmadı.

Topolojinin ilk teoremlerinden biri, düzlemde çaprazlama kesişen iki kapalı eğrinin *çift sayıda noktada kesiştiğidir*. Daha önce fark ettiğimiz gibi Gauss bunu doktorası sırasında biliyordu. Olası kanıtlardan biri, birinci eğriyi genel bir öteleme silsilesiyle iterek hareketin sonunda tüm kesişim noktalarını yok etmektir. Kesişim noktalarının genel durumlarda nasıl belirdiğini incelediğimizde noktaların çiftler çiftler belirip kaybolduğunu görmek zor

¹⁴⁹ C. F. Gauß. *Werke. Band VIII.* Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973. 1900 orijinalinin tekrar basımı.



Halikarnas Balıkcısı'nın şöyle dediği rivayet edilir: gerçek bir denizci deniz kızlarının varlığına inanır.

değil. Yandaki resimlere bakın.

Bununla yakından ilişkili bir gerçeği, sıkıcı matematik derslerinde kağıda çiziktiren öğrenciler mutlaka fark etmiştir. Eğer düzleme genel bir kapalı eğri çizerseniz eğrinin ayırdığı bölgeleri bir dama tahtası misali siyah ve beyaza boyayabilirsiniz. Sonsuzlu içeren bölgeyi beyaza boyayın; diğer bölgeleri genel bir yayla sonsuza birleştirdiğinizde bu yay kapalı eğriyi çift sayıda noktada kesiyorsa bölgeyi beyaza, aksi durumda siyaha boyayın. Bir önceki gözlemimiz sayesinde bu yöntem tutarlıdır.

Artık Gauss'un gerek koşulu kolay bir çıkarım. Herhangi bir kiriş, çemberi I_1, I_2 olarak iki aralığa ayırır ve bunlar da düzlemde γ_1 ve γ_2 diyeceğimiz iki kapalı eğri tanımlarlar. Bu iki eğriyi hafifçe oynatarak birbiriyle çaprazlama kesiktirin. I_1 'deki harf sayısı, γ_1 'in kendini kestiği noktaların sayısının iki katı artı γ_1 'le γ_2 'nin kesişme sayısıdır, dolayısıyla çifttir. Yandaki resimde b' 'den b 'ye giden iki ilmekten biri hafifçe kaydırılıp noktalı mavi ilmek olarak gösterilmiş.

Bu gerek koşulun yeter koşul olmadığını Gauss da çok iyi biliyordu.

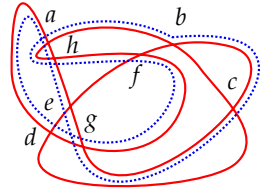
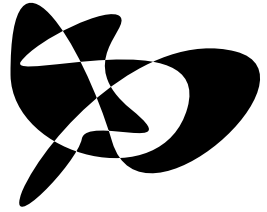
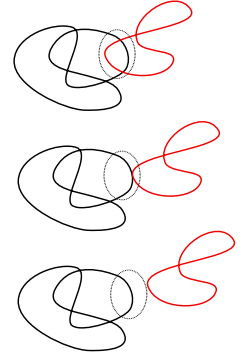
İşaretili Gauss sözcükleri

Gauss'un problemi birçok kez, aslen topolojik ya da kombinatorik olmak üzere birçok farklı yolla, farklı matematik camialarında çözüldü. Poincaré'nin şu sözünü hatırlamamak elde değil:

[...] il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus.

Bu çözümlerden yalnızca ikisini anlatacağım.

İlkin,¹⁵⁰,¹⁵¹ ve ¹⁵² çalışmalarını harmanlayıp bir topolojik akıl yürütmeye daha basit bir problemin çözümünü sunayım. Düzleme bir yön verildiğinde genel eğrimizin her bir çifte noktası, biri "birinci" ve diğeri "ikinci" olmak üzere iki teğet vektör tarif eder. Eğri boyunca dolanırken bir çifte noktaya rastladığımızda birinci dal üzerindeyse oraya +, diğeri üzerindeyse - işareti koyuyoruz. Böylece döngüsel sözcük, ± 1 işaretleriyle, ya da üsleriyle, donatılmış oluyor. Her bir harf iki kez ama farklı işaretlerle



¹⁵⁰ N. Chaves and C. Weber. Plombages de rubans et problème des mots de Gauss. *Exposition. Math.*, 12(1):53-77, 1994.

[...] artık çözülmüş ve çözülmemiş problemler yok, sadece az veya çok çözülmüş problemler var.

¹⁵¹ G. Cairns and D. M. Elton. The planarity problem for signed Gauss words. *J. Knot Theory Ramifications*, 2(4):359-367, 1993.

¹⁵² G. Cairns and D. M. Elton. The planarity problem. II. *J. Knot Theory Ramifications*, 5(2):137-144, 1996.

görünüyor. Buna denk olarak, her bir kirişi diyelim ki + ucundan – ucuna gidecek şekilde *yönlü giriş diyagramlarını* düşünebilirdik. *İşaretli Gauss problemi* (Gauss bunu çalışmamıştı) şöyle. Öyle bir *işaretli sözcük* verildiğinde düzlemde genel bir eğriden gelip gelmediği saptanabilir mi?

Her a_1, a_2, \dots, a_n sembolü için yandaki gibi bir artı çizin. Her bir artının iki giriş yönü ve iki çıkış yönü var. İşaretleri + ve – olan iki kolu var.

İşaretli, döngüsel bir sözcük w , her bir artının her bir çıkış yönünü başka bir artının bir giriş yönüne yapıştırma yolunu tam tamına belirler. Bu yapıştırma işleminin sonucunda uzayda kenarlı, yönlü bir S yüzeyi elde edilir. S yüzeyi, daldırılmış, yönlü bir γ eğrisi içerir. Bu eğri boyunca döndüğümüzde aynen işaretli w sözcüğünü okuruz. S düzlemselse, düzleme gömülebiliyorsa, düzlemde bir eğri inşa etmiş ve problemi çözmüş oluruz. Diğer taraftan, eğer sözcük düzleme daldırılmış bir eğriden gelmişse, eğrinin bir komşuluğunun, artıların S' deki gibi düzenlenmiş bir birleşimi olduğu aşikar.

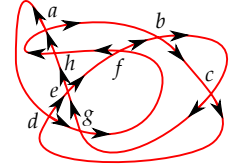
Demek ki w 'nun daldırılmış bir düzlem eğrisi olarak gerçekleşmesi için gerek ve yeter koşul S' nin düzlemsel olmasıdır.

Bu bölümün kalan kısmı için yüzeylerin homoloji kuramının temelleri gerekecek. Fomenko'nun¹⁵³ görsel kitabını tavsiye etmek için iyi bir fırsat. . . Kitabı açar açmaz okuyucum kitabı niye sevdiğimi anlayacaktır. Massey'in daha standart kitabı¹⁵⁴ da epey kullanışlı.

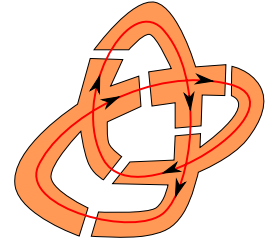
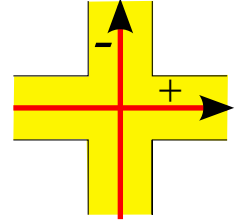
S' nin kenar parçalarının sayısı k olsun. Her bir kenar parçasına bir daire yapıştırarak S' den elde ettiğimiz yüzey de \hat{S} olsun. S yüzeyinin homotopi türü n köşeli, $2n$ kenarlı bir çizgeninkiyle aynı olduğundan, \hat{S} 'nin Euler-Poincaré sayısı $n - 2n + k$ olur. Tıkız, yönlü, kenarı olmayan yüzeyler Euler-Poincaré sayılarıyla sınıflandırılırlar. Sonuç olarak S' nin düzlemsel olması $k - n = 2$ olmasına denktir.

Böylece w 'nun gerçekleştirilebilir olup olmadığına karar verecek basit bir algoritma elde ettik. w verildiğinde artıları yapıştırın ve kenar parçalarını sayın: $n + 2$ olması lazım. Bu çözüm aslen Carter'a ait¹⁵⁵.

Şimdi başka bir bakış açısı sunacağım. Tıkız, yönlü, kenarlı



$$a^+b^+c^+d^+e^+f^+b^-c^+g^-e^-h^+a^-d^+g^+f^+h^-$$



¹⁵³ A. Fomenko. *Visual geometry and topology*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Rusçadan Marianna V. Tsaplina tarafından çevrilmiş.

¹⁵⁴ W. S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

¹⁵⁵ J. S. Carter. *Classifying immersed curves*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(1):281–287, 1991.

yüzeylerin sınıflandırmasından biliyoruz ki böyle bir yüzeyin düzlemsel olması, yüzeyin üstünde birbirlerini çaprazlama kesen herhangi iki kapalı eğrinin kesişim sayısının çift olmasına denktir. Gerçekten de eğer yüzeyin cinsi ≥ 1 olsaydı, yüzey delinmiş bir simit içerecekti; bu da tam tamına tek bir noktada kesişen iki eğriye sahip olacaktı. Dolayısıyla S 'nin cinsinin 0 olduğuna bakmak için mod 2 homolojisi $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ için bir taban bulup kesişimi hesaplamak yeterlidir.

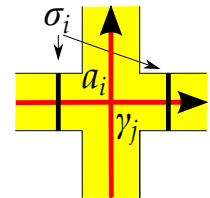
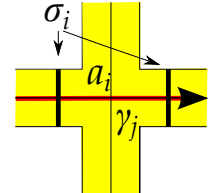
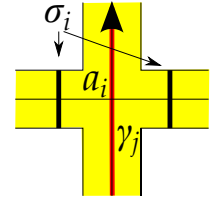
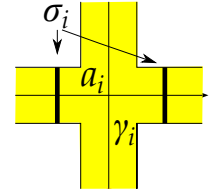
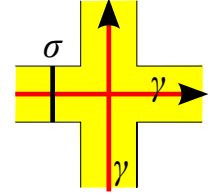
$H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ grubunun bir tabanını bulmanın kolay bir yolu var. Hazırlık gözlemi olarak: yönlü bir çember üzerinde sıralı iki nokta (a^+, a^-) , pozitif yönde a^+ 'dan a^- 'ye giderken açık bir aralık tanımlar. Bu aralığın elemanlarının a^+ ile a^- arasında olduğunu söyleyeceğim. Dikkat: noktaların sırası değiştirilirse aralık yerine tümleyenindeki açık aralık tanımlanır.

Baştaki γ eğrisi S 'de çizildiği için bir $[\gamma]$ homoloji sınıfı belirler. Ayrıca her $i = 1, \dots, n$ için çemberde a_i^+ 'dan a_i^- 'ye giden aralık, S 'de bir γ_i ilmeği ve $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 'de bir $[\gamma_i]$ homoloji sınıfı verir. γ_i yalnızca a_i 'yle işaretlenmiş artıya girdiğinde yolunu değiştiriyor, sağa dönüyor; diğer herhangi bir artıya girdiğinde yolunu değiştirmiyor. Başka deyişle, a_i 'yle işaretlenmemiş bir artıyla γ_i 'nin kesişimi ya boş ya bir doğru parçası ya da birbirine dik iki doğru parçası...

Lemma. $[\gamma], [\gamma_i]_{1 \leq i \leq n}$ sınıfları $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ için bir taban oluşturur.

S yüzeyinin homotopi türü, n köşeli, $2n$ kenarlı, bağlantılı bir çizgeninkine aynı. Euler-Poincaré sayısıysa $-n$ ve bu da $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ grubunun rankından 1 eksik. Dolayısıyla rank $(n+1)$ olur. Lemmayı kanıtlamak için $[\gamma], [\gamma_i]_{1 \leq i \leq n}$ sınıflarının $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ grubunda doğrusal bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir.

Uç noktaları S 'nin kenarında bulunan, S üzerinde herhangi bir σ yayı, $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ üstünde şöyle bir doğrusal form tanımlar: elemanın σ 'yla kesişimini sayın (hep mod 2'de). Sözelimi, σ 'yu yanda gösterildiği gibi bir artıda seçin. γ 'nın σ 'yu tek bir noktada kestiği açık, dolayısıyla $[\gamma]$ sıfır değil. a_i harfinin artısında, σ_i yanda görüldüğü gibi iki eğrinin toplamı olsun. Eğer $i \neq j$ ise σ_i ile γ_j 'nin kesişimi 0'dır; eğer $i = j$ ise kesişim 1'dir. γ ile σ_i 'nin kesişimi ise 0'dır. Böylece $n+1$ adet doğrusal form, yani σ_i 'ler ve σ



kullanılarak $[\gamma], [\gamma_i]_{1 \leq i \leq n}$ sınıflarının doğrusal bağımsız oldukları gösterilmiş ve lemma kanıtlanmış olur. \square

Şimdi, S 'nin cinsinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul tüm γ, γ_i ilmeklerinin kesişimlerinin mod 2'de sıfır olmasıdır.

Öncelikle herhangi bir yönlü yüzey üzerinde herhangi bir kapalı eğrinin kendisiyle kesişimi (Z' 'de dolayısıyla $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'de) sıfırdır.

γ ve γ_i 'nin kesişim sayısını $\gamma \cdot \gamma_i$ diye göstereyim ve hesaplayalım. Kesişimi çaprazlama yapmak için γ 'yı birazcık sağına iterek γ_i 'ye çapraz γ' 'nü elde ederiz. S yüzeyinin ve γ_i ilmeklerinin yönlü olduğunu unutmayın. O zaman $\gamma \cdot \gamma_i, a_i^+$ 'yla a_i^- arasındaki harf sayısı olur ve böylece Gauss'un gerek koşulunu tekrar elde ederiz.

Şu noktadan sonra bu gerek koşulun hep sağlandığını kabul edelim.

Şimdi de γ_i 'yle γ_j 'nin mod 2 kesişim sayısını $\gamma_i \cdot \gamma_j$ diye göstereyim ve hesaplayalım.

Eğer çemberde (ya da dögüsel sözcükte) uç noktaları sırasıyla a_i^+, a_i^- ve a_j^+, a_j^- olan iki ayrı aralık varsa a_i^\pm ve a_j^\pm harflerine birbirine *bağlı değil* diyeceğim. Önce a_i^\pm ve a_j^\pm bağlı olmasınlar ve sırasıyla I ve J ayrı aralıkları tanımlasınlar. Kesişim sayısı hesabında γ_i yerine $\gamma_i - \gamma$ yazabileceğimizden bu bağlı olmayan durumda $\gamma_i \cdot \gamma_j$ kesişim sayısını, bir kopyası I 'da, diğer kopyası J 'de görünen harflerin sayısı olarak buluruz. Böylece w 'nun gerçekleştirilmesi için tek/çift olmaya dair ikinci bir gerek koşul bulmuş olduk.

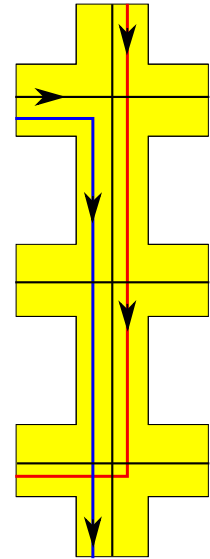
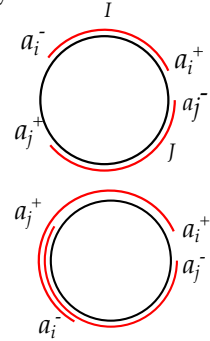
Eğer a_i^\pm ve a_j^\pm bağlıysa, γ_i ve γ_j ilmekleri mutlaka tek bir aralıkta çakıştıkları için çaprazlama kesişmezler. γ_i 'yi hafifçe sağa ve γ_j 'yi hafifçe sola kaydırarak sırasıyla γ_i' ve γ_j' elde edelim. γ_i' ve γ_j' eğrileri bu ortak kısımda artık paralel olurlar. Şimdi $\gamma_i' \cdot \gamma_j'$ kesişimini sayabiliriz. Resme bakın.

a_j artısında bir kesişim var, a_i artısında kesişim yok. Diğer kesişimler, a_i^+ ve a_i^- arasında olup ikinci kopyaları a_j^+ ve a_j^- arasında olan harflere karşılık gelir.

Öyleyse a_i^\pm ve a_j^\pm bağlıysa $\gamma_i \cdot \gamma_j$ sayısı, a_i^+ ve a_i^- arasında olup diğer kopyası a_j^+ ve a_j^- arasında olan harflerin sayısının 1 fazlasına eşittir.

Böylece *işaretili* Gauss problemine çok basit bir çözüm elde

Niye?



ederiz.

Teorem. İşaretili bir Gauss sözcüğünün yatırılmış düzlemsel bir eğriyle gerçekleşmesi için aşağıdaki tüm koşulların sağlanması gerek ve yeterdir.

1. Her a_i harfi için a_i^+ ve a_i^- arasında çift sayıda harf vardır (Gauss'un çift olma koşulu).
2. Bağlı olmayan her a_i^\pm ve a_j^\pm için uç noktaları a_i^+, a_i^- ve a_j^+, a_j^- olan (ve bu noktaları içermeyen) ayrık aralıklar sırasıyla I ve J olsun. Bir kopyası I 'da diğeri J 'de olan harflerin sayısı çifttir.
3. Bağlı her a_i^\pm ve a_j^\pm için a_i^+ ve a_i^- arasında olup diğeri kopyası a_j^+ ve a_j^- arasında olan harflerin sayısı tektir.

Gauss'un sorusu

İlk probleme, işaretili olmayan sözcüklere geri dönelim. Hile yaparak, bir sözcüğe işaretler atamanın tüm 2^n yolunu denemeyi seçebiliriz elbette. Ama bu yol müthiş zaman alır. Gauss'un hesap gücü bile bu 2^n ile başa çıkamazdı. Ayrıca bu yol aydınlatıcı da olmayacaktır.

Gauss'un çift olma kistasının işaretlerden bağımsız olduğunu fark ederek başlayalım. a_i^+ ve a_j^+ aralıklarının bağlı olmadığı durumdaki ikinci koşul da işaretlerden bağımsızdır.

Dolayısıyla bu iki koşulun da işaretsiz bir w sözcüğü için sağlandığını varsayıyoruz.

O zaman binişme çizgesi denen, $G(w)$ olarak göstereceğim çizgeyi tanımlayalım. Bu çizgenin köşeleri $1, \dots, n$ tamsayıları, ya da a_i kirişleri. İki kiriş kesişiyorsa karşılık gelen köşeler arasında bir kenar var.

Cairns ve Elton'ın makalesinden

$$w = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_1 a_6 a_3 a_2 a_5 a_4 a_6$$

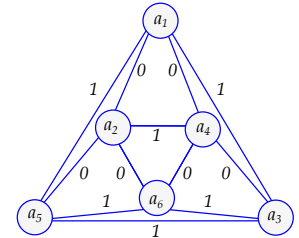
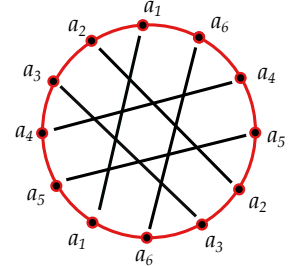
örneğine bakalım. Gauss'un çift olma koşulunun ve bağlı olmama durumundaki ikinci koşulun sağlandığı kolayca denetlenebilir.

Elde edilen binişme çizgesi yandaki gibi olacak.

Denk olarak, ilk iki gerek koşul, kiriş diyagramları cinsinden de ifade edilebilir.

1/ Her kirişi çift sayıda kiriş keser.

2/ Kesişmeyen iki kirişi birlikte kesen kiriş sayısı çifttir.



İşaretsiz hali w olan işaretli bir \bar{w} sözcüğü seçin; örneğin

$$\bar{w} = a_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4^+ a_5^+ a_1^- a_6^+ a_3^- a_2^- a_5^- a_4^- a_6^-.$$

İşaretili sözcüklere geri döndüğümüze göre, bu durumdaki ilmeklerin $\gamma_i \cdot \gamma_j$ kesişimlerini bulmayı biliyoruz. $G(w)$ çizgesinin her e kenarı için bu hesap bir $f(e) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ elemanı tanımlar. Örneğin, 1 ve 3 kirişleri kesişiyor. Kenardaki resimde a_1^+ 'dan a_1^- 'ye giden (noktalı yeşil) aralıkta olup diğer kopyası a_3^+ ve a_3^- arasında (noktalı mavi) olan hiç harf yok. Dolayısıyla $\gamma_1 \cdot \gamma_3$, mod 2'de $0 + 1$ 'e eşittir; bu durumda çizgede a_1 ile a_3 'ü birleştiren kenarın üstüne 1 yazıyoruz. Örneğimizde bazı kenarların üstünde 1 görüldüğü için bu *işaretili sözcük* düzlemde bir daldırılmış eğriyle gerçekleştirilemez.

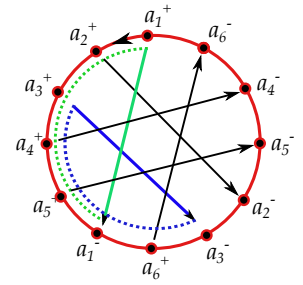
Her kenar 0'la donatılabilir diye harflerin işaretlerinde akıllıca bir değişiklik yapabilir miyiz diye bakmalıyız şimdi.

Bu $f(e)$ 'yle donatma, çizgede (değerleri $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'de) bir 1-kozuncir f olarak düşünülebilir; çizgede 2 boyutlu yüz olmadığı için bu f bir 1-koçevrimdir de. \bar{w} sözcüğündeki işaretlerin değiştirilmesiyle bu koçevrimin nasıl değiştiğini inceleyelim. İşaretlerin değişimi $\{1, \dots, n\}$ kümesinden $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'ye, çizgemizde 0-kozuncir olarak da düşünebileceğimiz, bir u fonksiyonunca tanımlanır. Bu u 'yla tanımlanmış işaret değişiminden sonra, $G(w)$ üstündeki yeni f' 1-koçevriminin basitçe $f + du$ 'ya eşit olduğunu iddia ediyorum; burada du , u 'nun *kosinüsü*. Tanım gereği, bu du 'nun bir e kenarındaki değeri, e 'nin iki ucunda u 'nun değerlerinin farkıdır (mod 2 çalıştığımız için toplamı da olur).

Tek bir harfin, diyelim a_k 'nin işaretini değiştirerek başlayalım. a_i^\pm ve a_j^\pm harflerini bağlı yapan her i, j için, yani $G(w)$ çizgesinin her kenarı için, işaretleri yalnızca k harfinde değişik \bar{w}, \bar{w}' işaretli sözcüklerinde kesişim sayılarını karşılaştırmalıyız. Eğer k sayısı, i ya da j değilse bu kesişim sayılarının eşit olduğu açık. $k = i$ ya da $k = j$ olduğundaysa kesişim sayıları arasındaki fark 1 (mod 2) oluyor. Örneğin $k = i$ durumunda şu iki sayıyı karşılaştırmalıyız:

1/ a_i^+ ve a_i^- arasında olup da diğer kopyası a_j^+ ve a_j^- arasında olan harflerin sayısı. . . ile

2/ a_i^- ve a_i^+ arasında olup da diğer kopyası a_j^+ ve a_j^- arasında olan harflerin sayısı.



Mod 2'de bu fark, a_j^+ ve a_j^- arasında olan a_i 'den farklı harflerin sayısıdır. Gauss'un çift olma koşulunun sağlandığı kabulümüzle ve a_i^\pm ile a_j^\pm bağlı olduğu için, bu sayı tektir. Dolayısıyla tek bir a_k harfinde işaretleri değiştirmenin etkisi, $G(w)$ çizgesinde bir uç noktası a_k olan kenarların etiketini değiştirmek ve diğer etiketlere dokunmamaktır. Böylece $f' = f + du$ formülü bu basit durumda sağlanmıştır. İşaretleri teker teker değiştirebileceğimizden genel durumu da kanıtlamış oluyoruz.

Sonuç olarak işaretlerden bağımsız biçimde iyi tanımlı bu nesne, $H^1(G(w); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ grubunda f 'nin *kohomoloji sınıfıdır*. Bu sınıfın sıfır olması, bir işaret seçimi için köçevrimin sıfır olması demektir; yani w işaretsiz sözcüğünün düzlemde genel daldırılmış bir eğriyle gerçekleştirilebilmesi demektir.

Son olarak, bir çizgede bir kohomoloji sınıfının sıfır olması için gerek ve yeter koşul çevrimlerde değerinin hep sıfır olmasıdır. Bu da gayet hesaplanabilir bir algoritma verir. Rastgele bir \bar{w} işaretli sözcüğü alın, 1-köçevrimi hesaplayın ve binişme çizgesindeki her bir çevrim üzerinde değerleri toplayın.

Örneğimizde $G(w)$ 'daki $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$ çevrimi 1 toplamını verir; bu yüzden *işaretsiz* w sözcüğü düzlemde daldırılmış bir eğriyle gerçekleştirilemez.

Problemin 1972'ye dek tarihçesi için bakınız¹⁵⁶; daha yeni bir kitap için bakınız¹⁵⁷.

