

Actions localement libres du groupe affine

Etienne Ghys

U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, E.R.A. au CNRS 07590, Université des Sciences et Techniques de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Résumé. Soit GA le groupe des transformations affines de \mathbb{R}^n préservant l'orientation. Nous étudions les actions localement libres de GA sur les 3-variétés fermées. Il s'avère que ces actions sont remarquablement rigides, ce qui permet de les étudier à conjugaison différentiable près. Nous classifions complètement ces actions sous l'hypothèse qu'elles préservent une forme de volume puis nous montrons que cette hypothèse est inutile si la variété ambiante est une sphère d'homologie réelle. Comme application, nous obtenons un résultat de rigidité pour certains groupes fuchsien : un nombre fini de paramètres suffit pour décrire, à conjugaison différentiable près, les déformations de ces groupes dans $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$.

Contenu

0. Introduction	479
I. Généralités	482
1. Propriétés qualitatives des actions localement libres	482
2. Différentiabilité des formes de volume invariantes (Théorème A)	484
II. Exemples d'actions du groupe affine.	487
1. Propriétés de GA	487
2. Actions homogènes de GA	489
III. Classification des actions de GA préservant le volume.	495
1. Représentations unitaires de GA	496
2. Le champ Z de classe C^0	498
3. Différentiabilité de Z – Démonstration du Théorème B.	507
4. Stabilité structurelle forte des groupes fuchsien (Théorème C)	512
IV. Existence d'un volume invariant.	515
1. «Hyperbolicité des actions»	515
2. Démonstration du Théorème D.	519
Bibliographie	525

0. Introduction

On définit d'ordinaire un système dynamique classique comme étant une action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété. Il est clair que le premier cas à

envisager est celui où le groupe de Lie est abélien et tout particulièrement celui d'un flot. La considération de ces systèmes dynamiques montre que la seule relation d'équivalence «raisonnable» est celle de l'équivalence topologique: deux flots sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme entre les variétés ambiantes envoyant les orbites du premier flot sur celles du second, tout en respectant leurs orientations naturelles. Toute relation d'équivalence plus forte serait instable; par une petite perturbation, on peut modifier les valeurs propres de la transformation de Poincaré d'une orbite périodique, ainsi que la période de celle-ci. Imposer à l'équivalence topologique d'être un difféomorphisme ou encore de commuter aux flots exclurait donc l'existence de flots structurellement stables.

Il est beaucoup plus difficile de perturber une action d'un groupe non abélien et la relation de conjugaison différentiable peut s'avérer utile (deux actions sont différentiablement conjuguées s'il existe un difféomorphisme commutant aux actions). C'est ce que nous voudrions montrer dans ce travail à propos des actions localement libres de codimension 1.

Le premier résultat que nous obtenons dans cette direction est le suivant:

Théorème A. *Soit G un groupe de Lie non unimodulaire et $\Phi: G \times M \rightarrow M$ une action localement libre de G , de codimension 1 et de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$), sur une variété compacte M . On suppose que Φ préserve une forme de volume sur M , de classe C^0 . Alors cette forme de volume est en fait de classe C^{r-2} .*

Par la suite, nous nous intéressons plus précisément aux actions localement libres du groupe GA des transformations affines de \mathbb{R} préservant l'orientation (ou encore le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$). Nous allons étudier les actions localement libres de GA sur les 3-variétés fermées.

Plusieurs raisons motivent le choix de ce groupe. La première est le lien étroit entre ces actions et les flots d'Anosov sur les 3-variétés fermées; les feuilletages stables des flots d'Anosov peuvent être paramétrés par des actions localement libres de GA , de classe C^0 (cf. [Mar]).

Par ailleurs, les actions localement libres de groupes abéliens ainsi que celles de groupes nilpotents sont bien connues (cf. [Ros-Rou-Wei, Cha, Hec 1]). Le groupe affine apparaît comme le premier exemple de groupe de Lie résoluble mais non nilpotent. On peut donc considérer cette étude comme un «prototype» d'étude d'actions de groupes résolubles plus généraux.

Enfin, dans un travail précédent, en collaboration avec Sergiescu [Ghy-Ser], nous avons mis en évidence un phénomène de stabilité très forte pour les actions localement libres de GA sur les 3-variétés dont le groupe fondamental est résoluble. Il s'agissait de savoir si cette rigidité était due à la variété ambiante ou au groupe affine.

Une famille assez générale d'actions localement libres peut être obtenue de la façon suivante. Soit G^n un groupe de Lie de dimension n et G^{n+1} un groupe de Lie de dimension $n+1$ contenant G^n . Supposons que G^{n+1} contienne un sous-groupe discret Γ tel que G^{n+1}/Γ soit compact. Le groupe G^n opère sur G^{n+1} par translations à gauche; il opère donc sur G^{n+1}/Γ . Les actions localement libres obtenues de cette façon seront appelées «actions homogènes de G^n ».

Explicitons les actions homogènes de GA . On montre (voir II.2) qu'il n'existe que deux groupes de Lie simplement connexes de dimension trois, contenant GA et possédant un sous-groupe uniforme discret. L'un est le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$ et l'autre est un groupe résoluble. Les actions homogènes correspondant à $SL(2, \mathbb{R})$ sont bien connues, ce sont les «feuilletages horocycliques» encore appelés «feuilletages de Roussarie» ou encore «feuilletages stables des flots géodésiques des surfaces à courbure négative constante». Les actions homogènes correspondant au groupe résoluble sont, elles aussi, bien connues: ce sont les feuilletages stables des suspensions d'automorphismes hyperboliques du tore T^2 . Ces deux familles d'exemples sont les exemples classiques de «systèmes dynamiques hyperboliques», aux fortes propriétés ergodiques.

Le théorème suivant classe, à conjugaison différentiable près, les actions localement libres de GA préservant le volume.

Théorème B. *Soit $\Phi: GA \times M^3 \rightarrow M^3$ une action localement libre de GA , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$), sur une 3-variété fermée M^3 . On suppose que Φ préserve une forme de volume de classe C^0 (et donc C^{r-2}). Alors Φ est C^{r-1} conjuguée à une action homogène.*

Soit Γ_g le groupe fondamental de la surface compacte orientable de genre $g \geq 2$. La donnée d'une métrique riemannienne à courbure égale à -1 sur cette surface fournit une représentation injective de Γ_g dans $PSL(2, \mathbb{R})$ et donc une action projective de Γ_g sur le cercle (identifié à la droite projective réelle). Deux de ces actions, correspondantes à deux métriques, sont toujours topologiquement conjuguées mais ne sont C^1 conjuguées que lorsque les métriques sont isométriques (III.4). Nous obtenons alors le résultat suivant, qui nous semble surprenant et précise la stabilité structurelle connue de ces actions.

Théorème C. *Soit $\Psi: \Gamma_g \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \subset Diff^r(S^1)$ la représentation du groupe fondamental d'une surface de genre $g \geq 2$ correspondant à la donnée d'une métrique à courbure constante égale à -1 .*

Si $\Psi': \Gamma_g \rightarrow Diff^r(S^1)$ ($5 \leq r \leq \omega$) est une représentation C^3 proche de Ψ (sur un système de générateurs de Γ), alors il existe un difféomorphisme h de S^1 , de classe C^{r-3} , tel que le conjugué de Ψ' par h est formé de transformations projectives de $PSL(2, \mathbb{R})$.

En d'autres termes, ces actions de Γ_g sur le cercle sont C^0 -structurellement stables, C^1 -structurellement instables, mais ont un «module de stabilité différentiable» de dimension finie; les actions projectives suffisent pour décrire toutes les actions voisines.

Enfin, toujours guidés par ces phénomènes de rigidité différentiable, nous avons cherché à savoir s'il est nécessaire d'imposer à l'action de préserver le volume pour obtenir le résultat du Théorème B. Nous y sommes parvenus en imposant une condition sur la topologie de la variété ambiante, ce qui donne une classification complète des actions de GA sur certaines variétés.

Théorème D. *Soit M^3 une 3-variété fermée dont le premier nombre de Betti est nul et $\Phi: GA \times M^3 \rightarrow M^3$ une action localement libre de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$). Alors, Φ préserve une forme de volume de classe C^0 sur M^3 (et Φ est donc homogène d'après le Théorème B).*

I. Généralités

1. Propriétés qualitatives des actions localement libres

Le but de cette partie est de fixer les notations et d'indiquer les principales propriétés qualitatives des actions de groupes de Lie. Soit G un groupe de Lie connexe de dimension n , et M une variété de dimension p . Une action à gauche de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) de G sur M est dite localement libre si le stabilisateur de tout point de M est un sous-groupe discret de G . Toute action localement libre d'un groupe de Lie conduit naturellement à une action localement libre de son revêtement universel. Sans perdre de généralité, nous supposons donc que G est simplement connexe.

Si l'action du groupe G sur la variété M est localement libre, les orbites des points de M sous l'action de G définissent un feuilletage de M de codimension $p - n$. La feuille de ce feuilletage passant par un point m de M est homéomorphe au quotient de G par le stabilisateur de m .

Considérons une action localement libre Φ de G sur M : $\Phi: G \times M \rightarrow M$.

Pour simplifier, nous noterons $g \cdot m$ le point $\Phi(g, m)$. Soit $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ une base de l'algèbre de Lie de G considérée comme l'algèbre des champs de vecteurs sur G invariants à droite. Soient c_{ij}^k les constantes de structure associées à cette base, c'est-à-dire:

$$[\bar{X}_i, \bar{X}_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \bar{X}_k.$$

A l'aide de Φ et des champs \bar{X}_i , nous pouvons construire de manière naturelle des champs X_i sur M , de classe C^{r-1} , définis par:

$$X_i(m) = d\Phi(-, m)_e(\bar{X}_i(e))$$

où e désigne l'élément neutre de G et $\Phi(-, m)$ l'application partielle de G dans M . Les champs ainsi construits vérifient de manière immédiate la relation de commutation

$$[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^k X_k.$$

Nous appellerons ces champs les «champs fondamentaux associés à l'action». Il est bien connu que, réciproquement, si l'on se donne sur M une famille de champs de vecteurs complets X_i vérifiant la relation précédente, on peut reconstruire une unique action Φ de G sur M dont les champs fondamentaux sont les X_i . Cette action est localement libre si et seulement si les X_i sont linéairement indépendants en chaque point.

Puisque nous disposons de n champs de vecteurs X_i sur la variété M ainsi que d'une action de G sur M , il peut être utile de décrire la façon dont G opère sur ces champs. Considérons pour cela la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie G_e . Celle-ci s'écrit sous la forme

$$\text{ad}(g)(\bar{X}_i) = \sum a_{ij}(g) \bar{X}_j.$$

Les champs fondamentaux X_i se transforment alors sous l'action de G par la formule

$$g_*(X_i) = \sum a_{ij}(g) X_j.$$

(Comme nous le ferons souvent par la suite, nous avons identifié ici l'élément g de G et le difféomorphisme correspondant de M .) Il suffit en effet de voir comment les champs invariants à droite \bar{X}_i se transforment par translation à gauche. Or, ceci est précisément une définition de la représentation adjointe.

Nous ne nous intéressons désormais qu'aux actions localement libres de codimension 1, c'est-à-dire que nous imposerons la condition $n = p - 1$. On peut alors faire quelques remarques d'ordre qualitatif sur le feuilletage de codimension 1 engendré par l'action.

Rappelons qu'un lacet γ d'une feuille d'un feuilletage est appelé cycle évanouissant s'il existe une homotopie libre $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq 1}$ telle que $\gamma_0 = \gamma$; γ_0 n'est pas homotope à zéro dans sa feuille; pour tout t , le lacet γ_t est un lacet d'une feuille; mais γ_t est homotope à zéro dans sa feuille dès que t est non nul. Si un feuilletage de codimension 1 ne possède pas de cycle évanouissant, le groupe fondamental de chaque feuille s'injecte dans celui de la variété. La propriété la plus générale connue sur les actions localement libres de codimension 1 est la :

Proposition I.1.1. (cf. [Pla 2]). *Un feuilletage défini par une action localement libre d'un groupe de Lie est sans cycle évanouissant.*

Corollaire I.1.2. *Soit G un groupe de Lie homéomorphe à \mathbb{R}^n . S'il existe une action localement libre de G sur une variété M de dimension $n + 1$, alors le revêtement universel \tilde{M} de M est homéomorphe à \mathbb{R}^{n+1} .*

Démonstration. Soit \mathcal{F} le feuilletage induit par l'action et $\tilde{\mathcal{F}}$ son relevé dans \tilde{M} . Puisque \mathcal{F} est sans cycle évanouissant, toutes les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont homéomorphes à G , c'est-à-dire à \mathbb{R}^n . D'après [Pa 1], la variété \tilde{M} est homéomorphe à \mathbb{R}^{n+1} . \square

Une autre obstruction à l'existence d'une action localement libre est décrite par le théorème suivant :

Théorème I.1.3. *Soit G un groupe de Lie dont tous les espaces homogènes G/Γ avec Γ discret, ont une croissance exponentielle. S'il existe une action localement libre de codimension 1 de G sur une variété compacte M , alors le groupe fondamental de M a une croissance exponentielle.*

Démonstration. Pour les notions de croissance d'une variété riemannienne, d'un groupe de génération finie, voir [Pla 1] ou [Hec 3]. La croissance d'un espace homogène G/Γ est la croissance de la métrique riemannienne provenant d'une métrique invariante à droite sur G .

Il est clair que si un feuilletage peut être défini par une action localement libre, on peut toujours trouver une métrique riemannienne sur la variété ambiante telle que les champs fondamentaux X_1, X_2, \dots, X_n soient de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Toutes les feuilles sont alors isométriques à un espace homogène G/Γ muni d'une métrique provenant d'une métrique de G invariante à droite. Sous les hypothèses du théorème, toutes les feuilles sont donc à croissance exponentielle.

La conclusion cherchée est alors une conséquence du théorème de Plante [Pla] suivant lequel la croissance des feuilles d'un feuilletage est dominée par celle du groupe fondamental de la variété ambiante lorsque le feuilletage considéré est sans cycle évanouissant. \square

2. Différentiabilité des formes de volume invariantes (Théorème A)

Soit λ une forme de volume invariante à gauche sur le groupe de Lie G . Notons R_g la translation à droite de G correspondant à l'élément g . La «fonction modulaire» Δ est le morphisme de G dans \mathbb{R}_+^* défini par:

$$R_g^* \lambda = \Delta(g) \cdot \lambda.$$

Supposons maintenant que G n'est pas unimodulaire, c'est-à-dire que Δ n'est pas une constante. Soit $\Phi: G \times M \rightarrow M$ une action localement libre, de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) et de codimension 1, sur la variété compacte M . On suppose que Φ préserve une forme de volume Ω de classe C^0 sur M et l'on se propose de montrer que Ω est en fait de classe C^{r-2} .

Lemme I.2.1. *Il existe un élément g_1 de G et un point m de M tels que $\Delta(g_1) \neq 1$ et $g_1 \cdot m = m$.*

Démonstration. Soit ω la 1-forme définie par $\omega = i_{X_1} i_{X_2} \dots i_{X_n} \Omega$. Cette forme définit le feuilletage associé à Φ et on a $g^* \omega = \Delta(g) \omega$. Soit X un élément de G_e tel que $\Delta(\exp(X)) < 1$ et considérons le flot Φ_t de M associé au sous-groupe à 1-paramètre $\exp(tX)$. Tous les points de M sont non-errants pour Φ_t car Φ_t préserve Ω . Puisque Φ_t^* contracte ω , on déduit de [Hir-Pug-Shu] qu'il existe un champ de vecteurs Z transverse au feuilletage tel que $(\Phi_t)_*(Z)$ tend vers 0 exponentiellement. Considérons alors un ouvert distingué B pour le feuilletage étudié. Il est alors facile de construire un réel t arbitrairement grand et un point m de B tel que $\Phi_t(m)$ et m appartiennent à la même plaque de B . On a donc $\Phi_t(m) = g_0 \cdot m$ où g_0 appartient à un voisinage uniformément borné de e dans G . Si t est assez grand, le point m et l'élément $g_1 = g_0^{-1} \cdot \exp(tX)$ conviennent. \square

Soit $T(t)$ un arc transverse au feuilletage, paramétré par $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ et tel que $T(0)$ soit le point m . Soit U un voisinage de l'élément neutre de G . Si l'on choisit U et T assez petits, l'application

$$\phi: (g, t) \in U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\mapsto g \cdot t \in M$$

est un difféomorphisme sur son image notée V . Soit ϕ_t l'application partielle de U dans M .

