

CLASSE D'EULER ET MINIMAL EXCEPTIONNEL

ETIENNE GHYS

(Received 13 May 1985)

§1. INTRODUCTION

Soit Σ une surface compacte orientée différente de la sphère et $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}^+(S^1)$ une représentation quelconque du groupe fondamental de Σ dans le groupe des difféomorphismes du cercle respectant l'orientation. Dans ce travail, nous nous intéressons aux relations entre les propriétés homotopiques de ϕ et les propriétés dynamiques de l'action correspondante de $\pi_1(\Sigma)$ sur le cercle.

Les propriétés homotopiques de ϕ sont essentiellement concentrées dans sa classe d'Euler. On peut en effet construire, par suspension de ϕ , un fibré en cercles au-dessus de Σ . La classe d'Euler de ce fibré, évaluée sur la classe fondamentale de Σ , est un entier noté $eu(\phi)$. Un théorème de Milnor–Wood [11] affirme que cet entier satisfait l'inégalité:

$$|eu(\phi)| \leq |\chi(\Sigma)|$$

où $\chi(\Sigma)$ désigne la caractéristique d'Euler–Poincaré de Σ .

Par ailleurs, il est bien connu que l'action de $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 correspondant à ϕ doit vérifier l'une des propriétés qualitatives suivantes:

- (1) ϕ a une orbite finie;
- (2) toutes les orbites de ϕ sont denses dans S^1 ;
- (3) il existe un "minimal exceptionnel", c'est-à-dire un ensemble de Cantor K contenu dans S^1 , invariant par ϕ et tel que l'orbite d'un point de K est dense dans K .

Il est très facile de vérifier que dans le cas (1), l'entier $eu(\phi)$ est nécessairement nul: l'orbite finie fournit alors une "section multiforme" pour le fibré en cercles considéré. Par contre, la propriété 2 ne limite pas les valeurs possibles de $eu(\phi)$: pour toute surface Σ et tout entier n tel que $|n| \leq |\chi(\Sigma)|$, il est possible de construire une représentation ϕ telle que $eu(\phi) = n$ et dont toutes les orbites sont denses.

Nous cherchons ici à savoir si l'existence d'un minimal exceptionnel pour une représentation ϕ impose une contrainte supplémentaire entre les entiers $eu(\phi)$ et $\chi(\Sigma)$. La réponse à cette question est évidemment négative si ϕ est une représentation à valeurs dans le groupe $\text{Homéo}^+(S^1)$ des homéomorphismes du cercle respectant l'orientation. En effet, il est toujours possible, à partir d'une représentation à orbites denses, d'ouvrir une orbite "à la Denjoy" de façon à produire une nouvelle représentation ayant la même classe d'Euler mais possédant un minimal exceptionnel.

Nous allons étudier ce problème dans deux cadres différents: les représentations de classe C^2 et les représentations analytiques réelles.

THÉORÈME 1. *Soit $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_2^+(S^1)$ une représentation à valeurs dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^2 qui respectent l'orientation. Si ϕ possède un minimal exceptionnel, alors $|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma)|$.*

THÉOREME 2. Soit $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_\omega^-(S^1)$ une représentation à valeurs dans le groupe des difféomorphismes analytiques du cercle qui respectent l'orientation. Si ϕ possède un minimal exceptionnel, alors $eu(\phi)$ est nul.

Le théorème 2 ne s'étend pas aux représentations de classe C^2 : on peut construire explicitement une représentation $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_x^+(S^1)$ dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞ qui respectent l'orientation telle que ϕ possède un minimal exceptionnel et $eu(\phi)$ est non nul (voir [4]).

La démonstration des théorèmes 1 et 2 met en évidence des résultats ayant un intérêt en soi et que nous formulons ci-dessous.

THÉOREME 3. Soit $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Homéo}^+(S^1)$ une représentation telle que $eu(\phi) = \pm \chi(\Sigma)$. Alors, toutes les feuilles du feuilletage de codimension 1 obtenu par suspension de ϕ sont des cylindres, des plans ou des tores.

THÉOREME 4. Soit $\Gamma \subset \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ un groupe de type fini préservant un ensemble de Cantor. Alors, Γ contient un sous-groupe libre d'indice fini.

Le théorème 4 généralise un résultat similaire de [1] où Γ est supposé sans torsion. Notons que les groupes fuchsien (exemples de Raymond [13]) fournissent de nombreux exemples d'application du théorème 4 où Γ a effectivement une torsion non triviale.

§2. GÉNÉRALITÉS—RAPPELS

Nous rappelons tout d'abord quelques notions relatives à la théorie des bouts introduite par Freudenthal. Si L est un espace localement compact, le nombre de bouts $e(L)$ de L est la borne supérieure (éventuellement infinie) du nombre de composantes connexes non relativement compactes du complémentaire d'un compact de L . Si Γ est un groupe de type fini et S un système de générateurs, le graphe de Cayley de (Γ, S) est le graphe dont les sommets sont les éléments de Γ et qui possède une arête joignant γ_1 à γ_2 si $\gamma_2\gamma_1^{-1} \in S$. Le nombre de bouts de ce graphe ne dépend pas du choix de S . Ce nombre $e(\Gamma)$ est le "nombre de bouts de Γ " et ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2 et $+\infty$. Les groupes ayant 0 bout sont les groupes finis et ceux ayant 2 bouts sont les extensions finies de \mathbb{Z} . Le théorème suivant classe les groupes ayant une infinité de bouts.