Bir giriş diyagramının cinsi

w , n adet girişe sahip bir diyagram olsun. Bir halkanın kenarına n adet şeridi bir sonraki sayfadaki resimdeki gibi w uyarınca yapılaştırarak kenarlı bir $S(w)$ yüzeyi elde edin. Bu yüzeyin, her bir kenar parçasına bir daire yapılaştırarak elde edilen kapalı yüzeyin cinsi olarak tanımlanan bir cinsi vardır; buna *giriş diyagramının cinsi* denir ve $g(w)$ olarak gösterilir.

Moran¹⁵⁸, bu cinsi hesaplamanın güzel bir yolunu önermiştir. $n \times n$ bir matris alalım; $a_{ij} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ girdisi, a_i 'nin iki kopyasıyla a_j 'nin iki kopyası bağlıysa 1, değilse 0 olsun. Böylece binişme çizgesinin mod 2 *çakışım* matrisini elde ederiz.

¹⁵⁶ B. Grünbaum. *Arrangements and spreads*. American Mathematical Society Providence, R.I., 1972. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 10.

¹⁵⁷ C. Godsil and G. Royle. *Algebraic graph theory*, volume 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.



Tali yolda bir sapak.

¹⁵⁸ G. Moran. *Chords in a circle and linear algebra over GF(2)*. *J. Combin. Theory Ser. A*, 37(3):239–247, 1984.

Teorem. *Bir kiriş diyagramının cinsi, binişme çizgesinin mod 2 çakışım matrisinin rankının yarısına eşittir.*

Moran'ın verdiği kanıt epey karışık ama daha basit bir biçimde de anlatılabilir.

Kirişler, $S(w)$ yüzeyinde yaylar olarak görülebilir.

Bu kirişleri dairede yaylar olarak da görebiliriz.

$S(w)$ ile bu daireyi dış çemberlerinden yapıştırmak bir $S'(w)$ yüzeyini elde edin. Her bir kirişin iki kopyası $S'(w)$ yüzeyinde b_1, \dots, b_n ilmeklerini tarif eder; bunlar da $S'(w)$ 'nin homolojisini üretir. Bu tabanda b_i ile b_j 'nin kesişimi i ve j bağlıysa 1, değilse 0'dır.

Şimdi kapalı yönlü bir $\hat{S}(w)$ yüzeyi yaratmak üzere $S'(w)$ yüzeyinin kenar parçalarına k tane daire yapıştıralım. $S'(w)$ yüzeyinin $\hat{S}(w)$ yüzeyine gömülmesi, mod 2 birinci homolojide örten bir gönderim belirler zira $\hat{S}(w)$ yüzeyindeki herhangi bir ilmek, yapıştırılan dairelerden uzağa homotopiyle ittirilebilir. Fakat bu gömme homolojide birebir bir gönderim üretmez çünkü daireleri kenarlara yapıştırarak (artık dairelerin de kenarı olan) kenar parçalarını homolojide öldürmüş oluruz. Yine de, örten gönderimin çekirdeğindeki her eleman kenara paralel eğrilerin bir toplamına homolog olduğundan, $S(w)$ üzerindeki kesişim formunun da çekirdeğindedir. Dolayısıyla $S'(w)$ üzerindeki kesişim formu, modülo çekirdeği, $\hat{S}(w)$ üzerindeki kesişim formuna izomorftur. Cinsi g olan, kapalı, yönlü bir yüzeyin kesişim formuysa rankı $2g$ olan ve yoz olmayan bir formdur. \square



Lovász ve Marx'ın bir teoremi

Gauss'un sorusuna farklı bir çözüm de var. Ayrışabilen permütasyonları, 3142 ve 2413 örüntülerini içermeyenler olarak tarif etmemizle de uyum içinde bir çözüm bu. İşin garibi bu teoremin kanıtsız verilmiş olması¹⁵⁹. Okuyucu kanıtı kendi bulur diye umuyorum.

Düzleme daldırılmış genel bir eğrinin çifte noktalarını silmenin bir sonraki sayfada gösterildiği gibi iki yolu var. İlkinde eğri iki parçaya ayrılıyor; bu durumda istediğimiz parçayı seçebiliriz.

Kombinatorik bakış açısıyla bu iki işlem şöyle ifade edilebilir.

¹⁵⁹ L. Lovász and M. L. Marx. [A forbidden substructure characterization of Gauss codes.](#) *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 38(1–2):115–119, 1976.

– Bir $w = aUaV$ sözcüğünden başlayarak a' 'yı ve V' 'de bulunan tüm harfleri silin.

– Bir $w = aUaV$ sözcüğünden başlayarak a' 'yı silin ve UV^{-1} sözcüğüyle devam edin. (Tüm sözcükleri döngüsel yazıyoruz).

Bir w sözcüğü böylece daha az harfli başka sözcükler üretiyor. İlk sözcük gerçekleştirilebilirse yeni sözcüklerin de gerçekleştirileceğini yandaki resimlerde de görüyoruz. Yeni kısa sözcükler üreterek böyle devam edelim. Baştaki w , bu kısa sözcükleri *içeriyor* diyoruz.

Teorem. *Bir Gauss sözcüğünün gerçekleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul çift n için $a_1a_2\cdots a_n a_1a_2\cdots a_n$ sözcüğünü içermesidir.*

$a_1a_2\cdots a_n a_1a_2\cdots a_n$ 'nin binişme çizgesinin n köşeli bir tam çizge olduğunu da kaydedelim.

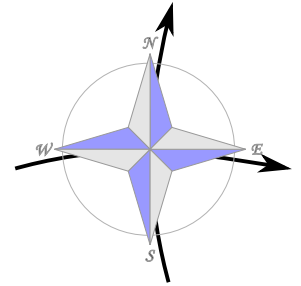
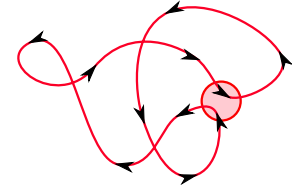
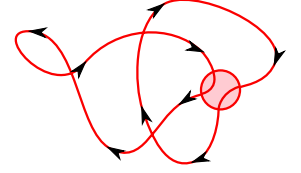
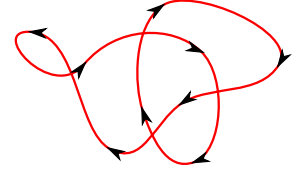
Bir Gauss operadı

Gauss sözcükleri üstünde bir operad yapısı tanımlayacağım. Daha dikkatli söylersem $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ düzleminde *işaretli*, yönlü, daldırılmış, genel eğrilerle ilgileneceğim. Daha önceden olduğu gibi burada *genel* demekle katlı noktaların, yalnızca “iki teğeti farklı çifte noktalar” olduklarını kastediyoruz. *İşaretli* derken de çifte noktalardan birini “başlangıç” noktası olarak seçtiğimizi ve diğer çifte noktaların 1'den n 'ye numaralandığını söylemiş oluyoruz.

Düzlem ve eğrimiz yönlü olduğu için her bir çifte nokta bir rüzgar gülü betimler: nokta çevresinde küçük bir çemberle dört kesişim noktası ana yönlerle etiketlenebilir.

İşaretli başlangıç noktasını bir evirtimle sonsuza gönderirsek yönlü iki *uzun eğriden* oluşmuş bir resim elde ederiz; bu $\gamma_m, \gamma_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (mavi ve kırmızı) uzun eğrileri şu özelliklere sahiptir.

- Mavi (ya da kırmızı) eğri γ_m (ya da γ_k) Güneyden Doğuya (ya da Batıdan Kuzeye) gider. Daha dikkatle söylersek, t 'nin büyük negatif değerleri için $\gamma_m(t)$ it 'ye, büyük pozitif değerleri içinse t 'ye eşittir (γ_k için sırasıyla t ve it).



- γ_m ve γ_k daldırılmış eğrilerdir; birleşimleri olan eğrinin katlı noktaları yalnızca $1, \dots, n$ olarak numaralanmış çaprazlama çifte noktalardır.

Düzlemde yönü koruyan difeomorfilerle değiştirebilme koşuluyla, n adet çifte noktası olan ve yukarıdaki özellikleri sağlayan eğri çiftlerinin kümesini Γ_n diye gösterelim.

Γ_n 'lerin birleşimi üstünde doğal bir operad yapısı vardır.

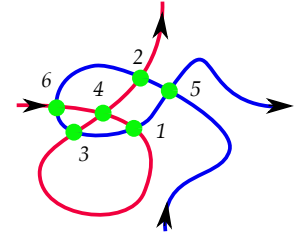
Yukardaki gibi n adet numaralı çifte noktası olan mavi-kırmızı bir eğri çifti (γ_m, γ_k) alalım.

Ardından $(\gamma_{m,i}, \gamma_{k,i})$ ($i = 1, \dots, n$) diye n adet mavi-kırmızı eğri çifti seçelim; bunların sırasıyla k_1, k_2, \dots, k_n adet çifte noktası olsun. (γ_b, γ_r) 'nin çifte noktalarının çevresinden küçük daireler oyun. Numarası i olan daireye, ana yönleri koruyarak $(\gamma_{m,i}, \gamma_{k,i})$ eğrisini oturtmak istiyoruz... ama bu olanaksız. Bir daire oyduğumuzda mavi eğriler Güneyden Kuzeye, kırmızı eğriler Batıdan Doğuya gidiyor; bu da oturtmak istediğimiz mavi ve kırmızı $(\gamma_{m,i}, \gamma_{k,i})$ eğrilerinin Güney-Doğu ve Batı-Kuzey düzeniyle tutarlı değil. Bu sorunun etrafından dolaşmak kolay. $(\gamma_{m,i}, \gamma_{k,i})$ 'leri oturtmadan önce Kuzeyle Doğunun yerini değiştiren yönlü yaylar içeren standart bir halkayı oraya oturtmak yetiyor.

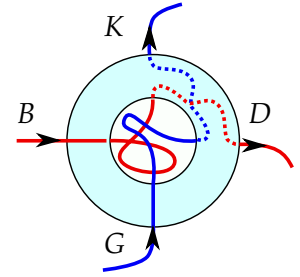
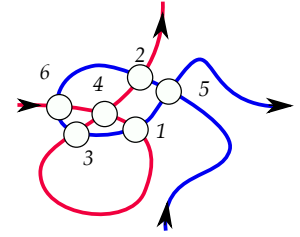
Bu kes-yapıştır işleminin sonucunda çifte noktalarının sayısı $k_1 + \dots + k_n$ olan bir eğri çifti elde ederiz.

Bu işleme (*simetrik*) *Gauss operadı* denir. Bir üreteç kümesi ve üreteçler arasında ilişkiler bulabilir misiniz?

Bu bölümü geniş bir açılımla bitirmek için Vasiliev'in düğüm sabitlerine olağanüstü ve anlaşılabilir bir giriş olan şu kitabı¹⁶⁰ öneririm. Vasiliev'in düğüm sabitlerinde, kiriş diyagramları can alıcı bir görev üstlenmektedir.



Γ_6 'nın bir elemanı.



¹⁶⁰ S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vasiliev knot invariants*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.



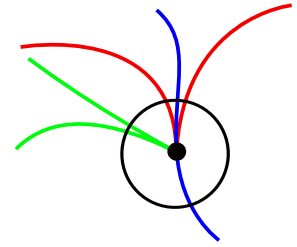
Analitik giriş diyagramları: bir algoritma

Bu bölümde hedeflerimizden birine ulaşıyoruz: düzlemsel gerçek analitik bir eğrinin bir tekil noktasının komşuluğunda ortaya çıkan giriş diyagramlarının algoritmik bir tarifi. . .

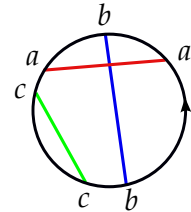
Hatırlayalım: böyle bir eğri tekil nokta çevresinde küçük bir çemberi çift sayıda noktada keser; bu noktalar çift çifttir; her bir çift gerçek bir dala karşılık gelir.

Bu yapı, her harfin tam olarak iki kez görüldüğü $2n$ uzunluğunda döngüsel bir sözcük olarak düşünülebilir. (Burada harflerin adı önemsizdir.) Daha titiz (ve kesin) olmak istersek, döngüsel permütasyonlarla eşleniklerini aynı tutma kaydıyla, $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ üzerinde sabit noktası olmayan ve karesi birim olan gönderimleri konu ediyoruz esasen. Bir çembere n tane giriş çizmek de aynı şeyi tarif eder.

Bu $2n$ uzunluğundaki *kiriş diyagramlarının* toplam sayısı birçok makalede çalışılmıştır. Örneğin düğüm kuramında güçlü kökleri olan şu çalışmaya¹⁶¹ bakın. Döngüsel sözcükler yerine $2n$ uzunluğunda, her harfin tam iki kez görüldüğü ve harflerin adlarının önemsiz olduğu standart (döngüsel olmayan) sözcükleri araştır-saydık işimiz kolay olurdu. Sözcüğün ilk harfini yazın, ilk harfin özdeşi diğer harf için geriye kalan $2n - 1$ boş yerden birini seçin, ardından ikinci harfi ilk uygun boş yere yazın, özdeşi diğer harf için geriye kalan $2n - 3$ yerden birini seçin vs. Dolayısıyla bu sözcüklerin toplam sayısı $(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 1$ olur. Bu sayılar kimi zaman *çifte faktöriyel* diye adlandırılır ve $(2n - 1)!!$ olarak gösterilir.



Üç dallı bir eğri.



abaccb

Bazen "kiriş diyagramı"nda "kiriş" sözcüğünü kaldırıyorum.

¹⁶¹ A. Stoimenow. [On the number of chord diagrams.](#) *Discrete Math.*, 218(1-3):209–233, 2000.

Kombinatorik özelliklerinin bir sunumu için bakınız¹⁶².

Döngüsel permütasyonları da hesaba katmak için insan $(2n - 1)!!$ 'i $2n$ 'ye bölmek istiyor ama kimi sözcüklerin simetrisi var. Dolayısıyla kombinatorik hesabın daha kurnazca yapılması gerek. Yine de bu gözlemlerden anlıyoruz ki $2n$ uzunluğundaki giriş diyagramlarının sayısı n cinsinden süper-üssel artıyor.

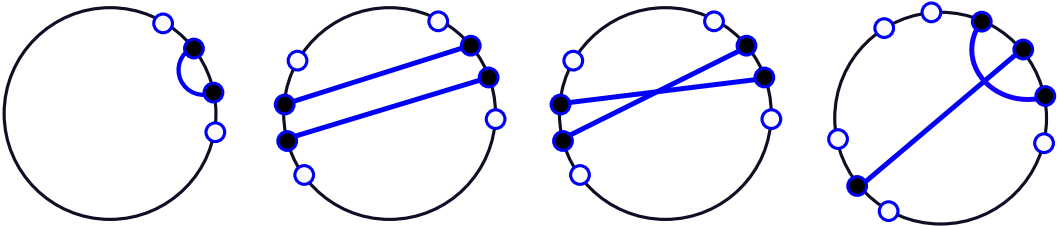
Kiriş diyagramlarının çok ufak bir kısmının *analitik* olduğunu, yani analitik düzlemsel bir eğrinin tekilliğinden geldiğini göreceğiz.

Bir gerek koşul

Kitabın ilk bölümünde ayrışabilen herhangi bir permütasyon için ardışık imgelere sahip *ardışık* iki sayının var olduğunu gösterdiğimizizi hatırlayın. Bir permütasyonun ayrışabilip ayrışamamasına karar veren algoritmayı kurmamıza olanak veren kilit noktayı bu. Şimdi analitik giriş diyagramları için de benzer bir özellik kanıtlayacağım.

Eğer bir diyagramda ardışık iki nokta aşağıda soldaki resimdeki gibi bir girişle birleşiyorsa böyle bir girişe *münferit* diyeceğim. Eğer iki giriş ikinci (ya da üçüncü) resimdeki gibilerse, yani karşılık gelen a, b harfleri döngüsel sözcükte $\dots ab \dots ba \dots$ (ya da $\dots ab \dots ab \dots$) şeklinde görünüyorsa, bu girişlere *paralel* (ya da *antiparalel*) denecek. Son olarak, dördüncü resimdeki gibi iki giriş bir *yaba* ($\dots a \dots bab \dots$) oluşturuyor denecek.

Temel lemma ☺. *Analitik bir giriş diyagramı ya bir münferit giriş ya bir paralel veya antiparalel giriş çifti ya da bir yaba içerir.*



¹⁶² D. Callan. [A combinatorial survey of identities for the double factorial](#). 2009.

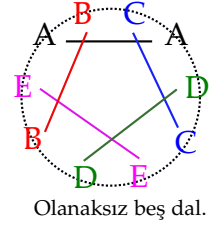
Dikkat! $(2n - 1)!!$ çift faktöriyelidir ne faktöriyelidir ne faktöriyelin faktöriyelidir ne de ünlem işaretidir!

Stirling formülünü kullanarak n sonsuza giderken $(2n - 1)!!$ 'in $\sqrt{2} \left(\frac{2}{e}\right)^n e^{n \log n}$ ifadesine denk olduğunu kanıtlayın. Bu yüzden $(2n - 1)!!$ süper-üssel büyüyor. Ama daha hızlı büyümüyor: örneğin bu ifade, herhangi $\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 1$ için $C\lambda^{n^{1+\varepsilon}}$ ifadesinden daha küçük.

© Kimi teoremler ve lemmalar o kadar ünlüdürler ki "Teorem A, B" (Cartan) veya "Temel lemma" (Ngo) gibi laflar kullanmak adeta yasaktır.

Önsözde ifade ettiğimiz teoremin buradan hemen çıkar.

Teorem. *Beş daldan oluşmuş ve dalları küçük bir çemberi yandaki resimdeki gibi kesen düzlemsel, tekil bir analitik eğri yoktur.* □



Haydi patlatalım



Harika bir *Quipu*: İnkalar tarafından istatistiksel veriyi kaydetmek için kullanılmış, düğümlü iplerden oluşan bir araç... Patlatılmış bir izdüşümsel doğru gibi değil mi? (Centro Mallqui, Leymebamba, Peru)

©

Analitik (gerçek) düzlemsel bir eğrinin bir tekil noktaya başlayalım ve noktayı bir kez patlatalım. Sonuç bir Möbius şerididir; tekil noktaları şeridin kemerinde, yani istisnai bölindedir. Eğer işler yolunda giderse tekil nokta, muhtemelen daha basit, birkaç tekil noktaya ayrılır. Bunların hepsini de patlatalım. İlk patlatmanın ardından bölende halen tek bir tekil nokta varsa bile bu noktayı ikinci kez patlatarak devam edelim. Patlatma işlemini gerektiği kadar sürdürürelim. Bir süre sonra tekilliğin *çözüneceğini* biliyoruz. Bu da şu demek: baştaki eğrinin katı dönüşümü, istisnai bölene çaprazlama kesen n adet pürüzsüz analitik eğrinin ayrık birleşimidir.

Burada istisnai bölün, gerçek izdüşümsel doğruların bir birleşimidir; bunlar da birbirlerini çaprazlama kesen çemberlerden başka bir şey değildir. Köşeleri bu izdüşümsel doğrular olan

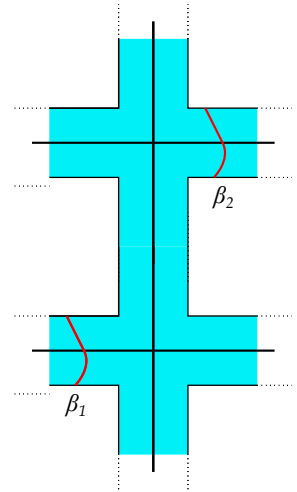
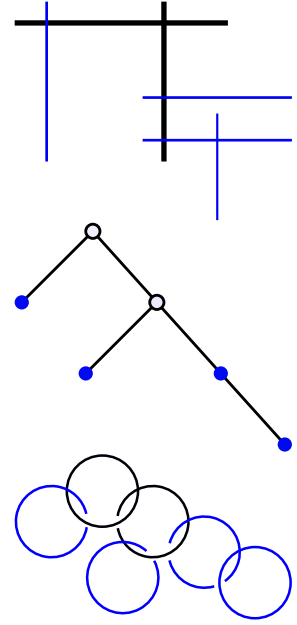
bir çizge düşünün; iki izdüşümsel doğru kesişiyorsa karşılık gelen köşeler bir kenarla birleşmiş olsun. Bu çizgenin bir ağaç olduğunu görmek tümevarımla kolay zira tekilliğin yok edilmesi için tümevarımsal sürecin her adımında ya istisnai bölenin pürüzsüz bir noktasını patlatıyoruz ya da iki izdüşümsel doğrunun kesişim noktasını. İlk durumda ağaca yeni bir yaprak aşılanıyor; ikinci durumdaysa bir kenar iki kenara ayrılıyor. İlk patlatmadan gelen ilk izdüşümsel doğru bu ağacın kökü olarak seçilebilir.

Hatta istisnai bölenin katı dönüşümü kesen parçalarını, *tekilliği yok eden* ağacın yaprakları olarak kabul edebiliriz. İstisnai bölenin n adet noktasını, gerekiyorsa birer kez daha patlatıp yeni izdüşümsel doğrular yaratarak sürecin sonunda her bir izdüşümsel doğrunun katı dönüşümün *en fazla* bir noktasını içermesini sağlamak elverişli olacak.

Toparlayalım. \mathbb{R}^2 'de başnokta çevresinde $F(x, y) = 0$ denklemiyle tarif edilmiş analitik bir \mathcal{C} eğrisi verildiğinde şu nesnelere inşa edebiliriz.

- Kenarı yönlü ve bağlantılı olan bir S yüzeyi.
- Birbirini çaprazlama ve en fazla bir noktada kesen birkaç çemberden oluşmuş bir istisnai bölün $E \subset S \dots$ Karşılık gelen çizge köklü bir ağaçtır. $E \subset S$ gömme fonksiyonu bir homotopi denkleğidir.
- S üzerinde bulunan ve E 'yi çaprazlama kesen *pürüzsüz* analitik β_1, \dots, β_n yaylarının ayrık birleşimi $\hat{\mathcal{C}} \dots E$ 'nin bağlantılı bir parçası ağacın bir yaprağı değilse $\hat{\mathcal{C}}$ ile kesişimi boştur; bir yaprağıysa kesişim en fazla bir noktadır. Ayrıca $\hat{\mathcal{C}}$ 'nin S 'nin kenarına çapraz olduğunu ve her β_i yayının kenarı iki noktada kestiğini varsayabiliriz.
- E 'yi başnoktaya söndüren bir $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu. . . Bu söndürme fonksiyonu $S \setminus E$ 'den delinmiş küçük bir daireye difeomorfidir ve $\hat{\mathcal{C}}$ 'yi tekil eğrimiz \mathcal{C}' 'ye çökertir.

S 'deki her bir ilmeğin ya yönü koruduğunu ya da ters çevirdiğini hatırlayın. Bir yüzeyde yer alan ve bir x noktasından yalnızca bir kez geçen kapalı, daldırılmış bir γ eğrisi alalım.



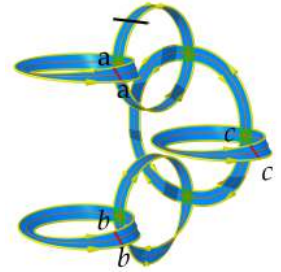
Yüzey x' 'te patlatıldığında γ' 'nin katı dönüşümünün (patlatılmış yüzeyde) kendisiyle $mod\ 2$ kesişim sayısı, γ' 'nin (ilk yüzeyde) kendisiyle kesişiminden 1 fazladır. Tümevarımla inşada, bir izdüşümsel doğru istisnai bölende ilk kez görüldüğünde bir Möbius şeridinin kemeri olacağından doğrunun kendisiyle kesişimi 1 olur. Daha sonra doğrunun bazı noktaları patlatılabilir. Bu patlatmalar, bölenin bir parçasının davranışını bir yönü-koruyan, bir tersçeviren diye sırayla değiştirir. Bir önceki sayfanın kenarındaki resimler (altı adet doğru, altı boğumlu bir ağaç ve altı adet çember), kolyelere ilişkin bölümde incelenen örneğin aynısıdır; altı patlatmayla elde edilmiştir. Resimlerde Möbius şeridine karşılık gelen parçaları maviyle gösterdim.

E' 'nin parçalarından bazıları tekilliği yok edilmiş \hat{C} eğrisini keserler, yani tekilliği yok eden ağacın bazı yapraklarını tanımlarlar. O yapraklara *renkli* diyelim. Bazı yaprakların renkli olmayabileceğini gözlemleyin.

E' 'nin her parçası için bir yön seçersek karşılık gelen ağaçta her bir boğumun yavrularının doğrusal sıralandığını ve ağacın düzlemsel olduğunu da görelim. Yönlerin ters çevrilmesi bu sıralamayı da tersine çevirir.

Bir örnek

Yandaki kolyeye bakın. Bu nesneyi Möbius kolyeleri bölümünde de tartışmıştık. Altı kez patlatma, ikisi yönlü dördü yönsüz, altı şerit üretir. İstisnai bölün, altı şeridin altı kemerinden oluşur. Tekilliği yok edilmiş eğri, a, b, c diye etiketlediğimiz üç kırmızı yaydan oluşur; bunlardan her biri S' 'nin kenarını iki noktada keser. En yukarda y ekseninin katı dönüşümünü siyah olarak görüyoruz. S' 'nin kenarını dolanırken karşılık gelen analitik giriş diyagramını okuyabiliriz. Oku izleyerek $abacbc$ sözcüğünü okuyoruz. Okları izlemenin kolay olmadığını kabul ediyorum!



