A beleza da matemática

Academia Brasileira de Ciências, Maio 2015

Étienne Ghys

Pode parecer paradoxal falar de beleza matemática. O público em geral tem pouco interesse em matemática, e freqüentemente só se lembra de fórmulas feias e terríveis, que são memórias dolorosas do tempo de colégio. A imagem pública do matemático está longe de ser tão positiva como a do artista. Na maioria das vezes o matemático é visto como um calculador frio, quase como uma máquina. Muitos pensam que « Beleza » e « Matemática » não podem coexistir.

No entanto, quando eles estão juntos, como por exemplo nesta fotografia, os matemáticos costumam falar de seus trabalhos em termos estéticos. Eles nunca hesitam em descrever um teorema bonitinho, uma prova elegante, ou até mesmo uma teoria magnífica. Dentro da pequena comunidade dos matemáticos, parece que existe um consenso implícito, razoavelmente bem claro, em torno do conceito de « beleza matemática ». É este conceito que eu queria discutir hoje.

Como é possível que 99,99% da população acham algo feio enquanto 0,01% acham a mesma coisa bonita ? Será que podemos descrever e compreender uma « beleza matemática » reservada a uma pequena casta ? Não seria uma ilusão ? Uma espécie de link social inventado por a comunidade matemática com o único propósito de construir-se uma identidade e proteger-se da agressão do mundo exterior ?

Artistas, entretanto, tomam muito cuidado com a palavra « beleza ». Muitas vezes, eles a rejeitam, ao contrario do público que combina espontaneamente arte e beleza. Há mais de um século que a beleza não está mais no centro do processo artístico, pelo menos quando se trata de arte contemporânea.

Fiquem tranqüilos ! Um ponto comum entre matemáticos, artistas, e filósofos, é que eles costumam fazer perguntas muito boas, mas que, raramente respondem. Hoje, eu não vou derrogar a esta regra e a maioria das minhas perguntas permanecerão sem respostas.

É claro que a estética é um capítulo importante na filosofia clássica, pelo menos desde Platão. No entanto, poucos filósofos têm abordado a questão da beleza da matemática. Entre os raros que se aventuraram neste assunto, a maioria não são matemáticos e, por causa disto, eu não acho que são muito confiáveis.

Infelizmente, poucos matemáticos são também filósofos ou simplesmente buscam analisar conscientemente suas emoções estéticas. Paul Erdös ilustra bem a opinião da maioria. Foi um matemático húngaro famoso, que morreu há 15 anos. Diz-se que nenhum outro matemático tem publicado mais artigos que ele, com centenas de colaboradores. O « número de Erdös » de um matemático é o menor comprimento de uma cadeia de colaboradores que conecta com Erdös. Meu número é 3. Já publiquei com alguém que publicou com alguém que publicou com Erdös. Ele tinha uma idéia muito simples e ingênua da beleza na matemática : em poucas palavras é a seguinte : « se você não sabe o que é a beleza matemática, é seu problema, e não posso ajudar você ».

Embora ele tenha sido um ateu, ele gostava de dizer que Deus tem um livro no qual ele escreveu as mais belas demonstrações matemáticas e, de vez em quando, Deus mostra uma página do livro a um ser humano. Erdös disse : « *Não é necessário acreditar em Deus, mas temos de acreditar no Livro* » ! Após sua morte, Martin Aigner e Günter Ziegler publicaram um livro muito interessante, em sua memória, chamado « Proofs from the Book » uma coleção de demonstrações universalmente reconhecidas como sendo belas dentro dos matemáticos. Repara a tradução francesa, sugerindo algum lado divino !