La forme de volume Ω , considérée comme mesure sur M , peut se «désintégrer» dans V . C'est-à-dire qu'il existe une mesure μ_1 sur $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ (à densité continue et strictement positive par rapport à dt) telle que, pour tout borélien B contenu dans V , on ait:

$$(*) \quad \int_B \Omega = \int_{]-\varepsilon, +\varepsilon[} \lambda(\phi_t^{-1}(B)) d\mu_1(t).$$

Etudions l'holonomie à l'aide de la carte ϕ . Puisque ϕ est un difféomorphisme de classe C^r , il existe un réel positif η et deux fonctions de classe C^r .

$$K:]-\eta, +\eta[\rightarrow G,$$

$$H:]-\eta, +\eta[\rightarrow]-\varepsilon, +\varepsilon[,$$

telles que, pour tout $t \in]-\eta, +\eta[$:

$$g_1 \cdot T(t) = K(t) \cdot T(H(t)) \quad \text{et} \quad K(o) = e.$$

Il est clair que H n'est autre que l'holonomie de la feuille considérée, calculée sur la transversale $T(t)$.

On peut alors trouver un voisinage U' de e dans G , contenu dans U , tel que si $g \in U'$ et $t \in]-\eta, +\eta[$, on ait:

$$g_1 \cdot (g \cdot T(t)) = (g_1 g g_1^{-1}) \cdot (g_1 \cdot T(t))$$

$$= (g_1 g g_1^{-1}) \cdot (K(t) \cdot T(H(t))).$$

C'est-à-dire que, dans la carte $\phi|_{U' \times]-\eta, +\eta[}$, l'application

$$x \in M \mapsto g_1 \cdot x \in M$$

s'écrit en coordonnées locales:

$$(g, t) \mapsto (g_1 g g_1^{-1} K(t), H(t)).$$

Ecrivons maintenant que Ω est invariante par l'action de G . En choisissant pour B l'image par ϕ du produit d'une boule et de l'intervalle $[0, t]$, la formule (*) donne:

$$(**) \quad \int_0^t d\mu_1(t) = \Delta(g_1)^{-1} \int_0^{H(t)} \Delta K(t) d\mu_1(t)$$

car la mesure de Haar λ est multipliée par $(g_1)^{-1} \Delta K(t)$ dans la transformation

$$g \mapsto g_1 g g_1^{-1} K(t) \quad (g_1 \text{ et } t \text{ fixes}).$$

Lemme I.2.2. Si $g_1 \in G$ et $m \in M$ sont tels que $\Delta(g_1) \neq 1$ et $g_1 \cdot m = m$, alors Ω est de classe C^{r-2} au voisinage de m .

Démonstration. Soit u la fonction continue et strictement positive telle que la mesure $d\mu_1$ que nous avons construite dans le lemme précédent soit $u(t)dt$. La formule **) s'écrit alors:

$$\int_0^t u(t) dt = \Delta(g_1)^{-1} \int_0^{H(t)} \Delta K(t) u(t) dt.$$

Si l'on dérive cette égalité par rapport à t et si l'on fait $t=0$, on obtient:

$$u(0) = \Delta(g_1)^{-1} \cdot H'(o) \cdot u(o)$$

et par conséquent, $\alpha = H'(o) = \Delta(g_1)$ n'est pas égal à 1. D'après [Ste], le germe de H au voisinage de 0 est C^{r-1} conjugué à sa partie linéaire, c'est-à-dire que l'on pouvait choisir un paramétrage de l'arc $T(t)$, de classe C^{r-1} , de telle sorte que $H(t) = \alpha t$. Pour ce paramétrage, on a :

$$u(t) = \Delta(K(\alpha t)) u(\alpha t).$$

Supposons par exemple $\alpha < 1$. On a alors :

$$u(t) = u(0) \prod_{i=1}^{\infty} \Delta(K(\alpha^i t)).$$

Il est facile de vérifier que ce produit infini définit une fonction de classe C^{r-1} . Dans la carte ϕ , de classe C^{r-1} , la forme Ω était donc de classe C^{r-1} . La forme Ω était donc de classe C^{r-2} au voisinage de m . Remarquons de plus que si la transversale $T(t)$ était invariante par g_1 , on aurait $u(t) = u(0)$. \square

I.2.3. Démonstration du Théorème A. Rappelons qu'un ensemble minimal m d'un feuilletage de codimension 1 peut être de trois types différents; soit m est une feuille compacte, soit $m = M$, soit m est de type «exceptionnel».

Le feuilletage qui nous intéresse ne possède pas de feuilles compactes car un groupe de Lie non unimodulaire G n'a pas de sous-groupes uniformes discrets Γ (car alors la translation à gauche sur G/Γ par un élément g tel que $\Delta(g) > 1$ augmenterait le volume total de G/Γ , ce qui est impossible).

Les Lemmes I.2.2 et I.2.3 montrent que Ω est de classe C^{r-2} sur un ouvert non vide et donc sur le saturé de cet ouvert par l'action car celle-ci préserve Ω . Si toutes les feuilles sont denses, Ω est donc de classe C^{r-2} sur la variété M toute entière.

Si le feuilletage possède un minimal exceptionnel, le théorème de Sacksteder [Sac], montre qu'un certain lacet tracé dans ce minimal a une holonomie hyperbolique, c'est-à-dire que dans le Lemme I.2.1, on peut choisir m dans le minimal. Par conséquent, Ω est de classe C^{r-2} sur un ouvert rencontrant tous les ensembles minimaux. Puisque Ω est invariante par G , c'est donc que Ω est de classe C^{r-2} partout. \square

Remarque I.2.4. On pourrait montrer que, dans les conditions du Théorème A, l'action de G n'a pas de minimal exceptionnel.

Remarque I.2.5. On pourrait affaiblir l'hypothèse du Théorème A en supposant seulement que l'action préserve une mesure absolument continue par rapport à une forme de volume et dont la densité est bornée supérieurement (voir [Ghy] pour la démonstration dans le cas du groupe affine).

II. Exemples d'actions du groupe affine

Nous noterons GA le groupe affine de la droite réelle, c'est-à-dire le groupe des transformations

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow ax + b \in \mathbb{R} \quad a > 0.$$

Ce sont les actions localement libres de GA que nous allons étudier. Nous représenterons un élément g de GA par un couple (a, b) et, lorsque cela sera nécessaire, nous noterons $a(g)$ et $b(g)$ les deux composantes de g .

1. Propriétés de GA

Nous rassemblons dans une proposition quelques propriétés algébriques de GA . Toutes sont élémentaires, nous ne les démontrerons donc pas.

Proposition II.1.1. *Le groupe affine GA est résoluble, une base de son algèbre de Lie est donnée par les deux champs de vecteurs invariants à droite suivants :*

$$\bar{X}_{(a,b)} = a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b}, \quad \bar{Y}_{(a,b)} = \frac{\partial}{\partial b}.$$

La relation de commutation est :

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = -\bar{Y}.$$

Dans cette base, la représentation adjointe est donnée par :

$$\text{ad}(g)(\bar{X}) = \bar{X} - b(g)\bar{Y},$$

$$\text{ad}(g)(\bar{Y}) = a(g)\bar{Y}.$$

La mesure de Haar invariante à gauche est la suivante :

$$\lambda = \frac{da \wedge db}{a^2}.$$

La fonction modulaire Δ est :

$$\Delta(g) = a(g)^{-1}.$$

La métrique invariante à droite sur GA (définie à une constante multiplicative près) a une courbure négative constante. C'est-à-dire que GA s'identifie métriquement au plan hyperbolique. \square

La proposition suivante est, elle aussi, classique et élémentaire :

Proposition II.1.2. *Tout sous-groupe discret de GA est soit trivial soit infini cyclique.*

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe discret non trivial de GA . Si Γ est abélien, deux cas sont possibles :

i) Γ est uniquement constitué de translations. Etant discret, Γ doit être infini cyclique.

ii) Tous les éléments de Γ fixent un point commun de \mathbb{R} (par l'action canonique de Γ sur \mathbb{R}). Dans ce cas, on peut supposer (quitte à effectuer une conjugaison intérieure) que Γ est inclus dans le groupe des homothéties de centre 0. Ici encore, Γ étant discret, il doit être infini cyclique.

Si Γ n'est pas abélien, il contient au moins une translation $(1, b)$ et une homothétie (a, b) . Alors Γ contient:

$$(a, b)^{-n}(1, b)(a, b)^n = \left(1, \frac{b}{a^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1, 0).$$

Le sous-groupe Γ n'est pas discret. \square

Il est bien connu que le demi-plan de Poincaré est à croissance exponentielle. L'espace homogène GA/Γ où Γ est engendré par une translation $(1, b)$ est un "cusp", sa croissance est, elle aussi, exponentielle. Lorsque Γ est engendré par une homothétie, un calcul facile montre que l'espace homogène correspondant GA/Γ est encore un cylindre à croissance exponentielle.

En résumé, les diverses remarques d'ordre qualitatif que nous avons faites au paragraphe I et les propriétés de GA que nous venons de décrire nous mènent au résultat suivant:

Proposition II.1.3. *Soit Φ une action localement libre de GA sur une variété compacte M , de dimension 3 et de classe C^r ($r \geq 2$). Alors:*

i) *Il existe deux champs de vecteurs X et Y , de classe C^{r-1} , linéairement indépendants en chaque point et vérifiant $[X, Y] = -Y$. Ces champs se transforment sous l'action du groupe par les formules suivantes:*

$$g_*(X) = X - b(g)Y, \quad g_*(Y) = a(g)Y.$$

ii) *Les feuilles du feuilletage induit sont des cylindres ou des plans. Toutes sont à croissance exponentielle. Par conséquent, la variété M est sans bord, son groupe fondamental est à croissance exponentielle et son revêtement universel est difféomorphe à \mathbb{R}^3 .* \square

Précisons ces résultats.

Proposition II.1.4. *Il existe effectivement des cylindres, il existe effectivement des plans. Tous les cylindres ont une holonomie non triviale.*

Démonstration. Si le feuilletage défini par l'action avait toutes ses feuilles homéomorphes à des plans, la variété M serait homéomorphe au tore T^3 (cf. [Ros]). Le groupe fondamental de M ne serait pas à croissance exponentielle, d'où une contradiction.

De même, si le feuilletage ne contenait que des cylindres, le groupe fondamental de la variété serait à croissance polynomiale (cf. [Hec 2]), ce qui donne encore une contradiction.

De plus, si l'un des cylindres avait une holonomie triviale, l'argument utilisé dans le lemme fondamental de [Hec2] pourrait s'appliquer et montrerait que toutes les feuilles sont des cylindres. Tous les cylindres ont donc une holonomie non triviale. \square

Proposition II.1.5. *Toutes les feuilles d'un feuilletage obtenu à l'aide d'une action localement libre de classe C^2 de GA sur une variété compacte de dimension trois, sont partout denses.*

Démonstration. Les feuilles du feuilletage induit étant des plans ou des cylindres, elles ont un ou deux bouts (cf. [Eps]). On utilise alors le résultat de Duminy (cf. [Dum]) affirmant que si un feuilletage de codimension un et de classe C^2 d'une variété compacte possède un minimal exceptionnel, il possède au moins une feuille ayant une infinité de bouts. Comme le feuilletage considéré est sans feuilles compactes, toutes les feuilles sont partout denses. \square

Remarquons que cet argument reste valable pour une action de groupe résoluble, car les espaces homogènes de groupes de Lie résolubles ont un nombre fini de bouts.

Remarque II.1.6. La proposition précédente serait fautive si l'action n'était supposée que de classe C^1 (voir [Pla4] pour une étude des ensembles minimaux des actions localement libres de GA , de classe C^1).

La proposition suivante sera importante pour la suite:

Proposition II.1.7. *Toute action localement libre de GA sur une 3-variété compacte M préserve une mesure de Borel finie sur les compacts. Si l'action est de classe C^2 , cette mesure est positive sur les ouverts.*

Démonstration. Il suffit d'observer qu'un groupe résoluble est moyennable et que tout groupe moyennable opérant sur un compact préserve une mesure de Borel finie sur ce compact. (voir [Gre]). Le support de cette mesure est un fermé invariant par l'action. Si celle-ci est de classe C^2 , toutes les orbites sont partout denses et le support de la mesure est donc M tout entier. \square

Proposition II.1.8. *Si l'action considérée est de classe C^2 , les orbites périodiques du champ X ne peuvent pas être répulsives. Tous les points de M sont non-errants pour le flot associé à X .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que le flot associé à X préserve une mesure μ qui charge les ouverts. \square

2. Actions homogènes de GA

a) Construction d'actions «homogènes»

Soient G un groupe de Lie de dimension n et G' un groupe de Lie de dimension p contenant un sous-groupe isomorphe à G . Supposons que G' contienne un sous-

groupe discret Γ tel que G'/Γ soit compact. Le groupe G opère sur G' par translations à gauche, il opère donc sur l'espace homogène G'/Γ .

$$\begin{aligned} G \times G'/\Gamma &\rightarrow G'/\Gamma \\ (g, h \cdot \Gamma) &\rightarrow gh \cdot \Gamma. \end{aligned}$$

Le stabilisateur du point $h\Gamma$ est:

$$h\Gamma h^{-1} \cap G.$$

Ce groupe est discret dans G . Par conséquent, l'action que nous venons de décrire de G sur G'/Γ est localement libre. Les actions de ce type seront appelées «actions homogènes» de G .

Essayons d'appliquer cette méthode au groupe affine.

Proposition II.2.1. *Il existe deux groupes de Lie G' et deux seulement tels que:*

- i) G' est simplement connexe et de dimension trois.
- ii) G' contient un sous-groupe isomorphe à GA .
- iii) G' contient un sous-groupe discret Γ tel que G'/Γ est compact.

Ces deux groupes de Lie sont les suivants:

i) Le revêtement universel $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ de $SL_2(\mathbb{R})$, dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, avec les relations:

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] &= -\bar{Y}, \\ [\bar{X}, \bar{Z}] &= \bar{Z}, \\ [\bar{Y}, \bar{Z}] &= 2\bar{X}. \end{aligned}$$

ii) Un groupe de Lie résoluble de dimension trois que nous noterons G_3 dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ avec les relations:

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] &= -\bar{Y}, \\ [\bar{X}, \bar{Z}] &= \bar{Z}, \\ [\bar{Y}, \bar{Z}] &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'examiner, dans la liste des algèbres de Lie de dimension trois (cf. par exemple [Kir]) celles qui contiennent deux éléments X et Y tels que $[X, Y] = -Y$. On trouve finalement que les seuls groupes de Lie simplement connexes de dimension trois contenant le groupe affine sont:

- i) $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$
- ii) G_3
- iii) des groupes de Lie résolubles non unimodulaires.

Le troisième cas est à éliminer car un groupe de Lie non unimodulaire ne peut posséder de sous-groupe uniforme discret.

Le fait que $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$ contienne des sous-groupes uniformes discrets (i.e. à quotients compacts) est bien connu. Nous étudierons le cas de G_3 dans le paragraphe suivant, et en particulier, nous verrons qu'il existe effectivement des sous-groupes uniformes discrets de G_3 . \square

Nous voyons donc apparaître deux familles d'actions localement libres du groupe affine; celles sur les espaces G_3/Γ , et celles sur $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la description géométrique de ces actions.

Remarque 1. Les «actions homogènes» sont évidemment transversalement homogènes, c'est-à-dire que la structure transverse du feuilletage associé à l'action est modélée sur l'espace homogène G'/G .