Temel lemmanın kanıtı

İlk basit gözlemimiz, bir giriş silme işleminin bir analitik diyagramı başka bir analitik diyagrama dönüştürdüğü. Bu işlem, bir

dalı silmeye karşılık geliyor.

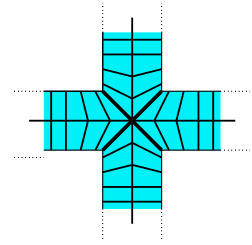
Analitik düzlemsel bir eğrinin bir tekilliğine karşılık gelen bir w giriş diyagramıyla başlayalım. Daha önceki gibi tekilliği yok eden bir ağaç alalım. S yüzeyinden E istisnai bölene üzerine, homotopi denkliği olan bir π izdüşümü vardır. Bir $x \in E$ noktası eğer π 'nin olağan noktasıysa $\pi^{-1}(x)$ lifi, S 'nin iki kenar noktasını birleştiren bir yaydır; x iki çemberin kesişim noktasıysa x 'in lifi bir çarpıdır.

Ağacın herhangi bir L boğumunu, yani E 'yi oluşturan izdüşümsel doğrulardan birini alalım. L 'den köke giden tek bir boğumlar silsilesi vardır. Resimdeki gibi S 'yi ayrık iki yay boyunca keserek S 'de L 'yle kökün bağınyı koparalım. Bu iki yayın dört uç noktası S 'nin kenarı olan çemberi dört aralığa ayırır. Bunlardan (kırmızı renkli olan) ikisi ağaçta " L 'de veya daha aşağıda olanlara" karşılık gelir. Dolayısıyla S 'nin kenarını dolanıp giriş diyagramını okuyunca iki ayrık harf aralığı buluruz; bunlar L 'nin aşağısındadır ve bunların birleşimi, harfleri ikizlerine gönderen fonksiyon altında sabittir. L 'nin aşağısında renkli yaprak yoksa bu aralıklar pekala boş da olabilir; ama eğer L 'nin aşağısında renkli yaprak varsa bu aralıklardan en az biri boş değildir, diğeri hala boş olabilir.

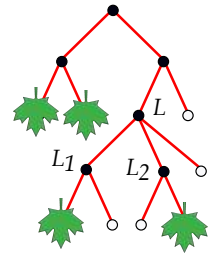
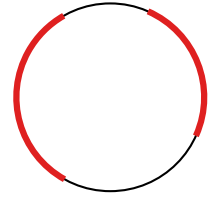
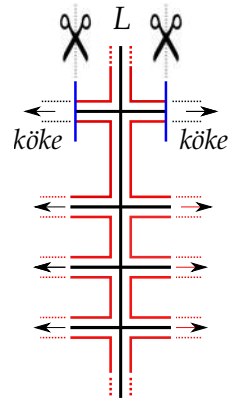
Özetle, ağacın her L boğumu, w 'nun bir altdiyagramı olan bir $w(L)$ giriş diyagramı tanımlar; üstelik $w(L)$ "bağlantılıdır" yani harfleri w 'da bir ya da iki aralık tanımlarlar.

Köklü bir ağacı, bir soy ağacı olarak düşünün; kök, soyun kurucu anası olsun. Her boğumun birkaç dölü vardır, bunlardan bazıları renkli yapraklardır. Dölleri arasında en az iki renkli yaprak olanlar aile bireyleri içinde en gençlerden biri L olsun. L 'nin yavruları arasında en az bir renkli dölü olanların (L 'deki sıralamaya göre) listesi L_1, \dots, L_k olsun. Öncelikle $k \geq 2$ olur çünkü aksi durumda L 'nin yavrularından birinin en az iki renkli dölü olurdu. Aynı nedenden ötürü her L_i 'nin tek bir renkli dölü vardır.

Şimdi S 'yi bir sonraki sayfanın yanındaki gibi, L_1 ve L_2 'yi kökten ve diğer renkli yapraklardan ayıracak biçimde kesin. Eskisi gibi S 'nin kenarında, birleşimleri ilk diyagramdan tam tamına dört nokta içeren, iki (yeşil) aralık elde ederiz; bu noktalar iki

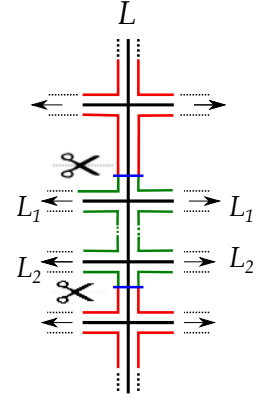
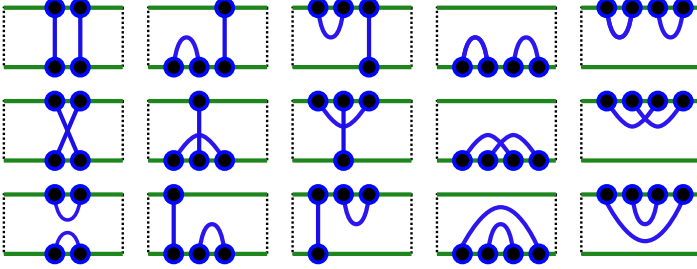


π 'nin lifleri... S 'den E bölgesine giden π 'yle S 'den daireye giden Ψ 'yi karıştırmayın; Ψ , E 'yi bir noktaya söndürüyor.



Yeşiller renkli yapraklar!

kirişe karşılık gelir. İki aralıkta iki kirişi düzenlemenin şöyle oniki yolu var:



Her durumda ya bir münferit giriş var, ya bir yaba, ya da bir paralel veya antiparalel giriş çifti.

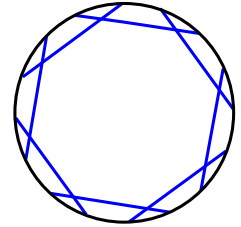
Temel lemmanın kanıtı böylece biter. \square

Analitik olmayan daha fazla diyagram

Bir analitik giriş diyagramından bazı harflerin silinmesiyle yeni bir analitik diyagramın ürediğini gözlemlemiştik. Analitik olmadığı halde bir tek girişinin silinmesiyle analitik olan bir diyagrama *basitçe analitik değil* diyelim. Bir giriş diyagramının analitik olmasıyla *basitçe analitik olmayan bir diyagramı* içermemesinin denk durumlar olduğu bariz. Şimdi, bir permütasyonun ayrışabilmesi, $(2, 4, 1, 3)$ Kontsevich permütasyonunu ya da tersi $(3, 1, 4, 2)$ permütasyonunu *içermemesi* demektir. Dolayısıyla basitçe ayrışabilir olmayan yalnızca iki adet permütasyon vardır. Giriş diyagramlar söz konusuysen durum biraz daha karışık.

Teorem. *Basitçe analitik olmayan giriş diyagramlarının sayısı sonsuzdur.*

Şimdi C_n ($n \geq 5$) diye göstereceğim bir örnek vereyim. Çemberin üzerinde doğal sıralamasıyla $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ 'nin $2n$ adet noktasını düşünelim. Giriş diyagramını $2k$ ile $2k+3$ ($k = 1, \dots, n$) noktalarını birleştirerek inşa edelim. $n = 5$ durumunda beş girişli bu diyagram bizim eski analitik olmayan diyagram örneğimizdir. Aynı nedenden ötürü, $n \geq 5$ için hiçbir C_n diyagramı da analitik



değildir. Bir harfi silindiğinde kalan diyagramın analitik olduğunu göstermeliyiz hala. Bunun için de *analitiklik için bir yeter koşul* lazım. Bir kiriş diyagramının analitik olup olmadığına karar veren basit bir algoritma işimizi görecektir.

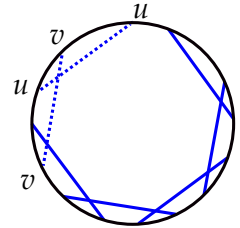
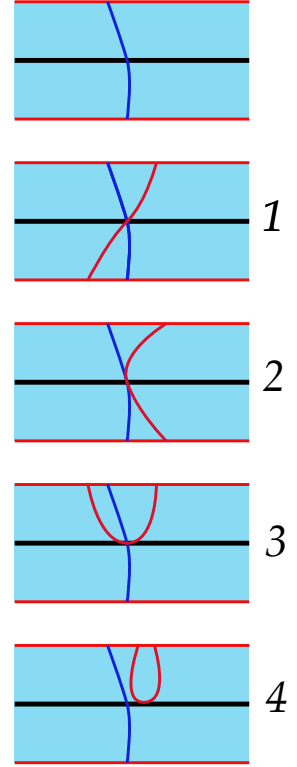
Teorem. *Şu algoritma bir kiriş diyagramının analitik olup olmadığına karar verir:*

1. Ne münferit bir kiriş, ne bir yaba ne de bir paralel ya da antiparalel kiriş çifti yoksa diyagram analitik değildir.
2. Eğer münferit bir kiriş varsa, bunu silerek devam edin. Bir yaba varsa "küçük kirişi" silin, sapına dokunmayın. Bir paralel ya da antiparalel kiriş çifti varsa bu kirişlerden birini silerek devam edin.
3. En sonunda boş bir diyagram elde ederseniz ilk diyagram analiktir.

Kanıt kolay. Göstermemiz gereken, \bar{w} diyagramı w 'dan algoritmadaki gibi bir kiriş silinerek elde edilmişse ve \bar{w} analitikse w 'nun da analitik olduğu. Bunun tersini kanıtlamak kolay: w analitikse, bir dal silmeye karşılık geldiği için \bar{w} da analiktir. Şimdi yeni bir dal eklemeliyiz.

Bir S yüzeyi ve tekil bir noktası için bir tekilliği yok etme süreci seçelim. Bir kirişe karşılık, kenardaki iki noktayı birleştiren, bir x noktasında bölene çaprazlama kesen, (yanda maviyle çizilmiş) pürüzsüz bir γ yayı gelir. S yüzeyinde γ 'ya çok yakın, yine bölene ve aynı zamanda γ 'ya da çaprazlama, 1/'deki gibi yeni bir analitik pürüzsüz (kırmızı) γ' eğrisi ekleyelim. S 'nin söndürülmesi bir fazla dala sahip yeni bir tekil nokta üretir. Yeni diyagram, kenarın yönüne bağlı olarak, ilk kirişe paralel ya da antiparalel yeni bir kirişe sahiptir elbette. γ' eğrisini 2/'deki gibi γ 'ya x 'te kuadratik olarak teğet seçerek diğer paralel ya da antiparalel durumu elde ederiz. Sapı verilmiş bir yaba yaratmak isterseniz, 3/'teki gibi, γ 'ya yakın ve bölene kuadratik olarak teğet, pürüzsüz bir γ' eğrisini eklemek yeterlidir. Son olarak, bir harfin hemen ardına münferit bir kiriş eklemek için 4/'teki gibi yapmak yeterlidir. \square

Algoritmamızı biraz önceki C_n ($n \geq 5$) diyagramında deneyelim. Bir kirişi silince döngüsel olmayan, $n - 1$ kirişlik bir zincir elde ederiz. İlk iki u, v kirişi bir yaba oluşturur; öyleyse birinci



kirişi silerek devam edebilir ve böyle böyle sonunda tek bir giriş elde ederiz. Demek ki bu diyagram analitiktir. Dolayısıyla basitçe analitik olan sonsuz adet diyagram vardır.

Bilgisayar kullanarak

Analitik giriş diyagramlarını saymak için küçük n değerlerini denemek üzere bilgisayar kullanalım. Bunu yapmak kolay. Öncelikle, her harfi tam iki kez görünen, $2n$ uzunluğunda olası tüm sözcüklerin bir listesini yapıyoruz. Buradaki tek ince iş, söz konusu sözcüklerin döngüsel olduğunu hesaba katmak. $n \leq 7$ için sonuç şöyle:

n	2	3	4	5	6	7
Sözcükler	3	15	105	945	10395	135135
Kiriş diyagramları	2	5	18	105	902	9749
Simetriye göre	2	5	17	79	554	5283

Bu tabloda,

– *Sözcükler* derken “içinde her harfin tam iki kez görüldüğü $2n$ uzunluğundaki sözcükler” kastediliyor. Bu sözcüklerin sayısı $2n - 1$ 'in çifte faktoriyelidir.

– *Kiriş diyagramları*, tanımladığımız gibi, döngüsel permütasyonlar kadar değişme serbestliğiyle belirlenmiştir.

– Bir doğruya göre simetri altında bir girişin imgesi yine bir diyagramdır; aynı diyagram olabilir de olmayabilir de... “Simetriye göre” satırı, bu dihedral simetrilerle birbirine gidenleri bir tutarak sözcükleri sayıyor.

Şimdi *analitik* diyagramları sayabiliriz. Biraz önce anlattığımız algoritmayı kullanarak bunu yapmak temelde zor olmamalı.

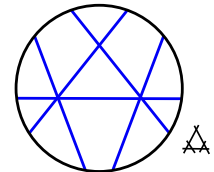
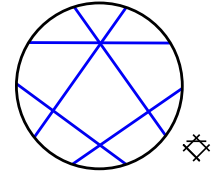
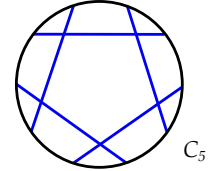
Sonuç şöyle:

n	2	3	4	5	6	7
Analitik diyagramlar	2	5	18	102	817	7641
Simetriye göre	2	5	17	76	499	4132

Demek ki $n \leq 4$ için tüm diyagramlar analitikmiş.

5 kirlili 105 diyagram içinde yalnızca yandaki 3 örnek analitik değil.

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (*Tamsayı Dizilerin İnternet Ansiklopedisi*), [A007769](#), [A054499](#), [A279207](#), [A279208](#). İkinci tablodaki iki diziyi Neil Sloane bu kitabın ilk haline dayanarak ekledi.



Basitçe analitik olmayan 5 kirlili 3 adet giriş diyagramı.

İlk diyagramı C_5 adıyla halihazırda tanıyoruz. Diğerlerini \diamond ve \triangle olarak göstereyim. İlk diyagramı tahmin etmek benim için zor değildi ama itiraf ediyorum: diğerlerini elle bulamadım, bilgisayarla buldum.

6 kirişli 902 diyagramın 85 tanesi analitik değil. Ancak bir çoğunun analitik olmaması, analitik olmayan bir altdiyagram içermelerinden kaynaklanıyor. 6 kirişli diyagramlardan yalnızca ikisi basitçe analitik değil; yani kendileri analitik olmamakla birlikte tüm altdiyagramları analitik.

Bunlardan ilkinin, basit diyagramların oluşturduğu sonsuz C_n ailesinin bir üyesi olan C_6 olduğunu fark edin. C_6 , her (mod 12) çift k 'nin $k + 3$ 'e (mod 12) birleştirildiği $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 'ye karşılık gelir. İkinci diyagram ise $\diamond\diamond$ ile gösterilecek.

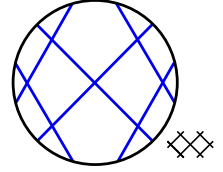
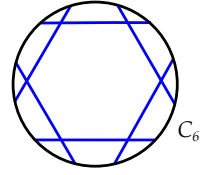
7 kirişli 9749 diyagramdan, 2108 tanesi analitik değil. Basitçe analitik olmayanlara bir örnek C_7 .

Bir sonraki bölümde bilgisayarımın, basitçe analitik olmayanların tamamını bulduğunu göstereceğim.

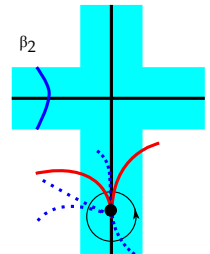
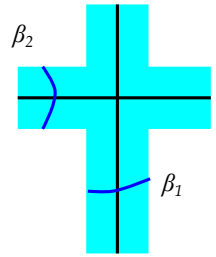
İşaretli kiriş diyagramları

Bu bölümü daha genel bir bağlama oturtarak sonuçlandırmak için perdelerin ardında gizli bir operad yapısını tarif etmek istiyorum. Analitik kiriş diyagramlarını biraz güçlendiren bir kavramı tanıtarak başlamak elverişli olacak.

Algoritmamızın bir diyagramın analitik olup olmadığına gerçekten karar verdiğini kanıtlarken kilit nokta yeni bir dal ekleme olanağıydı. Oysa şimdi anlatacağım gibi, daha karışık tekillikler de eklenebilirdi. Daha önce olduğu gibi bir C eğrisi için bir tekilliği yok etme süreci alalım. Elimizde bir S yüzeyi, bir E bölüni ve E 'yi sonlu adet noktada, p_1, \dots, p_n 'de, çaprazlama kesen bir pürüzsüz β_1, \dots, β_n eğriler topluluğu var; burada n gerçek dalların sayısı. Bu noktalardan birini, diyelim p_1 'i alalım. Şimdi n_1 adet gerçek dalı olan başka bir tekil C_1 eğrisi seçelim; bu eğrinin y eksenini içermediğini kabul edelim. β_1 'i silip yerine S yüzeyine C_1 'in bir kopyasını öyle koyalım ki C_1 'e ait y eksenini E bölününe ve C_1 'in tekil noktası p_1 'e otursun. Ardından C_1 'in o kopyasıyla β_2, \dots, β_n 'lerin birleşimini topluca söndürebiliriz. Sonuç yeni bir



6 kirişlilerden basitçe analitik olmayan 2 adet kiriş diyagramı.



tekil noktadır, $n + n_1 - 1$ dalı vardır, C' 'nin dallarından biri C_1 'in bir kopyasıyla yer değiştirmiştir.

Karşılık gelen giriş diyagramlarında bu çeşit işlemlerin etkilerini inceleyelim. C_1 'e karşılık gelen diyagramda $2n_1$ uzunluktaki sözcüğü y ekseninin *Sol* ve *Sağ* diye iki parçaya ayırdığını görüyoruz. $2(n + n_1 - 1)$ harfli yeni giriş diyagramında eski $2n$ harfli diyagramdaki iki özdeş harf yerine, iki aralık, *Sol* ve *Sağ*, gelmiş.

Bu süreçte *Sol* ve *Sağ*'daki harflerin sıralarının ters olabileceği konusunda da dikkatli olmamız gerekir. Zira S' 'nin yönlü kenarıyla β_1 'in iki kesişimi farklı işaretlerde olabilir. Üstelik S yönlü olmadığından ve E' 'ye yön verilmemiş olduğundan C_1 , S' 'nin içine dört biçimde konabilir.

Başka tekil eğriler C_2, \dots, C_n kullanarak C' 'nin diğer dallarına aynı işlemi uygulayabiliriz elbette.

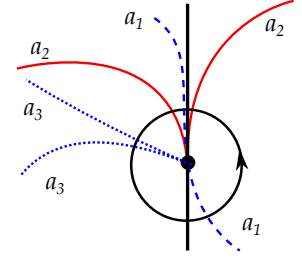
Tüm bu gözlemler bizi şu tanıma götürüyor.

Tanım. Karenin karşılıklı iki kenarı $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ üstünde (kenarları, yönü koruyan homeomorfileriyle değiştirebilmek koşuluyla) verilmiş $2n$ adet $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$ noktasına işaretli bir giriş diyagramı denir.

Bu diyagramların, standart diyagramlara göre fazladan özelliklerine bakalım. İşaretli diyagramların bir solu ve bir sağı vardır. Ayrıca her a_i kirişi 1'den n 'ye bir i sayısı ile işaretlenmiş ve a_i^{-1} 'den a_i^{+1} 'e yön verilmiştir.

Analitik olan, yani y eksenini içermeyen, $F(x, y) = 0$ analitik eğrilerinden gelen işaretli giriş diyagramların kümesini \mathcal{AMC} diye gösterebiliriz. İşaretli bir diyagramın analitikliğinin ne kirişlerin yönlerine ne de işaretlere bağlı olmadığını fark edin.

Okurun \mathcal{AMC} üzerindeki operad yapısını artık tahmin ettiğini sanıyorum. n kirişi olan işaretli, analitik bir w diyagramı alalım. Sırasıyla k_1, \dots, k_n adet kirişe sahip olan işaretli, analitik n adet w_1, \dots, w_n kiriş diyagramı verilmiş olsun. w 'nun (w_1, \dots, w_n) üzerine etkisini şöyle tanımlayalım. w diyagramında her a_i kirişini kalınlaştırarak dikdörtgenler oluşturun. a_i^{-1} 'leri ve a_i^{+1} 'leri bu dikdörtgenlerin sol ve sağ kenarları olarak kullanın. Sonra w_1, \dots, w_n diyagramlarını, işaretlere ve yönlere uyarak bu dikdörtgenlere yerleştirin. Kirişleri sözlük sıralamasına göre 1'den $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 'ye kadar yeniden adlandırın. Bu işlem, biraz



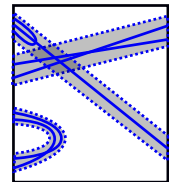
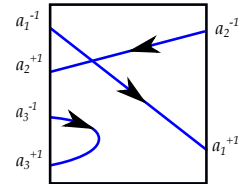
$$Sağ = a_1 a_2, Sol = a_1 a_2 a_3 a_3$$

Sol ya da *Sağ* boş olabilir.

$F(x, y) = 0$ denkleminde (x, y) 'nin yerine $(-x, y)$ veya $(x, -y)$ veya (x, xy) yazabiliriz.

$$(x, y) \mapsto (x, xy)$$

dönüşümü düşey doğruları kendilerine götürür; $x = 0$ eksenini başnoktaya çökertirken $x < 0$ için düşey doğruların yönlerini ters çevirir. Bu bir söndürme fonksiyonu olduğundan şartıcı bir durum yok. Bu dönüşümün karesi de $(x \neq 0)$ iken düşey doğruların yönünü korur. İşaretler ve yönler, her bir kirişe hangi işaretli diyagramın nasıl ekleneceğine dair bilgiyi sağlama işini görüyor.



önce açıkladığımız analitik eğrilerin eklenmesi işlemine karşılık geldiğinden sonuç yeni bir işaretli, analitik giriş diyagramıdır.

Böylece AMC , doğal bir operad yapısına sahip olur. Tam söylemek adına şunu da saptayalım: simetri gruplarının, girişlerin işaretlerini karıştıran doğal etkisi, bu operadın simetrik olduğunu da gösterir.

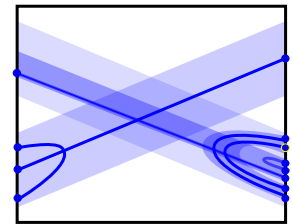
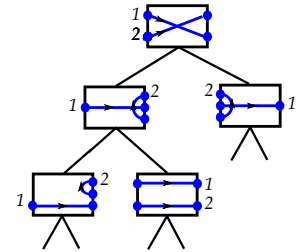
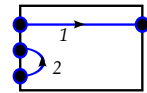
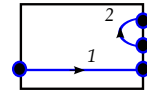
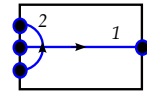
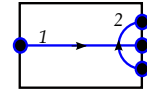
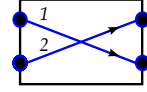
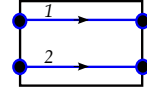
Kiriş diyagramlarının sayısını sınırlayalım

n girişe sahip analitik diyagramların sayısı A_n 'ye ilişkin kesin bir bilgiye sahip olmak harika olurdu. Örneğin $\sum A_n t^n$ üreteç serisi için açık bir formül, A_n 'nin üssel büyüme hızını tam olarak belirlerdi. Ne yazık ki bu seriyi hesaplayamadım ☹. Bu bölümde temel lemmanın en azından makul bir sınır verdiğini göstereceğim.

İkili, köklü düzlemsel sonlu bir ağaç alın. Kökü de dahil olmak üzere her iç boğumuna, yanda gösterilen iki girişli işaretli altı diyagram örneğinden birini atayın. Kardeşlerin diyagramlarını ananın diyagramına yerleştire yerleştire ilerleyerek sonunda bir işaretli analitik diyagram, ve hatta etiketleri, yönleri ve karenin kenarlarını da unutarak bir analitik diyagram elde edilir.

n girişli tüm analitik diyagramları bu tarifile üretilebileceğimi iddia ediyorum. $n = 2$ için bu doğru zira iki girişli iki diyagram da (bağlı olan ve olmayan) altı örnekte işaretler unutulduğunda beliriveriyorlar. Şimdi $n + 1$ girişli analitik bir w diyagramı alalım ve temel lemmayı çalıştıralım. Diyagramda $\dots aa\dots$, $\dots ab\dots ba\dots$, $\dots ab\dots ab\dots$ ya da $\dots b\dots aba\dots$ buluruz. aa buluyorsak, döngüsel sırada a 'dan önce gelen harfe b diyelim. Algoritmamız a 'yı silerek n girişli yeni bir analitik diyagram \bar{w} üretir; buna da tümevarım uygulayabiliriz. Demek oluyor ki \bar{w} diyagramına işaretler ve yönler "giydirilerek" yukardaki gibi bir ikili ağacın ürünü haline getirilebilir. Bizim w diyagramı da \bar{w} diyagramına bir ya da iki giriş eklenerek elde edilir. Altı örneğimizi operaddaki ekleme işleminde kullanılması, bu hamleyi yapmaya yetiyor; kontrol etmek kolay. Dolayısıyla w , $n + 1$ yapraklı bir ikili ağaçtan aynı tarifile inşa edilir.