Vou apenas dar um exemplo de uma bela demonstração, um exemplo bem comum, conhecido por todos os matemáticos. A demonstração por Euclides, portanto há mais de 2000 anos, que existem uma infinidade de números primos. Um número inteiro é chamado primo se ele é divisível apenas por 1 e ele mesmo. Por exemplo, 6 não é primo, pois é igual a 2 vezes 3. O inteiro 5 pode decompor-se apenas como 5 vezes 1 ou 1 vezes 5, de modo que 5 é um número primo. Se um número inteiro não é primo, pode ser decomposto num produto de dois números menores, que por sua vez podem ser decompostos se eles não são primos, etc. No fim das contas, qualquer número inteiro é um produto de números primos. Por exemplo, 2015 é igual a $5 \times 13 \times 31$. Euclides diz que há uma infinidade de números primos, e a prova que ele deu é considerada maravilhosa por todos os matemáticos. E a seguinte. Começa com alguns números primos, 5,13 e 31, por exemplo. Multiplicá-los : o resultado é 2015, e adicione 1 ao resultado. Obtemos um numero N (2016 no nosso exemplo). Obviamente, N não é divisível por nenhum dos números primos iniciais, já que o resto da divisão é 1. Qualquer divisor primo de N é, portanto, diferente dos números primos escolhidos inicialmente. Para qualquer conjunto finito de números primos, podemos então encontrar um número primo diferentes daqueles. Portanto, há uma infinidade de números primos. *Quod erat demonstrandum.*

Eu escolhi este exemplo no campo venerável da teoria dos números que lembra imediatamente o « Tudo é número » de Pitágoras, ou o « Mundo das Idéias » de Platão, ou o « Livro » de Erdös. Uma espécie de receptáculo abstrato, um paraíso maravilhoso reservado para poucos iniciados. Boa parte dos matemáticos se consideram como simples observadores de paisagens bonitas, um pouco como nesta pintura famosa, símbolo do romantismo . Alguns outros mais energéticos, se consideram como exploradores, que desmatam grandes florestas selvagens, descobrindo as vezes algumas clareiras bonitas.

Na verdade, a maioria dos matemáticos, pelo menos dentro dos poucos que têm pensado no assunto, continuam com a antiga teoria filosófica do *realismo estético* de Platão. Um mundo matemático, certamente distinto do mundo físico, mas que não deixa de ser real, povoado com entidades matemáticas, como por exemplo os números primos. Um mundo matemático externo ao ser humano e eterno. Os matemáticos são, nesse sentido, espectadores e a beleza é uma qualidade ligada a esses objetos, portanto uma qualidade *objetiva*, independente do sujeito que os observa. Hoje, chamamos isto de *neoplatonismo matemático.*

Um exemplo típico é o matemático neoplatonista Kurt Gödel que morreu em 1978, possivelmente o mais importante lógico desde Aristóteles. Uma de suas maiores descobertas é que existem afirmações matemáticas tais que é impossível estabelecer que elas são verdadeiras, e *também* é impossível mostrar que são falsas. Ele nunca duvidou no entanto, que estas afirmações são de fato verdadeiras ou falsas. Sua interpretação tem sido sempre de que os seres humanos não têm ferramentas suficientes para conhecer plenamente as entidades matemáticas. Estas entidades existem independentemente de nós. Nós somos simplesmente incapazes de entende-las. Elas vivem em mundos paralelos que só podemos vislumbrar. Alias, Gödel os imaginava como anjos e demônios. Tudo isto é muito próximo da alegoria da caverna de Platão : os seres humanos são como prisioneiros que vivem no interior de uma caverna e que podem ver apenas sombras, projeções da verdadeira forma perfeita das coisas.

Em seu romance « Da Terra à Lua » Jules Verne estava tão convencido da universalidade da matemática que ele imaginou que os homens poderiam representar o teorema de Pitágoras em um grande lugar, com um triângulo tão grande que pode ser observado a partir da Lua.

« *Qualquer ser inteligente, disse o matemático, deve entender o significado científico daquela figura. Os selenitas, se existirem, irão responder por uma figura semelhante, e uma vez a comunicação estabelecida, será fácil criar um alfabeto que permitira conversar com os habitantes da Lua.* »

Será que devemos pensar nos matemáticos como conquistadores, pregando a matemática como a única verdadeira religião ?

Hoje eu queria propor uma visão um pouco menos... imperialista, e um pouco mais respeitosa da diversidade cultural.