Remarque 2. Dans le cas d'une action de groupe de Lie nilpotent G , on sait que la variété ambiante est un espace homogène G'/Γ où G' est un sur-groupe de G (cf. [Hec 1]). Cependant, l'action localement libre peut être totalement différente d'une action «homogène». En ce qui concerne le groupe affine, nous allons montrer que si la mesure invariante est suffisamment régulière, l'action est conjuguée à une action «homogène».

b) *Les actions «résolubles»*

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux actions homogènes du type:

$$GA \times G_3/\Gamma \rightarrow G_3/\Gamma.$$

Commençons par préciser la nature de G_3 et de ses sous-groupes uniformes discrets. Soit A une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à deux. La condition relative à la trace signifie que A possède deux valeurs propres strictement positives. Ceci permet de définir A^t pour tout réel t . Considérons, dans l'ensemble des triplets (t, x, y) de \mathbb{R}^3 , la loi de composition suivante:

$$(t, x, y)(t', x', y') = (t + t', A^t(x', y') + (x, y)).$$

On vérifie facilement que ceci définit une structure de groupe et que le groupe obtenu est isomorphe à G_3 (et ceci quelle que soit la matrice A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\text{tr} A > 2$).

Indiquons comment le groupe affine se plonge dans G_3 . Soit U un vecteur propre de A , associé à la valeur propre positive λ . A l'élément (a, b) de GA , associons l'élément

$$\left(\frac{\text{Log } a}{\text{Log } \lambda}, bU \right)$$

de G_3 . On obtient ainsi deux plongements de GA dans G_3 (un pour chaque direction propre de A).

Soit Γ_A le sous-groupe de G_3 formé des triplets entiers (t, x, y) de \mathbb{Z}^3 . Il est facile de constater que Γ_A est un sous-groupe uniforme discret de G_3 .

Proposition II.2.2. *L'espace homogène G_3/Γ_A est difféomorphe à un fibré en tores sur le cercle T_A^3 dont la monodromie est donnée par A . Plus précisément:*

$$T_A^3 \simeq T^2 \times \mathbb{R}/(m, t) \sim (\bar{A}(m), t + 1)$$

où \bar{A} désigne l'automorphisme du tore déduit de A .

Démonstration. Le groupe Γ_A est engendré par:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0) \text{ et } (0, 0, 1).$$

L'espace homogène G_3/Γ_A est donc l'espace \mathbb{R}^3 où l'on identifie les points:

$$\begin{aligned} (t, x, y) \text{ avec } (t+1, A(x, y)) \\ (t, x+1, y) \\ (t, x, y+1). \end{aligned}$$

Il est alors clair que G_3/Γ_A est difféomorphe à T_A^3 . \square

La proposition suivante montre que les espaces homogènes décrits précédemment sont les seuls à considérer.

Proposition II.2.3. *Soit Γ un sous-groupe uniforme discret de G_3 . Alors, il existe une matrice A de $SL_2(\mathbb{Z})$, de trace strictement supérieure à deux telle que Γ soit conjugué à Γ_A dans G_3 .*

Démonstration. Le groupe G_3 s'écrit comme une extension:

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow G_3 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0.$$

Soit γ un élément de Γ qui n'est pas dans \mathbb{R}^2 . Le sous-groupe discret $\Gamma \cap \mathbb{R}^2$ de \mathbb{R}^2 est un sous-groupe discret invariant par la conjugaison intérieure par γ . Ce sous-groupe n'est pas trivial car, le commutateur de deux éléments de Γ appartient à \mathbb{R}^2 , et Γ n'est pas abélien. Ce sous-groupe n'est pas non plus de rang 1 car l'action de γ sur \mathbb{R}^2 aurait une valeur propre égale à ± 1 . Ceci montre que $\Gamma \cap \mathbb{R}^2$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et que l'action de γ sur \mathbb{R}^2 préserve ce treillis: Il est alors facile de compléter la démonstration. \square

Il nous reste à décrire géométriquement les actions obtenues sur ces fibrés T_A^3 .

Le feuilletage de \mathbb{R}^2 par droites parallèles à l'une des directions propres de A définit un feuilletage par droites du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Le feuilletage produit sur $T^2 \times \mathbb{R}$ est évidemment invariant par l'application:

$$(m, t) \in T^2 \times \mathbb{R} \mapsto (\bar{A}(m), t+1) \in T^2 \times \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi deux feuilletages (un pour chaque choix d'une direction propre) sur le fibré en tores T_A^3 . Ces feuilletages sont évidemment ceux définis par les actions homogènes de GA sur T_A^3 . (Voir aussi [Ghy-Ser] pour une étude de ces feuilletages.)

Précisons les champs de vecteurs fondamentaux associés à l'action. Soit (u, v) des coordonnées propres de \mathbb{R}^2 relatives à la matrice A et λ la valeur propre correspondant à la direction propre choisie. Les deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^3

$$\tilde{X}(u, v, t) = \frac{1}{\text{Log } \lambda} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\tilde{Y}(u, v, t) = \lambda^t \frac{\partial}{\partial v},$$

passent au quotient sur T_A^3 en deux champs de vecteurs X et Y qui sont bien sûr les champs de vecteurs fondamentaux associés à l'action.

En plus de ces deux champs, on dispose d'un troisième champ Z correspondant au troisième générateur de l'algèbre de Lie de G_3 . Ce champ est défini par :

$$Z_{(u,v,t)} = \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Il se transforme sous l'action de GA par la formule :

$$\forall g \in GA, g_* Z = \frac{1}{a(g)} Z.$$

c) Les actions « semi-simples »

Le groupe affine se plonge dans $SL_2(\mathbb{R})$ de deux façons « naturelles » :

$$GA \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$$

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ -\frac{b}{\sqrt{a}} & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

A ces plongements correspondent des actions homogènes que nous allons décrire.

Soit \mathbb{H}^2 le demi-plan de Poincaré. Le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ opère par isométrie sur \mathbb{H}^2 , il opère donc sur le fibré unitaire tangent $T_1(\mathbb{H}^2)$ à \mathbb{H}^2 . On vérifie facilement que cette action est transitive et libre, ce qui permet d'identifier $PSL_2(\mathbb{R})$ à $T_1(\mathbb{H}^2)$. Considérons alors les relations d'équivalence suivantes dans $T_1(\mathbb{H}^2)$. Deux points (x_1, v_1) et (x_2, v_2) de $T_1(\mathbb{H}^2)$ sont équivalents si et seulement si les géodésiques partant de x_1 et x_2 dans les directions v_1 et v_2 (resp. dans les directions opposées à v_1 et v_2) ont les mêmes points à l'infini. Les classes d'équivalence dans $T_1(\mathbb{H}^2)$ munissent $T_1(\mathbb{H}^2)$ d'un feuilletage (trivial) invariant par l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$. Une feuille de ce feuilletage peut être représentée de la façon suivante :

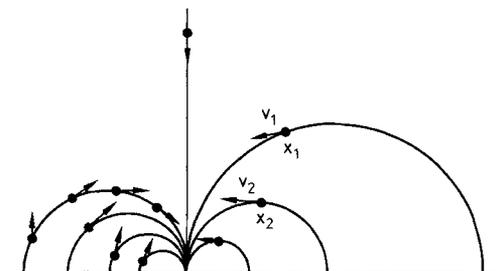


Fig. 1

Si Γ est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ tel que le quotient $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ soit compact, on peut considérer la variété M_Γ quotient de $T_1(\mathbb{H}^2)$ par l'action de Γ munie du feuilletage quotient. Les feuilletages ainsi obtenus sont les «feuilletages horocycliques» sur M_Γ . Suivant la relation d'équivalence choisie dans $T_1(\mathbb{H}^2)$, les feuilletages obtenus sont ceux correspondants aux actions homogènes de GA sur $SL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ déduites de l'un ou de l'autre des plongements naturels de GA dans $SL_2(\mathbb{R})$.

Les variétés M_Γ ont beaucoup été étudiées; par exemple, les fibrés unitaires tangents aux surfaces de genre supérieur à deux, ainsi que les variétés de Brieskorn $V_{p,q,r}$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$) sont de ce type. En particulier, une infinité de ces variétés M_Γ sont des sphères d'homologie.

Ici encore, il existe sur M , outre les champs X et Y définissant l'action, un troisième champ de vecteur Z correspondant au troisième générateur de l'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$. Ce champ Z se transforme sous l'action de GA par la formule:

$$g_*Z = \frac{1}{a(g)}Z + 2\frac{b(g)}{a(g)}X - \frac{b^2(g)}{a(g)}Y.$$

Il suffit pour cela d'expliciter la représentation adjointe

$$\text{ad} : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$$

et de prendre sa restriction au sous-groupe GA de façon à obtenir l'action de GA sur le champ Z .

*d) Propriétés communes aux deux familles d'exemples.
Relations avec les flots d'Anosov*

Dans les deux familles décrites précédemment, on a la caractéristique commune suivante. En plus des champs X et Y , il existe un troisième champ Z vérifiant les propriétés suivantes:

- i) X, Y, Z sont linéairement indépendants en chaque point;
- ii) $[X, Y] = -Y; \quad [X, Z] = Z; \quad [Y, Z] = -2kX;$
- iii) $g_*(Z) = \frac{1}{a(g)}Z + 2\frac{b(g)}{a(g)}kX - \frac{b^2(g)}{a(g)}kY.$

Si le réel k est nul, on retrouve la famille «résoluble», si k est non nul, on retrouve la famille semi-simple. Il est clair que si, dans le cas général, on arrive à construire un troisième champ de vecteurs Z vérifiant les trois propriétés précédentes, il sera facile de montrer que l'action considérée est conjuguée, avec paramètres, à l'une des actions que nous venons de décrire. En particulier, la variété ambiante sera soit un fibré en tores sur le cercle, soit un fibré de Seifert.

Rappelons qu'un flot f_t sur une variété compacte M est dit «flot d'Anosov» (cf. [Ano]) s'il existe une décomposition du fibré tangent à M en une somme de trois sous-fibrés continus:

$$T_x(M) = E_x^u \oplus E_x^s \oplus E_x^1$$

telle que:

- i) E_x^1 est le fibré tangent aux orbites de f_t . (E_x^1 est de dimension un).
- ii) E^u et E^s sont invariants par df_t .
- iii) df_t contracte exponentiellement les vecteurs tangents à E^s quand t tend vers $+\infty$.
- iv) df_{-t} contracte exponentiellement les vecteurs tangents à E^u quand t tend vers $+\infty$.

On peut dire que la donnée d'une action localement libre de GA donne lieu à un «demi-flot d'Anosov». En effet, la condition de crochet $[X, Y] = -Y$ montre que le flot associé à X dilate exponentiellement les vecteurs proportionnels à Y . Cependant, on ne dispose pas a priori du sous-espace stable E^s . Par contre, le champ instable E^u , qui est ici Y , est supposé différentiable, ce qui n'est pas le cas pour un flot d'Anosov quelconque.

Inversement, d'après un théorème de Marcus, (cf. [Mar]), pour tout flot d'Anosov de codimension un (i.e. tel que la dimension de E^u soit un), il existe une action localement libre de GA , de classe C^0 telle que:

$\forall x \in M$, le flot $t \rightarrow (e^t, 0) \cdot x$ est le flot donné.

$\forall x \in M$, la courbe $b \rightarrow (1, b) \cdot x$ est une courbe tangente en tout point à E^u .

En conséquence, les problèmes de classification des flots d'Anosov et des actions du groupe affine s'avèrent très voisins. Si l'on s'intéresse aux flots d'Anosov dont les sous-espaces stables E_x^s et instables E_x^u dépendent différentiablement de x et tels que les vecteurs de E^s (resp. E^u) soient *uniformément* contractés (resp. dilatés), alors, on dispose du résultat de [Gree] affirmant que seuls les flots homogènes que nous venons de décrire possèdent ces propriétés. Voici une démonstration élémentaire de ce résultat.

Proposition II.2.2. *Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs de classe C^2 , linéairement indépendants en chaque point sur une 3-variété fermée et tels que $[X, Y] = -Y$ et $[X, Z] = \xi Z$ pour un certain réel ξ . Alors*

1) $\xi = +1$;

2) $[Y, Z]$ est un multiple constant de X c'est-à-dire que le flot associé à X est un flot homogène, décrit plus haut.

Démonstration. Si Ω est la forme de volume égale à 1 sur (X, Y, Z) , la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X \Omega$ est égale à $(\xi - 1)\Omega$. Si ξ était différent de $+1$, le volume total de la variété ne serait pas respecté par le flot associé à X . Ceci démontre 1).

L'identité de Jacobi, appliquée à X, Y, Z donne

$$-[Y, Z] + [[Y, Z], X] - [Z, Y] = 0$$

et, par conséquent, le champ $[Y, Z]$ commute avec X . Puisque X est de type Anosov, il est élémentaire que ceci implique que $[Y, Z]$ est un multiple constant de X . \square

III. Classification des actions de GA préservant le volume

Dans ce chapitre, nous considérons une action localement libre de GA , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) sur une 3-variété compacte M . Nous supposons qu'une mesure

invariante par l'action est une forme de volume de classe C^{r-2} . Nous nous proposons de construire un champ de vecteurs Z de classe C^{r-2} tel que l'on ait les égalités

$$\begin{aligned} [X, Z] &= Z, \\ [Y, Z] &= -2kX, \end{aligned}$$

pour une certaine constante réelle k .

Pour cela, nous allons d'abord construire un champ Z de classe C^0 se transformant sous l'action de GA selon la formule:

$$g_*Z = \frac{1}{a(g)}Z + 2k \frac{b(g)}{a(g)}X - k \frac{b^2(g)}{a(g)}Y. \quad (1)$$

Nous montrerons ensuite que le champ trouvé est de classe C^{r-2} et qu'il vérifie les relations de crochet écrites plus haut.

Nous utiliserons de façon importante la classification des représentations unitaires irréductibles du groupe affine. Commençons par faire quelques rappels concernant ces représentations.

1. Représentations unitaires irréductibles du groupe affine

Une référence générale est [Kir].

Définitions. Une représentation unitaire d'un groupe de Lie G dans un espace de Hilbert H est un morphisme continu de groupes

$$R: G \rightarrow \text{Aut}(H)$$

tel que pour tout élément g de G , l'automorphisme $R(g)$ est unitaire.

Deux représentations R_1 et R_2 d'un groupe G dans les espaces de Hilbert H_1 et H_2 sont équivalentes, s'il existe un isomorphisme φ de H_1 sur H_2 tel que:

$$\forall g \in G, \quad R_2(g) = \varphi R_1(g) \varphi^{-1}.$$

La représentation R est dite irréductible, si les seuls sous-espaces fermés de H invariants par tous les $R(g)$ sont $\{0\}$ et H .

Le théorème suivant montre que l'étude des représentations unitaires se réduit en grande partie à celle des représentations unitaires irréductibles.

Théorème III.1.1. (cf. [Kir], page 144). *Toute représentation unitaire R de G dans un espace de Hilbert séparable H peut être décomposée en une somme continue de représentations irréductibles.*

Explicitons un peu ce théorème. Il existe un ensemble mesuré (X, ν) tel que l'espace H est une somme continue d'espaces de Hilbert H_x :

$$H = \int_X H_x d\nu.$$

Et la représentation R se décompose en:

$$R = \int_x R_x dv$$

où R_x est une représentation unitaire irréductible de G dans H_x .

Il s'avère que les représentations unitaires irréductibles du groupe affine sont entièrement connues à équivalence près. Donnons en la liste (cf. [Nai, Gel]):

(1) *Les représentations de dimension un.*

Il s'agit d'une famille à un paramètre. Soit α un réel et considérons l'espace de Hilbert $H_\alpha = \mathbb{C}$ et la représentation R_α définie par:

$$GA \times H_\alpha \xrightarrow{R_\alpha} H_\alpha$$

$$(a, b), z \mapsto e^{i\alpha \text{Log } a} \cdot z.$$

(2) *Les représentations de dimension infinie.*

Il y a deux telles représentations. Soit H_+ (resp. H_-) l'espace de Hilbert $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x}\right)$ et considérons les représentations R_+ et R_- suivantes:

$$R_+ : GA \times H_+ \rightarrow H_+$$

$$R_+[(a, b), f](x) = e^{ibx} f(ax),$$

$$R_- : GA \times H_- \rightarrow H_-$$

$$R_-[(a, b), f](x) = e^{-ibx} f(ax).$$

Les représentations R_α, R_+ et R_- épuisent la liste des représentations unitaires irréductibles de GA .