Yaprak adedi n olan ikili, köklü bir ağacın (kök de dahil) $n - 1$



iç noktası olduğundan iç noktalarında 6^{n-1} adet olası işaretleme bulunur. n yapraklı ikili düzlemsel ağaçların sayısı $(n-1)$ 'inci Catalan sayısıdır. Böylece şu kaba tahmini elde ederiz.

Teorem. n kirişli analitik giriş diyagramlarının sayısı A_n , $(n-1)$ 'inci Catalan sayısı C_{n-1} 'in 6^{n-1} katından küçüktür.

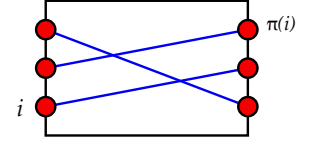
Bu arada, n sonsuza giderken $\frac{1}{n} \log C_n$ ifadesinin $\log 4$ 'e yakınsadığını hatırlayın. Dolayısıyla

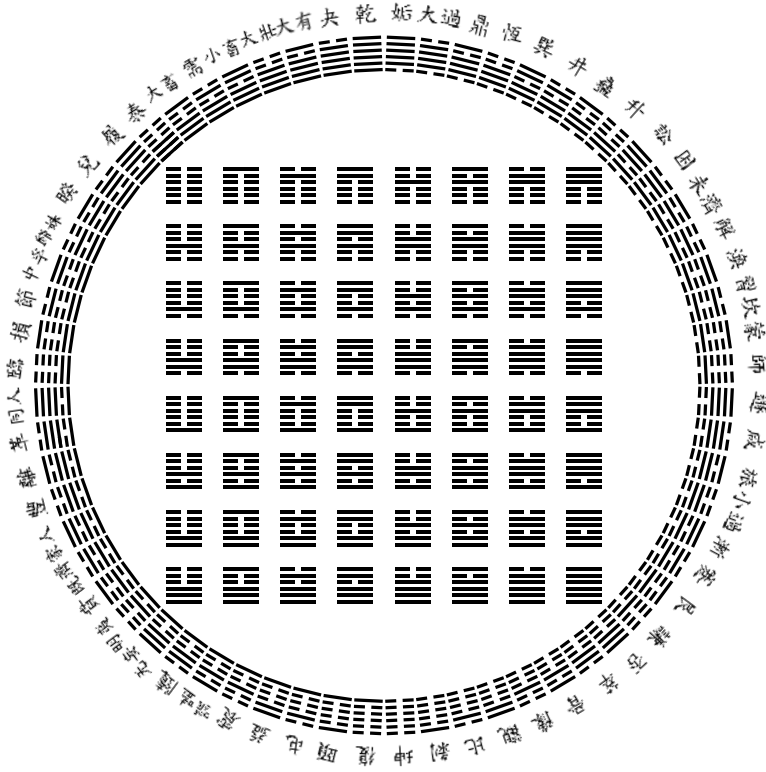
$$\limsup \frac{1}{n} \log A_n \leq \log(24)$$

buluruz.

Son olarak, n harfin herhangi bir permütasyonu, girişleri karenin iki kenarındaki noktaları birleştiren n kirişli bir diyagram olarak görülebilir. Ayrışabilen permütasyonlar da işaretli analitik diyagramları üretir. Ayrışabilen permütasyonları daha önceden saymış olduğumuz için A_n 'nin artışına ilişkin bir altsınır elde etmiş oluruz:

$$\liminf \frac{1}{n} \log A_n \geq \log(3 + 2\sqrt{2}).$$





Tek ya da iki parça yatay çubukların altı tanesinin üstüste çizilmesiyle oluşan Çin altılı-dizimleri (hegzagramları) $2^6 = 64$ adettir. Bu şekiller, 2500 yıl önce yazılmış ve genellikle kehanet için kullanılan *Yi Çing*'de — Değişimler Kitabı — bulunmaktadır. Özgün hallerinde, İmparator Wen'e ithaf edilen gizemli bir sıralamaya konmuşlardı; bu sıralamanın sırrı halen uzmanlarca çözülmeyi bekliyor. Bin yıl önce Shao Yong bunları bir çemberde ve bir karede resimde görüldüğü gibi sıralamıştır. Bir çizvit olan Joachim Bouvet bu sıralamanın bir kopyasını 1701'de Leibniz'e gönderdi; Leibniz bu sıralamayı ikili açılımla açıkladı ve ikili düzende aritmetik konusunda ilk düzenli yorumlamayı kağıda geçirdi. Bu olay, batı bilimiyle doğu felsefesinin etkileşimine ilginç bir örnektir. Bu bölümün son kısmında *Yi Çing* üzerine biraz daha konuşacağım.

Analitik giriş diyagramları: binişme çizgeleri

RASTGELE GEZİNTİLERİN KEYİFLİ TARAFLARINDAN BİRİ sürprizlerle dolu olması. *Lyon'daki École Normale Supérieure'* de bir lisans öğrencisi olan Christopher-Lloyd Simon, bu kitabın ilk taslağını okumayı içtenlikle kabul etmişti. Bir önceki bölümün ilk halini okurken aklına tartışmayı giriş diyagramlarından ilgili *binişme çizgelerine* taşımak gibi parlak bir fikir gelmiş. Düzleme daldırılmış genel eğrilerle ilişkilendirilmiş Gauss sözcüklerini incelerken bu kavramla karşılaşmıştık. Bir giriş diyagramı verildiğinde, binişme çizgesinin köşeleri diyagramın girişleriydi; çizgenin kenarlarıysa başlı (yani kesişen) girişleri birleştiriyordu. Her çizge bir diyagramdan gelmeyeceği gibi birden çok diyagramdan da gelebilir. Yine de analitik diyagramlardan gelen binişme çizgeleri incelemek kolay oldu. Tatlının şerbetiyse o çizgelerin kırk yıl önce tamamen farklı bir bağlamda tanımlanmış ve çok iyi anlaşılmuş oluşuydu. Bu yeni bakış açısı sayesinde basitçe analitik olmayan giriş diyagramlarının tam bir listesini çıkaracağız.



Christopher-Lloyd Simon.

Ayrışabilen permütasyonlar, yeniden

Aşağıda konuşacaklarımıza temel olsun diye, çok daha basit bir durumu, ilk bölümlerde incelediğimiz polinom sıra değişimlerini (diğer adıyla ayrışabilen permütasyonları) tekrar konuşalım.

Şimdi π , $\{1, \dots, n\}$ kümesinin bir permütasyonu olsun. π ile ilişkilendirilen $G(\pi)$ permütasyon çizgesi, $\{1, \dots, n\}$ köşelerine

sahiptir; eğer π , (i, j) sıralamasını ters çeviriyorsa i ile j arasında bir kenar vardır. Bu, her iki kenarında da n harf bulunan işaretli bir kiriş diyagramına karşılık gelen binişme çizgesidir de aynı zamanda.

Eğer π bir polinom sıra değişimiye en azından ardışık iki tam sayının ardışık imgelere sahip olduğunu biliyoruz. Öyleyse bunlara karşılık gelen kirişlerden birini kesen bir kirişin diğeri de kesmesi gerektiğini söyleyebiliriz.

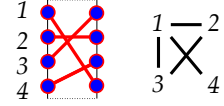
$G(\pi)$ çizgesinden baktığımızda bu gözlem şu tanımla geliyor. Bir çizgede eğer x ve y diye iki köşe (x veya y 'den başka) aynı komşulara sahipse x ve y 'ye *ikiz* denir. Aralarında bir kenarın var ya da yok olmasına göre bunlara *sahici ya da sahte ikizler* denir. Bir çizgede ikiz olan iki köşeyi tek bir köşe olarak yapıştırıp köşe sayısı bir az olan daha küçük bir çizge elde edilebilir.

O zaman π polinom sıra değişiminden gelen bir $G(\pi)$ çizgesi, ikiz olan en az iki köşe içerir; bunlar $\pi(i+1) = \pi(i) \pm 1$ eşitliğini sağlayan ardışık $i, i+1$ tamsayılarına karşılık gelirler. İkizleri birbirine yapıştırmak i ve $i+1$ elemanlarını yapıştırmaktan başka bir şey değildir. Polinom sıra değişimleri, tam da bu ardı ardına yapıştırma sürecinin en basit permütasyonla ($n=1$) noktalandığı durumlardır.

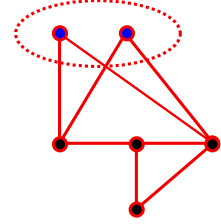
Tanım. Eğer sonlu bir çizge, ikizleri yapıştırarak ilerlendiğinde $n-1$ adımda tek köşeli basit çizgeye indirgenebiliyorsa bu çizgeye *tümçizge* denir.

Önerme. Bir permütasyonun polinom sıra değişimi olması için gerek ve yeter koşul permütasyon çizgesinin tümçizge olmasıdır.

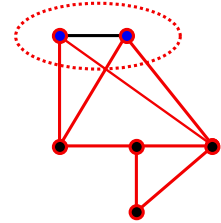
Bir polinom sıra değişiminin permütasyon çizgesinin niye tümçizge olduğunu biraz önce açıkladım. Tersini kanıtlamak için $G(\pi)$ 'nin bir tümçizge olduğu durumda imgeleri de ardışık iki ardışık tamsayının varlığını göstermek yeterli. Kanıt n üzerinden tümevarımla yapılacak. Eğer $i < j$ sahte ikizlerse (ya da sahici ikizlerse), $\{i, i+1, \dots, j\}$ aralığının π altında imgesi $\{\pi(i), \pi(i+1), \dots, \pi(j)\}$ (sırasıyla $\{\pi(j), \pi(j+1), \dots, \pi(i)\}$) olur. Eğer $j \geq i+2$ ise, $\pi(\{i, \dots, j-1\})$ imgesi de bir aralıktır. Tümevarım hipotezini π 'nin $\{i, \dots, j-1\}$ kümesine kısıtlanması için kullanarak imgeleri ardışık olan iki ardışık tamsayı bulunur. \square



Bir permütasyon ve çizgesi.



Sahte ikizler. Ayrıca yalıtılmış iki köşenin de sahte ikiz olduğunu görün. I am not responsible for the terminology which is classical and more convenient than dizygotic (or fraternal) twins. It is also closer to the French "faux jumeaux".



Sahici ikizler, (identical or monozygotic), vrais jumeaux.

Bu adlandırma, bir tümçizgenin tümleyeninin de bir tümçizge olmasına dayanıyor. Bir G çizgesi ile tümleyeni \bar{G} 'nin köşeleri aynıdır; iki köşenin \bar{G} 'de komşu olmasıyla G 'de komşu olmaması birbirine denktir.

Tümçizgeler 1970'lerde başka adlarla tanımlandı (D^* çizgeleri, kalıtsal Dacey çizgeleri ve 2 pariteli çizgeler: referanslar için bakınız¹⁶³). Bunları tarif etmek zor değil. Özelliklerinden birkaçını anarak (basit) kanıtlarını okura bırakayım.

Aşağıdaki çizgelerin hepsi sonlu; hiçbirinde ilmek ve çoklu kenar yok. Bağlantılı bir çizge, köşelerinin oluşturduğu kümenin üstünde bir metrik uzayı tanımlar. İki köşe arasındaki uzaklık, bunları bağlayan en kısa yolun uzunluğu olarak verilir.

Bir G çizgesi ve H altçizgesi verilmiş olsun. G 'nin H 'nin iki köşesini birleştiren her kenarı aynı zamanda H 'nin de kenarıysa çizge kuramcılar H 'yi *tetiklenmiş* olarak adlandırır.

Teorem. *Sonlu bir G çizgesi için aşağıdaki koşullar denktir.*

1. G tümçizgedir.
2. G , bir polinom sıra değişiminin permütasyon çizgesidir.
3. G 'nin bağlantılı, tetiklenmiş herhangi bir altçizgesinin çapı en fazla 2'dir. G 'nin aynı bağlantılı parçasında yer alan herhangi iki köşesi arasında, en fazla 2 uzunluğunda bir yol vardır.
4. G 'de, yandaki gibi, tetiklenmiş dört köşeli bir P_4 bulunmaz.

Son olarak, yasak (2,4,1,3) ve (3,1,4,2) Kontsevich permütasyonlarının çizgelerinin P_4 'e izomorf olduğunu fark edin.

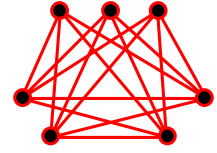
Söndürülebilir çizgeler

Verili bir ağaçtan başlayarak yapraklarını teker teker koparıp böylece devam ederek ağaç tamamen çıplak bırakılabilir. Bir ağacın yalnızca tek bir komşusu bulunan bir köşesine *sallanan* diyelim. Her ağaç, tek köşeli bir ağaca ardı ardına sallanan köşelerin eklenmesiyle inşa edilebilir.

Tanım. Sonlu bir çizgeden başlayarak sallanan bir köşenin silinmesi ve ikizlerin yapıştırılması temel işlemleriyle tek köşeli bir çizgeye varılabiliyorsa baştaki çizgeye *söndürülebilir* denir.

Eğer yıkıcı değil de daha çok yapıcıysanız, bu tarifi başka biçimde de yapabilirsiniz. Tek köşeli basit çizgeden başlayarak

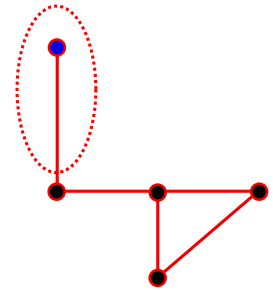
¹⁶³ A. Brandstädt, V. B. Le, and J. P. Spinrad. *Graph classes: a survey*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.



Bir tümçizge.



P_4



Sallanan köşe.

iki çeşit işlem uygulayın: sallanan bir köşe eklemek ya da bir ikiz yaratmak. İkinci işlem, bir köşenin kopyasını çıkarıp bu yeni kopyayı ilk köşenin bağlı olduğu köşelere bağlamak ve ardından sahici mi sahte mi ikiz istediğinize kara vermektir.

Buradaki kilit nokta şu.

Önerme. *Bir kiriş diyagramının analitik olması binişme çizgesinin söndürülebilmesine denktir.*

Bunun kanıtı analitik diyagramların bir önceki bölümdeki algoritmik tarifinden gelecek.

Kanıttan önce meze niyetine temel bir gözlem yapayım.

Bir w diyagramı ve bunun çemberdeki $2n$ harfinin bir A altkümesini alalım. Eğer bir uç noktası A' 'da olan her kirişin diğer uç noktası da A' 'daysa, A' 'ya w' 'ya göre *kararlı* diyeceğim. Başka deyişle A , w' 'nun bir altkiriş diyagramıdır diyebiliriz.

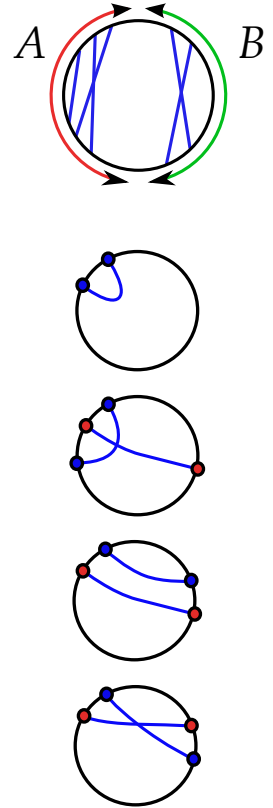
Şimdi w' 'ya göre kararlı bir A aralığı bulunduğunu varsayalım; tümleyeni B olsun. w' 'nun $G(w)$ binişme çizgesinin, w_A ve w_B 'nin binişme çizgeleri olan $G(w_A)$ ve $G(w_B)$ 'nin ayrık birleşimi olduğu aşikar. Öyleyse $G(w)$ 'nun söndürülebilmesi, $G(w_A)$ ve $G(w_B)$ 'nin söndürülebilmesine denk. w_A ve w_B analitikse w' 'nun da analitik olduğunu *eski algoritmamız* hemen söylüyor. Aksi yönde, w analitikse w' 'nun altdiyagramları olan w_A ve w_B de analiktir elbette.

Şimdi önermeyi kanıtlayalım.

Analitik bir w diyagramıyla başlayalım. Eğer w' 'nun iki kirişi paralel ya da antiparalelse binişme çizgede karşılık gelen köşeler ikizdir ve söndürme algoritması bunları yapıştırır. Çizgede bir yabanın küçük kirişi sallanan bir köşe verir; algoritma aslen küçük kirişleri siler ve sapı yerinde bırakır. Münferit bir kiriş yalıtılmış bir köşe tanımlar; bunlardan iki tane varsa algoritmanın yaptığı birini silmektir. Dolayısıyla analitik bir diyagramın binişme çizgesi söndürülebilir.

Tersinin kanıtı için, binişme çizgesi söndürülebilenen her w diyagramının, ya münferit bir kiriş ya bir yaba ya da paralel veya antiparalel bir kiriş çifti içerdiğini göstereceğiz.

Diyagramda münferit bir kiriş dögüsel sözcükte $\dots aa \dots$ gibi ardışık aynı harf ikilisine karşılık gelir.



Yaba, $\dots aba\dots$ biçiminde bir öbeğe karşılık gelir.

Paralel (ya da antiparalel) bir giriş çiftiyse $\dots ab\dots ba\dots$ (sırasıyla $\dots ab\dots ab\dots$) öbeğine. . .

Kanıtımız olmayana ergiyle yapılacak. Diyelim ki kanıtlayacağımız iddiaya karşıörnek oluşturabilecek ve *olası en az giriş sayısına sahip* bir w bulunsun. Öyleyse $G(w)$ söndürülebilir iken w ne münferit bir giriş ne bir yaba ne de paralel ya da antiparalel giriş çifti içermez.

$G(w)$ söndürülebileceği için ya yalıtılmış ya sallanan ya da ikizi olan bir α köşesi vardır. Bu köşenin w' 'dan silinmesiyle elde edilen diyagrama \bar{w} diyelim.

$G(w)$ en küçük olduğundan $G(\bar{w})$ söndürülebilir; dolayısıyla, \bar{w} sözcüğü ya $\dots aa\dots$ ya $\dots aba\dots$ ya $\dots ab\dots ba\dots$ ya da $\dots ab\dots ab\dots$ öbeklerinden birini içerir. Ama sorun şu ki bunlar \bar{w} sözcüğünün altsözcükleri, w' 'nun değil. İki adet α harfine sahip olan w' 'da o öbeklerin arasına bu harflerden biri sızmış olabilir pekala.

En küçük olma özelliği sayesinde w' 'ya göre kararlı herhangi bir aralık ya boş olmalı ya da her şey.

A priori birkaç saptama:

– 0,1 ya da 2 adet α harfi altsözcüklere sızmış olabilir.

– \bar{w} altsözcüğü bir münferit girişe, bir yabaya ya da paralel veya antiparalel giriş çiftine karşılık gelebilir.

– $G(w)$ 'da α yalıtılmış ya da sallanan bir köşe ya da sahici veya gerçek ikizlerden biri olabilir.

Öyleyse incelenecek tam $3 \times 4 \times 4$ durum var! Neyse ki birçok durum aynı anda halledilebiliyor.

1/ Eğer hiçbir α yukardaki altsözcüklere sızmamışsa sorun yok: \bar{w} içindeki münferit giriş ya da yaba ya da paralel veya antiparalel giriş çifti, w' 'da da aynı özelliğe sahiptir ℓ .

2/ Eğer α , $G(w)$ 'da yalıtılmışsa demek ki hiçbir giriş α' 'yı kesmiyor. Bu durumda α , çemberi kararlı iki aralığa ayırır; bunların da boş olması gerekir ℓ .

3/ Eğer iki adet α harfi içeriye sızmışsa, yerleri ardışık olamaz çünkü o durumda α girişi w' 'da münferit olurdu.

Durumlara ayırarak yaptığımız bu kanıt pek zevkli değil. İsterseniz kanıtı atlayın ama tüm durumları tek tek listelemiş olan ben-denizden de şefkatinizi esirgemeyin.

“Çelişki” için ℓ işaretini kullanıyorum.

Öte yandan, halen

$$\dots aab\alpha a\dots \text{ veya } \dots a\alpha b\dots b\alpha a\dots \text{ veya } \dots a\alpha b\dots a\alpha b\dots$$

durumlarına bakmalıyız. Bu durumlardan biri sözkonusuysa, w' 'da sırasıyla (α, b) yabası, (α, b) paralel kiriş çifti veya (α, b) antiparalel kiriş çifti oluşmuş demektir \neq .

4/ Münferit bir kirişe tek bir α girdiğinde $\dots a\alpha a\dots$ öbeğini verir; bu da w' 'da sapı α olan bir yaba oluşturur \neq .

Şu ana kadar α' 'nın sallanan ya da ikizi olan bir köşe olabileceğini kullanmadık. Bunlar kalan durumlarda, yani α, \bar{w} 'da bir yabaya ya da paralel/antiparalel bir kiriş çiftine girdiğinde kullanılacak.

Eğer α sallanansa, w' 'da α' 'yı kesen tek kirişe β diyelim. Yok eğer α' 'nın ikiz kardeşleri varsa, ikizlerinden birine β diyelim. α, β kirişleri, α ve β haricinde çemberde dört aralık belirler; ben bunlara *kesim* diyeceğim. Eğer α sallanansa, α' 'nın aynı tarafındaki iki kesimin birleşimi kararlıdır. Eğer α ve β ikizse, karşılıklı kesimlerin birleşimi kararlıdır.

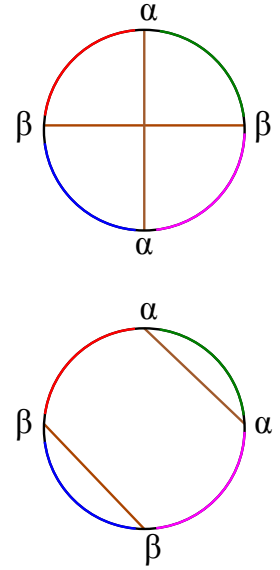
5/ Şimdi $\dots aba\dots$ veya $\dots ab\dots ba\dots$ veya $\dots ab\dots ab\dots$ öbeklerinden birinin arasına tek bir α harfi girdiğini ve a, b harflerinden birinin β olduğunu varsayalım. Bu durumda α ve β , w' 'da ardışık olacağından kesimlerden biri boş kalır.

5-1/ Sallanan durumda, α' 'nın aynı tarafındaki diğer kesim kararlı bir aralık olacağından boş olmalıdır. Dolayısıyla α, β , w' 'da sapı β olan bir yaba oluşturur \neq .

5-2 İkiz durumundaysa, karşı kesim kararlı bir aralık ve böylece boş olur. Dolayısıyla α, β , w' 'da bir çift paralel ya da antiparalel kiriş olurlar \neq .

6/ Son olarak, $\dots aba\dots$ veya $\dots ab\dots ba\dots$ veya $\dots ab\dots ab\dots$ öbeklerinden birinin arasına tek bir α harfi girdiğini ama a, b harflerinden hiçbirinin β olmadığını varsayalım.

6-1 (a, b) , \bar{w} içinde paralel (sırasıyla antiparalel) kiriş çifti olsun. ab içine bir α koyarak $\dots a\alpha b\dots ba\dots$ (sırasıyla $\dots a\alpha b\dots ab\dots$) elde edilir. Ardışık ba ifadesi (sırasıyla ab) bize bu iki harfin, α kirişinin aynı tarafında yer aldıklarını söylüyor. Öte yandan w' 'da ardışık $a\alpha b$ harfleri a ve b 'nin diğer kopyalarının α' 'nın



farklı taraflarında olduğunu söylüyor. Dolayısıyla α kirişi a ve b kirişlerinden yalnızca birini keser.

6-1-1 Eğer α sallanansa a veya b , β' 'ya eşit olmak durumunda kalır $\cancel{!}$.

6-1-2 Eğer α, β ikizlerse, bu durum olanaksız $\cancel{!}$.

6-2 $(a, b), \bar{w}$ bir yaba olsun. Tek bir α' 'yı $\cdots aba \cdots$ içine sokarak $\cdots a\alpha b a$ veya $\cdots ab\alpha a$ elde ederiz. Böylece α, α' 'yı kesmek zorunda kalır.

6-2-1 Eğer α sallanansa $a = \beta$ olmak durumunda kalır $\cancel{!}$.

6-2-2 Eğer α, β ikizlerse, $a\alpha b a$ ardışık harfleri, a' 'nın iki kopyasının α' 'nın farklı taraflarında ve zorunlu olarak karşılıklı kesimlerde olacağını gösterir. Bu da $b = \beta$ olmaya zorlar $\cancel{!}$.

Kanıt da burada biter.

Off! \square

Şimdi söndürülebilir çizgelerin doğasını anlamamız gerekiyor.

Söndürülebilirlik, uzaklıkların kalıtsallığı

Söndürülebilir çizgeler, kırk yıl önce farklı yazarlar tarafından farklı adlarla, çok farklı güdülerle tanımlanmıştır. Bu çizgelerin ağaç olmaya çok yakın olduklarını göreceğiz.

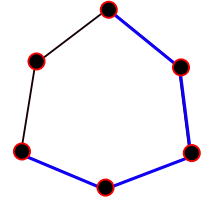
Howorka¹⁶⁴ *uzaklıkları kalıtsal çizgeleri* 1977'de tanımladı.

Tanım. Bir G çizgesinden tetiklenmiş her H altçizgesinde her iki köşenin H' 'de uzaklığı G' 'de uzaklığına eşitse, böyle bir G çizgesinin *uzaklıkları kalıtsal* denir.