Falando do que caracteriza a beleza dentro do mundo das idéias matemáticas, novamente os matemáticos ficam muitas vezes com Platãor. Em um dos famosos diálogos de Platão, intitulado « Hípias Maior », Sócrates tenta obter uma definição da beleza por seu interlocutor, um sofista chamado Hípias. Hípias começa com uma resposta indigna de um filósofo : « *Sabe, Sócrates* », diz ele, « *uma vez que temos de dizer a verdade, o belo é uma bela garota* ». Isso é de pouca utilidade na matemática ! Depois de mais algumas respostas inúteis e um pouco ridículas de Hípias, Sócrates retoma a discussão e oferece várias definições, muito mais interessantes. A beleza, segundo ele, é apenas uma forma da *verdade*, do desenvolvimento *harmonioso* e do *útil*. Ele acrescenta que a beleza tem que ser associada com o prazer e ele diz até mesmo com o prazer de ver e ouvir. Finalmente, como sempre nos seus diálogos, Sócrates destrói seus próprios argumentos e conclui sem nenhuma definição satisfatória.

Me parece que o ponto de vista do matemático contemporâneo típico, sobre a questão da beleza matemática, se resume a opinião de Platão : a beleza está relacionada com a verdade, com o desenvolvimento harmonioso, e com a utilidade, tudo isto dentro de um mundo objetivo, mesmo que seja distinto do mundo físico real.

Uma citação de Bertrand Russell resume bem este ponto de vista :

« A Matemática, quando vista da maneira certa, tem em si não só a verdade, mas uma beleza suprema – uma beleza fria e austera, que não possui os lindos enfeites da pintura ou da música. »

Alguns trabalhos recentes de neurobiologia tentaram « localizar » a beleza matemática na nossa cabeçar. A experimentação começa com uma entrevista de algumas pessoas « normais », quer dizer sem ligação com a matemática, voluntárias, para conhecer a avaliação deles sobre uma série de obras de arte muito famosas. Em seguida, os voluntários são examinados numa máquina de ressonância magnética enquanto pensam nestas obras de arte. Assim, é possível localizar as áreas do cérebro que estão envolvidas no processo estético. Numa segunda etapa, uma experiência semelhante começa desta vez com voluntários matemáticos, trocando obras de arte por obras de matemática famosas. Parece que as áreas que entram em jogo na cabeça dos matemáticos, no momento de curtir a beleza matemática são as mesmas que no momento de curtir uma bela música ou uma bela paisagem. Se você estiver interessado, a zona estética principal é chamada de « A1 Campo medial do córtex orbito frontal ». E se você quer saber o que é a fórmula que gera a maior emoção estética quando um matemático entra numa máquina de ressonância magnética, é a fórmula de Eulerr. A fórmula mais feia é devida ao matemático indiano Ramanujan. Sinceramente, eu não sou suficientemente competente para ter uma opinião sobre o valor cientifico de tais experiências. Na verdade, não estou muito convencido. Se a estética matemática é de natureza semelhante à estética em geral, porque a beleza matemática não seria acessível a todos, enquanto quase todos os seres humanos, mesmo sem a menor educação, sentem a mesma emoção estética na frente de uma paisagem ?

Tudo isso me faz lembrar da glândula pineal, um órgão localizado perto do centro do cérebro. Descartes afirmava— há quatro séculos— que esta glândula é o lugar onde tem uma conexão entre o corpo e a alma. Desde que eu sou francês, eu não posso permitir-me a menor crítica de Descartes. Pelo menos, isto tem a vantagem de modificar o ponto de vista : em vez de concentrar a beleza sobre o objeto exterior, o foco esta agora no sujeito que esta observando : um ser humano.

Há um pouco mais de um século, exatamente no momento do nascimento da psicanálise, Henri Poincaré deu uma palestra em Paris sobre « L'invention mathématique », em que ele descreveu as circunstâncias de sua descoberta dos chamados « grupos fuchsianos ». Assim, ele comparou pela primeira vez os papeis da lógica *consciente* e da intuição *inconsciente*. O matemático não era mais apenas um espectador, mas ele se tornou um ator. A cena da ação não era mais externa, mas resultava, pelo menos em parte, de um processo psicológico interno e inconsciente, junto com um processo racional consciente. A matemática estava perdendo um pouco de sua universalidade para ganhar alguma subjetividade. Menos divina e mais humana.