Indiquons maintenant comment nous pouvons associer une représentation unitaire de GA à une action localement libre de GA sur une variété compacte M . Soit μ une mesure invariante par l'action. Puisque GA opère sur M , il opère sur l'espace de Hilbert $L^2(M, \mu)$ de la façon suivante:

$$GA \times L^2(M, \mu) \rightarrow L^2(M, \mu)$$

$$(g, F) \mapsto F \circ g^{-1}.$$

Cette représentation de GA dans $L^2(M, \mu)$ est unitaire car la mesure μ est invariante:

$$\int_M |F \circ g^{-1}|^2 d\mu = \int_M |F|^2 d\mu.$$

C'est cette représentation que nous allons utiliser. Remarquons que celle-ci n'est pas irréductible. Par exemple, dans le cas des actions homogènes sur T_A^3 , le sous-espace de $L^2(T_A^3, \mu)$ formé des fonctions constantes sur les fibres est un sous-

espace fermé non trivial et invariant par la représentation. Ce sous-espace s'identifie à l'espace des fonctions définies sur la base de la fibration, c'est-à-dire à l'espace des fonctions périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . La décomposition de la représentation restreinte à ce sous-espace est exactement la décomposition des fonctions périodiques en séries de Fourier.

2. Le champ Z de classe C^0

a) Position du problème

Supposons la variété M compacte orientable et notons toujours Ω une forme volume invariante par l'action de GA .

Soit alors Z' un champ de vecteurs tel que:

$$\Omega(X, Y, Z') = 1.$$

Appliquons un élément g de GA à cette égalité:

$$\begin{aligned} g^*\Omega(X, Y, Z') &= \Omega(X, Y, Z') = 1, \\ \Omega(g_*X, g_*Y, g_*Z') &= 1, \\ \Omega(X - b(g)Y, a(g)Y, g_*Z') &= 1. \end{aligned}$$

Ceci montre que g_*Z' s'écrit sous la forme:

$$g_*Z' = \frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y,$$

où ϕ'_g et Ψ'_g sont, pour chaque g de GA , des fonctions réelles définies sur M . Commençons par expliciter les relations fonctionnelles liant les fonctions ϕ'_g et Ψ'_g .

Si g et h sont deux éléments de GA , on a :

$$\begin{aligned} (gh)_*Z' &= \frac{1}{a(gh)} Z' + \phi'_{gh} X + \Psi'_{gh} Y \\ &= g_*(h_*Z') \\ &= g_* \left(\frac{1}{a(h)} Z' + \phi'_h X + \Psi'_h Y \right) \\ &= \frac{1}{a(h)} \left[\frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y \right] + \phi'_h \circ g^{-1} [X - b(g)Y] + \Psi'_h \circ g^{-1} \cdot a(g) Y. \end{aligned}$$

Ceci mène aux égalités.

$$\phi'_{gh} = \frac{1}{a(h)} \phi'_g + \phi'_h \circ g^{-1}. \tag{2}$$

$$\Psi'_{gh} = \frac{1}{a(h)} \Psi'_g - b(g)\phi'_h \circ g^{-1} + a(g)\Psi'_h \circ g^{-1}. \tag{3}$$

Notre problème est de trouver un champ Z se transformant par GA comme dans la formule (1). Nous chercherons Z sous la forme:

$$Z = Z' + F \cdot X + G \cdot Y,$$

où F et G sont des fonctions numériques définies sur M .

Exprimons les conditions imposées à F et G . On a d'une part:

$$\begin{aligned} g_*Z &= g_*Z' + F \circ g^{-1}(X - b(g)Y) + G \circ g^{-1}a(g)Y \\ &= \frac{1}{a(g)}Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y + F \circ g^{-1}(X - b(g)Y) + G \circ g^{-1} \cdot a(g) \cdot Y \\ &= \frac{1}{a(g)}[Z - FX - GY] + \phi'_g X + \Psi'_g Y + F \circ g^{-1}(X - b(g)Y) + G \circ g^{-1} \cdot a(g)Y. \end{aligned}$$

D'autre part, la condition imposée à Z est:

$$g_*Z = \frac{1}{a(g)}Z + k \frac{2b(g)}{a(g)}X - k \frac{b^2(g)}{a(g)}Y.$$

En comparant ces deux formules, on obtient les conditions cherchées:

$$-\frac{1}{a(g)}F + \phi'_g + F \circ g^{-1} = 2k \frac{b(g)}{a(g)}, \tag{4}$$

$$-\frac{1}{a(g)}G + \Psi'_g - b(g)F \circ g^{-1} + a(g)G \circ g^{-1} = -k \frac{b^2(g)}{a(g)}. \tag{5}$$

Finalement, le problème est le suivant: Résoudre les équations fonctionnelles (4) et (5) sachant que ϕ'_g et Ψ'_g satisfont (2) et (3).

Remarque. Tous ces calculs pourraient se formaliser de la façon suivante. Soit \mathcal{X} l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles. Le groupe GA opère évidemment sur \mathcal{X} . Les fonctions ϕ'_g et Ψ'_g permettent de définir une application:

$$\begin{aligned} c: GA &\rightarrow \mathcal{X} \\ g &\rightarrow a(g)(\phi'_g X + \Psi'_g Y). \end{aligned}$$

Les conditions (2) et (3) signifient simplement qu'une cochaîne de GA à valeur dans \mathcal{X} est un cocycle. De même les fonctions F et G définissent une 0-cochaîne α de GA à valeur dans \mathcal{X} , en l'occurrence le champ $FX + GY$. Notons c_k le 1-cocycle suivant:

$$\begin{aligned} c_k: GA &\rightarrow \mathcal{X} \\ g &\rightarrow k(2b(g)X - b^2(g)Y). \end{aligned}$$

Résoudre les équations fonctionnelles (4) et (5) revient à résoudre l'équation en α :

$$c - c_k = d\alpha.$$

Autrement dit, nous sommes précisément en train d'étudier une classe de cohomologie de $H_c^1(GA, \mathcal{X})$, cohomologie continue de GA à valeur dans \mathcal{X} . Nous n'utiliserons pas cependant ce formalisme car nous aurons besoin par la suite de formules explicites.

b) Résolution partielle

Nous allons résoudre (4) et (5) dans le cas particulier où g est une homothétie $(a, 0)$. Nous verrons ensuite que si les équations (4) et (5) sont vérifiées pour les homothéties, alors elles le sont pour tous les éléments de GA . Ceci est dans l'esprit d'un lemme dû à Mautner que nous citerons ici bien que nous ne l'utilisions pas.

Lemme. *Soit R une représentation de GA dans un espace de Hilbert H . Soit V un élément de H invariant par les homothéties, i.e.:*

$$\forall a > 0, \quad R(a, 0)(V) = V.$$

Alors, V est invariant par tout le groupe:

$$\forall g \in GA, \quad R(g)(V) = V. \quad \square$$

Commençons donc par étudier le cas des homothéties. Si $g = (a, 0)$, les équations (4) et (5) s'écrivent:

$$\begin{aligned} F &= a\phi'_{(a,0)} + aF \circ (a^{-1}, 0), \\ G &= a\Psi'_{(a,0)} + a^2G \circ (a^{-1}, 0). \end{aligned}$$

Considérons, dans l'espace de Banach $C_0(M)$ des fonctions continues sur M , les fonctionnelles U_a et V_a suivantes.

$$\begin{aligned} F \in C_0(M) &\rightarrow U_a(F) = a\phi'_{(a,0)} + a \cdot F \circ (a^{-1}, 0), \\ G \in C_0(M) &\rightarrow V_a(G) = a\Psi'_{(a,0)} + a^2G \circ (a^{-1}, 0). \end{aligned}$$

Il est clair que, si a est strictement inférieur à 1, ces fonctionnelles sont des contractions. Il s'ensuit que, pour chaque a strictement inférieur à 1, il existe un unique couple de fonctions (F_a, G_a) tels que:

$$\begin{aligned} F_a &= U_a(F_a), \\ G_a &= V_a(G_a). \end{aligned}$$

Montrons, maintenant, que les solutions trouvées (F_a, G_a) ne dépendent pas de a et que cette solution commune est encore solution pour a supérieur à 1. Il suffit pour cela, de remarquer que si a et a' sont deux réels strictement positifs:

$$\begin{aligned} U_a \circ U_{a'} &= U_{a'} \circ U_a = U_{aa'}, \\ V_a \circ V_{a'} &= V_{a'} \circ V_a = V_{aa'}. \end{aligned}$$

Les opérateurs U_a et $U_{a'}$ (resp. V_a et $V_{a'}$) commutant, et ayant chacun un unique point fixe, ces points fixes sont en fait tous les mêmes, c'est-à-dire que

$$F_a = F_{a'} \quad \text{et} \quad G_a = G_{a'}, \quad \text{si} \quad a < 1 \quad \text{et} \quad a' < 1.$$

Soit F (resp. G) cette solution commune et soit $a > 1$. On a alors:

$$U_a^{-1}(F) = U_{1/a}(F) = F.$$

Donc

$$F = U_a(F)$$

et de même

$$G = V_a(G).$$

En conclusion, nous avons trouvé deux fonctions F et G vérifiant (4) et (5) dans le cas particulier où g est une homothétie. Il va falloir montrer maintenant que si les équations (4) et (5) sont vérifiées lorsque g est une homothétie, elles le sont aussi pour les autres éléments de GA .

c) Résolution globale

Considérons le champ Z défini par:

$$Z = Z' + FX + GY,$$

où F et G sont les fonctions trouvées précédemment. Introduisons les fonctions ϕ_g et Ψ_g telles que:

$$g_*Z = \frac{1}{a(g)} Z + \phi_g X + \Psi_g Y.$$

Ces fonctions peuvent, bien sûr, s'exprimer en termes de ϕ'_g et Ψ'_g .

$$\begin{aligned} g_*Z &= g_*Z' + F \circ g^{-1}(X - b(g)Y) + G \circ g^{-1} \cdot a(g)Y \\ &= \frac{1}{a(g)} Z' + \phi'_g X + \Psi'_g Y + F \circ g^{-1}(X - b(g)Y) + G \circ g^{-1} \cdot a(g)Y. \end{aligned}$$

Ceci donne:

$$\begin{aligned} \phi_g &= \phi'_g - \frac{1}{a(g)} F + F \circ g^{-1}, \\ \Psi_g &= \Psi'_g - \frac{1}{a(g)} G - b(g)F \circ g^{-1} + a(g)G \circ g^{-1}. \end{aligned}$$

Les fonctions ϕ_g et Ψ_g vérifient elles aussi les relations (2) et (3). Par définition de Z , on a:

$$\begin{aligned} \phi_{(a,0)} &= 0, \\ \Psi_{(a,0)} &= 0. \end{aligned}$$

Nous aurons donc résolu notre problème si nous montrons la proposition suivante:

Proposition III.2.1. *Soient ϕ_g et Ψ_g deux familles de fonctions continues sur M , indexées par les éléments g du groupe affine et vérifiant:*

- 1) $\phi_{gh} = \frac{1}{a(h)} \phi_g + \phi_h \circ g^{-1}$,
- 2) $\Psi_{gh} = \frac{1}{a(h)} \Psi_g - b(g) \phi_h \circ g^{-1} + a(g) \Psi_h \circ g^{-1}$,
- 3) $\Psi_{(a,0)} = 0$,
- 4) $\phi_{(a,0)} = 0$.

Alors, il existe une constante réelle k telle que:

$$\forall x \in M, \quad \phi_g(x) = k \cdot \frac{2b(g)}{a(g)},$$

$$\Psi_g(x) = -k \frac{b^2(g)}{a(g)}.$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la proposition. Nous allons utiliser ici les résultats de la partie 1 concernant les représentations. L'espace de Hilbert $L^2(M, \mu)$ se décompose en une somme continue d'espaces de Hilbert, chacun d'entre eux étant isomorphe à H_α , H_+ ou H_- . Sur chacun de ces espaces, la représentation est R_α , R_+ ou R_- . Les fonctions ϕ_g et Ψ_g , en tant qu'éléments de $L^2(M, \mu)$ vont se décomposer sur les différents espaces H_α , H_+ et H_- . Nous allons montrer que les composantes de ϕ_g et Ψ_g sur H_α , H_+ et H_- sont toutes nulles, à l'exception des composantes sur H_0 qui sont respectivement égales à $2k \frac{b(g)}{a(g)}$ et $-k \frac{b^2(g)}{a(g)}$. La représentation R_0 correspondant aux fonctions invariantes par GA et les fonctions ϕ_g et Ψ_g étant continues, la proposition sera démontrée. En définitive, la proposition se scinde en trois lemmes correspondants aux trois types de représentations: R_0 , R_α (avec $\alpha \neq 0$) et R_\pm .

Lemme III.2.2. *(Cas de R_0). Soient z_g et w_g deux familles de complexes, indexées par GA telles que:*

- 1) $z_{gh} = \frac{1}{a(h)} z_g + z_h$;
- 2) $w_{gh} = \frac{1}{a(h)} w_g - b(g) z_h + a(g) w_h$;
- 3) $z_{(a,0)} = 0$;
- 4) $w_{(a,0)} = 0$.

Alors, il existe une constante k telle que:

$$\forall g \in GA, \quad z_g = 2k \frac{b(g)}{a(g)},$$

$$w_g = -k \frac{b^2(g)}{a(g)}.$$

Lemme III.2.3. (Cas de R_α , avec $\alpha \neq 0$). Si z_g et w_g vérifient:

- 1) $z_{gh} = \frac{1}{a(h)} z_g + e^{iz \text{Log} a(g)} \cdot z_h$;
- 2) $w_{gh} = \frac{1}{a(h)} w_g - b(g) e^{iz \text{Log} a(g)} \cdot z_h + a(g) e^{iz \text{Log} a(g)} \cdot w_h$;
- 3) $z_{(a,0)} = 0$;
- 4) $w_{(a,0)} = 0$.

Alors, pour tout g de GA , on a:

$$z_g = w_g = 0.$$

Lemme III.2.4. (Cas de R_+ et R_-). Soient F_g^+ et G_g^+ (resp. F_g^- et G_g^-) deux familles de fonctions de $L^2\left(R_+^*, \frac{dx}{x}\right)$ indexées par GA et telles que:

- 1) $F_{gh}^\pm(x) = \frac{1}{a(h)} F_g^\pm(x) + e^{\pm ib(g) \cdot x} F_h^\pm(a(g)x)$;
- 2) $G_{gh}^\pm(x) = \frac{1}{a(h)} G_g^\pm(x) - b(g) e^{\pm ib(g)x} F_h^\pm(a(g) \cdot x) + a(g) e^{\pm ib(g)x} G_h^\pm(a(g) \cdot x)$;
- 3) $F_{(a,0)}^\pm = 0$;
- 4) $G_{(a,0)}^\pm = 0$.

Alors, $\forall g \in GA, F_g^\pm = G_g^\pm = 0$.

Démonstration des Lemmes III.2.2, 3, 4.