Sözgelimi, bir ağam *uzaklıkları kalıtsal* uzunluğu en az 5 olan bir çevrimin uzaklıkları kalıtsal değildir. Bunu göstermek için, çevrimde uzunluğu çevrimin uzunluğunun yarısından fazla olan bir patikanın (resimde mavi patika) verdiği tetiklenmiş altçizgeyi H olarak seçmek yeterlidir.

Sonlu bir çizge alalım ve her kenarının uzunluğu için pozitif birer gerçek sayı seçelim. Bir patikanın uzunluğunu, kenarlarının uzunluğu toplamı olarak ve iki köşenin arasındaki uzaklığı, bunları birleştiren patikaların en kisasının uzunluğu olarak tanımlayalım. Bir *metrik çizgeden* söz etmekteyiz.

¹⁶⁴ E. Howorka. A characterization of distance-hereditary graphs. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 28(112):417-420, 1977.



Uzunluğu ≥ 5 olan bir çevrimin uzaklıkları kalıtsal değildir.

Bu yolla ağaçlardan elde edilen (ve genellikle *metrik ağaçlar* denen) metrik uzayların bir tanımlamasını arıyoruz. Yanıt şöyle. Sonlu bir (E, d) metrik uzayı ve x_1, x_2, x_3, x_4 diye dört noktasını alalım. Her bir köşegen çiftinin uzunluklarının toplamına bakalım:

$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4); d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4); d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3).$$

Bu üç sayının en küçüğü (ve sırasıyla en büyüğü ve ortancası) s (sırasıyla m ve l) olsun: $s \leq m \leq l$. Sonlu bir metrik uzayının metrik bir ağacın bir altçizgesine izometrik olması için gerek ve yeter koşulun her nokta dörtlüsü için $m = l$ olduğu ortaya çıkıyor. Bunu kanıtlamak zor değil; kanıtı bir alıştırmaya bırakıyorum *M25*. Tembel okur kanıtı şu kısa makalede bulabilir¹⁶⁵.

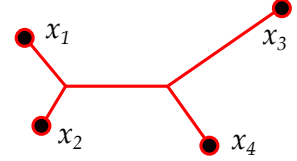
Burada şuna dikkat etmeliyiz. Tüm kenarlarının uzunlukları 1 olan bir çizge, kendisi ağaç olmadığı halde bir metrik ağacın bir altkümesine izometrik olabilir. Kenardaki örneğe bakın.

Çizge kuramında bu tür çizgelere *blok çizgeler* denir. Bunları inşa etmek için bir ağaçla başlayın. Bazı köşelerini silip yerlerine resimdeki gibi *hizipler*, yani her köşe ikilisi birbirine komşu olan sonlu çizgeler koyun. Okurlarıma tavsiyem, bunun gerçekten de blok çizgelerin tam bir tanımlaması olduğunu kanıtlamaları (*M15* ve acil durumda bakınız¹⁶⁶).

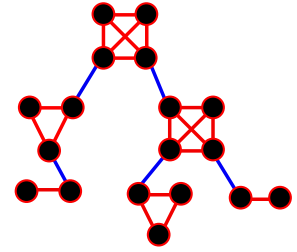
1980'lerde Gromov, *hiperbolik uzaylar* için bir geometrik kuram geliştirdi. Kombinatorik ve geometrik grup kuramında çok güçlü bir etkisi olan bu kuram ne yazık ki gezintimizin parçası değil.

Tanım şöyle. Bir (E, d) metrik uzayında yukarıdaki gibi her nokta dörtlüsü için $l - m \leq \delta$ eşitsiliğini sağlayacak bir $\delta \geq 0$ varsa, yani m ve l "neredeyse eşitse" uzaya *hiperbolik* denir. Sonlu herhangi bir metrik uzayının (yeterince büyük bir δ ile) basitçe hiperbolik olduğunu fark edin. Dolayısıyla bu kavram *genel kapsamda* geometriye ilişkindir aslen.

Bu özelliğin birbirine denk birçok ifadesi var. En rağbet göreni (jeodezik metrik uzayları için) tüm jeodezik üçgenlerin *ince* olmasıdır. x, y, z diye üç nokta alın ve bunları birleştiren $[x, y], [x, z], [y, z]$ diye üç jeodezik seçin. $[x, y]$ üzerinde her noktanın, $[x, z] \cup [y, z]$ birleşimine uzaklığı, x, y, z noktalarından bağımsız olarak, düzgün sınırlı olmalıdır (resme bakın).



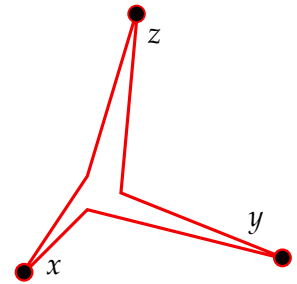
¹⁶⁵ P. Buneman. *A note on the metric properties of trees*. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 17:48–50, 1974.



Bir blok çizge.

¹⁶⁶ F. Harary. *A characterization of block-graphs*. *Canad. Math. Bull.*, 6:1–6, 1963.

Bir (E, d) metrik uzayında her bir (x, y) nokta çifti için $i(0) = x$ ve $i(d(x, y)) = y$ olacak şekilde *izometrik* bir $i : [0, d(x, y)] \rightarrow E$ gömmesi varsa uzaya *jeodezik* denir.



Bu kavram dikkat çekici bir sağlamlığa sahiptir. Örneğin negatif eğrilikli tıkız bir Riemann manifoldunun evrensel örtüsü hiperboliktir. Bu metrik uzaylarının, nicel olarak ağaçlarla çok iyi yaklaşımları yapılabilir. Bu kurama ilişkin daha fazla bilgi için okuruma şunu¹⁶⁷ okumasını öneririm.

Bandelt ve Mulder 1986'da, uzaklıkları kalıtsal çizgelerin, Gromov'un hiperboliklik koşullarına epey yakın ve tamamen metrik üzerinden bir tanımlamasını öneren bir makale¹⁶⁸ yayınladılar.

Tanım. Sonlu bir G çizgesinin ağacımsı olması, her x_1, x_2, x_3, x_4 köşe dörtlüsü için şu üç sayıdan ikisinin eşit olması demektir:

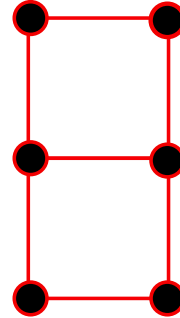
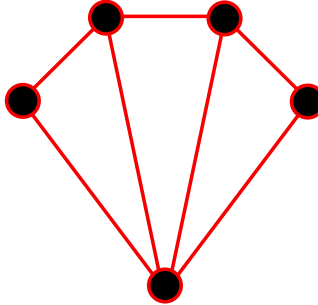
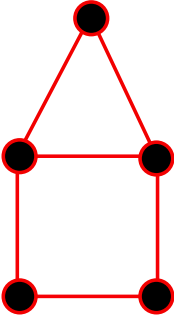
$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4); \quad d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4); \quad d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3).$$

Okurum tüm bu tanımların birbirine denk olduğunu muhtemelen tahmin etmiştir.

Teorem. G sonlu bir çizge olsun. Aşağıdaki özellikler denktir.

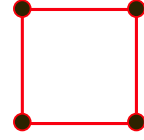
1. G , bir analitik giriş diyagramının binişme çizgesidir,
2. G söndürülebilir,
3. G uzaklıkları kalıtsaldır,
4. G ağacımsıdır,
5. G tetiklenmiş altçizge olarak bir ev, bir mücevher, bir domino ya da uzunluğu en az beş olan bir çevrim içermez.

Ev, mücevher ve domino şöyle:



¹⁶⁷ É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

¹⁶⁸ H.-J. Bandelt and H. M. Mulder. [Distance-hereditary graphs](#). *J. Combin. Theory Ser. B*, 41(2):182–208, 1986.



Uzunluğu 4 olan bir çevrim ağacımsıdır fakat ağaç değildir.

Alıştırma: Ağacımsı bir çizgenin $\delta=2$ olmak üzere Gromov anlamında hiperbolik olduğunu gösterin.

Deminki teoremdaki tüm denklıklar (tabii ki ilk madde dışında) yukarıda sözü geçen makalelerde kanıtlanmış. Yine de ben de yakında bazı kanıtlar sunacağım.

Şimdi artık emeğimizin meyvelerini toplama ve analitik giriş diyagramlarının çok basit bir tarifini elde etme zamanı geldi.

Ev, mücevher ve dominonun, \diamond , \triangle ve $\diamond\diamond$ diyagramlarının binişme çizgeleri olduğuna şaşırılmamalıdır.

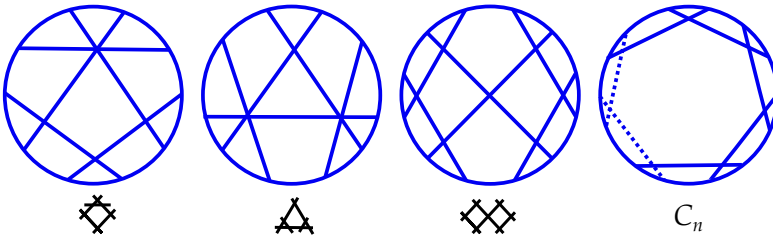
Alıştırma: Binişme çizgeleri ev, mücevher ve domino olan giriş diyagramlarının yalnızca $\diamond\diamond$, \diamond ve \triangle olduğunu gösteriniz.

Benzer bir şekilde, analitik olmayan C_n giriş diyagramını da tarif etmiştik. Her bir $2k$ ve $2k+3$ arasında ($k = 1, \dots, n$ için) bir giriş bulunmak üzere $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ olarak ($n \geq 5$) tanımlamıştık. Binişme çizgesi de uzunluğu n olan bir çevrimdir.

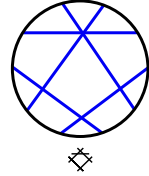
Alıştırma: Binişme çizgesi n uzunluğunda bir çevrim olan tek giriş diyagramının C_n olduğunu gösteriniz.

Son olarak bir giriş altdiyagramının, binişme çizgesinde tetiklenmiş bir altçizge verdiğini fark edin. Böylece analitik giriş diyagramlarının gayet doyurucu bir tarifine ulaşmış oluyoruz. Aşağıdaki teorem gezintimizde bir kilometre taşı olduğu için teoremi maviyle yazıyorum.

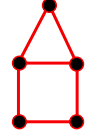
Teorem. *Bir giriş diyagramının analitik olması, $\diamond\diamond$, \diamond , \triangle veya C_n 'yi ($n \geq 5$) giriş altdiyagramı olarak bulundurmamasına denktir.*



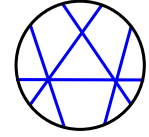
Bu tanımlama, daha önce eriştiğimiz *polinom sıra değişimlerinin* tanımlamasıyla tam olarak benzeşiyor: orada da *ayrışabilen permutasyonlara* geçmiştik; bunlar tam da Kontsevich'in (2,4,1,3) ve (3,1,4,2) örneklerini içermeyen permutasyonlardı.



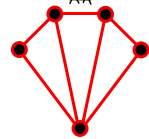
\diamond



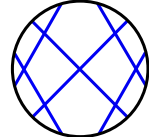
Ev.



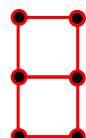
\triangle



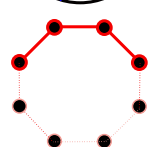
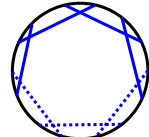
Mücevher.



$\diamond\diamond$



Domino.



C_n ve binişme çizgesi: n -çevrim.

Birkaç kanıt

Şimdi, önceki bölümdeki tanımların denkleğinin kanıtlarını sunacağım. Bu kanıtlar büyük ölçüde basit olduğundan meraklı okurların bunları kendilerinin kanıtlamaya çalışmalarını öneriyorum. Resim çizmek önemli. Bu özel problemde anlamlı tanımları bulmak, denkliklerini kanıtlamaktan daha zorluydu belki de.

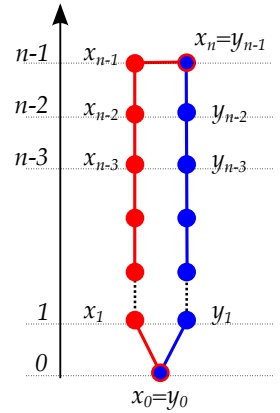
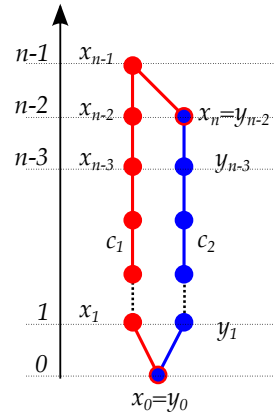
Tetiklenmiş altçizge olarak $\triangle \diamond \square \ominus$ yok \implies Uzaklıklar kalıtsal.

H, G çizgesinin tetiklenmiş bir altçizgesi olsun. H 'nin p, q diye iki köşesinin H 'de uzaklıkları n olsun ve bunları H 'de ($p = x_0$ ve $q = x_n$ olmak üzere) $c = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ patikasıyla birleştirelim. x_i ve x_j köşelerinin komşu olması ancak ve ancak i ve j 'nin ardışık olması durumunda olasıdır; aksi durumda kestirme bir yol olurdu. Başka deyişle, c patikası G 'den tetiklenmiştir. Dolayısıyla bir çizgede uzaklıkların kalıtsal olduğunu göstermek için G 'den tetiklenmiş herhangi bir patikanın uç noktalarının aralarındaki uzaklığın patikanın uzunluğuna eşit olduğunu göstermeliyiz.

$\triangle \diamond \square \ominus$ altçizgelerinin G 'den tetiklenmediğini kabul edelim. G 'den tetiklenmiş bir $c_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ patikası seçelim ve n üzerinden tümevarımla x_0 ve x_n 'nin G 'de uzaklıklarının tam n olduğunu gösterelim.

x_0 'ı x_n 'ye G 'de en kısa $c_2 = (y_0, y_1, \dots, y_l)$ patikasıyla birleştirin ($y_0 = x_0$ ve $y_l = x_n$ olmak üzere). c_2 de G 'den tetiklenmiş bir patikadır elbette ve $0 \leq i \leq l$ için $d(y_0, y_i) = i$ olur. Tümevarımla $0 \leq i \leq n-1$ için $d(x_0, x_i) = i$ olacağından l ya $n-2$ ya $n-1$ ya da n 'ye eşit olacaktır. İlk iki durumun olanaksız olduğunu göstereceğiz. $l = n-2$ ya da $n-1$ olsun. Tümevarım yoluyla c_1 ve c_2 patikalarının yalnızca uç noktalarında kesiştiğini kabul edebiliriz; zira başka bir kesişim noktası, daha kısa patikaların başlangıç noktaları olarak kullanılabilirdi.

Düzlemde bir resim çizelim: c_1 ya da c_2 'deki bir köşenin yüksekliği, x_0 'a uzaklığı olsun. $l = n-2$ ve $l = n-1$ durumlarının resimleri kenarda. c_1 'in köşeleri kırmızı, c_2 'ninkiler mavi. c_1 ve c_2 'nin birleşimi G 'de bir c çevrimi tanımlıyor. c 'nin uzunluğu da en az 5. Böyle bir c çevrimi G 'den tetiklenemez; G 'de tetiklenmiş, uzunluğu ≥ 5 olan bir çevrim yoktu. Bu yüzden c_1 'in köşeleriyle c_2 'nin köşelerini birleştiren köşegenler var olmalı.



C' 'de uzunluğu 3 olan tetiklenmiş bir P_4 patikası olamayacağını görüyoruz; aksi takdirde z' yle birlikte G' 'de bir mücevher oluştururlardı oysa mücevherde uzaklıklar kalıtsal değildir. Dolayısıyla C bir tümçizgedir ve bu nedenle iki ikiz içerir. Yukarıda da gördük ki, C' 'de ikizler, G' 'de de ikizlerdir. \square

Söndürülebilir \implies *Ağacımsı*.

Tümevarımla kolay. Bir çizgede dört nokta alın. Sallanan bir köşeyi silin veya iki ikizi yapıştırın. Dört noktadan biri silinmiş köşe olabilir. Bu durumda o noktanın yerine, silinen kenarın diğer ucundaki köşeyi koyun. İndirgenmiş çizgede dört noktadan kalanlara bakın (dört noktanın ikisinin, yapıştırılan ikizler olabileceğini vs dikkate alarak). Tümevarım adımını kullanın. \square

Ağacımsı \implies *Tetiklenmiş* \triangle \diamond \square \circ \otimes *yok*.

Bariz; bu çizge örneklerinden hiçbirinin ağacımsı olmadığını kontrol etmek kolay. \square

Tamamen parçalanabilen çizgeler

Yalnızca sallanan köşelerin silinmesiyle tek bir noktaya indirgenebilen çizgeler ağaçlardır. Yalnızca ikizleri yapıştırarak tek bir noktaya indirgenebilen çizgeler tümçizgelerdir.

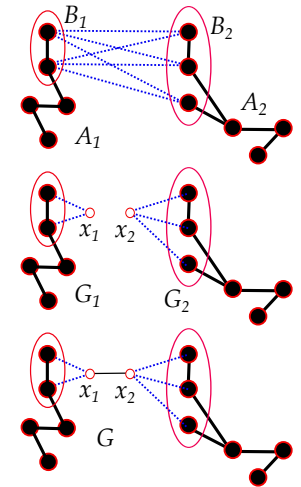
Söndürülebilir çizgelerin ağaçlardan çok farklı olmadığını, okurlarım muhtemelen tahmin etmiştir. Bu gerçekten de doğru. Açıklayacağım.

Sonlu, bağlantılı bir G çizgesi alalım. Köşeleri A_1 ve A_2 diye iki kısma ayrılmış olsun. $B_1 \subset A_1$ (ve sırasıyla $B_2 \subset A_2$), A_1' 'de (sırasıyla A_2' 'de) olup da A_2' 'de (sırasıyla A_1' 'de) bir köşeye komşu olan köşelerin kümesi olsun. B_1 'in her elemanının B_2 'nin her elemanına komşu olduğunu varsayalım. A_1 ya da A_2 'nin yalnızca bir (ya da sıfır!) elemanı varsa bu koşul basitçe sağlanır. Bu yüzden A_1 ve A_2 'nin en az ikişer elemanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda G çizgesine *parçalanabilir* ve A_1, A_2 ayrışmasına bir *yarma* denir. Bu parçalanmanın izini sürebilmek için G_1, G_2 diye şöyle iki çizge yaratalım. G_1 'in (ve sırasıyla G_2 'nin) köşelerini, A_1' 'e (sırasıyla A_2' 'ye) *kontrol köşesi* diyeceğimiz fazladan bir x_1 köşesi (sırasıyla x_2) ekleyerek oluşturuyoruz. G_1 'in (ve sırasıyla



Yeni bir sapak. Bu kısım tek amacı söndürülebilir çizgelerin yapısını anlatmak.

“Parçalanabilir” terimini “ayrışabilir”e tercih ediyorum. “Ayrışabilir” terimi de bu alanda yaygın kullanılıyor ama biz bu sözcüğü permütasyonlar için kullanmıştık.



G_2 'nin) kenarları içinse G 'nin kenarlarına, x_1 'i (sırasıyla x_2 'yi) B_1 'in (sırasıyla B_2 'nin) tüm elemanlarına bağlayan kenarları fazladan ekleyerek elde ediyoruz.

G çizgesi, basit bir *lehim* işlemiyle (G_1, x_1) ile (G_2, x_2) 'den yeniden inşa edilebilir. x_1 ve x_2 kontrol köşelerinin G 'nin köşesi olmadığına dikkat edin; iki kısmı birbirine bağlayan kenarları tanımlamada onlardan yararlanıyoruz.

Eğer A_2 'nin kenardaki gibi iki elemanı varsa, G çizgesinin ya sallanan bir köşeye ya da ikizlere sahip olduğunu da fark edin.

Hammer ve Maffray¹⁶⁹ 1987'de başka bir tanım önerdi.

Tanım. Sonlu bir çizgenin tetiklenmiş, bağlantılı, en az dört köşe içeren her altçizgesi parçalanabilirse, çizge *tamamen parçalanabilir*.

Tamamen parçalanabilen (bağlantılı) çizgelerin tam da söndürülebilir (bağlantılı) çizgeler olduğunu kanıtlamak zor değil.

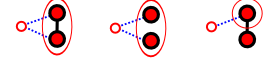
Gerçekten de, lehim işleminde eğer G_1 ve G_2 söndürülebilir çizgelerse, G de öyledir; tümevarımla, tamamen parçalanabilen çizgelerin söndürülebileceği gösterilir.

Ters yön içinse, sallanan bir köşenin veya iki ikizin bir parçalanma vereceğini görmüştük. Dolayısıyla söndürülebilir çizgeler parçalanabilirler; hatta tamamen parçalanabilirler zira söndürülebilir çizgelerin tetiklenmiş altçizgeleri de söndürülebilir.

Tamamen parçalanabilen çizgelerin tam bir tarifini verebilmek için öncelikle bağlantılı, sonlu *genel* çizgeler için verilen önemli bir teoremi, *yararak parçalama* teoremini ifade edeyim.

Bağlantılı, sonlu bir G çizgesi parçalanabiliyorsa daha önceki gibi bunu G_1 ile G_2 'nin lehimini olarak düşünün. Sonra elde edilen çizgeler parçalanamayacak hale gelinceye dek G_1 'i, G_2 'yi vs. parçalamaya çalışın. Bu "asal parçalara" parçalamanın sonucu, aşağıda anlatılan *çizgelerle işaretlenmiş ağaçlar* aracılığıyla rahatlıkla tarif edilebilir.

Bu tür bir T ağacı, her x iç boğumuna, bağlantılı ve sonlu bir G_x çizgesi atanmış bir ağaçtan ibarettir. Ayrıca G_x 'in boğumları ile T 'de x boğumundan çıkan kenarlar arasında birebir bir eşleme de seçilmiştir. Her boğumdan en az 3 kenar çıktığını kabul edelim. Böyle bir yapı verildiğinde, " G_x 'lerin T 'yle kontrol edilen bir bileşkesi" olarak bir $G(T)$ çizgesi inşa ederiz. Tanım

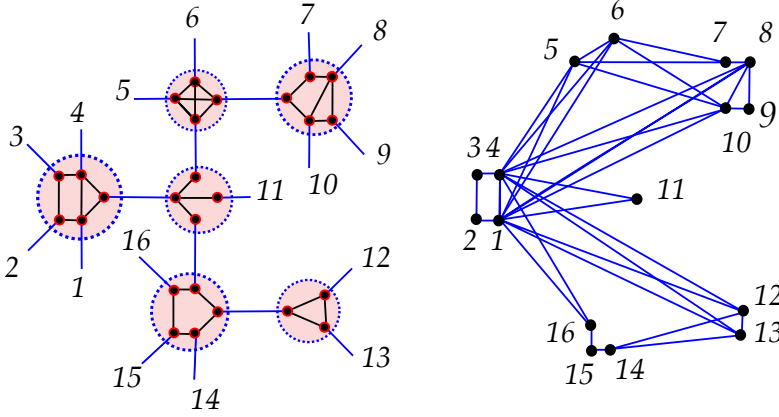


Ağaçlarla benzerliğe dikkat. Bağlantılı sonlu bir çizgenin ağaç olması, tetiklenen her bağlantılı altçizgesinin *ayırıcı bir kenar*, yani altçizgeyi bağlantısız hale getiren bir kenar içermesi demektir.

¹⁶⁹ P. L. Hammer and F. Maffray. Completely separable graphs. *Discrete Appl. Math.*, 27(1-2):85–99, 1990. Computational algorithms, operations research and computer science (Burnaby, BC, 1987).

şöyle.

$G(T)$ 'nin köşeleri T 'nin yapraklarıdır. $G(T)$ 'nin kenarlarını anlamak adına, çizgelerle işaretlenmiş ağaçlar kavramını ortaya atan Gioan ve Paul'un makalesinden¹⁷⁰ esinlenerek bir resim çizeyim. Solda 16 yaprağı ve (pembe) 6 iç boğumu olan bir ağaç görüyoruz. Köşe sayısı 16 olan karşılık gelen çizgeyse sağda resmedilmiş.



¹⁷⁰ E. Gioan and C. Paul. [Split decomposition and graph-labelled trees: characterizations and fully dynamic algorithms for totally decomposable graphs.](#) *Discrete Appl. Math.*, 160(6):708–733, 2012.

T 'de iki yaprak seçin ve bunları ağaçta en kısa yolla birleştirin. Bu patikanın uğradığı her x boğumu için bir giren kenar bir de çıkan kenar vardır. Böylece bu iki kenar G_x 'te iki köşe tanımlarlar. Patikanın uğradığı her x boğumu için G_x 'teki o iki köşe komşularsa $G(T)$ 'nin iki köşesi, yani T 'nin iki yaprağı, $G(T)$ 'de komşu olacaktır. T 'nin tek bir kenar içerdiği basit durumda iki kontrol köşesi vardı. G_x 'ler işte o durumun genelleştirilmesidir.