THÉOREME 2.1. (J. Stallings [16]). Soit Γ un groupe de type fini. Alors $e(\Gamma) \geq 2$ si et seulement si Γ s'écrit sous la forme $A *_C B$ ou $A *_C$ où C est un groupe fini différent de A et de B . (La notation $A *_C B$ désigne un produit amalgamé et $A *_C$ désigne une HNN extension.)

Plus généralement, soit $\Gamma_1 \subset \Gamma$ un sous-groupe de Γ et S un système de générateurs de Γ . On peut alors construire un graphe dont les sommets sont les éléments de l'espace homogène Γ/Γ_1 et possédant, pour chaque $\gamma \text{ mod } \Gamma_1$ de Γ/Γ_1 et s de S , une arête joignant $\gamma \text{ mod } \Gamma_1$ à $s\gamma \text{ mod } \Gamma_1$. De même que précédemment, le nombre de bouts de ce graphe ne dépend pas du choix de S : c'est le nombre de bouts $e(\Gamma/\Gamma_1)$ de l'espace homogène Γ/Γ_1 . Les notions de bouts d'espaces homogènes et d'espaces topologiques sont reliées par le théorème suivant.

THÉOREME 2.2. (H. Hopf [12]). Soit M une variété compacte et $\Gamma \subset \pi_1(M)$ un sous-groupe du groupe fondamental de M . Si \bar{M} est le revêtement de M associé à Γ , alors $e(\bar{M}) = e(\pi_1(M)/\Gamma)$.

Ce dernier théorème est très utile pour étudier les feuilletages définis par suspension. Rappelons rapidement cette construction. Soit M une variété compacte et $\phi: \pi_1(M) \rightarrow \text{Diff}^+(S^1)$ une représentation quelconque. Si \tilde{M} désigne le revêtement universel de M , le groupe $\pi_1(M)$ opère sur le produit $\tilde{M} \times S^1$. La variété quotient est un fibré en cercles au-dessus de M , muni d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 transverse aux fibres. Les feuilles de \mathcal{F} sont en bijection avec les orbites de l'action de $\pi_1(M)$ sur S^1 et les propriétés de \mathcal{F} se déduisent de celles de l'action. Par exemple, le théorème 2.2 montre que le nombre de bouts de la feuille correspondant au point x de S^1 est égal au nombre de bouts de l'espace homogène $\pi_1(M)/\text{Stab}(x)$ où $\text{Stab}(x)$ désigne le stabilisateur du point x sous l'action de $\pi_1(M)$. De même, \mathcal{F} possède un minimal exceptionnel si et seulement si ϕ en possède un; les feuilles semi-propres du minimal de \mathcal{F} (c'est-à-dire celles correspondant aux points isolés d'un côté du Cantor) correspondent aux orbites semi-propres de l'action ϕ .

Les deux théorèmes suivants seront essentiels pour ce qui suit.

THÉORÈME 2.3. (G. Duminy): *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 et de classe C^2 d'une variété compacte M . Si \mathcal{F} possède un minimal exceptionnel, les feuilles semi-propres de ce minimal ont une infinité de bouts.*

THÉORÈME 2.4. (G. Hector): *Si, de plus, \mathcal{F} est analytique réel, toutes les feuilles du minimal exceptionnel ont une infinité de bouts.*

En fait, nous n'utiliserons que les deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 2.5. *Soit $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_2^+(S^1)$ une représentation possédant un minimal exceptionnel. Alors, les feuilles semi-propres du minimal exceptionnel du feuilletage suspendu ne peuvent pas être homéomorphes à \mathbb{R}^2 ou à $\mathbb{R} \times S^1$.*

COROLLAIRE 2.6. [1]: *Si $\Gamma \subset \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ est un sous-groupe de type fini possédant un minimal exceptionnel, alors Γ a une infinité de bouts.*

Le corollaire 2.6 est une conséquence du théorème 2.4 car il y a au plus un nombre dénombrable de points x pour lesquels $\text{Stab}(x)$ est non trivial. Si x est un point du minimal pour lequel $\text{Stab}(x)$ est trivial, le nombre de bouts de la feuille correspondante est alors égal au nombre de bouts de Γ .

Il est clair que ces deux corollaires sont des cas extrêmement particuliers des théorèmes correspondants. Comme il n'y a pas de démonstrations publiées de ces théorèmes, nous donnons, pour la commodité du lecteur, une esquisse de démonstration des deux corollaires qui nous intéressent. La technique que nous employons est directement inspirée de celle employée dans le cas général et nous ne prétendons évidemment pas à l'originalité.

Énonçons tout d'abord deux lemmes dont les démonstrations sont basées sur des estimations de non linéarité de type "Denjoy".

LEMME 2.7. *Soit $\Gamma \subset \text{Diff}_2^+(S^1)$ un groupe de type fini possédant un minimal exceptionnel. Alors, si x est un point isolé d'un côté de ce minimal, le stabilisateur de x sous l'action de Γ est non trivial.*

(Si le lemme était faux, tous les éléments de Γ seraient des raccourcis au sens de [11 p. 106]; le lemme VI.2.5 de [11] serait alors en contradiction avec le théorème de Sacksteder fournissant un point fixe répulsif pour Γ .)