Lemme III.2.2. On a:

$$z_{(a,b)} = z_{(1,b)(a,0)} = \frac{1}{a} z_{(1,b)} + z_{(a,0)} = \frac{1}{a} z_{(1,b)}.$$

D'autre part:

$$z_{(1,b+b')} = z_{(1,b)} + z_{(1,b')}.$$

Il existe donc une constante k telle que

$$z_{(1,b)} = 2k \cdot b.$$

Par suite:

$$z_{(a,b)} = 2k \frac{b}{a}.$$

Etudions maintenant w_g .

$$\begin{aligned} w_{(a,b)} &= w_{(1,b)(a,0)} = \frac{1}{a} w_{(1,b)} - b z_{(a,0)} + w_{(a,0)} \\ &= \frac{1}{a} w_{(1,b)}. \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} w_{(1,b+b')} &= w_{(1,b)} - b z_{(1,b')} + w_{(1,b')} \\ &= w_{(1,b)} + w_{(1,b')} - 2k b b'. \end{aligned}$$

Ceci montre qu'il existe λ tel que:

$$w_{(1,b)} = -k b^2 + \lambda b.$$

C'est-à-dire que:

$$w_{(a,b)} = \frac{1}{a} w_{(1,b)} = -k \frac{b^2}{a} + \lambda \frac{b}{a}.$$

Montrons que cette valeur de w_g ne peut satisfaire l'équation fonctionnelle que si λ est nul.

$$\begin{aligned} w_{(a,b)(a',b')} &= \frac{1}{a'} \left(-k \frac{b^2}{a} + \lambda \frac{b}{a} \right) - b \cdot 2k \frac{b'}{a'} + a \left(-k \frac{b'^2}{a'} + \lambda \frac{b'}{a'} \right), \\ w_{(aa', ab'+b)} &= -k \frac{(b+ab')^2}{aa'} + \lambda \frac{ab'+b}{aa'}. \end{aligned}$$

On doit donc avoir l'identité:

$$-k \left(\frac{b^2 + 2bb'a + a^2b'^2}{aa'} \right) + \lambda \frac{b + a^2b'}{aa'} = -k \frac{(b+ab')^2}{aa'} + \lambda \frac{ab'+b}{aa'}.$$

Ce qui donne immédiatement $\lambda = 0$ et donc finalement:

$$\forall g \in GA, \quad w_g = -k \frac{b^2(g)}{a(g)}. \quad \square$$

Lemme III.2.3. On procède de façon analogue :

$$\begin{aligned} z_{(a,b)} &= z_{(1,b)(a,0)} = \frac{1}{a} z_{(1,b)} + e^{ix \text{Log } 1} z_{(a,0)} \\ &= \frac{1}{a} z_{(1,b)}, \end{aligned}$$

$$z_{(1,b+b')} = z_{(1,b)} + z_{(1,b')}.$$

Ceci montre que z_g doit s'écrire sous la forme :

$$z_{(a,b)} = \frac{1}{a} z_{(1,b)} = 2k \frac{b}{a}.$$

Montrons que ceci ne peut convenir que si k est nul.

$$\begin{aligned} z_{(a,b)(a',b')} &= \frac{1}{a'} z_{(a,b)} + e^{ix \text{Log } a} \cdot z_{(a',b')} \\ 2k \cdot \frac{(ab' + b)}{aa'} &= \frac{2k}{a'} \frac{b}{a} + e^{ix \text{Log } a} \cdot 2k \frac{b'}{a'} \end{aligned}$$

ceci n'est possible que si k est nul, c'est-à-dire que :

$$\forall g \in GA, \quad z_g = 0.$$

Etudions w_g de la même façon.

$$\begin{aligned} w_{(a,b)} &= w_{(1,b)(a,0)} = \frac{1}{a} w_{(1,b)}, \\ w_{(1,b+b')} &= w_{(1,b)} + w_{(1,b')}. \end{aligned}$$

On doit donc avoir :

$$w_{(1,b)} = \lambda b,$$

donc

$$w_{(a,b)} = \frac{1}{a} \lambda \cdot b.$$

Or, on vérifie, de même que dans le Lemme III.2.2 que cette valeur ne peut convenir que si λ est nul, c'est-à-dire :

$$\forall g \in GA, \quad w_g = 0. \quad \square$$

Lemme III.2.4. On procède d'une façon similaire. (Nous traitons seulement le cas de R_+ , l'autre cas étant identique.)

$$F_{(a,b)}(x) = F_{(1,b)(a,0)}(x) = \frac{1}{a} F_{(1,b)}(x) \quad \text{car } F_{(a,0)} \text{ est nul.}$$

On obtient alors:

$$(1) \quad F_{(a,b)(a',b')}(x) = \frac{1}{a'} \left(\frac{1}{a} F_{(1,b)}(x) \right) + e^{ibx} \frac{1}{a'} F_{(1,b')}(ax) \\ = \frac{1}{aa'} F_{(1,ab'+b)}(x).$$

Cette égalité donne pour $a=1$.

$$F_{(1,b)}(x) + e^{ibx} F_{(1,b')}(x) = F_{(1,b+b')}(x)$$

et par symétrie:

$$F_{(1,b')}(x) + e^{ib'x} F_{(1,b)}(x) = F_{(1,b'+b)}(x).$$

Ceci montre que:

$$\frac{F_{(1,b)}(x)}{1 - e^{ibx}} = \frac{F_{(1,b')}(x)}{1 - e^{ib'x}}.$$

Par conséquent, $F_{(1,b)}$ s'écrit sous la forme:

$$F_{(1,b)}(x) = (e^{ibx} - 1) \varphi(x).$$

L'égalité (1) donne alors:

$$\frac{1}{aa'} (e^{ibx} - 1) \varphi(x) + e^{ibx} \frac{1}{a'} (e^{iab'x} - 1) \varphi(ax) = \frac{1}{aa'} (e^{i(ab'+b)x} - 1) \varphi(x).$$

Remplaçons ab' par b' , on obtient:

$$(e^{ibx} - 1) \varphi(x) + ae^{ibx} (e^{ib'x} - 1) \varphi(ax) = (e^{i(b'+b)x} - 1) \varphi(x).$$

La quantité $a \varphi(ax)$ est donc indépendante de a , c'est-à-dire que φ s'écrit sous la forme:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{x}.$$

Finalement, $F_{(a,b)}$ s'écrit:

$$F_{(a,b)}(x) = \frac{1}{a} F_{(1,b)}(x) = \frac{1}{a} (e^{ibx} - 1) \varphi(x) = \frac{1}{a} (e^{ibx} - 1) \frac{\lambda}{x}.$$

Enfin, ceci entraîne que λ est nul car la fonction $F_{(a,b)}$ est un élément de $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x}\right)$, alors que la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{ibx} - 1}{x},$$

n'est pas dans $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x}\right)$. Donc $F_g = 0$.

Etudions maintenant, de la même façon, la fonction G_g . $G_{(a,b)} = G_{(1,b)(a,0)} = \frac{1}{a} G_{(1,b)}(x)$ car F_g et $G_{(a,0)}$ sont nuls. L'équation fonctionnelle s'écrit alors:

$$\begin{aligned} G_{(a,b)(a',b')}(x) &= \frac{1}{aa'} G_{(1,ab'+b)}(x) \\ &= \frac{1}{a'} \frac{1}{a} G_{(1,b)}(x) + ae^{ibx} \frac{1}{a'} G_{(1,b')}(ax). \end{aligned}$$

Pour $a = 1$, on obtient:

$$G_{(1,b+b')}(x) = G_{(1,b)}(x) + e^{ibx} G_{(1,b')}(x).$$

C'est-à-dire, que, ici encore, $G_{(1,b)}$ s'écrit sous la forme:

$$G_{(1,b)}(x) = (e^{ibx} - 1)\varphi(x).$$

L'équation fonctionnelle s'écrit alors:

$$\frac{1}{aa'} (e^{i(ab'+b)x} - 1)\varphi(x) = \frac{1}{aa'} (e^{ibx} - 1)\varphi(x) + \frac{a}{a'} e^{ibx} (e^{ib'ax} - 1)\varphi(ax).$$

Ici encore, en remplaçant ab' par b' , on obtient que φ s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{x^2}.$$

C'est-à-dire que $G_{(a,b)}(x) = \frac{1}{a} G_{(1,b)}(x) = \frac{1}{a} (e^{ibx} - 1)\varphi(x)$

$$= \frac{\lambda}{a} \left(\frac{e^{ibx} - 1}{x^2} \right).$$

Cette fonction n'est dans $L^2\left(\mathbb{R}_+^*, \frac{dx}{x}\right)$ que si λ est nul, ce qui montre que $G_g = 0$ et termine la démonstration des trois lemmes. \square

Nous avons donc en définitive trouvé un champ de vecteurs Z de classe C^0 tel que

a) $g_*Z = \frac{1}{a(g)} Z + 2k \frac{b(g)}{a(g)} X - k \frac{b^2(g)}{a(g)} Y;$

b) $\Omega(X, Y, Z) = 1.$

Le but du paragraphe suivant est de montrer que ce champ est différentiable.

3. Différentiabilité du champ Z . Démonstration du Théorème B

Pour montrer que le champ Z est différentiable, il suffit de montrer qu'il l'est sur un ouvert, car l'ensemble des points où il est différentiable est clairement invariant par l'action du groupe et les orbites de cette action sont denses.

Considérons un point m de M stable par l'homothétie $(A, 0)$. Puisque l'on a :

$$(A, 0)_* Z_m = \frac{1}{A} Z_m,$$

$$(A, 0)_* X_m = X_m,$$

et

$$(A, 0)_* Y_m = A Y_m,$$

les valeurs propres de

$$(A, 0)_* : T_m(M) \rightarrow T_m(M),$$

sont

$$A, 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{A}.$$

Nous pouvons donc construire une variété stable T du point fixe m (cf. [Hir-Pug-Shu]). Il s'agit d'une courbe différentiable, de classe C^r , immergée dans M , invariante par $(A, 0)$ et telle que :

$$y \in T \quad \text{implique} \quad (A, 0)^n y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m.$$

Construisons, comme nous l'avons fait au paragraphe I.2.2, une carte de M au voisinage du point m , en choisissant un arc T' voisinage de m dans T et un voisinage U de l'élément neutre dans GA de telle sorte que :

$$U \times T' \rightarrow M,$$

$$g, t \rightarrow g \cdot t,$$

soit un difféomorphisme sur son image.

Comme au paragraphe I.2, la forme Ω donne une 1-forme différentielle sur T' de classe C^{r-2} . Paramétrons T' à l'aide de cette forme, soit $T(t)$ ce paramétrage. On obtient alors une carte de classe C^{r-1} au voisinage de m

$$U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M,$$

$$(\alpha, \beta), t \rightarrow (\alpha, \beta) \cdot T(t),$$

telle que :

1) dans cette carte, la forme invariante s'écrit

$$dt \wedge \frac{d\alpha \wedge d\beta}{\alpha}.$$

2) dans la carte, l'application

$$y \in M \rightarrow (A, 0) \cdot y \in M,$$

s'écrit:

$$(\alpha, \beta, t) \xrightarrow{\phi_A} \left(\alpha, A\beta, \frac{t}{A} \right).$$

3) pour les valeurs de $g = (a, b)$ proches de l'identité, l'application

$$y \in M \rightarrow g \cdot y \in M,$$

s'écrit dans la carte:

$$(\alpha, \beta, t) \xrightarrow{\theta_g} (\alpha, a\beta + b, t).$$

Proposition III.3.1. Soit k un réel quelconque. Alors, il existe un unique germe de champ de vecteur \bar{Z} de classe C^0 au voisinage de $(1, 0, 0)$ dans $GA \times \mathbb{R}$ tel que:

- 1) $dt \wedge \frac{d\alpha \wedge d\beta}{\alpha^2} (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = 1$ (où \bar{X} et \bar{Y} sont les champs canoniques sur GA);
- 2) $(\phi_A)_* \bar{Z} = \frac{1}{A} \bar{Z}$;
- 3) $(\theta_g)_* \bar{Z} = \frac{1}{a(g)} \bar{Z} + 2k \frac{b(g)}{a(g)} \bar{X} - k \frac{b^2(g)}{a(g)} \bar{Y}$ pour les valeurs de g proches de l'identité.

Cet unique germe possède un représentant global analytique.

Démonstration. Cherchons la restriction de \bar{Z} à $\{e\} \times \mathbb{R}$.

$$\bar{Z}_{1,0,t} = u(t) \bar{X}_{1,0,t} + v(t) \bar{Y}_{1,0,t} + w(t) \frac{\partial}{\partial t}.$$

La condition 1) relative à la forme volume donne $w(t) = 1$. La condition 3) permet de calculer \bar{Z} en un point quelconque:

$$\begin{aligned} \theta_{(\alpha,\beta)*}(\bar{Z}_{1,0,t}) &= \frac{1}{\alpha} \bar{Z}_{\alpha,\beta,t} + 2k \frac{\beta}{\alpha} \bar{X}_{\alpha,\beta,t} - k \frac{\beta^2}{\alpha} \bar{Y}_{\alpha,\beta,t} \\ &= u(t) \theta_{(\alpha,\beta)*}(\bar{X})_{1,0,t} + v(t) \theta_{(\alpha,\beta)*}(\bar{Y})_{1,0,t} + \theta_{(\alpha,\beta)*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{1,0,t}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u(t) (\bar{X} - \beta \bar{Y}) + v(t) \cdot \alpha \bar{Y} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \bar{Z}_{\alpha,\beta,t} + 2k \frac{\beta}{\alpha} \bar{X} - k \frac{\beta^2}{\alpha} \bar{Y}.$$

Finalement:

$$\bar{Z}_{\alpha,\beta,t} = (\alpha u(t) - 2k\beta) \bar{X}_{\alpha,\beta,t} + (\alpha^2 v(t) - \alpha\beta u(t) + k\beta^2) \bar{Y}_{\alpha,\beta,t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t}.$$

Il reste à vérifier la condition 2.

$$\begin{aligned}
 (\phi_A)_*(\bar{Z}) &= \frac{1}{A} \bar{Z}, \\
 (\alpha u(t) - 2k\beta)X + A(\alpha^2 v(t) - \alpha\beta u(t) + k\beta^2)Y + \frac{\alpha}{A} \frac{\partial}{\partial t}, \\
 &= \frac{1}{A} \left[\left(\alpha u\left(\frac{t}{A}\right) - 2kA\beta \right) X + \left(\alpha^2 v\left(\frac{t}{A}\right) - \alpha\beta A u\left(\frac{t}{A}\right) + kA^2\beta^2 \right) Y + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right].
 \end{aligned}$$

Ce qui donne, réductions faites:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{1}{A} u\left(\frac{t}{A}\right), \\
 A\alpha^2 v(t) - A\alpha\beta u(t) &= \frac{\alpha^2}{A} v\left(\frac{t}{A}\right) - \alpha\beta u\left(\frac{t}{A}\right).
 \end{aligned}$$

La première de ces équations donne:

$$u(t) = \frac{1}{A^n} u\left(\frac{t}{A^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $u(t) = 0$.

La seconde devient donc:

$$v(t) = \frac{1}{A^2} v\left(\frac{t}{A}\right).$$

$$\text{De même } v(t) = \frac{1}{A^{2n}} v\left(\frac{t}{A^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par conséquent $v(t) = 0$. C'est-à-dire que le seul germe de champ \bar{Z} vérifiant 1), 2) et 3) est:

$$\bar{Z} = -2k\beta\bar{X} + k\beta^2\bar{Y} + \alpha \frac{\partial}{\partial t}.$$

Il est analytique, ce qui démontre la proposition.

Corollaire III.3.2. *Le champ Z est le champ associé à un flot de classe C^{r-1} .*

Démonstration. En effet, le champ \bar{Z} est analytique et la carte locale considérée de $U \times]-\varepsilon_1 + \varepsilon[$ dans M est de classe C^{r-1} . \square

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème B. Si $\Phi: GA \times M \rightarrow M$ est une action localement libre de GA préservant une forme de volume de classe C^0 , nous supposons tout d'abord que Φ est de classe C^r avec $r \geq 3$. Dans ce cas, le champ Z que nous avons trouvé est de classe C^1 et son flot est de classe C^2 . Nous pouvons donc calculer les crochets $[X, Z]$ et $[Y, Z]$. Envisageons le crochet de deux champs comme étant l'opposé de la dérivée du second dans la direction du

flot associé au premier. Puisque

$$(e^t, 0)_*Z = e^{-t}Z \quad \text{et} \quad (1, t)_*Z = Z + 2ktX - kt^2Y,$$

on trouve

$$[X, Z] = Z \quad \text{et} \quad [Y, Z] = -2kX.$$

Si k est nul, on trouve une action localement libre de G_3 sur M , prolongeant celle de GA . Cette action est de classe C^{r-1} puisque le flot de Z est de classe C^{r-1} . Si k est non nul, on obtient une action localement libre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, de classe C^{r-1} prolongeant celle de GA . Ceci démontre le Théorème B si $r \geq 3$.

Si $r = 2$, le champ Z n'est que de classe C^0 et les crochets $[X, Z]$ et $[Y, Z]$ n'ont plus de sens. Cependant, on dispose toujours de la carte $\Psi : U \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M$ qui est de classe C^1 et on a $\Psi_*(\bar{X}) = X; \Psi_*(\bar{Y}) = Y, \Psi_*(\bar{Z}) = Z$ où $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ sont des champs analytiques pour lesquels $[\bar{X}, \bar{Z}] = \bar{Z}$ et $[\bar{Y}, \bar{Z}] = -2k\bar{X}$. Ceci montre que les flots (de classe C^1) correspondant à X, Y, Z engendrent une action de G_3 (ou $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$), de classe C^1 , et prolongeant celle de GA . On obtient donc le Théorème B lors que $r = 2$.