« *C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente.* »

Freqüentemente a matemática é comparada a um jogo de xadrez. Uma posição inicial é dada. As regras do jogo são aplicadas. O problema é manobrar as peças para chegar a uma conclusão : xeque-mate ! Este é, naturalmente, uma analogia muito simplista. Ilustra bastante bem a « lógica da demonstração », mas não explica o fenômeno da descoberta. É claro que a dificuldade do jogo é que em geral tem uma grande quantidade de caminhos possíveis e que a maioria destes caminhos não levam a nada, ou não nos levam onde queremos ir. Poincaré escreve o seguinte :

« *Na verdade, o que é a invenção matemática ? Não consiste em fazer novas combinações com peças matemáticas já conhecidasr. Este, qualquer um poderia fazê-lo ; mas as combinações que poderíamos fazer seriam ilimitadas em número, e a maioria são absolutamente sem interesse. A invenção é precisamente de não construir combinações inúteis e construir somente aquelas que são úteis e que são apenas uma pequena minoria. Inventar é escolher.* »

« *[O matemático] é como um comprador em frente a um grande número de amostras, que examina uma após a outra para fazer uma escolha. Aqui, as amostras seriam tão numerosos que a vida não seria suficiente para considerá-las. Não é assim que o matemático funciona. As combinações inúteis nem vão aparecer na mente do inventor. Na consciência dele, somente aparecerão combinações realmente úteis, e algumas outras que vão ser rejeitadas ».*

No livro « A Ciência e o Método », Henri Poincaré procura a ferramenta que ajuda o matemático nas suas escolhas e na sua exploração do mundo matemático. Segundo ele, a bússola que ele usa é nada mais que a beleza, que ele define de uma maneira bastante convencional, como a harmonia.

« *O cientista não estuda a natureza porque é útil. Ele estuda, porque ele gosta do que faz, e ele gosta do que faz, porque é bonito. [...] Eu não estou falando, é claro, da beleza que impressiona os sentidos [...] Quero falar de uma beleza mais íntima que vem da ordem harmoniosa das partes que uma inteligência pura pode agarrar.* »

De fato, também de uma forma convencional, ao continuar a análise da beleza matemática, Poincaré não deixa de falar do relacionamento entre beleza e utilidade. Mas é claro que ele não fala da utilidade imediata. Diz ele :

« *E vemos que o desejo de beleza nos leva as mesmas escolhas que a utilidade.* »

Eu gostaria de entender melhor o trabalho importantíssimo de Immanuel Kant na estética, o livro intitulado « Julgamentos estéticos » e publicado em 1790. Infelizmente, é muito difícil... Segundo ele, julgamentos estéticos *não* pressupõem uma utilidade, um propósito específico do objeto (Zweck em alemão), mas eles têm que ter a *potencialidade* de alguma utilidade (Zweckmässigkeit). Em outras palavras, um objeto estético deve ser útil, mas sem ter sido pensado especificamente com este propósito.

Acho que temos aqui uma pista para definir a beleza matemática. Na matemática, o belo, o útil, é o que pode ser usado em muitas ocasiões diferentes, é uma idéia que é ao mesmo tempo simples e que serve vários propósitos, que nos dá a possibilidade de um entendimento global de muitas coisas no mesmo momento.

É na direção deste tipo de conceitos que o matemático deve dirigir seus esforços. Tomemos o exemplo da decomposição em números primos. Por que ela merece nossa admiração ? Não é necessário ser um matemático para entender que as situações em que queremos decompor um objeto em entidades elementares são numerosas. Podemos decompor uma frase em palavras, uma molécula química em átomos. Podemos analisar um ser vivo em células. Eu poderia dar dezenas de situações semelhantes. O método de Euclides pode ser usado em vários lugares e é por isso que é considerado belo. A beleza e a utilidade são de uma certa forma relacionadas com a conectividade rica com outros fatos.