1980'de Cunningham ve Edmonds¹⁷¹ tarafından ispatlanmış (ve Giona ve Paul tarafından başka biçimde ifade edilmiş) ana sonuç şöyle: *Bağlantılı, sonlu herhangi bir çizge böyle bir inşaa aracılığıyla, G_x 'ler parçalanamaz çizgeler olacak biçimde esasen tek bir şekilde elde edilir.* Böyle bir parçalanmanın varlığını göstermek kolay. Zor olan kısım, "esasen tek bir şekilde" yapılması; bunu tanımlamıyorum çünkü buna ihtiyacım olmayacak.

Tamamen parçalanabilen çizgelere geri gidelim. Bu özel durumda G_x 'lerin en fazla 3 köşesi vardır çünkü parçalanamayan ve G 'den tetiklenmiş altçizgedirler; tamamen parçalanabilen çizge

¹⁷¹ W. H. Cunningham and J. Edmonds. [A combinatorial decomposition theory.](#) *Canad. J. Math.*, 32(3):734–765, 1980.

tanımından iddia doğrulanır. Bu da tamamen parçalanabilen çizgelerin epey kesin bir geometrik tanımını verir. Her boğumunda 3 kenarı olan bir ağaç alın. Her bir boğum için 3 köşeli, bağlantılı bir çizge seçin (çok fazla seçenek yok!) ve kenardaki gibi çizgelerle işaretlenmiş bir ağaç inşa edin. Tamamen parçalanabilen tüm çizgeler bu yolla elde edilir.

Bu sürpriz değil elbette. Herbiri üç yapraklı üç küçük çizgeyi gösteren kenardaki üçüncü resme bakın. Bunlardan birini bir (mavi) yaprağından çizgelerle işaretlenmiş bir T ağacına asarsanız bir fazla yaprağı olan, aynı tür başka bir T' ağacı elde edersiniz. İlişkilendirdiğimiz $G(T)$ çizgesindeki etkisini inceleyin; duruma göre ya bir köşeyi iki ikize (sahici veya sahte) ayırdınız ya da sallanan bir köşe elde ettiniz. Söndürülebilir çizgelerin ilk tanımına geri döndük: sallanan köşeler veya ikizler ekleye ekleye bir noktadan elde edilen çizgelerdi bunlar. Böylece operadlara da geri geldik. Gerçekten bir tali yol oldu bu!

Hesaplanabilirlik

Köşe sayısı n olan bir çizgenin binişme çizge olup olmadığına (n' 'ye göre) kuadratik zamanda karar veren bir algoritma var. Bu, uzun bir süreç içinde (1987'de n^9 mertebesinde bir algoritmayla başlayıp) adım adım geliştirilerek sonunda şurada¹⁷² kanıtlandı.

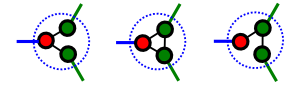
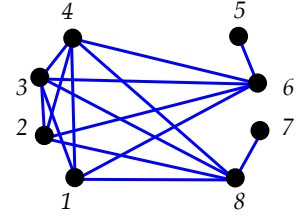
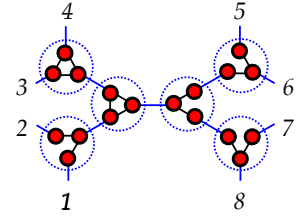
Verilen n kirişli bir diyagramın binişme çizgesini inşa etmek için n' 'de kuadratik zaman gerekir. Ardından ikizleri ve sallanan köşeleri bulun ve süreci n kere yineleyin. Böylece diyagramın analitik olup olmadığına kuadratik zamanda karar verirsiniz.

Ezoterik bir alıştırtma

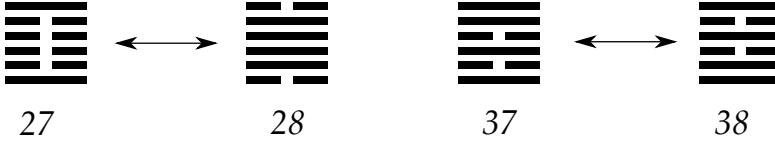
Bu bölümün ilk sayfasında resmedilmiş 64 adet altılı-dizim, geleneksel olarak 32 adet *tümleyen altılı-dizim* çifti halinde gruplanırlar. *Yin ve Yang'*ı gözünüze getirin. Bir *altılı-dizimin eşleşini* elde etmek için onu başaşağı edin. Altılı-dizim simetrikse tek parça çubukları çift parçayla yer değiştirin ya da tersini yapın.

Eşlek çiftlere iki örnek:

Burada (27-28) ve (37-38) sayıları İmparator Wen sıralamasına



¹⁷² J. Spinrad. Recognition of circle graphs. *J. Algorithms*, 16(2):264–282, 1994.



göre. Birçok uzman eşlek altılı-dizimler arasına bir çizgi çekmeyi sever. Shao Yong'un çembersel diziliminde çalışırsak bu 32 kirişli bir diyagram verir.

Acaba okurum bu kirişleri çizecek kadar sabır gösterip *bu Yi Çing diyagramının analitik olup olmadığını söyleyebilir mi?*

14 Kasım 1701'de Leibniz, Shao Yong'un çembersel diziliminin bir örneğini Çin'de yaşayan Fransız çizvit Joachim Bouvet'den aldı. İki yıl sonra *Mémoires de l'Académie des Sciences*'ta ikili aritmetik üzerine dikkate değer bir makale¹⁷³ yayınladı. Ona göre:

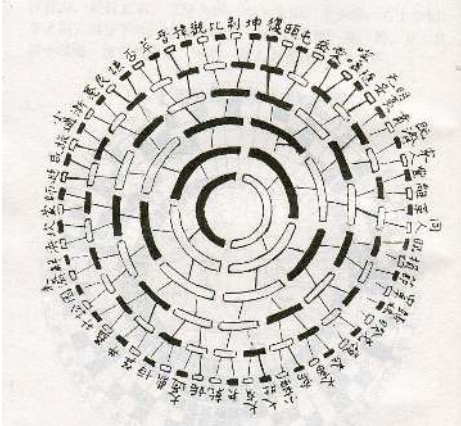
Bu resimler dünyada var olan belki de en eski bilim anıtlarıdır.

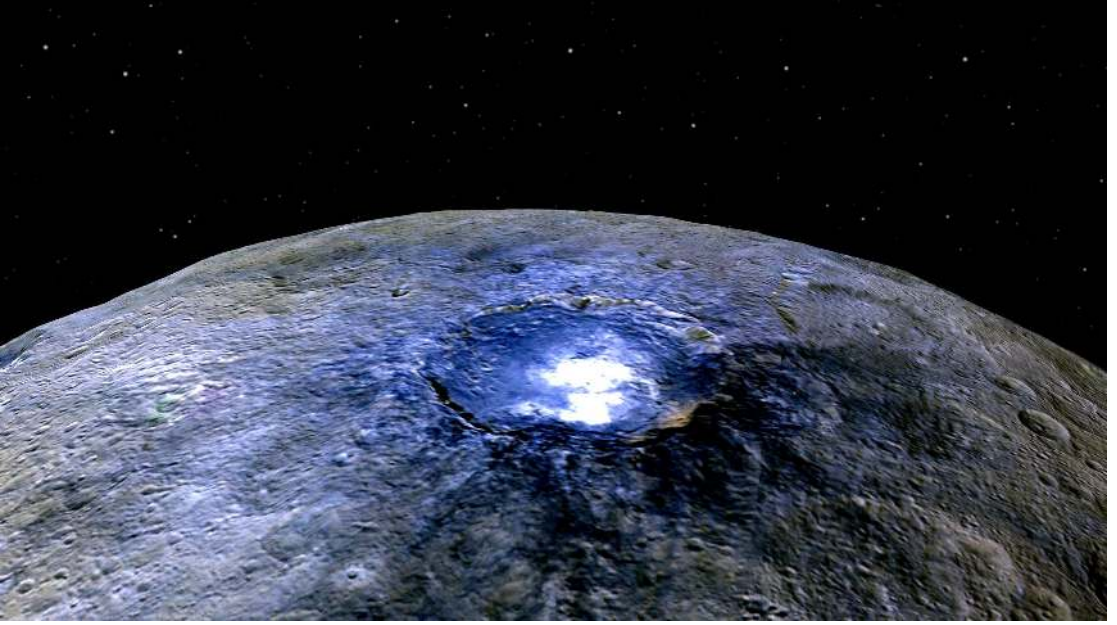
"Leibniz, *Yi Çing*'in diyagramları üzerine yaptığı bu keskin incelemesinin, Batı bilimine ve nihayetinde Hıristiyanlığa Çin'de derin bir takdir uyandıracağını umuyordu¹⁷⁴."

¹⁷³ G.-G. Leibniz. [Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy.](#)

"Ces figures sont peut-être le plus ancien monument de science qui soit au monde".

¹⁷⁴ D. Lach. [Leibniz and China.](#) *Journal of the History of Ideas*, 6(4):436-455, 1945.





Cüce gezegen Ceres, Dawn uzay aracının gözünden, Temmuz 2016. Ceres'in yörüngesini hesaplamak, Gauss'un muhteşem başarılarındanıdır. ©

Yine Gauss:

geçişme, manyetizma ve astronomi

Gauss ve geçişme sayıları

22 Ocak 1833'te Gauss defterine esrarengiz bir formül yazdı¹⁷⁵.

ZUR ELECTRODYNAMIK.

605

[4.]

Von der *Geometria Situs*, die LEIBNITZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.

Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometria Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.

Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z ; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(dydz' - dzdy') - (y'-y)(dzdx' - dxdz') + (z'-z)(dxdy' - dydx')}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \dots V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt

$$= 4 m \pi$$

und m die Anzahl der Umschlingungen.

Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegeneinander umgetauscht werden. 1833. Jan. 22.

Amacı, "kapalı iki eğrinin geçişme sayısını hesaplamak"tır; 3 boyutlu uzayda ayrık iki kapalı eğriyle ilişkilendirilen ve şekil değiştirmelerle değişmeyen bir tamsayı bulmak ister.

1833'te henüz Topoloji mevcut değildi. . . Bu sözcük bile ilk kez Listing'in oniki yıl sonra basılan bir kitabında boy gösterecektir. Leibniz halihazırda *Analysis Situs* adını önermişti; tıpkı



1977 yılında Almanya'da basılmış, Gauss'un 200. doğumgünü'nü kutlayan bir madeni para.

¹⁷⁵ C. F. Gauß. *Werke. Ergänzungsreihe. Band V.* Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975. Briefwechsel: C. F. Gauss-H. C. Schumacher. Teil 3. [Correspondence: C. F. Gauss-H. C. Schumacher. Part 3], Edited by C. A. F. Peters, 1863 ve 1865 orijinalinin tekrar basımı.

"Die Umschlingungen zweier geschlossener Lieben zu zählen."

cebirin sembollerle oynaması gibi biçimlerle oynayacak bir bilim düşlüyordu yalnızca. Gauss ise *Geometria Situs* adlandırmasını kullanıyor ve öncü olarak Euler ve Vandermonde'ü anıyor.

Bu *Nachlasse*'nin basılsın diye yazılmadığını hatırlayın. Gauss, kişisel müsveddelerinin kamuya açık hale geleceğini bilseydi kimbilir ne düşünürdü. Aslına bakılırsa 1833 tarihli bu not Gauss'un ölümünden sonra, 1867'de basıldı. Editör bu nota, elektromanyetizmaya ayrılmış bir ciltte yer verdi. Bu makul bir tercihti; örneğin yakında basılmış şu makale¹⁷⁶ iyi bir elektromanyetik yorum sunuyor. İknâ edici başka bir makale¹⁷⁷ ise formülün gökbilimsel bir kaynağının olduğunu iddia ediyor. Acaba kim haklı? Elbette ikisi de! Gauss matematikte derin bir birliğe inanır, matematik, gökbilim, fizik vs. arasında sınırlar çizmezdi. Ben kesinlikle bir tercih yapmayacağım. 3 boyutlu uzayda ayrık iki kapalı eğrinin geçişme sayısı için koşut üç bakış açısıyla üç tanım sunacağım.

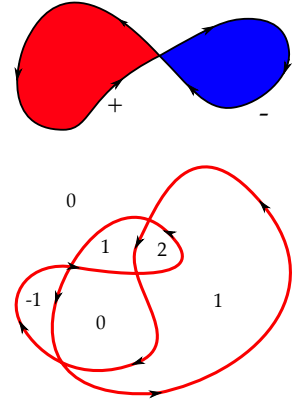
Geometri

Düzlemde kapalı, yönlü, pürüzsüz, *gömülü* bir eğri, alanı olan bir bölge sınırlar. Eğri saatin ters yönüne sahipse bu alana pozitif, saat yönündeyse negatif diyelim. Bu kadarı kolaydı. Şimdi, eğer eğri gömülü değilse durum biraz daha karışık. Örnek olarak yandaki sekiz resmine bakın; sol ilmek saatin ters yönünde, sağ ilmek saat yönünde gidiyor. İşte bu yüzden iki alanın cebirsel toplamı diye tanımlayacağımız *işaretle alan* kavramını benimsiyoruz.

Daha genel durum olan sonlu çifte noktaya sahip daldırılmış eğri söz konusuysen de benzer bir biçimde ilerleriz. Eğri düzlemi bağlantılı parçalara ayırır. Sınırsız parçaya 0 katsayısını atayalım. Eğriyi pozitif keserek başka parçaya atladığımız durumda bu tamsayının da 1 artması koşuluyla diğer parçalara da birer tamsayı atayabiliriz. Başka deyişle eğri üstünde pozitif yönde ilerleyen bir noktanın solunda gördüğü katsayı sağında gördüğünün 1 fazlasıdır. Üstelik böyle bir etiketleme vardır ve tektir. Ardından bir eğrinin işaretle alanını, ayırdığı parçaların geometrik alanlarının bu tamsayı katsayılarla doğrusal bileşimi olarak tanımlarız. Gayet doğal olan bu tanım ... Gauss'a aittir.

¹⁷⁶ R. L. Ricca and B. Nipoti. Gauss' linking number revisited. *J. Knot Theory Ramifications*, 20(10):1325–1343, 2011.

¹⁷⁷ M. Epple. Orbits of asteroids, a braid, and the first link invariant. *Math. Intelligencer*, 20(1):45–52, 1998.



Böyle bir etiketlemenin var olduğunu, düzlemde çaprazlama kesişen, yönlü, kapalı iki eğrinin (cebirsel) kesişim sayısının 0 olduğunu kullanarak gösterin. Yönlü bir yüzeyde c_1 ve c_2 çaprazlama kesişen, yönlü iki eğri olsun. c_1 ile c_2 'nin her kesişim noktasının, c_1 ve c_2 'nin oradaki teğet vektörlerinin verdiği yöne bağlı bir ± 1 işareti vardır. Tüm kesişim noktalarındaki tüm bu işaretlerin toplamı, c_1 ile c_2 'nin cebirsel kesişim sayısıdır. Eğer c_1 ve c_2 düzlemde bulunan eğrilerse bu kesişim sayısı 0'dır. Modern terimlerle konuşursak, bu gerçek, düzlemin homolojisinin 0 grup olmasının bir sonucudur. Gauss'un kabul edebileceği bir kanıt bulabilir misiniz?

Başka bir tanım da $y(x)$ eğrisinin altında kalan alanın, $y dx$ 'in integrali olmasından gelir. Düzlemde $\omega = -y dx$ türevli 1-formunu düşünün. Bunun bir eğri boyunca integrali, yukarıdaki tanımdaki sayıyla aynı olacaktır. Okuru bu hesabı yapmaya hararetle davet ediyorum. Yeri gelmişken, ω 'nın diferansiyeli, alan formu olan $dx \wedge dy$ 2-formudur. Bir 21. yüzyıl matematikçisi için şaşırtıcı olmayan bu gerçek 19. yüzyılın başında hiç de bariz değildi.

Şimdi de 2 boyutlu birim kürede kapalı, yönlü bir eğri alalım. Çevrelediği alanı tanımlayabilir miyiz? Eğri gömülüyse sorun yok. Eğri küreyi iki parçaya ayırır. Bu parçalardan biri eğriyi saatin tersine yönlendirilmiş kenarı olarak görür; alanı, bu parçanın alanı olarak tanımlayabiliriz. Peki eğri daha karmaşıksa ne yapabiliriz? Ayırdığı her bir bağlantılı parçaya, yukarıdaki aynı özelliği sağlamak üzere sayılar döşeyebiliriz. Fakat sonsuzdaki bir parçanın ağırlığı 0 olsun diyerek bir normalizasyon olası değildir zira artık sonsuz yoktur. Dolayısıyla bu tamsayılar, her parçaya aynı tamsayı ekleme serbestliğiyle iyi tanımlıdır ancak. Eğrinin çevrelediği işaretli alan, kürenin alanının bir tamsayı katını ekleme serbestliğiyle, yani mod $4\pi\mathbb{Z}$ tanımlıdır.

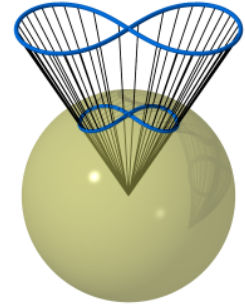
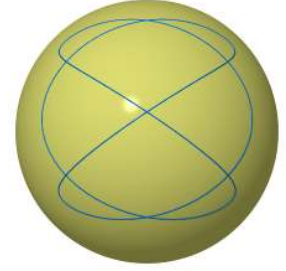
Kürede pürüzsüz kapalı bir eğri, 3 boyutlu uzayda tepenoktası başnoktada olan bir koni tarif eder. Eğrinin alanı, tanım gereği, koninin *katı açısına* eşittir, dolayısıyla mod $4\pi\mathbb{Z}$ tanımlanmıştır. Tıpkı düzlemde yönlü bir açının mod $2\pi\mathbb{Z}$ tanımlandığı gibi...

Şimdi 3 boyutlu uzayda illa gömülü olmayan, kapalı, yönlü bir γ eğrisi alalım. γ 'nın *dışında* her x noktası için tabanı γ 'da, apeksi x 'te olan koninin $A_\gamma(x)$ katı açısına bakın. Katı açısı

$$A_\gamma : \mathbb{R}^3 \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlar. Eğer γ bir düğümse, yani gömülü bir çemberse, A_γ 'nın her olağan θ değeri için $A_\gamma^{-1}(\theta)$ önümge kümesi γ 'yı kenar kabul eden yönlü bir yüzey olacaktır. Böyle yüzeylere daha önce Seifert adı altında rastlamıştık.

Şimdi dA_γ diferansiyelini hesaplayalım. Uzayda γ 'dan uzak ve birbirlerine yakın x ve x' diye iki nokta alalım. $A_\gamma(x)$ 'i hesaplamak için γ 'yı $-x$ kadar öteledikten sonra ışınlar aracılığıyla birim küreye izdüşümünü alıp işaretli alanı hesaplamalıyız. $A_\gamma(x) - A_\gamma(x')$ alan farkı, γ 'nın $-x$ ve $-x'$ kadar ötelenmiş kop-



3 boyutta kapalı bir eğri S^1 'den \mathbb{R}^3 'e bir fonksiyonun imgesidir. 2 boyutta da S^0 'dan \mathbb{R}^2 'ye, yani P, Q diye iki noktadan düzleme giden bir fonksiyona bakabiliriz! Bu durumda koninin yerini üçgen alır; $A : \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ açısı fonksiyonu x 'i $\overline{P}x\overline{Q}$ açısına götürür. A fonksiyonunun liflerine bakarken ortaokul yıllarınıza dönebilirsiniz.

yalarını kenar kabul eden halkanın birim küreye izdüşümünün işaretli alanıdır. γ' 'yi bir çokgenle yakınlştırarak $A_\gamma(x) - A_\gamma(x')$ farkını, bazı paralelkenarların izdüşümlerinin işaretli alanlarının toplamı olarak yakınlştırabiliriz. δx ve $\delta'x$ uzayda iki vektörsel apeksi 0 ve tabanı

$$x, x + \delta x, x + \delta'x, x + \delta x + \delta'x$$

olan piramidin hacminin

$$\frac{1}{3} \det(x, \delta x, \delta'x)$$

olduğunu hatırlayın. Eğer δx ve $\delta'x$ çok küçükse söz konusu katı açı, yukardaki değerin x 'in küpünün normuna bölümüyle yaklaşıp olarak elde edilir. Her şeyi bir araya getirip limit alarak, x noktasında, v vektöründe dA_γ için bir formül buluruz:

$$dA_\gamma(x, v) = \int_\gamma \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|^3} \det\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), v\right) dt.$$

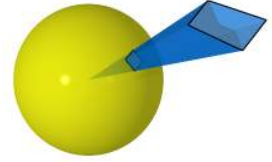
Delinmiş düzlemde yani $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümesinde kapalı bir c eğrisinin *Cauchy indisi* kavramını biliyoruz; c boyunca ilerlerken başnokta çevresinde “dönme” sayısı olan bu indisi, c boyunca süreklilik sayesinde açıyı izleyip başlangıç noktasına geri döndüğümüzde açıdaki değişimi sayarak bulabiliriz. Bunun yerine $\frac{1}{2i\pi} dz/z$ türevli formunun c boyunca integrali de alınabilirdi. Günümüz öğrencilerine kolay gelen tüm bunlar Gauss, Cauchy vs. gibi kurucu atalar için bariz değildi.

Şimdi aynı şeyi 3 boyutlu uzayda, açı yerine kapalı bir γ eğrisinin yarattığı katı açığı kullanarak yapalım. Eğer bir γ' eğrisi γ 'yi kesmiyorsa γ' boyunca bir tur dönerek katı açıdaki artışa (artışın 4π 'de 1'ine) bakalım. Bu indis bir tamsayıdır ve γ ile γ' 'nin *geçişme sayısı* olarak adlandırılır.

Şimdi dA_γ için bulduğumuz formülü kullanarak $ge(\gamma, \gamma')$ geçişme sayısını veren Gauss'un formülünü şöylece elde ederiz:

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|\gamma(t) - \gamma'(t')\|^3} \det\left(\gamma(t) - \gamma'(t'), \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma'}{dt'}(t')\right) dt dt'.$$

Gauss'un 22 Ocak 1833'te defterine yazdığı formül tam da budur.



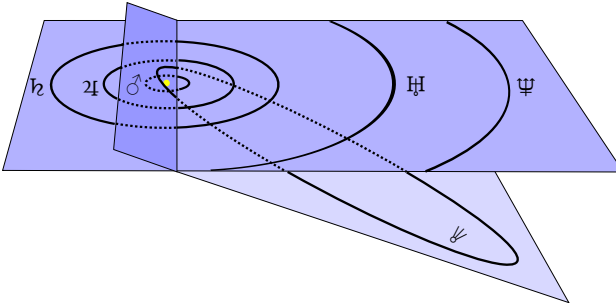
Katı açı.

Bu formülden geçişmenin simetrik olduğunu görüyoruz; yani $ge(\gamma, \gamma') = ge(\gamma', \gamma)$ oluyor. Tanımda hiç de bariz olmayan bu özelliği Gauss şöyle yazmıştı:

Bu değer simetriktir; iki eğri yer değiştirdiğinde sabit kalır.

Üstelik γ ve γ' yol boyunca birbirlerini kesmemek koşuluyla sürekli biçimde ittirildiğinde, geçişme sayısı sabit kalmak zordur zira bir tamsayı sürekli biçimde değiştirilemez. İşte bu, geçişme sayısının en önemli özelliğidir: *şekil değiştirmeler altında sabittir.*

Astronomi



*Der Werth ist gegenseitig,
d. i. er bleibt derselbe, wen
beide Linien gegen einander
umgetauscht werden.*

Halley kuyruklu yıldızının ve ayrıca Mars, Jüpiter, Satürn, Uranus ve Neptün'ün yörüngeleri.

Epple'in yukarıda sözünü ettiğimiz makalesi geçişme sayısına olası başka bir yaklaşım öneriyor. Gauss'un ilk başarılarından biri, hatta onu meşhur edeni, o zamanlarda yeni keşfedilmiş olan cüce gezegen Ceres'in yörüngesini saptamış olmasıdır. Diyelim ki gezegenimiz Dünya üstünde sabit bir konumdan bir gezegeni gözlemliyoruz. Gökyüzünde nereye bakmalıyız? Daha kesin bir ifadeyle, (Güneşe göre) sabit bir uzayda Dünyanın yörüngesi γ , gözlemlemek istediğimiz gezegenin yörüngesiyse γ' olsun. Kolaylık olsun diye γ ve γ' 'nin ayrık olduğunu varsayıyorum ☺. Eğer dönme periyotları kesirli sayılar üzerinde bağımsızsa Dünyanın ve gezegenin *kendi yörüngelerindeki* birbirilerine göre konumları bağımsız rassal değişkenlerdir. Gauss, aşağıdaki fonksiyonun imgesine gezegenin (Dünyaya göre) *zodyak* bölgesi

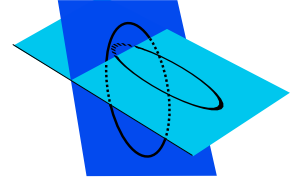
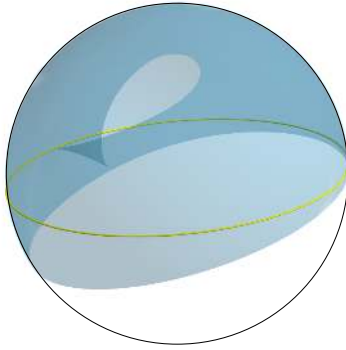
adını verir:

$$\omega : (t, t') \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \mapsto \frac{\gamma(t) - \gamma'(t')}{\|\gamma(t) - \gamma'(t')\|} \in \mathbb{S}^2.$$

Bu bölge, gözlemcinin gezegeni ararken gökkürede bakması gereken bölgedir.