Remarque III.3.3. Lorsque l'action de classe C^r étudiée est C^{r-1} conjuguée à une action homogène sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$, on peut améliorer la conjugaison obtenue: l'action est C^r conjuguée à l'action homogène. Cela découle du résultat suivant:

Théorème III.3.4. *Soit Φ une action localement libre de GA sur M , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$). Supposons qu'il existe un homéomorphisme φ d'un espace homogène $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ sur M faisant commuter l'action homogène de GA avec Φ . Alors φ est de classe C^r .*

Démonstration. Notons X et Y les champs fondamentaux associés à Φ et soient X', Y', Z' les champs canoniques sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$. Nous verrons plus loin (voir IV.1.2) qu'il existe un unique feuilletage \mathcal{F}^s , de codimension 1, transverse à Y , et invariant par le flot de X . Ses feuilles sont de classe C^r . (\mathcal{F}^s est le feuilletage stable de X si celui-ci était de type Anosov.)

Il est clair que l'image de \mathcal{F}^s par φ^{-1} est le feuilletage de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ engendré par X' et Z' . Notons $\mathcal{F}^{s'}$ ce dernier feuilletage. Si b est un réel non nul, considérons le feuilletage de dimension 1 sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ dont les feuilles sont les intersections de celles de $\mathcal{F}^{s'}$ et de celles de $(1, b)_*\mathcal{F}^{s'}$. Un calcul simple montre que ce feuilletage de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$ est engendré par le champ $Z' + bX'$. Une orbite de $Z' + bX'$ étant l'intersection d'une feuille de $\mathcal{F}^{s'}$ et d'une feuille de $(1, b)_*\mathcal{F}^{s'}$, son image par φ est une courbe de classe C^0 située à la fois dans une feuille de \mathcal{F}^s et dans une feuille de $(1, b)_*\mathcal{F}^s$. Ces feuilles étant de classe C^r , on en déduit que, pour tout b non nul, φ envoie toute orbite de $Z' + bX'$ sur une courbe de classe C^r .

Etudions alors φ au voisinage d'un point m de $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$. Soit T' un arc d'orbite de $Z' + X'$ passant par m et paramétré par $]-\varepsilon', +\varepsilon'[$. Comme nous l'avons déjà fait, nous obtenons ainsi une carte au voisinage de m

$$U \times]-\varepsilon', +\varepsilon'[\rightarrow \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma,$$

où U est un voisinage de e dans GA .

Soit T l'image de T' par φ . Nous venons de montrer que T est un arc de classe C^r de M . Paramétrons T différemment par un réel de $] -\varepsilon, +\varepsilon[$. Nous obtenons aussi une carte autour de $\varphi(m)$:

$$U \times] -\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M.$$

C'est dans ces cartes que nous allons étudier φ . Définissons h comme étant l'unique application continue de $] -\varepsilon', +\varepsilon'[$ dans $] -\varepsilon, +\varepsilon[$ telle que

$$\varphi[(1, 0), t] = [(1, 0), h(t)].$$

Ceci définit entièrement φ car φ commute aux actions:

$$\varphi([(x, y), t]) = [(x, y), h(t)] \quad (x, y) \in U \subset GA.$$

Considérons un arc d'orbite de $Z' + 2X'$ passant par m . Cet arc peut être défini dans la carte $U \times] -\varepsilon, +\varepsilon'[$ par une équation du type

$$t \rightarrow [(\gamma(t), \lambda(t)), t] \in U \times T',$$

où λ et γ sont deux fonctions de classe C^r et où $\gamma'(0)$ est non nul car les champs $X' + Z'$ et $X' + 2Z'$ sont linéairement indépendants.

L'image de cet arc par φ est donnée par:

$$t \rightarrow [(\gamma(t), \lambda(t)), h(t)] \in U \times] -\varepsilon, +\varepsilon[.$$

Or, nous avons vu que cette image est une courbe de classe C^r . La fonction γ étant localement inversible au voisinage de 0, on en déduit que $h(t)$ dépend différemment de $\gamma(t)$. La fonction γ étant de classe C^r , il en est de même pour h et donc pour φ au voisinage de m . Le point m étant arbitraire, le théorème est démontré. \square

4. Stabilité structurelle forte des groupes fuchsien

Fixons nous une action homogène de GA sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ et notons \mathcal{F}_0 le feuilletage de codimension 1 correspondant. Un corollaire de la stabilité structurelle des flots d'Anosov est le fait que \mathcal{F}_0 est structurellement stable: tout feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 et de classe C^2 , suffisamment C^1 proche de \mathcal{F}_0 est C^0 conjugué à \mathcal{F}_0 . La proposition suivante montre qu'il n'est pas question d'obtenir une conjugaison différentiable entre \mathcal{F}_0 et \mathcal{F} .

Proposition III.4.1. *Soit Γ un groupe abstrait que nous supposons sans torsion pour simplifier et soit i_1 et i_2 deux injections de Γ dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ telles que $i_1(\Gamma)$ et $i_2(\Gamma)$ soient uniformes et discrets dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Supposons que les feuilletages induits par les actions homogènes de GA sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/i_1(\Gamma)$ et $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/i_2(\Gamma)$ sont C^1 conjugués. Alors, il existe un automorphisme θ de Γ et un élément g de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tels que, pour tout γ de Γ :*

$$i_2(\gamma) = g \cdot i_1 \circ \theta(\gamma) \cdot g^{-1}$$

c'est-à-dire qu'il n'y a C^1 conjugaison que dans les cas "évidents".

Remarque. Cette proposition est un corollaire immédiat d'un résultat de Sullivan (voir [Sul]) affirmant que si les actions fuchsienues de Γ sur le cercle $S^1 \simeq P^1(\mathbb{R})$ correspondant à i_1 et i_2 sont absolument continument conjuguées, alors elles sont projectivement conjuguées. La démonstration que nous proposons ci-dessous a cependant l'avantage d'être très simple.

Démonstration. Puisque nous supposons que Γ est sans torsion, l'action de $SO(2)_{/id, -id}$ sur $PSL(2, \mathbb{R})_{/i_\tau(\Gamma)}$ ($\tau = 1$ ou 2) par translation à gauche est libre. C'est-à-dire que $PSL(2, \mathbb{R})_{/i_\tau(\Gamma)}$ est difféomorphe au fibré unitaire tangent d'une surface Σ_τ à courbure négative constante et que le feuilletage que nous considérons est le feuilletage stable du flot géodésique de Σ_τ . Le groupe fondamental de $PSL(2, \mathbb{R})_{/i_\tau(\Gamma)}$ est une extension de son centre (isomorphe à \mathbb{Z}) par le groupe fondamental de Σ_τ , canoniquement isomorphe à $i_\tau(\Gamma)$. La conjugaison de classe C^1 dont nous disposons fournit alors un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux, donc un isomorphisme de $i_1(\Gamma)$ sur $i_2(\Gamma)$, c'est-à-dire un automorphisme θ de Γ .

Si $\gamma \in \Gamma - \{id\}$, il existe une unique géodésique fermée sur Σ_τ dont la classe d'homotopie libre est celle de $i_\tau(\gamma)$. Cette géodésique fermée correspond à un cylindre pour le feuilletage de codimension 1 correspondant sur le fibré unitaire tangent. L'holonomie de ce cylindre est engendrée par un germe de difféomorphisme de \mathbb{R} dont la dérivée au point fixe est égale à $\exp(l_\tau(\gamma))$ où $l_\tau(\gamma)$ désigne la longueur de la géodésique considérée sur Σ_τ . Puisqu'une conjugaison de classe C^1 doit préserver la partie linéaire des groupes d'holonomie, on en déduit que, pour tout $\gamma \in \Gamma - \{id\}$, les géodésiques fermées de Σ_1 et Σ_2 librement homotopes à $i_1(\gamma)$ et $i_2(\gamma)$ ont la même longueur. Ceci implique que i_1 et $i_2 \circ \theta$ sont conjuguées dans $PSL(2, \mathbb{R})$. (Une métrique à courbure -1 sur une surface Σ_1 est caractérisée par l'application $\gamma \mapsto l_1(\gamma)$, voir, par exemple, [Thu]). \square

Par conséquent, si l'on s'intéresse aux feuilletages proches de \mathcal{F}_0 à conjugaison différentiable près, il faut au moins considérer «l'espace de Teichmüller» des déformations de morphismes de Γ dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Cet espace est de dimension finie car un morphisme de Γ dans $PSL(2, \mathbb{R})$ est caractérisé par l'image d'un système de générateur.

Le théorème suivant montre que ces «déformations projectives» suffisent pour décrire les feuilletages proches de \mathcal{F}_0 à conjugaison différentiable près.

Théorème III.4.2. *Soit \mathcal{F}_0 un feuilletage de $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ obtenu à partir d'une action homogène de GA . Alors, tout feuilletage de codimension 1 et de classe C^r ($5 \leq r \leq \omega$) suffisamment C^3 proche de \mathcal{F}_0 est C^{r-3} conjugué au feuilletage induit par une (autre) action homogène de GA sur $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma'$ où Γ' est un (autre) sous-groupe uniforme discret de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit X, Y, Z les champs fondamentaux sur $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$. Soit $\bar{\omega}, \bar{\omega}_1$ les formes différentielles de degré 1 définies par :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(X) &= 0, & \bar{\omega}(Y) &= 0, & \bar{\omega}(Z) &= 1, \\ \bar{\omega}_1(X) &= 1, & \bar{\omega}_1(Y) &= 0, & \bar{\omega}_1(Z) &= 0. \end{aligned}$$

Il est clair que $\bar{\omega}$ définit \mathcal{F}_0 et que l'on a

$$\begin{aligned}d\bar{\omega} &= \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}_1, \\ \bar{\omega}_1 \wedge d\bar{\omega}_1(X, Y, Z) &= 1.\end{aligned}$$

Si \mathcal{F} est un feuilletage de classe C^r suffisamment C^3 proche de \mathcal{F}_0 , il peut être défini par une forme ω , de classe C^{r-1} , C^2 proche de $\bar{\omega}$, telle que

$$\omega(Z) = 1.$$

Il existe alors une unique forme ω_1 (de classe C^{r-2}) telle que:

$$\begin{aligned}d\omega &= \omega \wedge \omega_1, \\ \omega_1(Z) &= 0, \\ \omega_1 \wedge d\omega_1(X, Y, Z) &\text{ ne s'annule pas.}\end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème, c'est-à-dire montrer que le feuilletage \mathcal{F} , défini par ω , est différentiablement conjugué au feuilletage induit par une action homogène, il suffit d'associer le Théorème B (amélioré par la Remarque III.3.3) avec la proposition suivante, due à Seke [Bob]. (On a $r-3 \geq 2$.)

Proposition III.4.3. *Soit ω et ω_1 deux 1-formes différentielles, de classe C^{r-2} , sur une 3-variété, vérifiant les deux conditions suivantes:*

- i) $d\omega = \omega \wedge \omega_1$
- ii) $\omega_1 \wedge d\omega_1$ n'a pas de singularité.

Alors, le feuilletage défini par la forme ω peut être paramétré par une action localement libre de GA , de classe C^{r-3} , préservant la forme de volume $\omega_1 \wedge d\omega_1$.

Démonstration. En dérivant i), on voit que $\omega \wedge d\omega_1$ est nul, c'est-à-dire qu'il existe une forme ω_2 de classe C^{r-2} telle que:

$$\text{iii) } d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2.$$

Dérivant de nouveau cette égalité, et utilisant i), on obtient que $\omega \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 - d\omega_2)$ est nul. Il existe donc une forme ω_3 telle que:

$$\text{iv) } d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega \wedge \omega_3.$$

L'hypothèse ii) signifie que $\omega, \omega_1, \omega_2$ sont indépendants partout.

Définissons alors les champs X et Y de classe C^{r-3} par

$$\begin{aligned}\omega(X) &= 0, & \omega_1(X) &= 1, & \omega_2(X) &= 0, \\ \omega(Y) &= 0, & \omega_1(Y) &= 0, & \omega_2(Y) &= 1.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $[X, Y] = -Y$. Pour cela, il faut évaluer $[X, Y]$ sur ω, ω_1 et ω_2 . Tout d'abord, le crochet $[X, Y]$ est dans le noyau de ω car X et Y le sont et la forme ω est intégrable. La formule iii) donne

$$\begin{aligned}d\omega_1(X, Y) &= X\omega_1(Y) - Y\omega_1(X) - \omega_1([X, Y]) \\ &= (\omega \wedge \omega_2)(X, Y) = \omega(X)\omega_2(Y) - \omega(Y)\omega_2(X).\end{aligned}$$

D'où il ressort que $\omega_1([X, Y])$ est nul.

On procède de même avec iv)

$$\begin{aligned} d\omega_2(X, Y) &= X\omega_2(Y) - Y\omega_2(X) - \omega_2([X, Y]) \\ &= (\omega_1 A \omega_2 + \omega A \omega_3)(X, Y) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega_2([X, Y]) = -1.$$

Par conséquent, on a bien $[X, Y] = -Y$.

Il reste à montrer que l'action ainsi trouvée préserve le volume $\omega_1 A d\omega_1$. On calcule pour cela les dérivées de Lie:

$$L_X \omega_1 = i_X d\omega_1 + di_X \omega_1 = i_X(\omega A \omega_2) = 0,$$

de sorte que ω_1 (et donc $\omega_1 A d\omega_1$) est invariante par X . Pour tout vecteur v , on a

$$(L_Y \omega_1)(v) = (i_Y d\omega_1 + di_Y \omega_1)(v) = \omega A \omega_2(Y, v) = -\omega(v).$$

On a donc

$$\begin{aligned} L_Y(\omega_1 A d\omega_1) &= (-\omega) A d\omega_1 + \omega_1 A d(-\omega) \\ &= -\omega A \omega A \omega_2 - \omega A \omega A \omega_1 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

La démonstration du Théorème C est maintenant facile.

Démonstration du Théorème C III.4.4. Il suffit de remarquer que si Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte orientable, tout morphisme de Γ dans le groupe des difféomorphismes du cercle donne, par suspension, un feuilletage de codimension 1. Deux tels feuilletages sont C^3 proches si et seulement si les morphismes de Γ dans $\text{Diff}'(\mathbf{S}^1)$ sont C^3 proches sur un système de générateurs. Le théorème C est alors une conséquence du Théorème III.4.2 puisque la suspension d'un sous-groupe uniforme discret de $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Diff}'(\mathbf{S}^1)$ n'est autre qu'un feuilletage induit par une action homogène de GA . \square

Les résultats de ce paragraphe suggèrent la question suivante:

Question III.4.5. Existe-t-il un feuilletage de codimension 1, de classe C^∞ , sans feuilles compactes, sur le fibré unitaire tangent d'une surface de genre ≥ 2 , qui ne soit pas C^∞ conjugué au feuilletage stable du flot géodésique de cette surface munie d'une métrique à courbure constante?

Remarquons que Goldman conjecture dans [Gol] que tous les feuilletages sans feuilles compactes sur le fibré unitaire tangent d'une surface de genre ≥ 2 sont *topologiquement* conjugués.

IV. Existence d'un volume invariant

1. Hyperbolicité du flot X

Fixons nous une action localement libre de GA , de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$), sur une 3-variété fermée M que nous supposons orientable. Si nous ne supposons pas a

priori que l'action préserve un volume, il n'est pas clair que le flot associé au champ X est de type Anosov. Le but de ce paragraphe est de montrer que ce flot possède cependant un certain nombre de propriétés générales des flots d'Anosov. Nous noterons dorénavant ϕ_t le flot associé à X , c'est-à-dire défini par: $\phi_t(m) = (e^t, 0) \cdot m$.

La différentielle de ϕ_1 définit un opérateur sur l'espace de Banach des champs de vecteurs bornés sur M^3 . Nous noterons $(\phi_1)_*$ cet opérateur. Il est clair que $(\phi_1)_*$ préserve le sous-espace fermé formé par les champs de vecteurs tangents au feuilletage \mathcal{F} défini par l'action de GA considérée. On obtient donc un opérateur, noté $(\overline{\phi_1})_*$, de l'espace de Banach quotient, formé des champs de vecteurs «normaux».