Para explicar o meu ponto de vista, eu gostaria de descrever uma analogia com as grandes redes. Vamos comparar dois espaços. O primeiro é o espaço dos enunciados matemáticos, o mundo das idéias em que o matemático está trabalhando, o quotidiano do trabalhador matemático. O segundo é a rede da *Web* com um grande número de nós, um para cada página da *Web* (diz-se que hoje há cerca de uma centena de bilhões de páginas *Web*, da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios no cérebro humano). Tem uma ligação entre dois nós se é possível passar de uma página para outra, clicando uma vez. Em média, uma página é ligada a uma dezena de outras (muito menos do que as dezenas de milhares de neurônios ligados a um único neurônio). Pode-se imaginar que o mundo matemático é um pouco parecido : uma gigantesca coleção de fatos matemáticos interligados por processos elementares, digamos silogismos para simplificar. Mas permita-me expressar aqui o que quase todos os matemáticos acreditam : o espaço matemático é muito maior do que a *Web*, e até mesmo que o nosso cérebro. Então, como navegar num espaço maior que o nosso cérebro ? Bem, como navegar na internet ? Simplesmente usando *Google* !

Vejam algumas imagens, simplistas, que podem lhe dar uma idéia da geometria da *Web*. Quando vemos representações gráficas destas redes, enormes buquês parecem brotar de alguns lugares.

Aqui temos vistas mais locais mostrando conexões entre páginas. Alguns nós da rede estão ligados a muitos outros. Estes são os nós que são relevantes e merecem alguma atenção, estes são os lugares que são bonitos, porque eles fornecem acesso a muito mais lugares. E preciso uma definição recursiva : a relevância de um nó numa rede é alta se este nó permite o acesso a nós relevantes.

Aqui esta um mapa bastante interessante, embora já seja antigo, que mostra a estrutura global da Internet. Basicamente, as páginas da *Web* são de quatro tipos. O SCC, « strongly connected core », é realmente o coração ativo, onde tudo se comunica com tudo. O pedaço chamado IN contem as páginas que todo mundo cita, mas que citam ninguém. A parte OUT contem as páginas que citam outras páginas mas que ninguém cita. Finalmente, há os dendritos, tubos, e até mesmo ilhas completamente isoladas do resto do ciberespaço. Se eu tivesse que desenhar um mapa do mundo matemático, o meu desenho seria muito parecido. Algumas áreas da matemática interessam a todos os matemáticos, outras não interessem quase ninguém, e, finalmente, temos as nossas dendrites, nossos tubos e até mesmo nossas ilhas isoladas do resto do mundo.

Mas como localizar esses nós críticos « que fazem sentido », os pontos « bonitos » ? Imagine por exemplo que você tem apenas um pequeno número n de vacinas para controlar a propagação de um vírus em uma população. Como devemos fazer para encontrar as pessoas que têm a maior probabilidade de transmitir a doença ? Como achar esses nós onde a rede parece brotar ? Se você escolher os vacinados aleatoriamente na população, você vai perder suas vacinas. Mas se você escolher aleatoriamente n pessoas e se você pedir as estas pessoas de citar o nome de algum amigo, ou de uma pessoa conhecida, as n pessoas citadas provavelmente terão uma melhor conectividade com o resto da rede. Portanto, é melhor vacinar as pessoas citadas.

Isto é mais o menos a maneira usada por *Google*. Quais são as páginas « úteis », « relevantes » ? A idéia brilhante da *Google* é usar um método que os matemáticos conhecem bem : a distribuição estacionária, ou harmônica (repara a palavra). *Google* chama isto de *PageRank*, e atribui uma « nota » em cada página da *Web* estimando seu « interesse » ou « utilidade » que, no contexto da rede matemática seria análoga a beleza. A idéia é simples. Alias, o próprio *Google* chama isto de método democrático ! A nota de uma página é recalculada, por exemplo todos os dias, da seguinte maneira. Inicialmente, todas as páginas têm nota 1, por exemplo. Em seguida, no dia seguinte, olhamos para cada página e contamos o numero de páginas ligando para ela. E provável que se muitos usuários se referem a uma página, este página tem alguma relevância. Então a nova nota de uma página vai ser a soma das notas das páginas que a citam. Mas no dia seguinte, as notas das várias páginas nem são todas iguais. Se uma página é citada por exemplo por três outras, cujas notas são 1, 5 e 50, vamos atribuir a nova nota 56. Engraçada a democracia do *Google* : as pessoas consideradas importantes têm vozes que contam mais do que os outros... Assim cada página tem um *PageRank* evoluindo a cada dia.