LEMME 2.8. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 et de classe C^2 d'une variété compacte possédant un minimal exceptionnel et L une feuille semi-propre de ce minimal. Soit h_n une suite de lacets de L du type $g_n^{-1} * \gamma_n * g_n$ où g_n est un chemin joignant le point base x_0 à un point x_n et où γ_n est un lacet en x_n dont le support tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$. Alors, l'holonomie des lacets h_n est définie sur un voisinage fixe V de x_0 dans une transversale à \mathcal{F} en x_0 et converge uniformément vers l'identité sur V quand n tend vers l'infini.

La démonstration de ce lemme est donnée dans [2.6, lemma 2.9], voir aussi [10].

Démonstration du corollaire 2.5. Une feuille semi-propre du minimal exceptionnel ne peut pas être un plan d'après 2.7. Puisque, dans un cylindre, il existe une suite de lacets h_n comme dans le lemme 2.8 qui représentent tous le générateur du groupe fondamental de ce cylindre, le lemme 2.8 montre que si un cylindre est une feuille semi-propre d'un minimal exceptionnel, alors ce cylindre est sans holonomie. Mais ceci est contraire à [6] ou [9]. ■

Pour démontrer le corollaire 2.6, nous utiliserons le résultat suivant.

THÉORÈME 2.9. (G. Hector [7, 8]). Si $\Gamma \subset \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ est un sous-groupe ayant un minimal exceptionnel, alors le stabilisateur de tout point de S^1 est soit trivial, soit infini cyclique.

Démonstration du corollaire 2.6. Soit $s: \pi_1(M) \rightarrow \Gamma$ une surjection du groupe fondamental d'une variété compacte sur Γ et considérons le feuilletage obtenu par suspension de l'action de $\pi_1(M)$ sur S^1 . Comme l'holonomie d'une feuille semi-propre L du minimal est non triviale (2.7), elle est cyclique (2.9) et donc discrète. D'après 2.8, l'holonomie des lacets de L situés en dehors d'un compact assez grand est donc triviale. Par conséquent l'holonomie définit un élément non nul de l'image du morphisme naturel $H_c^1(L, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z})$.

Il est élémentaire de vérifier le fait suivant; soit L une variété non compacte et u un élément non nul de l'image de $H_c^1(L, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z})$ alors le revêtement de L associé à u a une infinité de bouts. En appliquant ce fait à la feuille semi-propre L , on voit que le revêtement de M associé au noyau de s a une infinité de bouts. Mais, d'après 2.2, le nombre de bouts de ce revêtement est égal à celui de Γ . ■

§3. LE CAS DIFFÉRENTIABLE; LES THÉORÈMES 1 ET 3

Pour démontrer le théorème 1, il nous suffit de démontrer le théorème 3. En effet, d'après le corollaire 2.5, un feuilletage de classe C^2 dont toutes les feuilles sont des plans, des cylindres ou des tores ne peut posséder de minimal exceptionnel.

L'idée générale est la suivante: chaque feuille d'un feuilletage obtenu par suspension est un revêtement de la base du fibré en cercles associé et on peut donc considérer une feuille comme une section "multiforme" en un sens très vague de cette fibration. Si le feuilletage suspendu possède des feuilles "compliquées", on trouve donc une "section non triviale" ce qui permet de majorer la classe d'Euler. Pour donner un sens à ce qui précède, nous commencerons par établir une version relative de l'inégalité de Milnor–Wood. Si $p: E \rightarrow S$ est un fibré orienté en cercles au-dessus d'une surface compacte, connexe, orientée, à bord et si $s: \partial S \rightarrow E$ est une section de au-dessus du bord de S , nous définissons la classe d'Euler de p relative à s comme étant l'obstruction à étendre la section s à S tout entier. Cette obstruction est un élément de $H^2(S, \partial S, \mathbb{Z})$; c'est donc un entier que nous noterons $eu(p, s)$.

L'intérêt de cette notion provient du fait qu'elle permet de "localiser" la classe d'Euler. Le lemme suivant est extrait de [5], c'est un cas particulier d'un résultat général de la théorie de l'obstruction.

LEMME 3.1. Soit Σ une surface compacte orientée sans bord et $p: E \rightarrow \Sigma$ un fibré en cercles orienté au-dessus de Σ . Soient $X \subset \Sigma$ une réunion finie de courbes fermées simples disjointes deux à deux. S_1, \dots, S_n les adhérences des composantes connexes de $\Sigma - X$ et $p_i: E_i \rightarrow S_i$ les fibrés induits au-dessus de S_i . Si $s: X \rightarrow E$ est une section de p au-dessus de X , on a:

$$eu(p) = \sum_{i=1}^n eu(p_i, s|_{\partial S_i}). \blacksquare$$

Fixons-nous une surface compacte connexe orientée S à bord et une représentation:

$$\phi: \pi_1(S) \rightarrow \text{Homéo}^+(S^1).$$

Nous ferons l'hypothèse suivante: si γ est un élément de $\pi_1(S)$ librement homotope à une composante du bord de S , alors $\phi(\gamma)$ possède un point fixe sur S^1 .

Lorsque l'on construit le fibré en cercles $p: E \rightarrow S$ associé à ϕ , les points fixes de ces homéomorphismes $\phi(\gamma)$ permettent de construire une section naturelle $s_\phi: \partial S \rightarrow E$ au-dessus du bord de S .