Lemme IV.1.1. *Le spectre de l'opérateur $(\overline{\phi_1})_*$ est contenu dans le disque unité fermé.*

Démonstration. Dans le cas contraire, on pourrait construire un réel $\lambda > 1$, une suite de points m_n de M et une suite de réels t_n tendant vers $+\infty$ tels que:

$$d\phi_{t_n}(m_n) : T_{m_n}M/T_{m_n}\mathcal{F} \rightarrow T_{\phi_{t_n}(m_n)}M/T_{\phi_{t_n}(m_n)}\mathcal{F},$$

soit de norme supérieure à λ^{t_n} . (Ces normes sont calculées à l'aide d'une métrique riemannienne auxiliaire sur M .) Puisque $d\phi_{t_n}$ multiplie Y par e^t et préserve X , on en déduirait que, si \mathcal{L} désigne un champ de vecteurs transverse à \mathcal{F} ;

$$\|d\phi_{t_n}(\mathcal{L}_{m_n})\| \geq \inf(\lambda, e)^{t_n} \|\mathcal{L}_{m_n}\|.$$

Construisons alors une mesure ν invariante par ϕ_t définie par:

$$\int_M f d\nu = \lim \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(\phi_\tau(m_n)) d\tau,$$

où f est une fonction continue de M dans \mathbb{R} et où il a fallu éventuellement remplacer t_n par une de ses sous-suites.

Par construction de cette mesure invariante et d'après la remarque précédente, il est clair que les exposants de Liapounov de ν sont strictement positifs (supérieurs à $\text{Log inf}(\lambda, e)$) sauf celui correspondant à la direction X (car $d\phi_t(X) = X$) (voir [Pes]).

D'après [Rue 1], il existe ν -presque partout une variété instable. Celles-ci sont des sous-variétés de dimension 2, transverses à X . Si Σ est l'une d'elles, il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\phi_{t_0}(\Sigma) = \Sigma$ car tous les points de M sont non errants par ϕ_t . L'application ϕ_{t_0} restreinte à Σ est alors une dilatation de Σ , ce qui permet de construire un point fixe répulsif de $\phi_{t_0}|_\Sigma$, c'est-à-dire une orbite périodique répulsive de ϕ_t , contrairement à II.1.8. \square

Corollaire IV.1.2. *Il existe un unique feuilletage \mathcal{F}^s de codimension 1, transverse au feuilletage défini par X et Y (que nous noterons désormais \mathcal{F}^u) et ϕ_t invariant. Ses feuilles sont de classe C^r .*

Démonstration. D'après le lemme précédent, le spectre de $(\phi_1)_*$ est de la forme $\{e\} \cup A$ où A est contenu dans le disque unité fermé. Par conséquent, si $1 < q < e$, alors

$(\phi_1)_*$ est q -hyperbolique et le corollaire est une conséquence de [Hir-Pug-Shu]. \square

Notons toujours μ une mesure sur M invariante par l'action de GA .

Proposition IV.1.3. *Il existe un borélien N , de μ -mesure strictement positive et ϕ_t invariant et, pour tout x de N , une décomposition de T_xM en une somme de trois droites vectorielles*

$$T_xM = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \oplus E_x^s,$$

tels que:

- 1) E_x^s dépend mesurablement de x ;
- 2) cette décomposition est $d\phi_t$ invariante;
- 3) N est saturé par \mathcal{F}^s ;
- 4) si $v \in E_x^s$, la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \text{Log} \|d\phi_t(v)\| = \lambda^-(x)$$

existe et est strictement négative.

Démonstration. D'après [Rue 1] et [Pes], il existe μ -presque partout une décomposition $d\phi_t$ invariante et dépendant mesurablement de x

$$T_xM = E_x^o \oplus E_x^s \oplus E_x^u,$$

telle que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \text{Log} \|d\phi_t(v)\| &= 0 \quad \text{si } v \in E_x^o \\ &= \lambda^+(x, v) > 0 \quad \text{si } v \in E_x^u \\ &= \lambda^-(x, v) < 0 \quad \text{si } v \in E_x^s. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathbb{R}X \subset E_x^o$ et $\mathbb{R}Y \subset E_x^u$. Supposons que $\dim E_x^u$ soit égale à 2 sur un ensemble de mesure positive. De même que dans la démonstration de la Proposition IV.1.1, on produirait une orbite périodique répulsive pour ϕ_t , ce qui n'est pas possible. Par conséquent, pour presque tout x , on a $E_x^u = \mathbb{R}Y$.

Considérons maintenant un petit arc γ contenu dans une orbite de Y . Il existe alors un prolongement i de $D^2 \times [0, 1]$ dans M envoyant $D^2 \times \{*\}$ dans une feuille de \mathcal{F}^s et $\{0\} \times [0, 1]$ sur γ . La mesure conditionnelle μ_i définie sur $[0, 1]$ par:

$$\mu_i(X) = \mu(i(D^2 \times X)), \quad X \subset [0, 1],$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ceci provient du fait que, localement, μ s'obtient en intégrant la mesure de Haar de GA le long d'une mesure transverse à \mathcal{F}^s . Nous sommes donc dans les conditions d'application de la formule de Pesin [Pes] permettant de calculer l'entropie de ϕ_1 relative à la mesure μ :

$$h(\phi_1, \mu) = \int_M \lambda^+(x, Y) d\mu = 1.$$

Considérons alors le flot ϕ_{-t} ; pour évaluer son entropie, nous pouvons appliquer l'inégalité de Ruelle [Rue 2]. Si \mathcal{L} est un champ de vecteurs tangent à E_x^s défini sur l'ensemble N des points où E_x^s est non trivial (et par conséquent de dimension 1), on obtient:

$$1 = h(\phi_{-1}, \mu) \leq \int_N -\lambda^-(x, \mathcal{L}) d\mu.$$

Par conséquent, l'ensemble N des points où E_x^s est défini est de μ mesure non nulle. \square

Remarquons que N est dense car μ charge les ouverts.

Corollaire IV.1.4. *La réunion des orbites périodiques hyperboliques de X est dense dans M .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'argument classique de Hirsch montrant que la réunion des orbites périodiques d'un flot d'Anosov transitif est dense, s'adapte sans difficulté dans notre cas. En effet, nous disposons d'une partie dense N sur laquelle le flot ϕ_t est «hyperbolique», ce qui permet de construire des orbites périodiques hyperboliques. Dans la suite, nous conviendrons que ces orbites et leurs variétés stables sont dans N . \square

Résumons les propriétés de ϕ_t :

- 1) ϕ_t est transitif;
- 2) pour tout x , il existe une variété instable forte ($\mathbb{R}Y$);
- 3) pour un ensemble de μ -mesure strictement positive et ϕ_t invariant, il existe une variété stable forte;
- 4) Il existe un feuilletage stable (resp. instable) de codimension 1.

Ceci va nous permettre de construire des partitions de Markov. Comme nous ne disposons pas, en tout point, d'une variété stable forte, il va nous falloir affaiblir la définition.

Définitions IV.1.5. 1) Soit $i: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ un plongement transverse à X . On dit que i est un rectangle si:

- a) $\forall t \in [0, 1]$, l'image de $s \in [0, 1] \rightarrow i(t, s)$ est une courbe de classe C^r contenue dans une feuille de \mathcal{F}^u ;
- b) $\forall s \in [0, 1]$, l'image de $t \in [0, 1] \rightarrow i(t, s)$ est une courbe de classe C^r contenue dans une feuille de \mathcal{F}^s .

2) Si $u: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continu et strictement positif et si i est un rectangle, on appelle parallélepède de base i et de hauteur u l'ensemble:

$$P_{i,u} = \{\phi_\tau(i(s, t)) \mid (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1], 0 \leq \tau \leq u(s, t)\}.$$

On supposera toujours que u est suffisamment petite pour que l'application $(s, t, \tau) \mapsto \phi_\tau(i(s, t))$ soit un plongement.

3) Une famille finie de parallélepèdes P_1, P_2, \dots, P_n est une partition de M si

$$\bigcup_k P_k = M,$$

$$\partial(P_k \cap P_l) = \partial P_k \cap \partial P_l, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Donnons quelques notations. Si (P_k) est une partition de M et si i_k désigne la base de P_k , on notera :

$$\begin{aligned} R_k &= i_k([0, 1] \times [0, 1]), \\ \partial^s R_k &= i_k(\{0, 1\} \times [0, 1]), \\ \partial^u R_k &= i_k([0, 1] \times \{0, 1\}), \\ \text{Int } R_k &= i_k(]0, 1[\times]0, 1[). \end{aligned}$$

Notons R la réunion des R_k et T la transformation de R dans R associant au point x de R le premier point de l'orbite positive de x situé dans R . Enfin, si $x = i_k(s, t)$, on pose

$$\begin{aligned} S(x) &= i_k(\{s\} \times [0, 1]), \\ U(x) &= i_k([0, 1] \times \{t\}). \end{aligned}$$

Définition IV.1.6. Une partition (P_k) de M est une partition de Markov si pour tout x de $\text{Int } R_k \cap T^{-1} \text{Int } R_l$, on a

$$\begin{aligned} T(S(x)) &\subset S(T(x)), \\ T(U(x)) &\supset U(T(x)). \end{aligned}$$

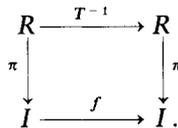
Proposition IV.1.7. Il existe une partition de Markov (P_k) telle que $\partial^s P_k$ soit contenu dans la variété stable d'une orbite périodique hyperbolique.

Démonstration. Les propriétés que nous avons établies pour ϕ_t permettent d'adapter immédiatement la démonstration de l'existence d'une partition de Markov pour les flots d'Anosov sur les 3-variétés telle qu'elle est donnée dans [Rat]. \square

Montrons maintenant comment on peut associer une transformation de l'intervalle à une partition de Markov. Pour tout k , notons $I_k = i_k(\{0\} \times [0, 1])$ et soit π_k la projection de R_k sur I_k définie par $\pi_k i_k(s, t) = i_k(0, t)$. Soit $I = \cup I_k$, $\pi : R \rightarrow I$ la projection correspondant aux π_k et f la transformation de I dans I définie par :

$$f(x) = \pi(T^{-1}(x)).$$

La condition de Markov entraîne que le diagramme suivant commute :



La transformation f est de classe C^r par morceaux car le feuilletage instable est de classe C^r et la projection π l'est donc aussi.

2. Démonstration du Théorème D

Nous nous proposons de montrer que toute action de classe C^r de GA sur une sphère d'homologie M préserve une forme de volume. Soit Ω_0 une forme de volume

quelconque et introduisons les «Jacobiens» définis par

$$g^* \Omega_0 = J_g \cdot \Omega_0.$$

Nous cherchons une forme de volume de type $\Omega = e^{-F} \cdot \Omega_0$ où F est une fonction numérique définie sur M . La forme Ω sera invariante si, pour tout g , on a:

$$F \circ g - F = \text{Log } J_g.$$

Comme il est difficile de résoudre cette équation, dérivons la et notons ω la forme dF . On obtient:

$$g^* \omega - \omega = d(\text{Log } J_g).$$

Lemme IV.2.1. *Il existe une forme mesurable ω définie sur les vecteurs tangents à M en un point de N et sur les vecteurs tangents à \mathcal{F}^u en un point quelconque, telle que*

$$\phi_t^* \omega - \omega = d \text{Log } J_{(e^t, 0)}.$$

Démonstration. Nous connaissons déjà $\omega(X)$ qui doit être égal à $dF(X) = X(F)$. On pose donc

$$\omega(X) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Log } J_{(e^t, 0)}|_{t=0}.$$

De même, on pose

$$\omega(Y) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Log } J_{(1, t)}|_{t=0}.$$

Il reste à définir $\omega(Z)$ où $Z \in E_x^s$. On doit avoir

$$\omega(d\phi_t(Z)) - \omega(Z) = d \text{Log } J_{(e^t, 0)}(Z) = Z(\text{Log } J_{(e^t, 0)}).$$

Faisant tendre t vers $+\infty$ et utilisant le fait que $\|d\phi_t(Z)\|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$, on pose:

$$\omega(Z) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} Z(\text{Log } J_{(e^t, 0)}),$$

et il nous faut montrer que cette limite existe. Introduisons la fonction

$\Psi = \frac{\partial}{\partial t} \text{Log } J_{(e^t, 0)}$. On a:

$$\text{Log } J_{(e^t, 0)} = \int_0^t \Psi(\phi_\tau(x)) d\tau.$$

$$Z(\text{Log } J_{(e^t, 0)})(x) = \int_0^t Z(\Psi \circ \phi_\tau)(x) d\tau = \int_0^t d\phi_\tau(Z) \Psi(\phi_\tau(x)) d\tau.$$

Comme $d\phi_t(Z)$ a une norme décroissant exponentiellement l'intégrale $\int_0^\infty d\phi_\tau(Z) \cdot \Psi(\phi_\tau(x)) d\tau$ converge. \square

Remarque. i) $\omega(X)$ et $\omega(Y)$ sont des fonctions de classe C^{r-2} ;

ii) Le borélien N est saturé par le feuilletage stable. On peut donc considérer la restriction de ω à une feuille stable de N . La formule définissant ω montre que cette restriction est de classe C^{r-2} .

La fonction F que nous cherchons doit satisfaire $dF = \omega$ et nous cherchons donc une « primitive » pour ω , mais, a priori, la forme mesurable ω n'est même pas fermée. Nous allons donc étudier l'intégrale de ω sur le bord de petits rectangles transverses à X , en espérant montrer que cette intégrale est toujours nulle.

Lemme IV.2.2. *La restriction de ω à une feuille instable est fermée. De même, la restriction de ω à une feuille stable contenue dans N est fermée.*

Démonstration. Nous savons que $\omega(X)$ et $\omega(Y)$ sont de classe C^{r-2} et que $\phi_t^* \omega - \omega = d \text{Log} J_{(e^t, 0)}$. Par suite :

$$\begin{aligned} d\omega(d\phi_t(X), d\phi_t(Y)) - d\omega(X, Y) &= 0, \\ d\omega(X, e^t \cdot Y) - d\omega(X, Y) &= 0. \end{aligned}$$

Faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve $d\omega(X, Y) = 0$.

De même, dans une feuille stable de N , en notant Z un vecteur tangent à E^s , on a :

$$d\omega(X, Z) = d\omega(d\phi_t(X), d\phi_t(Z)).$$

On obtient $d\omega(X, Z) = 0$ en faisant tendre t vers $-\infty$. \square

Si la forme ω était définie partout et différentiable partout, on aurait donc $\phi_t^* d\omega = d\omega$ et $i_X d\omega = 0$. On pourrait donc interpréter $d\omega$ comme une mesure transverse invariante pour le feuilletage de dimension 1 engendré par X . C'est-à-dire que si S_1 et S_2 sont deux petits disques transverses à X et « orbitalement équivalents » (cf. Fig. 2), le théorème de Stokes montre que les intégrales de $d\omega$ sur S_1 et S_2 sont égales.

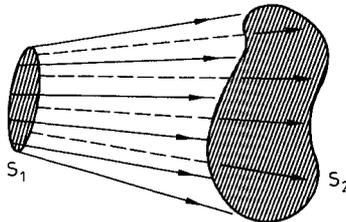


Fig. 2

Dans le cas général, nous allons construire de la même façon une mesure sur R invariante par T .