A minha sugestão seria de ver a beleza matemática como uma espécie de *PageRank*, calculado sobre a enorme rede dos enunciados matemáticos. Este espaço matemático, que queremos explorar, é estruturado como a *Web*, com « páginas significativas », e outras que são menos relevantes. A beleza, a utilidade, a eficiência de um teorema, depende do tamanho do território que sua descoberta abre.

O matemático e filósofo Gian-Carlo Rota, num artigo intitulado « The phenomology of mathematical beauty » expressa uma idéia muito similar. Ele introduziu o conceito de iluminação, a capacidade de alguns enunciados matemáticos para iluminar uma paisagem mais ou menos ampla.

« *The phenomenon of enlightment is seldom explicitly acknowledged among mathematicians, for at least two reasons. First, enlightment is not easily formalized, like truth or falsehood. Second, enlightment admits degrees : some statements are more enlightening than others* ».

E um pouco parecido com o fenômeno bem conhecido dos físicos : a transição de fase chamada percolação.

Como Poincaré escreveu em « O valor da ciência » :

« *La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit, mais c'est cet éclair qui est tout.* »

Quero agora enfatizar um ponto muito importante. O conceito de beleza na matemática *evolui no tempo*. O que era lindo ontem já não é mais lindo hoje. Precisamos olhar de uma maneira dinâmica, da mesma forma que não podemos descrever a *Web* esquecendo o processo dinâmico.

Tudo isto é análogo a evolução biológica, tanto no espaço como no tempo. Há muito tempo que os biólogos perceberam que a evolução não escolhe a melhor solução possível. O caminho seguido por uma espécie procura um solução local, dado o seu ambiente atual e dada sua história. Os matemáticos deveriam entender que a beleza e a relevância da matemática não são universais, nem no espaço nem no tempo.

Vocês conhecem talvez a citação de Voltaire : « *Pergunte a um sapo o que é que a beleza. Ele irá dizer-lhe que é sua sapa com dois grandes olhos* *redondos, saindo de sua pequena cabeça, um rosto largo e plano, uma barriga amarela.* »

Se eu abrir um jornal matemático do século XIX ao acaso, eu acho muito raramente coisas que eu considero bonitas. A matemática daquele tempo não estava conectada do mesmo jeito que hoje. O que era simples e útil, não é mais assim. Novas conexões surgiram na matemática. Da mesma forma, se você perguntar a um especialista da teoria dos números e um especialista em equações diferenciais parciais, há uma boa chance de que eles não vêem a beleza nos mesmos lugares. Eles pertencem a duas espécies diferentes ?

Stephen Jay Gould discute por exemplo a evolução tecnológica e toma o exemplo muito interessante da evolução dos teclados da máquina de escrever. Após dois séculos de evolução e inovação, usamos um teclado AZERTY na França, QWERTY nos Estados Unidos ou no Brasil, e outros em outros lugares. Estas soluções não são universais, em qualquer sentido razoável da palavra. Cada vez que o teclado foi modificado, o problema era de resolver uma dificuldade local, tecnológica ou econômica, que provavelmente não faz mais sentido hoje. Pode-se pensar em pedras depositadas em uma paisagem montanhosa ; elas tendem a ir para baixo chegando no fundo de um vale. Elas não « sabem » que há, provavelmente, vales ainda mais baixos, mas em outros lugares. Quando o tempo passa, a paisagem está erodindo, alguns passes ficam mais baixo, algumas pedras vão passar de um vale para o próximo vale, mas em nenhum caso pode se dizer que uma pedra alcançou o mais belo vale, o mais profundo ! Da mesma maneira o pesquisador matemático procura vales profundos mas só tem uma visibilidade local.