Gauss'un geçişme sayısı formülündeki integralin içi bu fonksiyonun Jacobi determinantından başka bir şey değildir; böylece geçişme sayısı, zodyak bölgesinin işaretli alanının $1/4\pi$ katı olur. Günümüz matematikçisi, aynı boyutlu ve yönlü iki manifold arasında bir fonksiyonun Jacobi determinantının integralinin, fonksiyonun topolojik derecesi olduğunu şüphesiz bilir. Dolayısıyla *geçişme sayısı*, ω *zodyak fonksiyonunun derecesi olarak da tanımlanabilir*.

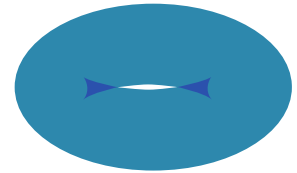
Gauss uzayda iki elips durumunu elbette ayrıntısıyla çalışmış.



Geçişmemiş iki elips. Solda zodyak...

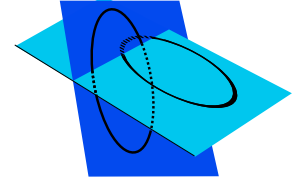
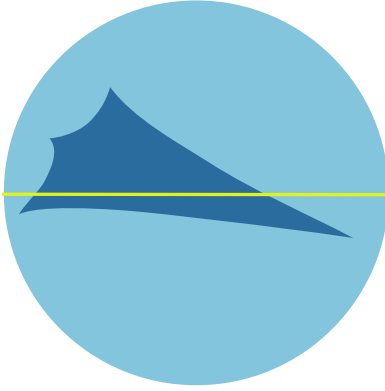
Yandaki resimdeki gibi, *iki elips geçişmemişse* zodyak tüm gökküreyi kaplamaz. Yukarıdaki resimde zodyaktaki açık mavi bölge ω tarafından iki kez uğranan noktalara karşılık geliyor. İki tekil noktaya sahip daha koyu bölge, dört kez uğranan noktalardan oluşuyor. Bunu, simit döneel yüzeyinin perspektifini ve kenar çizgisinde ortaya çıkan tekillikleri betimleyen (yandaki) alışılmış resimle karşılaştırın.

Aşağıdaki resimdeki gibi *elipsler geçişmişse*, zodyak tüm küre olur. Zodyaktaki açık mavi bölge, ω tarafından bir kez örtülen noktalara karşılık gelir. Dört tekillikli koyu bölgeyse üç kez



Simidin bir düzleme izdüşümü.

örtülür.



Geçmiş iki elips ve solda zodyak...

Tıkız, yönlü, bağlantılı, kenarsız iki manifold arasında pürüzsüz bir $f : M \rightarrow N$ fonksiyonunun *topolojik derecesi* için olası birkaç tanım vardır. İlki, N üzerinde, toplam hacmi 1 olan bir hac hacim formu seçip f^*hac olarak verilen geri çekme formunun M üzerinde integralini almaktan ibarettir. Bu tanımın hac formundan bağımsız olduğunu görmek zor değil. Nitekim, eğer hac' diye başka bir hacim formu seçilmişse $hac' - hac$ formu bir tam form olur ve bu sayede $f^*hac' - f^*hac$ formunun integrali sıfır olur. Ayrıca tanımdan, bu hesabın şekil değiştirmeler altında değişmez olduğunu da görmek kolay; eğer iki fonksiyon f_0 ve f_1 homotopiklerse $f_0^*hac - f_1^*hac$ bir tam form olur. Bu derecenin bir tamsayı olduğunu görmekse daha az kolay.

İkinci bir tanım, f' 'nin olağan bir $y \in N$ değerini seçip M' 'deki x_1, \dots, x_n öнімgelerine bakarak yapılabilir. Bu öнімgelerin her birinde f' 'nin diferansiyeli yönü korur ya da ters çevirir; buna göre bunlara + ya da - işaretleri verilir. f' 'nin derecesi, bu işaretlerin toplamıdır. Bu sayının olağan değerini seçiminden bağımsız olduğunu ve homotopi değişmezi olduğunu göstermek gerekir. Milnor'ın kitabında¹⁷⁸ bu ustalıkla yapılmıştır. Ayrıca yukardaki iki tanımın denk olduğunu göstermek de gerekli. . . Bunun yollarından biri, N üzerinde, y olağan değerinde Dirac kütlelerine yakınsayan bir hacim formları dizisi almak olabilir.

Şimdi olağan değer bakış açısını kullanarak $\omega : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow S^2$ olarak verdiğimiz zodyak fonksiyonunun derecesini hesaplaya-

İki elipsin yukardaki zodyak resimlerini yeniden inceleyerek + ve - işaretlere karar verin.

¹⁷⁸ J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

lim. S^2 'nin güney kutbunu y noktası olarak alalım. y noktasının önümge kümesi, $\gamma(t)$, $\gamma'(t')$ 'nin yukarısında olacak biçimde yani x, y koordinatları aynı ve $\gamma(t)$ 'nin z koordinatı $\gamma'(t')$ 'nünkünden büyük olacak şekilde $\gamma(t)$ ve $\gamma'(t')$ noktalarından oluşur. Böyle bir noktada ω' 'nin diferansiyelini hesaplamak kolaydır. Eğer γ ve γ' 'nin (x, y) düzlemine izdüşümleri, noktanın izdüşümünde çapraz kesişiyorsa diferansiyel form yoz değildir. İzdüşümlerin kesişimi pozitifse Jacobi determinantı *pozitif* (değilse *negatif*) olur.

Bu da bizi geçişme sayısının, Gauss'un besbelli bildiği, kombinatorik tanımına götürür. γ ve γ' eğrilerini, $\tilde{\gamma}$ ve $\tilde{\gamma}'$ izdüşümleri çapraz kesişecek biçimde genel bir düzleme izdüşürün. Her bir kesişim noktasında γ ve γ' 'nin teğet vektörlerinin pozitif ya da negatif bir taban oluşturmalarına bakarak noktayı $+1$ veya -1 indisıyla işaretleyin. Bu kesişim noktalarından, yalnızca γ 'nın γ' 'nin *üzerinde* olanlarını seçin. Buralardaki işaretlerin toplamı γ ile γ' 'nin geçişme sayısıdır.

Yandaki resimde kırmızı eğri, mavinin üzerinden 3 kez ve $+1, +1, -1$ işaretleriyle geçiyor. Dolayısıyla geçişme sayısı 1 olur.

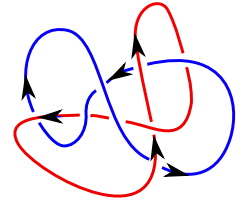
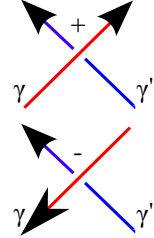
Whitehead bağı olarak anılan yandaki bağda geçişme sayısı 0'dır ama bu demek değildir ki bağın iki parçası birbirinden ayrılmak üzere ittirilebilsin¹⁷⁹. Bağı bu bağ olan, iki dallı karmaşık cebirsel bir eğri bulunmadığını gösterin.

Elektromanyetizma

Gauss'un formülü, fizikte Biot-Savart kuralını çağrıştırıyor. Bir elektrik akımı manyetik bir alan üretir. Kapalı bir γ telinin i şiddetinde doğru akım taşıdığını varsayalım. Telde olmayan bir x noktasında yaratılan manyetik alan

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|^3} \left((\gamma(t) - x) \wedge \frac{d\gamma(t)}{dt} \right) dt$$

olur; burada μ_0 manyetik sabittir. Bu vektör alanı, kapalı 1-form dA_{γ} 'nin (3 boyutlu fiziksel uzaydaki Öklit metriğine göre) eşleğidir. Ayrıca bu alan, A_{γ} 1-formunu diferansiyel kabul eden yerel bir fonksiyonun gradyan alanı olarak da yorumlanabilir. Böylece, herhangi bir γ' ilmeği üzerinde manyetik alanın dolaşımı,

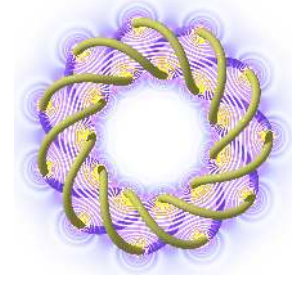


Whitehead bağı.

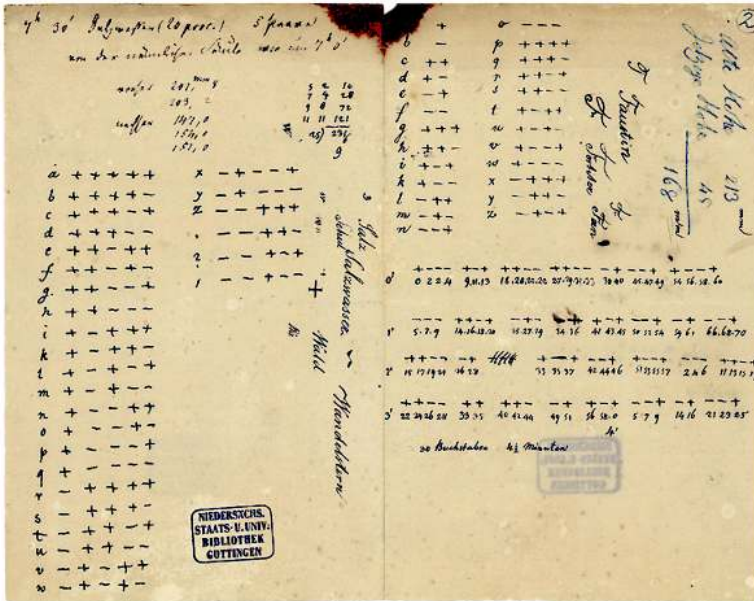
¹⁷⁹ D. Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. 1976 orijinalinin düzeltilmiş basımı.

$dA_{\gamma'}$ 'nin γ' üzerinde integralidir, yani geçişme sayısıdır. Dolayısıyla $ge(\gamma, \gamma')$ geçişme sayısı bir akım tarafından yaratılmış manyetik alanın dolaşımıdır.

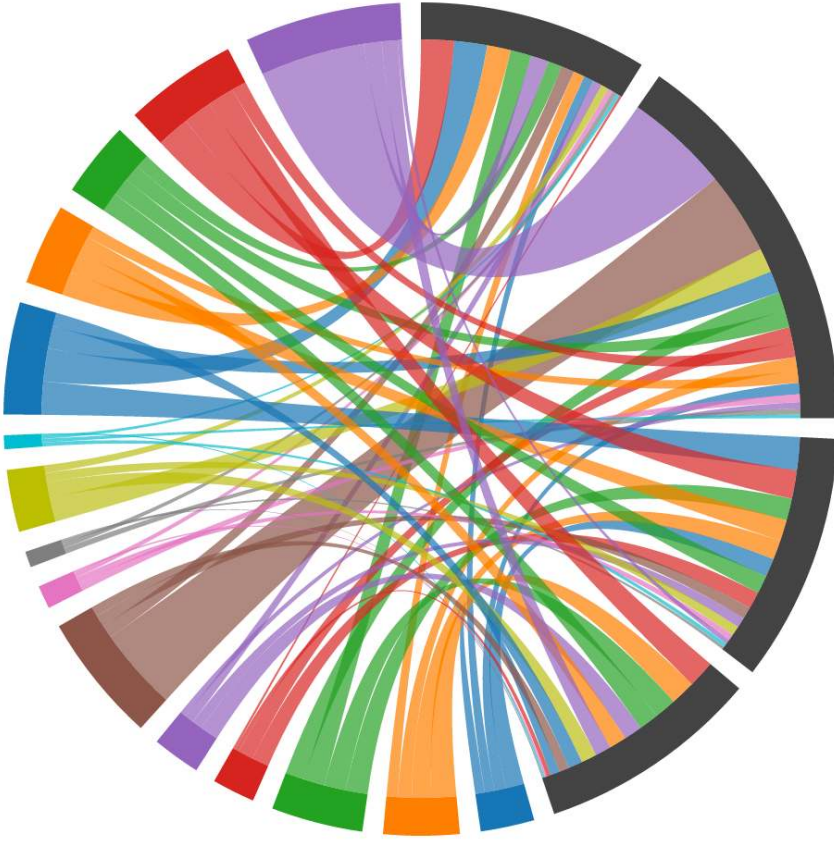
Ricca ve Nipoti'nin yukarıda andığımız makalesi, Gauss'un zihninde muhtemelen var olan manyetik yorumu gayet ilginç bir biçimde yeniden inşa ediyor. Gauss'un Weber'le birlikte, Göttingen içinde iletiler göndermek üzere ilk telgrafı kurmuş olduğunu da söylemiş olayım.



Bir simit düğümü tarafından üretilmiş manyetik alan. ©



Kendi telgraflarında kullandıkları Gauss-Weber kodu: yine kombinatorik! ©



Bir [kiriş diyagramı](#), veri bulutu içindeki ilişkilenmelerin görselleştirilmesine yönelik bir yöntemdir aynı zamanda. Stokastik bir a_{ij} matrisi verildiğinde (yani $a_{ij} > 0$ ve $\sum_j a_{ij} = 1$), her bir a_{ij} girdisi i çokluğunun j 'yle etkileşiminin oranıtısı olarak düşünülebilir. Çember boyunca uzunlukları l_1, \dots, l_n olmak üzere n adet I_1, \dots, I_n aralığı ve I_i ile I_j 'yi birleştiren ve eni $a_{ij}l_i$ olan şeritler çizilir. Uzunluklar $l_j = \sum_i a_{ij}l_i$ bağdaşma koşuluyla belirlenmelidir. Böyle bir çözümün varlığı, Perron-Frobenius teoremi sayesinde garanti altındadır. ©

Kontsevich'in dönüşü: Bir evrensel değişmez

BU GEZİNTİ, NOKTAYA HOMOTOPIK BİR İLMEK Mİ ACABA?
Başladığımız noktaya geri döndük: Maxim Kontsevich. Bu bölüm, bir sonuç bölümü değil, enginlere açılan yolda bir adım. Bize, matematikte çok eski fikirlere yepyeni bir bakış açısıyla geri dönmenin olası olduğunu da sergiliyor. Kontsevich'in 1993 makalesinde¹⁸⁰, giriş diyagramları aracılığıyla düğüm kuramında kaydettiği nefis gelişmeye kısa bir giriş yapacağım.

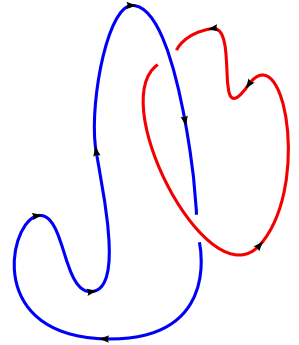
¹⁸⁰ M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

Geçişme sayısına ilişkin yeni bir bakış açısı

Ayrık, yönlü iki kapalı eğri, $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ alalım. γ_1 ile γ_2 'nin geçişme sayısının, iki eğrinin kartezyen çarpımından birim küreye giden Gauss'un *zodyak fonksiyonunun* topolojik derecesi olduğunu görmüştük.

Kontsevich'in formülü, aynı sayıyı bu kez 1 boyutlu yönlü bir manifolddan (dolayısıyla birkaç çemberin birleşiminden) bir çembere giden bir fonksiyonun topolojik derecesi olarak ifade edecek. Bu yeni bakış açısının müthiş üstünlüğü, yeni birçok değişmez tanımlamamıza olanak tanınması olacak.

Koordinatları (x, y, t) olan \mathbb{R}^3 uzayını, (koordinatı t olan) \mathbb{R} ile (koordinatı $z = x + iy$ olan) \mathbb{C} karmaşık doğrusunun kartezyen çarpımı olarak görelim. γ_1 ve γ_2 eğrilerimizin Morse olduklarını varsayalım. Bu basitçe şu demek: t koordinatına izdüşümün sonlu sayıda kritik noktası vardır ve bu noktalarda izdüşümün



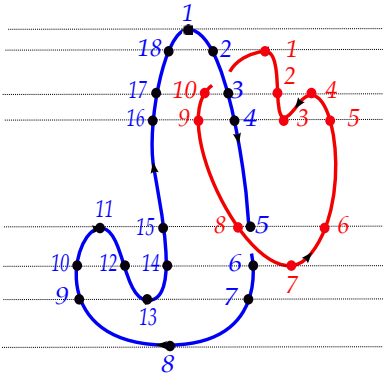
ikinci türevi sıfır değildir. Ayrıca t koordinatının kritik değerlerinin birbirlerinden farklı olduğunu kabul edelim.

Şimdi γ_1 ve γ_2 'de aynı t koordinatına sahip nokta çiftlerini, yani açıkça

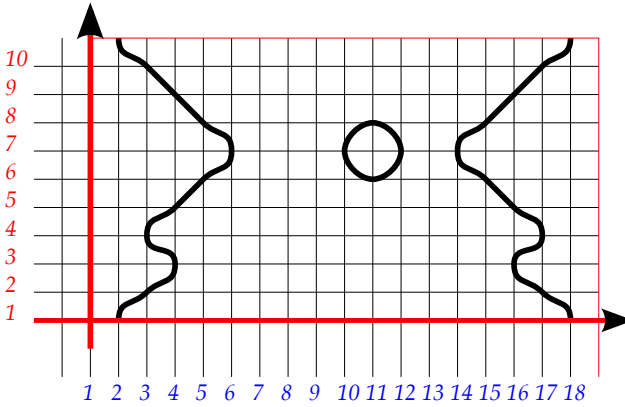
$$X = \{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \mid t(\gamma_1(s_1)) = t(\gamma_2(s_2))\}.$$

kümesini düşünelim. Bu, 2 boyutlu simitte pürüzsüz bir eğridir. Denetlenecek tek (ve kolay) şey, kritik noktaların komşuluğunda da bunun gerçekten doğru olduğu.

Aşağıdaki örneğe bakalım. 8 adet kritik değer var; bunlar ilk eğriyi 18 ikinciyse 10 tele ayırıyor.



X altmanifoldu şöylece resmedilebilir.



X üstünde doğal bir yön vardır. X 'te kritik değerlerden uzakta küçük bir I aralığı seçin. Bu aralık γ_1 'de bir I_1 ve γ_2 'de başka bir I_2 aralığına difeomorfiyle gider. γ_1 'de (ya da γ_2 'de) kritik değer içermeyen bir aralık, bir tarafta γ_1 'in (ya da γ_2 'nin) yönünden gelen diğer tarafta t koordinatından gelen iki yöne sahiptir. Eğer bu iki yön uyuşuyorsa, aralığa *pozitif*, aksi durumda *negatif* diyeceğim. I_1 ve I_2 'nin ikisi de pozitif ya da ikisi de negatifse I aralığını artan t , aksi durumda azalan t 'yle yönlendirelim.

Şimdi, X 'te bir nokta, $\gamma_1(s_1)$ ve $\gamma_2(s_2)$ noktalarını betimler; bunların da $x + iy$ karmaşık düzlemine izdüşümü *farklı* iki noktadır. Farkın açısı, $\pi : X \rightarrow S^1$ diye bir fonksiyon tanımlar. Bu fonksiyon, yönlü, 1 boyutlu manifoldlar arasındadır.

π 'nin topolojik derecesinin γ_1 ile γ_2 'nin geçişme sayısı olduğunu iddia ediyorum.

Bu iddiayı kanıtlayalım. Geçişme sayısı, yönlü yüzeyler arasındaki

$$\omega : (s_1, s_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \mapsto \frac{\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)}{\|\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)\|} \in S^2$$

fonksiyonunun topolojik derecesiydi. Birim küre S^2 , $t = 0$ 'la verilen *yatay ekvator* S^1 'i içerir. γ_1 ve γ_2 'nin değişik kritik değerlere sahip ve Morse olması kabulü, ω fonksiyonunun $S^1 \subset S^2$ çemberine çaprazlama olmasını gerektirir. Tanım gereği, $\pi^{-1}(S^1)$ önimgesi tam X olur. ω 'nin diferansiyeli, X 'in 2 boyutlu simitteki dik demetiyle ekvatorun kürede dik demetini özdeşleştirir. X 'in yönlemesine dair uzlaşımımız bu özdeşleşmeyi pozitif yapmaktadır.

ω ve π 'nin topolojik derecelerini karşılaştırmak istiyoruz. π 'nin bir $v \in S^1 \subset S^2$ olağan değeri ve v 'nin önimgesinde bir u noktası alalım. v , ω 'nin de bir olağan değeridir elbette. π 'nin u 'da diferansiyelinin Jacobi determinantının işareti, ω 'nin u 'da Jacobisinin işaretiyle aynıdır. Dolayısıyla ω ile π 'nin dereceleri eşittir. \square

Şimdi Cauchy cinsi indisler kullanarak geçişme sayısı için yeni bir formül üreteceğiz. Bu Kontsevich'in teoreminin özel bir durumu olacak.

Teorem. γ_1 ve γ_2 'nin t koordinatının kritik noktalarından geçen yatay düzlemleri kullanarak γ_1 ve γ_2 'yi dilimlere ayırım. Ardışık iki düzlem arasında γ_1 ve γ_2 , pozitif ya da negatif olan birkaç tel belirtir. γ_1 'in bir

Bunun X üstünde gerçekten de bir yön tarif ettiğini kontrol edin.

telini seçin; bu tel, ($t_- \leq t \leq t_+$ olmak üzere) $(\zeta_1(t), t)$ grafiği olsun. γ_2 eğrisinin de bir $(\zeta_2(t), t)$ telini (yine $t_- \leq t \leq t_+$ olmak üzere) seçin.

$$\epsilon \frac{1}{2i\pi} \int_{t_-}^{t_+} \frac{d(\zeta_1(t) - \zeta_2(t))}{\zeta_1(t) - \zeta_2(t)}$$

dönme miktarını hesaplayın; burada iki tel aynı işarete sahipse ϵ sayısı +1, aksi durumda -1.

Var olan tüm ardışık yatay düzlem çiftleri ve biri γ_1 'den diğeri γ_2 'den gelen olası tüm tel çiftleri için bu sayıların toplamını bulun. Sonuç $ge(\gamma_1, \gamma_2)$ geçişme sayısıdır.

Bir önceki örnekte 8 kritik değer 7 katman tanımlıyor; bu katmanlarda 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2 adet mavi tel ve 0, 2, 4, 2, 2, 0, 0 adet kırmızı tel var. Dolayısıyla

$$2 \times 0 + 2 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 0 + 4 \times 0 = 24$$

tel ikilisi mevcut. X 'teki aralık sayısı da bu nitekim.

Değerleri giriş cebirinde olan evrensel Kontsevich düğüm değişmezi

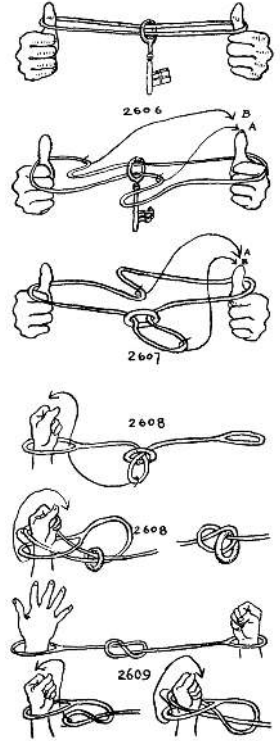
Bitirirken, "katsayıları giriş diyagramları olan formel serilerde değer alan" bir düğüm değişiminin tanımını özetle anlatacağım. Bu parlak fikir, Kontsevich'in ünlü 1993 makalesinden. . .

Kiriş sayısı n olan giriş diyagramlarının kümesini $Kiriş(n)$ diye göstereyim. Defalarca gördüğümüz gibi, bu diyagramlar yönlü bir çember üzerinde, çemberin yönü koruyan homeomorfi-leriyle değişme serbestliğiyle, ikişerli eşleşmiş $2n$ adet noktadan ibarettir. Tüm $Kiriş(n)$ 'lerin birleşimi olan $Kiriş$ kümesini taban kabul eden vektör uzayını $C[Kiriş]$ olarak göstereyim.

Dolayısıyla uzayın elemanları, sonlu sayıda w dışında diğer hepsi için $\lambda_w = 0$ olacak biçimde $\sum_{w \in Kiriş} \lambda_w \cdot w$ sonlu toplamlarıdır. $C[Kiriş]$ uzayını, kademeleri n 'yle verilmek üzere, *kademeli* bir vektör uzayı olarak düşünelim.

$C[Kiriş]$ uzayının, aşağıda ilk bakışta yapay görünen iki bağıntıyla üretilmiş altuzayına bölümünü \mathcal{A} olarak göstereyim.