Soit $i_k(\{0\} \times [\alpha, \beta])$ un intervalle de I_k ; définissons une mesure ν sur I par :

$$\nu(i_k(\{0\} \times [\alpha, \beta])) = \int_{i_k(\partial([0, 1] \times [\alpha, \beta]))} \omega$$

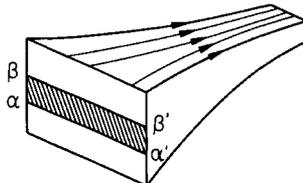


Fig. 3

Lemme IV.2.3. ν définit une mesure sur I , ayant une densité de classe C^{r-2} par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que ν est bien définie, en effet,

$$\nu(i_k(\{0\} \times [\alpha, \beta])) = \int_{\alpha\beta} \omega - \int_{\alpha'\beta'} \omega + \int_{\beta\beta'} \omega - \int_{\alpha\alpha'} \omega \quad (\text{cf. Fig. 3}).$$

Les intervalles $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont tangents à une feuille stable de N et $\beta\beta'$ et $\alpha\alpha'$ sont tangents à \mathcal{F}^u ; l'intégrale sur ces intervalles est donc définie. D'autre part, $\int_{\alpha\beta} \omega$ est une fonction de classe C^{r-2} de α et β puisque α et β restent dans la même feuille instable. De même pour $\int_{\alpha'\beta'} \omega$. Comme les bords des rectangles sont des courbes de classe C^r et que l'action de GA est de classe C^r , il existe une fonction C^r , $\beta \in I_k \rightarrow g(\beta) \in GA$ telle que $\beta' = g(\beta) \cdot \beta$. Par définition de ω , on a alors:

$$\int_{\beta\beta'} \omega = \text{Log } J_{g(\beta)}(\beta) \text{ qui est une fonction de classe } C^{r-1} \text{ de } \beta.$$

De même pour $\int_{\alpha\alpha'} \omega$. \square

Lemme IV.2.4. La mesure ν sur I est f -invariante:

Démonstration. En effet, $T([0, 1] \times [\alpha, \beta])$ (il nous faudrait écrire $T(i_k([0, 1] \times [\alpha, \beta]))$) est une réunion de rectangles du type $[0, 1] \times [\alpha_i, \beta_i]$ où $\bigcup_i [\alpha_i, \beta_i] = f^{-1}([\alpha, \beta])$. On peut construire une 2-chaîne C tangente à \mathcal{F}^s ou \mathcal{F}^u de telle sorte que $\partial C = \partial([0, 1] \times [\alpha, \beta]) - \partial(\bigcup_i [0, 1] \times [\alpha_i, \beta_i])$ (voir Fig. 4).

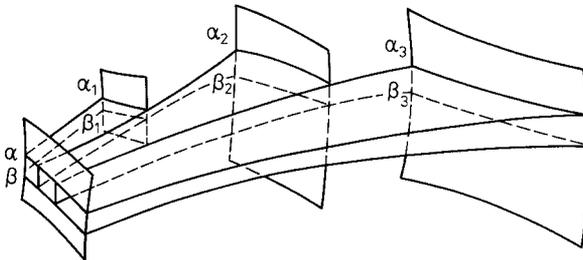


Fig. 4

La forme ω étant fermée sur \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u , les intégrales de ω sont les mêmes sur $\partial([0, 1] \times [\alpha, \beta])$ et $(\bigcup_i [0, 1] \times [\alpha_i, \beta_i])$, c'est-à-dire que

$$\nu([\alpha, \beta]) = \nu(f^{-1}([\alpha, \beta])). \quad \square$$

Lemme IV.2.5. Toute mesure sur I , a densité différentiable par rapport à la mesure de Lebesgue, et f invariante est de signe constant. Par exemple, ν est de signe constant.

Démonstration. Démontrons le pour ν . Soit $\nu = \nu^+ - \nu^-$ la décomposition de Lebesgue de ν . On a alors $f_*\nu = f_*\nu^+ - f_*\nu^-$ et, par conséquent, $f_*\nu^+ \geq \nu^+$ et

$f_*v^- \geq v^-$. S'il existait un borélien A de I tel que $v^+(A) < v^+(f^{-1}(A))$, on aurait

$$v^+(I) = v^+(A) + v^+(I - A) < v^+(f^{-1}(A)) + v^+(f^{-1}(I - A)) = v^+(I).$$

On a donc $f_*v^+ = v^+$ et $f_*v^- = v^-$.

Si v n'était pas de signe constant, l'ouvert des points où la densité de v est strictement positive serait donc un ouvert de I , non vide, non dense, et invariant par f . L'image réciproque par π de cet ouvert est un ouvert de R invariant par T . Par conséquent, on obtiendrait un ouvert de M , non vide et non dense, saturé par \mathcal{F}^u . Ceci est impossible d'après II.1.5. \square

Corollaire IV.2.6. *La mesure v (si elle est non triviale) est l'unique mesure à densité différentiable et f -invariante (à une constante multiplicative près).*

Démonstration. Si η est une autre mesure invariante par f , à densité différentiable, alors pour tout réel k , la mesure $v - k\eta$ est de signe constant; ceci montre que η est un multiple constante de v . \square

Corollaire IV.2.7. *Il existe une unique mesure positive μ_0 sur R telle que μ_0 soit T -invariante et $\mu_0(\pi^{-1}(A)) = v(A)$ pour tout borélien A de I .*

Démonstration. Nous connaissons déjà μ_0 sur la σ -algèbre \mathcal{A}_0 des boréliens du type $\pi^{-1}(A)$. Considérons la partition de R formée par les $R_k \cap TR_I$; c'est une nouvelle partition de Markov, nous pouvons donc construire une mesure ν_1 sur le nouvel espace I_1 et une mesure μ_0 sur les boréliens du type $\pi_1^{-1}(A)$ ($A \subset I_1$) qui forment une σ -algèbre \mathcal{A}_1 contenant \mathcal{A}_0 . Le corollaire précédent montre que cette extension de μ_0 , de \mathcal{A}_0 à \mathcal{A}_1 est cohérente. Par induction, on construit une suite croissante de σ -algèbres et des extensions successives de μ_0 . Il est clair que ces σ -algèbres vont engendrer la σ -algèbre des boréliens de R et nous obtenons donc la mesure μ_0 souhaitée sur R . \square

Rappelons que notre but est de montrer que la forme ω est fermée, c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de faire, que μ_0 est nulle!

Pour y parvenir, nous utiliserons une autre 1-forme θ définie sur N par:

$$\theta|_{E^s} = 0, \quad \theta(Y) = 0, \quad \theta(X) = 1.$$

Il est clair que θ satisfait $\phi_t^*\theta = \theta$.

De manière similaire à ce que nous avons fait avec ω , nous définissons une mesure ξ sur I par:

$$\xi(i_k(\{0\} \times [\alpha, \beta])) = \int_{i_k(\theta([0, 1] \times [\alpha, \beta]))} \theta.$$

Lemme IV.2.8. ξ définit une mesure sur I , ayant une densité de classe C^{r-2} par rapport à la mesure de Lebesgue et f -invariante.

La démonstration est similaire à celles des Lemmes IV.2.3; IV.2.4. \square

Lemme IV.2.9. *Il existe une unique mesure μ_1 sur R , de signe constant, T -invariante et telle que $\mu_1(\pi^{-1}(A)) = \xi(A)$ pour $A \subset I$.*

La démonstration est similaire au Corollaire IV.2.7. \square

Corollaire IV.2.10. *Si μ_1 est non nulle, il existe une constante k telle que $\mu_0 = k\mu_1$. \square*

Pensant à μ_1 comme étant $d\theta$ restreint à R , on voit que μ_1 mesure le «défaut d'intégrabilité» de $E^s \oplus E^u$.

Lemme IV.2.11. *Si μ_1 est nulle, il existe un feuilletage de codimension 1 et transverse à X tel que les variétés stables fortes et instables fortes, là où elles existent, sont tangentes à ce feuilletage.*

Démonstration. Dans chaque parallélépipède P_k , on choisit un point base x_k et on définit la fonction f_k par :

$$f_k(x) = \int_{\gamma} \theta,$$

où γ est un chemin polygonal tangent à \mathcal{F}^u ou $\mathcal{F}^s \cap N$ et joignant x à x_k . Comme μ_1 est nulle, ceci ne dépend pas du choix de γ et définit un submersion de classe C^{r-1} du parallélépipède dans \mathbb{R} . Comme il est clair que f_k est constant le long d'une variété stable ou instable, nous avons le feuilletage souhaité. \square

Lemme IV.2.12. *Si $\mu_1 = 0$, alors $\mu_0 = 0$.*

Démonstration. Comme dans [Pla 3], nous pouvons approcher le feuilletage construit précédemment par une fibration (voir le théorème de Tischler). Soit K une fibre de cette fibration, transverse à X . Si la mesure μ_0 était non nulle, elle serait par exemple strictement positive sur les ouverts. On peut supposer que tous les rectangles R_k sont contenus dans K et sont tels que $\bigcup_k R_k = K$. On a alors

$$0 < \mu_0(K) = \sum \mu_0(R_k) = \sum_k \int_{\partial R_k} \omega.$$

Mais cette intégrale est nulle car chaque arc de ∂R_k intervient deux fois dans cette somme, avec des orientations opposées. \square

Etudions maintenant le cas où $\mu_1 \neq 0$, on a alors $\mu_0 = k \cdot \mu_1$. Posons $\omega' = \omega - k\theta$. Il est clair que $\phi_t^* \omega' - \omega' = d(\text{Log } J_{(e^t, 0)})$ et si μ'_0 est la mesure sur R associée à ω' , on a $\mu'_0 = \mu_0 - k\mu_1 = 0$. Quitte à remplacer ω par ω' , on peut donc supposer que l'intégrale de ω sur un lacet polygonal tangent à \mathcal{F}^u ou $\mathcal{F}^s \cap N$ et contenu dans un parallélépipède est nulle et ceci que μ_1 soit nul ou pas.

On peut maintenant définir une fonction h_k sur chaque parallélépipède P_k par

$$h_k(\phi_t(x)) = \int_{\gamma} \omega,$$

où γ est un chemin polygonal quelconque reliant un point de base au point $\phi_t(x)$. Il est clair que h_k est de classe C^{r-1} dans P_k et que sa différentielle n'est autre que ω (qui a du être éventuellement remplacé par ω'). Par conséquent, la forme ω pouvait être définie globalement comme une forme fermée de classe C^{r-2} .

Démonstration du Théorème D. Puisque nous supposons que le premier nombre de Betti de M est nul, il existe une fonction F définie sur M^3 , telle que $dF = \omega$. Si l'on

intègre l'égalité

$$\phi_t^* \omega - \omega = d \operatorname{Log} J_{(e^t, 0)},$$

on obtient

$$F \circ \phi_t - F = \operatorname{Log} J_{(e^t, 0)} + C(t) \quad \text{où } C(t) \in \mathbb{R}.$$

Revenant aux notations initiales, la forme $\Omega = e^F \cdot \Omega_0$ satisfait

$$\phi_t^* \Omega = e^{C(t)} \Omega.$$

Puisque l'intégrale de Ω sur M doit être préservée, on a nécessairement $C(t) = 0$, c'est-à-dire que la forme Ω est invariante par ϕ_t , c'est-à-dire par les homothéties $(a, 0)$. Il reste à montrer que Ω est aussi invariante par les translations $(1, b)$. On introduit pour cela les nouveaux jacobiens J'_g définis par :

$$g^* \Omega = J'_g \Omega.$$

On a $J'_{gh} = J'_g \circ h \cdot J'_h$ et $J'_{(a, 0)} = 1$.

En écrivant $(a, 0)(1, b) = (1, ab)(a, 0)$, on obtient

$$\begin{aligned} J'_{(a, 0)} \circ (1, b) &= J'_{(1, b)} = J'_{(1, ab)} \circ (a, 0) \cdot J'_{(a, 0)}, \\ J'_{(1, b)} &= J'_{(1, ab)} \circ (a, 0). \end{aligned}$$

Fixons b et faisons tendre a vers 0. On trouve

$$J'_{(1, b)} = \lim_{a \rightarrow 0} J'_{(1, ab)} \circ (a, 0) = 1.$$

Car $\lim_{\beta \rightarrow 0} J'_{1, \beta} = J'_{1, 0} = 1$.

Les Jacobiens relatifs aux translations $(1, b)$ sont donc eux aussi égaux à 1 et la forme Ω est donc invariante par l'action. \square

Remarque finale. Nous ne savons pas si la condition sur le premier nombre de Betti de M est nécessaire pour obtenir le Théorème D.

Remerciement. Ce travail constitue une extension de ma thèse de 3ème cycle qui contenait le Théorème B ainsi qu'une version faible du Théorème A [Ghy]. Je tiens à remercier G. Hector, D. Sullivan et A. Verjovsky pour l'aide qu'ils m'ont apportée aux divers stades de développement de ce travail.

Bibliographie

[Ano] Anosov, D.V.: Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature. Proc. Steklov Inst. Math., A.M.S. Translations 1969

[Bob] Seke, B.: Thèse, Université de Strasbourg, 1982

[Cha] Chatelet, G.: Sur les feuilletages induits par l'action de groupes de Lie nilpotents. Ann. Inst. Fourier **27**, 161-190 (1977)

[Dum] Duminy, G.: Bouts des feuilles dans les minimaux exceptionnels. (à paraître)

[Eps] Epstein, D.B.A.: Ends, Topology of 3-manifolds and related topics. In: M. K. Fort, Proceed. of the University of Georgia Inst., Prentice Hall, 1961

- [Gel-Nai] Gelfand, I.M., Naimark, M.A.: Représentations unitaires du groupe des transformations linéaires de la droite. Dokl. Acad. Sci. URSS **55**, 7 (1947)
- [Ghy] Ghys, E.: Sur les actions localement libres du groupe affine. Thèse de 3ème cycle, Lille 1979
- [Ghy-Ser] Ghys, E., Sergiescu, V.: Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology* **19**, 179–197 (1980)
- [Gol] Goldman, W.: Discontinuous groups and the Euler class. Doctoral Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1980
- [Gree] Green, L.W.: Remarks on uniformly expanding horocyclic foliations. *J. Differ. Geom.* **13**, 263 (1978)
- [Gre] Greenleaf, F.: Invariant means on topological groups. *Math. Stud.* **16**, American Book Company (1969)
- [Hec 1] Hector, G.: On manifolds admitting locally free nilpotent Lie group actions of codimension 1. (à paraître)
- [Hec 2] Hector, G.: Feuilletages en cylindres. IIIème ELAM, Rio de Janeiro. *Lect. Notes* **597**, 252–271 (1976)
- [Hec 3] Hector, G.: Croissance des feuilletages presque sans holonomie. *Lect. Notes, School of Topology PUC*, 1976
- [Hir-Pug-Shu] Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M.: Invariant manifolds. *Lect. Notes Math.* **583** (1977)
- [Kir] Kirilov, A.: *Éléments de la théorie des représentations*. M.I.R. 1974
- [Mar] Marcus, B.: Ergodic properties of horocyclic flows for surfaces of negative curvature. *Ann. Math.* **105**, 81–105 (1977)
- [Pal] Palmeira, C.F.B.: Open manifolds foliated by planes. *Ann. Math.* **107**, 109–131 (1978)
- [Pes] Pesin, Y.A.: Characteristic Lyapounov exponents and smooth ergodic theory. *Russ. Math. Surv.* **32**, 54–114 (1977)
- [Pla 1] Plante, J.: Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. Math.* **102**, 327–361 (1975)
- [Pla 2] Plante, J.: Asymptotic properties of foliations. *Comment. Math. Helv.* **47**, 449–456 (1972)
- [Pla 3] Plante, J.: Anosov flows. *Am. J. Math.* **94**, 729–754 (1972)
- [Pla 4] Plante, J.: Locally free affine group actions. *Trans. A.M.S.* **259**, 449–456 (1980)
- [Rat] Ratner, M.: Markov splitting for U -flows in three dimensional manifolds. *Mat. Zametki* **6**, 693–704 (1969)
- [Ros] Rosenberg, H.: Foliations by planes. *Topology* **7**, 131–138 (1968)
- [Ros-Rou-Wei] Rosenberg, H., Roussarie, R., Weil, D.: A classification of 3-manifolds of rank two. *Ann. Math.* **91**, 449–469 (1970)
- [Rue 1] Ruelle, D.: Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. I.H.E.S.* **50**, 27–50 (1979)
- [Rue 2] Ruelle, D.: An inequality for the entropy of differentiable maps. *Boll. Soc. Bras. Mat.* **9**, 83–88 (1978)
- [Sac] Sacksteder, R.: Foliations and pseudo-groups. *Am. J. Math.* **87**, 79–102 (1965)
- [Ste] Sternberg, S.: Local C^∞ transformations of the real line. *Duke Math. J.* **24**, 97–102 (1957)
- [Sul] Sullivan, D.: Discrete conformal groups and measurable dynamics. *Bull. A.M.S.* **6**, 57–73 (1982)
- [Thu] Thurston, W.: *Geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton: Notes from Princeton University 1978