PROPOSITION 3.2. Soit $\phi: \pi_1(S) \rightarrow \text{Homéo}^+(S^1)$ une représentation vérifiant la condition ci-dessus. Soit $p: E \rightarrow S$ le fibré en cercles associé à ϕ et $s_\phi: \partial S \rightarrow E$ la section fournie par les points fixes. Alors la classe d'Euler relative $eu(p, s_\phi)$ vérifie l'inégalité:

$$|eu(p, s_\phi)| \leq |\chi(S)|$$

Démonstration. Il s'agit d'une adaptation de la démonstration de l'inégalité lorsque S est sans bord. Soit g le genre de S et k le nombre de composantes connexes du bord de S . Une présentation du groupe fondamental de S est:

$$\left(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, u_1, u_2, \dots, u_k \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{i=1}^k u_i = 1 \right)$$

Soient $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, U_1, \dots, U_k$ les images par ϕ de $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, u_1, \dots, u_k$. Pour évaluer la classe d'Euler relative $eu(p, s)$, nous utiliserons l'algorithme de Milnor (voir [11] pour une démonstration dans le cas où S est sans bord; dans le cas relatif, la démonstration est semblable). On note $\text{H}\widetilde{\text{oméo}}^+(S^1)$ le groupe des homéomorphismes f de \mathbb{R} tels que $f(x+1) = f(x) + 1$; il s'agit du revêtement universel de $\text{Homéo}^+(S^1)$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, g$, on choisit des éléments \tilde{A}_i et \tilde{B}_i de $\text{H}\widetilde{\text{oméo}}^+(S^1)$ qui se projettent sur A_i et B_i . Pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$, on note \tilde{U}_i l'unique élément de $\text{H}\widetilde{\text{oméo}}^+(S^1)$ qui se projette sur U_i et qui possède un point fixe dans \mathcal{R} . On forme alors le produit:

$$T = \prod_{i=1}^g [\tilde{A}_i, \tilde{B}_i] \prod_{i=1}^k \tilde{U}_i.$$

Ce produit se projette sur l'identité dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ et ne dépend pas des choix faits sur \tilde{A}_i et \tilde{B}_i . Par conséquent, T est une translation bien définie dont l'amplitude est entière. Cette amplitude n'est autre que la classe d'Euler $eu(p, s_\phi)$ que nous voulons majorer.

Nous utilisons maintenant une notion introduite dans [3]. Si f est un élément de $\text{H}\widetilde{\text{oméo}}^+(S^1)$, on pose $\underline{m}(f) = \inf(f(x) - x)$ et $\bar{m}(f) = \text{Sup}(f(x) - x)$. Ces fonctionnelles ont les propriétés suivantes:

- (1) si f a un point fixe, $\underline{m}(f) \leq 0 \leq \bar{m}(f)$;
- (2) si f est un commutateur, $\bar{m}(f) > -1$ et $\underline{m}(f) < +1$;

$$(3) \quad \underline{m} \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) < \sum_{i=1}^n \underline{m}(f_i) + n - 1$$

$$\bar{m} \left(\prod_{i=1}^n f_i \right) > \sum_{i=1}^n \bar{m}(f_i) - n + 1.$$

Evaluons maintenant $\bar{m}(T)$ et $\underline{m}(T)$. On a, d'après (3),

$$\underline{m}(T) < \sum_{i=1}^g \underline{m}([\tilde{A}_i, \tilde{B}_i]) + \sum_{i=1}^k \underline{m}(\tilde{U}_i) + g + k - 1$$

$$\bar{m}(T) > \sum_{i=1}^g \bar{m}([\tilde{A}_i, \tilde{B}_i]) + \sum_{i=1}^k \bar{m}(\tilde{U}_i) - g - k + 1.$$

En utilisant 1 et 2, on obtient:

$$\underline{m}(T) < 2g + k - 1$$

$$\bar{m}(T) > -2g - k + 1.$$

Puisque T est une translation d'amplitude $eu(p, s_\phi)$, on obtient finalement

$$|eu(p, s_\phi)| < 2g + k - 1$$

et donc

$$|eu(p, s_\phi)| \leq 2g + k - 2 = |\chi(S)|. \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.

Démonstration du théorème 3. On considère donc une surface fermée orientée Σ , différente de S^2 , et une représentation $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Homéo}^+(S^1)$. On suppose qu'une feuille L au moins du feuilletage obtenu par suspension n'est ni un plan, ni un cylindre, ni un tore et l'on se propose de montrer que $|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma)|$.

Bien entendu, si le feuilletage considéré possède une feuille compacte, on a $eu(\phi) = 0$ et l'inégalité est alors évidente sauf si $\chi(\Sigma) = 0$. Dans ce cas Σ est un tore et les feuilles du feuilletage étudié sont des revêtements de ce tore et donc des plans, des cylindres ou des tores. Nous pouvons donc supposer que $\chi(\Sigma) < 0$ et que le feuilletage suspendu n'a pas de feuilles compactes.

Le groupe fondamental d'une surface non compacte est un groupe libre ayant au moins deux générateurs si celle-ci n'est ni un plan, ni un cylindre. On peut donc trouver un sous-groupe libre à deux générateurs $L(a, b)$ dans le groupe fondamental de la feuille L considérée. Puisque les feuilles sont des revêtements de Σ , ce groupe libre peut aussi être considéré comme un sous-groupe du groupe fondamental de Σ .