Voltamos por um momento à infinidade do conjunto de números primos. Hoje, um matemático não pensa como Euclides pensava. Existem novas provas bonitas, que talvez Euclides não teria achadas bonitas. Aqui está um exemplo. Suponha-se que só existe um número finito de números primos, digamos apenas três, 2,3 e 5 ! Assim, cada inteiro n pode ser escrito na forma $2^x3^y5^z$. É claro que, x, y, z são menores que $\log(n)/\log(2)$, $\log(n)/\log(3)$, $\log(n)/\log(5)$. Então para escrever os números inteiros entre 1 e n, teria no maximo $\log(n)^3/\log(2)\log(3)\log(5)$ possibilidades para (x, y, z). Isto implica a desigualdade $n \leq \log(n)^3/\log(2)\log(3)\log(5)$ que é um absurdo. *Quod erat demonstrandum.*

Esta prova é completamente diferente da prova de Euclides e pode-se pensar que ela só apareceu com a chegada dos computadores. Decompor um número em fatores primos é uma boa maneira de codificar números em computadores. Em vez de escrever um grande numero n, pode ser mais inteligente escrever os expoentes $x, y, z, ...$, que são bem menores. Se houvesse apenas um número finito de números primos, este código seria demasiadamente eficiente !

Espécies biológicas evoluem. A tecnologia e cultura também, é claro. Gosto do ponto de vista de Richard Dawkins, a memética, a teoria darwinista da evolução das culturas. Eu vejo o desenvolvimento da matemática de uma maneira semelhante. Não existe o conceito de profundidade ou de beleza matemática sobre a qual todos concordam, em todos os continentes, em todas as culturas e em todos os momentos. Como na evolução biológica, a rede matemática evolui.

Nós não devemos puxar a analogia biológica longe demais ! O desenvolvimento da matemática tem oportunidades que a evolução não tem... Primeiro, os matemáticos têm uma memória (bibliotecas) e alguns ramos mortos há muito tempo, as vezes, podem renascer com uma relevância renovada. E, acima de tudo, um dos pontos mais poderosos da matemática é a possibilidade de fundir vários ramos para construir um novo. A árvore matemática é incrível !

Portanto, eu gostaria de sugerir que a beleza matemática de uma demonstração ou de um teorema, é o um pouco como seu *PageRank* na rede complexa do mundo matemático, mas nunca esquecendo o seu comportamento dinâmico.

Agora, é necessário compreender como o matemático calcula ou avalia este « *PageRank* matemático » ? No caso da *Web*, são os robôs de *Google* que visitam incansavelmente todos os sites do planeta, sem nos avisar. Podemos imaginar que o papel dos robôs *Google* é análogo ao inconsciente do matemático que faz o trabalho de avaliação, inconscientemente, sem avisar a nossa consciência ? Então seria o inconsciente que avalia a beleza matemática, e seria o consciente racional que demonstra os teoremas. Lembre-se que Poincaré disse : « *É pela lógica que provamos e pela intuição que descobrimos.* »

Esta descrição tem vários defeitos. Os computadores de *Google* visitam quase todas as páginas internet no mundo, porque finalmente, o ciberespaço não é tão grande. Mas eu já lhe disse, o mundo matemático é muito maior, essencialmente inexplorado, e por isso o meu inconsciente não pôde avaliar o valor dos lugares que ele não tenha visitado.