— *tek terimli bağıntı*. Eğer bir giriş diyagramı, aşağıdaki resimde çemberin noktalı kısmı *herhangi* bir şekilde tamamlanarak



Geçişme sayısının var olmadığına ikna etmeye çalışan birkaç sihirbazlık numarası. 7000 resim ve 3800 düğüm içeren muhteşem kitap "[Ashley'nin Düğümler Kitabı](#)"ndan (1944)... ©

elde ediliyorsa, bu bağıntı o diyagramı \mathcal{A} 'da 0 olarak görür. Başka deyişle, münferit bir giriş içeren her diyagram \mathcal{A} 'da 0'dır.

$$= 0$$

— *dört terimli bağıntı*. Benzer olarak, aşağıdaki çemberlerdeki noktalı kısımlar herhangi bir biçimde (ama elbette hepsinde aynı biçimde) tamamlanabilir.

$$= 0$$

Böylelikle \mathcal{A} vektör uzayı da kademeli bir $\oplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ cebiri olur. Burada iki giriş diyagramı şu şekilde çarpılır.

$$=$$

Dört terimli bağıntı tam da bu işlemi, *bağlantılı toplamın yapıldığı* yerden bağımsız olarak iyi tanımlı kılmak için gereklidir.

λ_w sayıları üstünde hiçbir koşul olmaksızın $\sum_{w \in \text{Kiriş}} \lambda_w \cdot w$ şeklinde sonsuz formal toplamları da katarak cebiri $\hat{\mathcal{A}}$ 'ya tamamlayalım. $\hat{\mathcal{A}}$ 'ya *kiriş cebri* adını verelim.

Şimdi *değerleri $\hat{\mathcal{A}}$ 'da olan evrensel Kontsevich düğüm değişmezini* tanımlayabilirim.

3 boyutlu uzayda (Morse olduğunu varsaydığımız) bir γ düğümü olsun.

t koordinatının kritik noktalarından geçen yatay düzlemlerle γ 'yı dilimlere ayıralım. Böylece düğümü, yönüne göre pozitif ya da negatif olan sonlu sayıda tele ayırırız.

Bir n tamsayısı seçelim. Düğüm üzerinde,

$$t(p_1) = t(q_1) < t(p_2) = t(q_2) < \dots < t(p_n) = t(q_n)$$

koşullarını sağlayan, değişik noktalarından oluşuk $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ sıralı $2n$ 'lilerin uzayını düşünelim. Bu uzay, $2n$ boyutlu simitte n boyutlu, kenarlı ve çemberin yönü sayesinde doğal bir yöne sahip olan bir X_n altmanifoldudur.

X_n 'nin her elemanının n kirişli bir kiriş diyagramı tarif ettiğini de kaçırmayın.

X_n 'den $(\mathbb{C}^*)^n$ 'ye şöyle bir doğal ω fonksiyonu var. Eğer p ve q , γ üzerinde, t koordinatına sahip değişik iki noktaysa farkları, sıfır olmayan bir karmaşık sayıdır. Böylece $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ noktasını $(q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ n -lisine göndeririz.

Şimdi X_n 'de

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \omega^* \left(\frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \right)$$

(karmaşık) türevli n -formunu alalım. X_n 'nin bağlantılı her bir parçasında bu formun integralini alıp $Kiriş(n)$ 'de karşılık gelen elemanla çarparak ve X_n 'nin bağlantılı tüm parçaları üzerinden toplamını alarak \mathcal{A}_n 'de bir eleman elde ederiz. Tüm n değerleri için tüm bu elemanların formel toplamı $\hat{\mathcal{A}}$ 'nın bir elemanını tarif eder; $\hat{\mathcal{A}}$ 'nın bu elemanı, γ 'nın *Kontsevich değişmezidir* ve $Z(\gamma)$ olarak gösterilir.

Kesin konuşmak gerekirse, bu henüz bir değişmez olmadı! Neyse ki, γ düğümü, Morse düğümü kalacak ve kritik nokta sayısı korunacak şekilde ittirildiği sürece bu çokluk değişmez. Bu bile hiç de basit olmayan bir gerçek.

Öte yandan γ 'nın rastgele şekil değiştirmesi bir *hörgüç* yaratabilir.

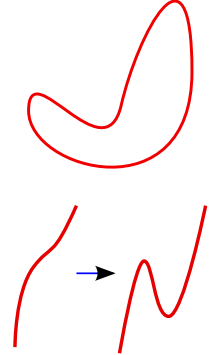
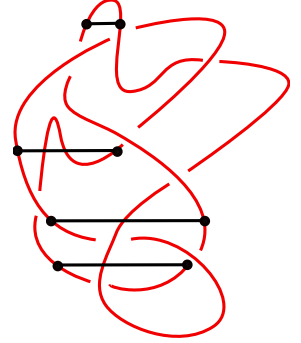
Yine de böyle bir hörgücün ortaya çıkmasıyla gelen değişim tamamıyla açıklanabilir. Yandaki hörgücün değişmezi $Z(H)$ olsun.

Eğer bir γ düğümünün t koordinatının $2c$ adet kritik noktası varsa, gösterilebilir ki γ 'nın çifte noktalar yaratmayan izotopileri, yani şekil değiştirmeleri altında

$$I(K) = Z(K)/Z(K)^{c/2} \in \hat{\mathcal{A}}$$

bölümü gerçek bir düğüm değişmezidir.

Halen $\hat{\mathcal{A}}$ cebirinde $Z(K)^{c/2}$ 'yle bölümün olası olduğunu doğrulamalıyım ki bu da zor değil. Zira $Z(K)^{c/2}$ elemanının,



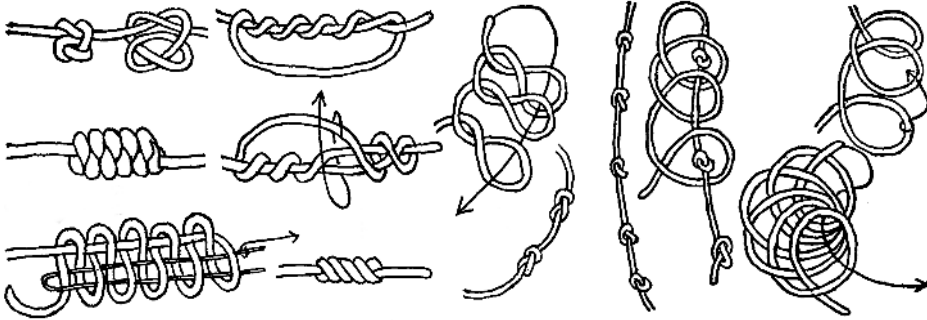
a' 'nın derecesi > 1 olmak üzere $1 + a$ biçiminde olduğunu görmek kolay; böylece $1 + a'$ 'nin tersi $1 - a + a^2 - a^3 - \dots$ olur.

Esasen hiçbir şey kanıtlamadım. Bu değişimin ne bakımdan evrensel olduğunu açıklamadım. Aslına bakılırsa iki düğümün birbirine denk olmasıyla değişmezlerinin aynı olmasının denk durumlar olduğu da bilinmiyor; böyle bir şey şahane olurdu.

Ayrıntılı bir anlatım için şu makaleyi¹⁸¹ ve şu kitabı¹⁸² hararetle öneririm.

¹⁸¹ S. Chmutov and S. Duzhin. [The Kontsevich integral](#). *Acta Appl. Math.*, 66(2):155–190, 2001.

¹⁸² S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. [Introduction to Vassiliev knot invariants](#). Cambridge University Press, Cambridge, 2012.



Ashley'nin *Düğümler Kitabı*'ndan birkaç resim daha. ©



Caspar David Friedrich:
Karga ağacı.

Sonsöz

GEZİNTİMİZ BURADA BİTİYOR. Matematik ormanlarında bayağı dolaştık. Çok ağaç gördük; yolculuğumuz kesinlikle en kısa yolu izlemedi. Umuyorum ki okurum daha çok seyahat etmek ve çok daha teferruatlı ve belki daha ciddi bir şekilde yeni ülkeler keşfetmek isteyecektir.

Caspar David Friedrich'in romantik *Sis denizi üzerinde gezgin* tablosuyla başlayan gezintimizi bir çeşit kapalı ilmek gibi düşününce, aynı ressamın 1822 yılında yaptığı *Karga ağacı* tablosuyla bitirmek sanki uygun olacak. Bu tarihte Gauss, Öklidyen olmayan geometri hayali görüyordu bile.

Bu tablo en gözde kitaplarımın birinden¹⁸³ alındı. O kitap da ağaçlarla ilgileniyor ama bizim gezintidemizde gördüklerimizden çok farklı olarak. Okurumun gelecek durağı olur belki de.

¹⁸³ J.-P. Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Fransızca aslından John Stillwell tarafından çevrilmiş, 1980 İngilizce çevirisinin düzeltilmiş ikinci baskısı.



Caspar David Friedrich:
Mann und Frau in Betrachtung des Mondes (Ayı
izleyen Kadın ve Erkek)
(1818-1824). ©

Teşekkür

Başkalarıyla paylaşılmasaydı matematik çok hüzünlü olurdu. Hazırlık safhasında, iyi arkadaşlarım ve meslekdaşlarım elinizde tuttuğunuz kitabın ilk okumalarını yapmayı önerdiler.

Thierry Barbot ilk doktora öğrencilerimden ve artık tanınmış bir dinamik sistemler ve Lorentz geometrisi uzmanı. İlk taslaktan itibaren destek olmayı kendiliğinden teklif etti.

Grant Cairns ile tanışalı çok oluyor; o zamanlar ikimiz de öğrenciydik. Beraber iki makale yazdık. Tekillikler tam onun alanı değil ama matematiğin her yönüyle ilgilidir kendisi. Ve gezinmeyi sever.

Nitelik çitasını iyi bildiğim için, Pierre de la Harpe'in fikrini almakta tereddüt ettim. Samimi gözlemleri tümüyle değerlendirildi.

Hem sanatçı hem geometrici olan Jos Leys ile özellikle matematik filmleri yapımında çok elele verdik. Resimlerin en gelişkin olanlarını ona borçluyuz.

Patrick Popescu-Pampu tekillik teorisinin en iyi uzmanlarından ve matematik tarihini çok sever. İkimiz de Henri-Paul de Saint Gervais ile işbirliğindeyiz.

Meslekdaşım Bruno Sévenec matematikte her şeyi bilir. Bol miktarda hatayı o tespit etti.

Christopher-Lloyd Simon, bu yazıları anlamaya çalışan hayali "hevesli öğrenci" rolünü oynamayı kabul etti. Ve kobay derken bir meslekdaşa dönüştü. Önerileri sayesinde kitabın başlıca sonuçları ciddi şekilde gelişti.



Thierry Barbot.



Grant Cairns.



Pierre de la Harpe.



Jos Leys.



Patrick Popescu Pampu.



Bruno Sévenec.



Christopher-Lloyd Simon.

Metnin bir versiyonu Kasım 2016'dan beri [Arxiv](#) ve [AMS Open Math Notes](#) adreslerinde vardı. Bu aşamadan beri, iki eski öğrencim kitabı detaylı bir şekilde inceleyip çok ilginç yorumlar yaptılar.

Serge Cantat genelde cebirsel geometri ve karmaşık sayılarda dinamik ile uğraşır.

Michele Triestino aslında bu gezintide hiç söz konusu olmayan olasılık, ergodik teori ve teorik fizikle ilgilenir.

Ocak ve Şubat 2017 süresince Rio de Janeiro IMPA'da bu konuda bir lisansüstü ders verme şansım oldu. Bu dersi alanlardan yedi kişi Portekizce ve İspanyolca tercümelemleri başlattılar: Aguiar Alina Sotolongo, Azul Fatalini, Carlos A. Gomes, Esteban Arreaga, Filipe Bellio da Nobrega, Gregory Cosac ve Thiago Dourado. IMPA'da postdoktora araştırmacı olan Dali Shen de uzun bir yorum listesi yolladı. Jean Barge, Brian Davey, Maxim Kontsevich, Manuel Ojanguren ve Jean-Pierre Serre'den de yorumlar aldım.

Hepsine teşekkür etmekten mutluluk duyuyorum.

Kitabı sevdiği için bana bir kutu çikolata gönderen adsız okuyucumu unutmayacağım. Kendisini şöyle tanıttı: Paul Ynomial, Yonca Düğümü Caddesi, Ker Lann.

Kalan hataların hepsinden benim sorumlu olduğumu eklemeye gerek yok sanıyorum.

Üç önemli kuruma da teşekkür etmek isterim.

[Centre National de la Recherche Scientifique](#) bana yıllarca destek oldu.

Rio de Janeiro'daki [Instituto de Matemática Pura e Aplicada](#), bu kitabın ilk taslağını yazmam için harika bir bilimsel ortam ve huzur sundu.

[École Normale Supérieure de Lyon](#) çatısı altındaki [Unité de Mathématiques Pures et Appliquées](#) de uzun zamandır benim asıl kurumumdur.



Serge Cantat.



Michele Triestino.



Étienne Ghys
Lyon, 23 Eylül 2017

Görsel Kaynaklar



Bir metnin ya da resmin yanında © sembolü yoksa, bunlar Étienne Ghys tarafından üretilmiştir. Bunların tüm telif hakları ve ilişkili ya da yakın tüm haklarından vazgeçilmiştir. Ticari amaçlar için dahi izin almadan çoğaltabilir, değiştirebilir ve yayabilirsiniz.

Aynı CC0 lisansı, [Jos Leys](#)'in şu sayfalardaki resimleri için de geçerlidir:

13, 13, 55, 118, 118, 122, 123, 130, 130, 148, 155, 158, 159, 159, 162, 164, 165, 182, 166, 167, 168, 169, 171, 176, 188, 185, 186, 186, 186, 187, 190, 191, 192, 192, 193, 206, 224, 225, 230, 233, 284, 289,

Aynı lisans, [archive.org](#) sitesinden şu belgeler için de geçerlidir:

Gauss's dissertation: 12 — Colson's translation: 48 — Buffon's translation: 52 — Cramer's book: 69 — Cramer's book: 64 — Gauss figure: 78 — Serret's book: 90 — Serret's book: 91 — Divergentibus: 92 — Architecture book: 118 — Cable: 229 — Ashley: 294.

Aynı lisans, [Wikipedia](#)'dan şunlar için de geçerlidir:

Wanderer: ii — Haeckel: 22 — Catalan: 27 — Catalan: 28 — Schroeder: 42 — Hipparchus: 42 — US signs: 43, 185 — Plutarch: 45 — Newton: 51 — Cramer: 67, — Dalember: 83 — Euler: 93, — Hardy: 97 — Cauchy: 100 — Darwin finches: 115 — Moebius: 117 — Recycling: 123 — Olympic: 128, — Noether: 139 — Cremona: 143 — Paris: 153 — G. Doré: 161 — Puiseux: 175 — Weierstrass: 179 — Dürer: 196 — Cherry tree: 204 — Darwin: 220 — Epicycles: 230 — Gauss: 235 — Gauss's signature: 236 — Tree of crows: 298 — Mann und Frau: 300,

ve keza şunlar için de:

Four seasons: 15 — Tree of life: 16 — Mississippi: 40 — Circular Iching: 279 — Chord: 290.

Diğer resimler [Creative Commons](#) lisansıyla yayınlanmıştır:



Signs: 9, 68, 93, 97, 140, 190, 205 — Knuth: 23, 25 — Mobile: 37 — : 38 — Cauldron: 124 — Cherry: 215 — Fish: 225 — IconPark: 248 — Nasa: 280.



Earth: 120 — Logo: 129 — Dimensions: 152 — Hopf: 155 — Flammarion: 160 — Geocentric: 160 — Pointe: 174 — Stasheff: 205.



Bazı belgelerini yayınlamama izin verdikleri için aşağıdaki kişilere ve kurumlara teşekkür ederim

Maxim Kontsevich: 7 — Bib. Diderot ENS Lyon: 10 — Cambridge University library: 11, 51, 53, 54, 57, 58, 61, 63 — Museu de Arte da USP: 12, 126 — Frédérique Bassino: 39 — Pierre Gallais: 60 — U. Göttingen: 74, 289 — Scot Kolodziejcki: 75, 281 — Institut de France: 84 — Gallica: 105 — Étienne Lecroart: 122 — Sylvie Pic: 124 — Laurent Bartholdi: 149, 125, 176 — Tadashi Tokieda: 131 — Ton Marar: 132 — Barry Sobel: 138 — Tony Philips: 154 — André Nachbin: 173 — Olivier Joseph: 181 — John Milnor: 183 — Rémy Oudompheng: 199 — Robert Coquereaux: 203 — Eliane Loday: 203 — Anatoly Fomenko: 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213 — Yifan Hu: 226, — Gary Urton: 251.

Bu kitap, [Edward Tufte](#)'den ilhamla oluşturulmuş “[tufte-latex Document class](#)” şablonuyla hazırlanmıştır.

Kaynaklarda, sadece ücretsiz ulaşılabilen makalelerin internet bağlantılarına yer verdim. Yine de yasallığı konusunda kuşku duyulan bazı web sayfalarında tüm kaynaklarımın kolayca bulunabileceği söylendi bana.

Sözlükçe

Çeviride karşılaştığımız matematiksel terimlerin Türkçe karşılıkları için [TMD İnteraktif Matematik Terimleri Sözlüğü](#) ve [TDK Bilim ve Sanat Terimleri Ana Sözlüğünü](#) temel aldık. Metnin zorladığı yerlerde, önerilen karşılıkları matematik camiasının güncel kullandığı sözcüklerle düzelttik, yer değiştirdik.

Okumanın kolaylaşması için aşağıdaki listeden yararlanabilirsiniz.

İngilizce

2-ball: daire
2-disk: daire
action: etki
adjacent: komşu
affine: afin
analytic: analitik
annulus: halka
apex: tepenokta
approximation: yaklaştırım
argument (of a complex number): açı
automorphism: otomorfi
axiom: belit
ball: yuvar
barycentric combination: ortamerkezci bileşim
base point: pivot
basic non-analytic: basitçe analitik olmayan
resultant: bileşke
binary: ikili
binomial: ikiterimlibinom
complete bipartite graph: iki gövdeli tam çizge
blow down (a curve): söndürmek
blow up (a curve): patlatmak
boundary (of a manifold): kenar
branch (of a curve): dal

Türkçe

branched cover: çatallı örtü
bundle: demet
cellular space: hücreli uzay
(co)chain: (ko)zincir
characteristic (Euler-Poincaré): Euler-Poincaré sayısı
chart: harita
child (of a node): yavru
circulation (Fiz.): dolaşım
codimension: ekboyut
cograph: tümçizge
collapse: çökertmek
collapsible (graph): söndürülebilir
combinatorics: kombinatorik
complete graph: tam çizge
completion: tamamlanış
complex number: karmaşık sayı
complexity: karmaşıklık
connected component (topology): bağlantılı parça
configuration: kurulumkonum
configuration space: kurulum uzayı
connected: bağlantılı
content (of a polynomial): içerik
contractible: büzülebilir
contravariant: kontravaryant

convex hull: dışbükey hazne
 core (of a Moebius band): kemer
 core (of a solid torus): kılıçık
 corollary: sonuç
 cover: örtü
 cusp/cuspidal: topuk
 cutting transversally: çaprazlama kesişen
 cycle (graph): çevrim
 (co)cycle (in homology): (ko)çevrim
 cyclic: döngüsel
 deck transformation: örtü dönüşümü
 decomposable (graph): parçalanabilir
 decomposition: ayrışma
 deformation: şekil değiştirme
 degenerate form: yoz form
 descendant (of a node): döl
 desingularization: tekilliğin yok edilmesi
 discriminant: diskriminant
 diffeomorphism: difeomorfi
 direct limit: doğrudan limit
 disk: daire
 disorienting loop: yönü ters çeviren ilmek
 domain: bölge
 double point: çifte nokta
 dual: eşlek
 edge: kenar
 effective: hesaplama algoritmalarına uygun
 elimination theory: eleme kuramı
 embedding: gömme gömme fonksiyonu
 entire function: tam fonksiyon
 equivariant: ahenkli
 exact sequence: tam dizi
 exceptional divisor: istisnai bölen
 fiber: lif
 fibered knot: lifli düğüm
 fibration: liflenme
 formal sum: formel toplam
 frame (in a vector space): çatı
 free action: serbest etki
 functor: izleç
 G-equivariant: G'ye göre ahenkli
 genus: cins
 germ (of function): tohum
 graded (group, vector space): kademeli

holomorphic: holomorf
 homeomorphism: homeomorfi
 homogeneous: homojen
 hyperplane: hiperdüzlem
 image: görüntü
 immersion: daldırmadaldırma fonksiyonu
 implicit function theorem: örtük fonksiyon teoremi
 improper integral: has olmayan integral
 incidence matrix: çakışım matrisi
 induced: tetiklenmiş
 inflection point: büküm noktası
 integral domain: tamlık bölgesi
 integration by parts: kısmi integraleme
 interlace graph: binişme çizgesi
 involution: karesi birim olan gönderim
 irreducible: indirgenemez
 isomorphic: izomorf
 isomorphism: izomorfieşyapı
 isotopy: izotopi
 iteration: yineleme
 join (graph): lehim
 join (topology): kaynak
 lexicographical order: sözlük sıralaması
 link: bağ
 link of singularity: tekilliğin bağı
 linked: geçmişmiş
 linking number: geçişme sayısı
 loop: ilmek
 manifold: manifold
 map: fonksiyongönderim
 moduli space: modül uzay
 Moebius: Möbius
 monodromy: dolanımdolanım fonksiyonu
 monomial: monom
 multiple point (of a curve): katlı nokta
 multiple root: katlı kök
 multiplicity: katlılık katlılık sayısı
 n-ary operation: n-li işlem
 n-th root of unity: birimin n-inci kökü
 n-tuple: n-li
 node (of a tree): boğum
 nonorientable: yönsüzyön verilemez
 normal bundle: dik demet
 normalization (of a function): normalizasyon

- not oriented: yön verilmemiş
 notation: gösterim
 obstruction theory: engel kuramı
 genus: cins
 operad: operad
 orbit: yörünge
 orientable: yönlü
 orientation: yönlemeyön
 oriented: yön verilmiş
 orienting loop: yönü koruyan ilmek
 origin: başnokta
 parameterize: parametreleme
 parity: teklik/çiftlik
 path: patika
 pattern: örüntü
 pencil: derge
 permutation: permütasyon
 phase portrait: faz portresi
 polynomial interchange: polinom sıra değişimi
 power series: kuvvet serisi
 preimage: önimage
 presentationsunum
 primitive (polynomial): ilkel
 principal bundle: asıl demet
 projective line: izdüşümsel doğru
 proper (function): has
 proper (subset): has
 pruned tree: budanmış ağaç
 Pull-back: geri çekme
 rank (of a group): mertebe
 rational: rasyonel kesirli
 real number: gerçek sayı
 recurrence relation: yineleme bağıntısı
 recursion: özyineleme
 reduced: indirgenmiş
 regular point (of a function): olağan nokta
 regular value (of a function): olağan değer
 resolution (of a singularity): çözünme
 resultant (of polynomials): bileşke
 rigid rotation: katı döndürme
 saddle-node (of a dynamical system): eyer-çukur noktası
 separable: ayrışabilir
 signature: işaret
 simplicial complex: simpleksli kompleks
 smooth: pürüzsüz
 solid torus: dolu simit
 spectrum (roots, eigenvalues): yelpaze
 split (in a graph): yarma
 square sphere: kare küre
 stack: yığıt
 strand (of a braid): tel
 strict transform (of a curve): has dönüşüm
 submersion: batırma
 suspension: askı
 torus: simit
 trajectory (of a vector field): iz
 transcendental: aşkın
 transitive action: geçişken etki
 transverse: çaprazçaprazlama
 trefoil knot: yonca düğümü
 trivial bundle: basit demet
 trivial knot: geçişmemiş düğüm basit düğüm
 trivialization (of a bundle): basitleştirme
 tubular neighborhood: boru komşuluğu
 uniform (-ly continuous function): düzgün
 unique factorization domain:
 tek çarpanlama bölgesi
 unit (element): birim
 unknot: geçişmemiş düğüm
 unlinked: bağlanmamışgeçişmemiş
 valuation: değerlendirme
 vertex (of a graph): köşe (çizgenin)
 vertex (of a simplicial complex):
 köşenokta (simpleksli kompleksin)

Tekillikler kuramına giriş desek değil, yeni sonuçlar içeren bir uzmanlık kitabı desek hiç değil! Matematik Dünyasında hakiki bir gezintiye davet! Hipparkos, Newton ve Gauss var, ama daha pek çok çağdaş matematikçi de bizimle. Biraz cebir, biraz topoloji, geometri, karmaşık analiz, kombinatorik ve biraz da bilgisayar bilimini kurcalıyoruz. Önce sayfaları karıştırarak, sonra orayı burayı tıklayarak ve ister öğrenci ister uzman, eninde sonunda bir makas ve kağıt alıp, siz de başlayacaksınız kurcalamaya.



ETIENNE GHYS

Lyon Ecole Normale Supérieure kurumunda kıdemli CNRS araştırmacısı.



AHMET FEYZİOĞLU

Boğaziçi Üniversitesi'nde öğretim üyesi.
İlgi alanı, cebir ve sayılar teorisi.



ARKADAŞ ÖZAKIN

Silikon Vadisi'nde yapay öğrenme üzerine araştırmalar yapıyor, Boğaziçi Üniversitesi'nde uzaktan dersler veriyor.



FERİT ÖZTÜRK

Boğaziçi Üniversitesi'nde öğretim üyesi.
Geometrik topolog ve tekillikler kuramcısı...



BETÜL TANBAY

Boğaziçi Üniversitesi'nde öğretim üyesi.
İlgi alanı matematiğin temelleri ve operatör cebirleri.