D'après Scott [14], ce sous-groupe est "presque-géométrique", c'est-à-dire qu'il existe un revêtement fini $r: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma$ et une surface à bord $S_1 \subset \Sigma_1$ telle que $L(a, b)$ ne soit autre que l'image du groupe fondamental de S_1 par r_* . Puisque $\pi_1(S_1)$ est de rang 2, S_1 ne peut être homéomorphe qu'à un tore moins un disque ou une sphère moins trois disques. Dans les deux cas, on a $\chi(S_1) = -1$. Considérons alors la représentation:

$$\phi_1 = \phi \circ r_*: \pi_1(S_1) \rightarrow \text{Homéo}^+(S^1).$$

Il est clair que $eu(\phi_1) = \delta eu(\phi)$ et $\chi(\Sigma_1) = \delta \chi(\Sigma)$ où δ est le nombre de feuilletés de r . Pour montrer que $|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma)|$, il nous suffit donc de montrer que $|eu(\phi_1)| < |\chi(\Sigma_1)|$.

Par construction même de Σ_1 et S_1 , il est clair que $\phi_1(a)$ et $\phi_1(b)$ ont un point fixe commun sur le cercle S^1 . Soient S_2, \dots, S_n les adhérences des composantes connexes de $\Sigma_1 - S_1$ (on a $n \leq 4$). L'entier $eu(\phi_1)$ est une somme de classes d'Euler relatives (lemme 3.1) où la section

choisie $\hat{c}S_1 \rightarrow E$ est évidemment celle fournie par ce point fixe commun à $\phi_1(a)$ et $\phi_1(b)$. Précisément parce que ce point fixe est commun à $\phi_1(a)$ et $\phi_1(b)$, la classe d'Euler relative correspondant à S_1 est nulle; la section se prolonge sur S_1 tout entier. Par conséquent, $eu(\phi_1)$ est la somme des classes d'Euler relatives correspondantes à S_2, \dots, S_n . Ces dernières sont majorées par $|\chi(S_2)|, \dots, |\chi(S_n)|$ d'après 3.2.

Finalement, on a

$$|eu(\phi_1)| \leq \sum_{i=2}^n |\chi(S_i)|.$$

Or, $\chi(S_i)$ est négatif car S_i ne peut être ni un disque, ni une sphère. Donc

$$|eu(\phi_1)| \leq \left| \sum_{i=2}^n \chi(S_i) \right| = |\chi(\Sigma_1) - \chi(S_1)| = |\chi(\Sigma_1)| - 1.$$

Nous avons donc montré que

$$|eu(\phi_1)| < |\chi(\Sigma_1)|$$

et donc aussi

$$|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma)|. \blacksquare$$

Remarque 3.3. Dans [5], Goldman conjecture que si $\phi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_2^+(S^1)$ est une représentation pour laquelle $eu(\phi) = \pm \chi(\Sigma)$ et $\chi(\Sigma) \neq 0$, alors ϕ est topologiquement conjuguée à la suspension d'une injection de $\pi_1(\Sigma)$ dans un sous-groupe uniforme discret de $PSL(2, \mathbb{R})$ agissant projectivement sur $P^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$. Le théorème 3 que nous venons de montrer implique une partie de cette conjecture: si $eu(\phi) = \chi(\Sigma)$, alors ϕ est injective. En effet, les feuilles d'une suspension non injective ne peuvent être des cylindres ou des plans.

§4. LE CAS ANALYTIQUE; LES THÉORÈMES 2 ET 4

Nous commençons par montrer comment le théorème 2 implique le théorème 4.

PROPOSITION 4.1. [1]. Si Γ est un sous-groupe de type fini et sans torsion de $\text{Diff}_\omega^+(S^1)$ possédant un minimal exceptionnel, alors Γ est un groupe libre.

Démonstration. D'après 2.6, Γ a une infinité de bouts. Un corolaire classique des théorèmes de Stallings 2.1 et de Grushko montre que si Γ est sans torsion, alors Γ est libre (voir [16]).

LEMME 4.2. Soit Γ un groupe et e un élément de $H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$ dont l'image dans $H^2(\Gamma; \mathbb{Q})$ est nulle. Soit $i: [\Gamma, \Gamma] \rightarrow \Gamma$ l'inclusion. Alors $i^*(e)$ est nul dans $H^2([\Gamma, \Gamma]; \mathbb{Z})$.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant dont les deux lignes sont obtenues à partir des suites exactes de Bockstein pour Γ et $[\Gamma, \Gamma]$:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{u} & H^2(\Gamma; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{v} & H^2(\Gamma; \mathbb{Q}) \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ H^1([\Gamma, \Gamma]; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2([\Gamma, \Gamma]; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2([\Gamma, \Gamma]; \mathbb{Q}) \end{array}$$

Puisque, par hypothèse, $v(e) = 0$, il existe x dans $H^1(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que $u(x) = e$. Pour montrer que $i^*(e)$ est nul, il suffit donc de montrer que $i^*(x)$ est nul. Mais ceci est clair car tout morphisme de Γ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} s'annule évidemment sur $[\Gamma, \Gamma]$. ■

4.3. *Démonstration du théorème 4 à partir du théorème 2.* Soit $\Gamma \subset \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ un sous-groupe de type fini ayant un minimal exceptionnel. La construction par suspension permet de construire un fibré en cercles au-dessus de l'espace d'Eilenberg–MacLane $K(\Gamma, 1)$ dont la classe d'Euler est un élément e de $H^2(K(\Gamma, 1); \mathbb{Z}) \simeq H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$. Montrons tout d'abord que le théorème 2 implique que l'image de e dans $H^2(\Gamma; \mathbb{Q})$ est nulle. Pour cela, choisissons un élément quelconque c de $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$. Cet élément peut être "représenté" par un morphisme