Há uma situação análoga na informática. Quando abro *Google*Maps, procurando ir da sede da Academia de Ciências do Rio de Janeiro ao IMPA, Estrada Dona Castorina, o computador me mostra imediatamente o melhor caminho. Também avalia as possibilidades, como o jogador de xadrez, ou como um matemático. Como faz ele para selecionar tão rapidamente o caminho mais conveniente ? Deixe-me apresentar-lhe brevemente o algoritmo usado, chamado « A estrela ». A primeira idéia, ruim, seria explorar sistematicamente todos os caminhos possíveis que saem da Academia até chegarmos no IMPA. Esta estratégia funciona, mas necessitaria um tempão não razoável ! Parece imediatamente óbvio para a nossa intuição que é melhor, por exemplo, partir mais ou menos na direção do sudoeste ! O algoritmo A Estrela, (eu não tenho tempo para descrever em detalhe), não vai explorar todos os caminhos. Ele examina pouco a pouco uma série de caminhos parciais saindo da Academia. Tentando estender pouco a pouco um caminho, buscando escolher uma próxima etapa x. Lembra Poincaré : « descobrir é escolher ». Para cada nova tentativa de extensão até x, dois números são calculados. O primeiro $T(x)$ é o tempo necessário para ir da Academia até x usando um caminho já analisado. E o segundo, $H(x)$, é o que os cientistas chamam de heurística de x. E uma estimativa do tempo necessário para ir de x até o IMPA. Ainda, não conhecemos o caminho mais curto de x para o IMPA, caso contrário o problema seria resolvido, mas podemos obter uma estimativa. Por exemplo, podemos estimar este tempo usando a distância em linha reta entre x e IMPA, o que nos dará uma indicação aproximada. Mas cuidado, a linha reta pode não ser boa, pois não sabemos a priori que esta linha reta sobrevoa o Corcovado por exemplo ! O algoritmo, a cada etapa minimiza a soma $T(x)+H(x)$. De uma certa forma, é um algoritmo cego que vai explorar caminhos guiado por uma heurística sugerindo-lhe que talvez não seja uma boa idéia ir para o leste ! Na prática, este algoritmo funciona muito rapidamente explora um numero muito pequeno de possibilidades.

Vemos que a situação é bastante próxima do processo descrito por Poincaré em que a intuição inconsciente do pesquisador faz escolhas e ajuda a encontrar seu caminho.

Já mencionei rapidamente os « Julgamentos estéticos » de Immanuel Kant. Em particular, ele explica que a emoção estética é o resultado de um estado mental especial que ele chamou de « jogo livre ». E uma espécie de colaboração entre a nossa mente racional e nossa intuição. Em geral, as atividades racionais e intuitivas não colaboram. Mas no jogo livre descrito por Kant, é uma verdadeira colaboração : nenhum dos dois lados domina o outro. Muito parecido com o $T(x)$ e $H(x)$, que acabo de mencionar ? Muito parecido com a lógica e a intuição de Poincaré.

Um problema aparece. Qual seria a função heurística $H(x)$ que estima o tempo necessário para chegar a uma expressão matemática x partindo de uma dada situação ? Será que existe algo parecido com à distância em linha reta entre dois teoremas ? E se assim for, como o nosso inconsciente poderia calcular uma estimativa disto ? Ainda mais complicado : é muito raro que um matemático trabalha como um aluno resolvendo um exercício : ele sabe (em geral) onde ele esta mas ele não sabe exatamente onde ele quer ir. O que ele quer é visitar lugares interessantes e matematicamente relevantes. É mais um explorador que visita um continente desconhecido do que um turista com o seu guia turístico !

Eu acho que nós temos aqui de usar o conceito de analogia dentro da matemática. O explorador que descobre um vale desconhecido lembrando-lhe um outro vale que já explorou e que ele achou interessante, obviamente vai querer visitar este novo vale.

Minha última elucubração seria que o mundo matemático é *quase periódico*, um pouco como as famosas pavimentações de Penrose que contêm muitas sub-estruturas que parecem idênticas. Um explorador passeando nesta pavimentação vai reconhecer, de vez em quando, pedaços que ele já viu, mesmo se ele nunca viu exatamente a mesma imagem. Uma sensação de « déjà vu » (um conceito importante na psicanálise). Os matemáticos sabem que a quase periodicidade é mais ou menos sinônima de compacidade no sentido matemático. Em vez de considerar o espaço matemático como uma rede muito grande, enorme, até mesmo infinita, eu prefiro pensar nela como um espaço compacto em que um certo número de operações elementares agem —digamos para simplificar silogismos — e cujas trajetórias descrevem os caminhos dos matemáticos. Um caminho confinado num espaço compacto é obrigado a passar e repassar continuamente em situações quase idênticas, pode-se dizer situações análogas : chamamos este fenômeno de « recorrência de Poincaré ». Entramos na área da teoria de sistemas dinâmicos e da teoria ergódica, em que as medidas invariantes ou *harmônicas* desempenham um papel central. Mas estou divagando ! e mesmo se eu estou entrando no meu domínio de competência matemática, este tipo de interpretação psicológica tem poucas justificações teóricas. E melhor parar aqui...