$$\psi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \Gamma,$$

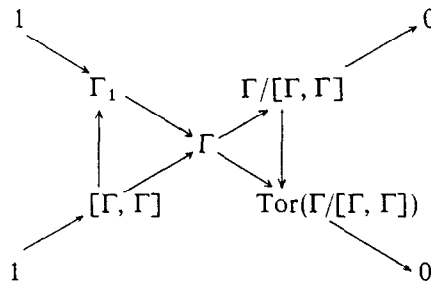
où Σ est une surface compacte orientée non sphérique. C'est-à-dire que ψ_* envoie la classe fondamentale $[\Sigma]$ de Σ (dans $H_2(\pi_1(\Sigma); \mathbb{Z}) \simeq H_2(\Sigma; \mathbb{Z})$) sur c . D'après le théorème 2, on a $\psi^*(e)([\Sigma]) = 0$. En d'autres termes, l'évaluation de e sur c est nulle et e est donc dans le noyau du morphisme naturel:

$$H^2(\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_2(\Gamma; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}).$$

L'image de e dans $H^2(\Gamma; \mathbb{Q})$ est donc nulle.

D'après le lemme 4.2, la classe d'Euler restreinte à $[\Gamma, \Gamma]$ est donc nulle dans $H^2([\Gamma, \Gamma]; \mathbb{Z})$. Notons $\widetilde{\text{Diff}}_\omega^+(S^1)$ le revêtement universel de $\text{Diff}_\omega^+(S^1)$ et interprétons la classe d'Euler d'un sous-groupe Γ de $\text{Diff}_\omega^+(S^1)$ comme l'obstruction à relever l'inclusion $\Gamma \rightarrow \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ à $\widetilde{\text{Diff}}_\omega^+(S^1)$. Dans ces conditions, $[\Gamma, \Gamma]$ s'identifie à un sous-groupe de $\widetilde{\text{Diff}}_\omega^+(S^1)$ qui est un groupe sans torsion. Par conséquent, le groupe des commutateurs $[\Gamma, \Gamma]$ est sans torsion.

Notons $\text{Tor}(\Gamma/[\Gamma, \Gamma])$ le groupe de torsion du groupe Abélien $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ et Γ_1 le noyau de la projection de Γ sur $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ suivie d'une projection de $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ sur $\text{Tor}(\Gamma/[\Gamma, \Gamma])$.



Le fait que $[\Gamma, \Gamma]$ est sans torsion implique que Γ_1 est lui aussi sans torsion. Par ailleurs, puisque Γ_1 est d'indice fini dans Γ et que Γ possède un minimal exceptionnel, il en est de même pour Γ_1 . Nous pouvons donc appliquer la proposition 4.1 pour conclure que Γ_1 est un groupe libre. Nous avons donc trouvé un sous-groupe libre d'indice fini dans Γ . ■

Remarque 4.4. On a en fait montré un peu mieux que le théorème 4: le groupe Γ contient un sous-groupe libre distingué d'indice fini à quotient Abélien.

Nous abordons maintenant la démonstration du théorème 2. En fait, nous allons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5. *Soit $\Gamma \subset \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ un sous-groupe de type fini possédant un minimal exceptionnel. Alors $H_2(\Gamma; \mathbb{Q}) = 0$.*

Ce théorème implique le théorème 2 de la façon suivante: si $\phi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ une

représentation ayant un minimal exceptionnel, notons Γ l'image de ϕ . On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} H_2(\pi_1(\Sigma); \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\phi_*} & H_2(\text{Diff}_\omega^-(S^1), \mathbb{Q}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H_2(\Gamma; \mathbb{Q}) & \end{array}$$

Il est alors clair que si $H_2(\Gamma; \mathbb{Q}) = 0$, alors $eu(\phi) = 0$.

Avant de démontrer le théorème 4.5, nous allons le motiver en montrant qu'une conjecture classique en théorie des groupes l'implique trivialement. Rappelons la définition suivante (voir [15.]); un groupe est 0-accessible s'il a 0 ou 1 bout et, par récurrence, un groupe est n -accessible s'il s'écrit sous la forme $A *_c B$ ou $A *_c$ où C est fini et A et B sont $(n - 1)$ accessibles. Finalement, un groupe est accessible s'il est n -accessible pour un certain entier n . La conjecture dont il s'agit est la suivante: tout groupe de type fini est accessible (voir [15] pour des commentaires concernant cette conjecture).

Le théorème 4.5 est évident pour les groupes accessibles pour la raison suivante. Si $\Gamma \subset \text{Diff}_\omega^+(S^1)$ est 0-accessible, il ne possède pas de minimal exceptionnel d'après 2.6. Par récurrence, on suppose le théorème 4.5 vrai pour les groupes $(n - 1)$ -accessibles. Si $\Gamma = A *_c B$ ou $A *_c$ et A, B sont $(n - 1)$ -accessibles, on observe que A et B sont des sous-groupes de Γ et les orbites de A et B sur S^1 ne peuvent donc être toutes denses. Deux cas sont alors possibles: ou bien A possède un minimal exceptionnel, ou bien A possède une orbite finie. Dans le premier cas, on a, par récurrence $H_2(A; \mathbb{Q}) = 0$. Dans le deuxième cas, A possède un sous-groupe d'indice fini qui a un point fixe sur S^1 . D'après 2.9, A est alors fini ou est une extension finie de \mathbb{Z} . Dans les deux cas, on a $H_2(A; \mathbb{Q}) = 0$. De même $H_2(B; \mathbb{Q}) = 0$. Le théorème 4.5. est alors une conséquence du fait que

$$\begin{aligned} H_2(A *_c B; \mathbb{Q}) &= H_2(A; \mathbb{Q}) \oplus H_2(B; \mathbb{Q}) \\ H_2(A *_c; \mathbb{Q}) &= H_2(A; \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Dans le cas général, lorsque l'on ne suppose plus que Γ est accessible, nous allons montrer directement que $H_2(\Gamma; \mathbb{Q})$ est nul. Soit c un élément de $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ représenté par un morphisme $\psi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \Gamma$. Nous voulons prouver que l'image de c est nulle dans $H_2(\Gamma; \mathbb{Q})$. Soit $f: \Sigma \rightarrow K(\Gamma, 1)$ une application continue réalisant ψ et considérons une collection $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ de courbes tracées sur Σ et maximale pour les propriétés suivantes:

- (i) les courbes C_i sont des courbes fermées simples, disjointes deux à deux, non homotopes à zéro et non librement homotopes deux à deux;
- (ii) les images des courbes C_i par f définissent des éléments de torsion dans Γ (plus précisément des classes de conjugaison de torsion).

Il est clair qu'une telle collection maximale \mathcal{C} existe. Soient T_1, T_2, \dots, T_n des voisinages tubulaires disjoints deux à deux des courbes C_1, C_2, \dots, C_n et soient S_1, S_2, \dots, S_N les composantes connexes de $\Sigma - \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{T}_i$. Les S_j sont des sous-variétés à bord de Σ et leurs groupes fondamentaux s'injectent dans celui de Σ .

PROPOSITION 4.6. *Pour tout $j = 1, 2, \dots, N$, l'image du groupe fondamental de S_j par ψ est un sous-groupe fini de Γ .*

Remarquons que nous n'avons pas fixé, pour l'instant, de point base ni sur S_j si sur Σ . L'énoncé de la proposition 4.6 a cependant un sens pour un choix quelconque de ces points bases.

Avant de démontrer cette proposition, nous montrons qu'elle permet de terminer la démonstration du théorème 4.5.

4.7. *Démonstration de 4.5. à partir de 4.6.* Considérons un graphe X plongé dans Σ de la façon suivante: X possède un sommet dans chaque S_j et contient exactement une arête pour chaque courbe C_i ; cette arête joint les sommets contenus dans les surfaces S_j adjacentes à C_i et ne coupe C_i qu'en un seul point. Il se peut qu'une seule surface soit adjacente à C_i : le graphe X contient alors un lacet.

Soit Γ_j l'image de $\pi_1(S_j)$ par f_* et G_i l'image de $\pi_1(C_i)$ par f_* . Le point base utilisé dans S_j est le sommet correspondant de X et celui utilisé dans $\pi_1(C_i)$ est l'intersection de C_i avec l'arête correspondante. Les groupes G_i sont finis par construction de \mathcal{C} et les groupes Γ_j sont finis par la proposition 4.6.

Chaque arête et chaque sommet de X se trouvent ainsi équipés d'un groupe G_i ou Γ_j et il est clair que chaque G_i se plonge de manière naturelle dans les groupes Γ_j associés aux extrémités de l'arête correspondante. En d'autres termes, la donnée de X , des groupes G_i et Γ_j et de ces divers plongements fournit un graphe de groupes (voir [15] pour cette notion). Soit H le groupe fondamental de ce graphe de groupes. Rappelons succinctement la définition de H . On part de la réunion disjointe des espaces d'Eilenberg–MacLane $K(\Gamma_j, 1)$ et des produits $K(G_i, 1) \times [0, 1]$ et, pour chaque arête de X , on "attache" les deux "bords" de $K(G_i, 1) \times [0, 1]$ sur les espaces $K(\Gamma_j, 1)$ correspondants aux extrémités de l'arête considérée. L'application d'attachement choisie est évidemment une application de $K(G_i, 1)$ dans $K(\Gamma_j, 1)$ qui réalise le plongement donné de G_i dans Γ_j . Si V désigne l'espace ainsi obtenu, H est le groupe fondamental de V .

Par construction même de cet espace V , il est clair qu'il existe des applications continues $g: \Sigma \rightarrow V$ et $h: V \rightarrow K(\Gamma, 1)$ telles que f est homotope à $h \circ g$.

D'autre part, la dimension homologique rationnelle de H est inférieure ou égale à 1. En effet, H s'obtient par produits amalgamés et HNN extensions successives sur des sous-groupes finis, de sorte que $H_*(H; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j=1}^N H_*(\Gamma_j; \mathbb{Q})$ si $*$ ≥ 2 et donc $H_*(H; \mathbb{Q}) = 0$ si $*$ ≥ 2 car Γ_j est un groupe fini.

Le théorème 4.5. est alors clair. En effet:

$$c = \psi_*([\Sigma]) = (h_*)_* \circ (g_*)_*([\Sigma]) = 0$$

dans $H_2(\Gamma; \mathbb{Q})$ car $H_2(H; \mathbb{Q}) = 0$. ■

Il nous reste donc à démontrer la proposition 4.6.

4.8. *Démonstration de 4.6.* Notons S l'une quelconque des sous-variétés S_i et supposons que l'image G du groupe fondamental de S par f_* est infinie. Nous avons déjà observé que, G étant un sous-groupe de Γ , deux cas sont possibles: soit G possède une orbite finie, soit G possède un minimal exceptionnel. Dans le premier cas, si G est infini, G est une extension finie de \mathbb{Z} et a donc deux bouts. Dans le second cas, G a une infinité de bouts. D'après le théorème de Stallings, G peut alors s'écrire sous la forme $A *_c B$ où $A *_c B$ où C est un groupe fini différent de A et de B .

Considérons tout d'abord le cas où G est un produit amalgamé $A *_c B$. Nous pouvons réaliser l'espace $K(G, 1)$ à partir de la réunion disjointe de $K(A, 1)$, $K(B, 1)$ et $K(C, 1) \times [0, 1]$ en identifiant respectivement les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$ de $K(C, 1) \times [0, 1]$ aux points $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ de $K(A, 1)$ et $K(B, 1)$ où α et β sont les applications de $K(C, 1)$ dans $K(A, 1)$ et $K(B, 1)$ correspondant aux plongements de C dans A et B . Géométriquement, on dispose d'une application continue f de S dans $K(A *_c B, 1)$ (fig. 1).

L'image par f d'une composante γ du bord de S définit une classe de conjugaison d'un élément de torsion de $G = A *_c B$. D'après [Sc-Wa], cet élément est conjugué d'un élément de

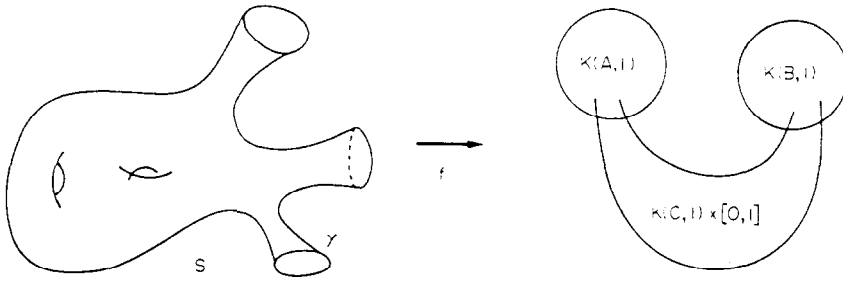


Fig. 1.

torsion de A ou de B . C'est-à-dire qu'il existe une courbe fermée contenue dans $K(A, 1)$ ou $K(B, 1)$ qui est librement homotope à $f(\gamma)$. Quitte à modifier f par homotopie, on peut donc supposer que, pour chaque composante γ du bord de S , on a $f(\gamma) \subset K(A, 1)$ ou $f(\gamma) \subset K(B, 1)$.

On considère alors l'image inverse $Y = f^{-1}(K(C, 1) \times [0, 1])$. Comme f peut être supposée cellulaire, Y est un sous- CW -complexe fermé de S qui ne rencontre pas le bord de S . Par une homotopie de f , on peut remplacer Y par un de ses voisinages réguliers, c'est-à-dire que l'on peut supposer que Y est une sous-variété fermée à bord de S qui ne rencontre pas le bord de S .

Si une composante du bord de Y est homotope à zéro dans S , elle borde un disque D plongé dans S . La courbe $f(\partial D)$ est alors une courbe contenue dans $K(C, 1) \times [0, 1]$ qui est homotope à zéro dans $K(C, 1)$; elle est donc homotope à zéro dans $K(C, 1) \times [0, 1]$. En modifiant f par homotopie, on obtient donc une application f' égale à f en dehors de D et telle que $f'(D) \subset K(C, 1) \times [0, 1]$. Après un nombre fini de telles homotopies, on est ramené au cas où toutes les courbes du bord de Y sont non homotopes à zéro dans S .

Evidemment, par construction même, les images par f des courbes du bord de Y définissent des éléments de torsion de $A *_C B$ et donc de Γ . Puisque $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ est une collection maximale de courbes de Σ disjointes, non homotopes deux à deux et non homotopes à zéro telles que $f(C_i)$ définit un élément de torsion de Γ , on en déduit que toute courbe du bord de Y doit être librement homotope à une courbe du bord de S (fig. 2). Par conséquent, les composantes connexes de $S - \partial Y$ sont toutes des anneaux sauf une qui est une sous-variété S_0 qui est un retract de S . Puisque S_0 ne coupe pas ∂Y , l'image de S_0 par f est

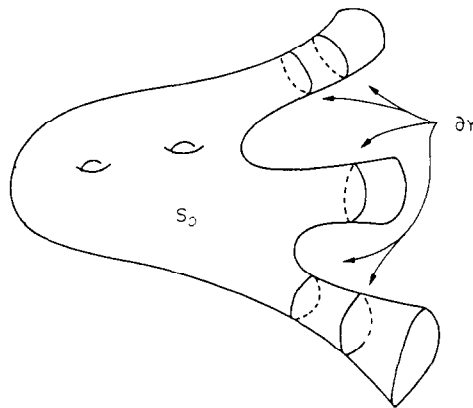


Fig. 2.

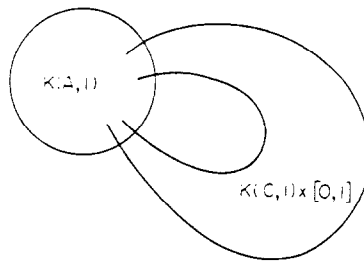


Fig. 3.

contenue dans $K(A, 1)$ ou $K(B, 1)$ ou $K(C, 1) \times [0, 1]$. Soit $r: S \rightarrow S$ une application homotope à l'identité telle que $r(S) \subset S_0$. L'application $f \circ r$ est alors homotope à f et a son image contenue dans $K(A, 1)$ ou $K(B, 1)$ ou $K(C, 1) \times [0, 1]$. En particulier, $f_*(\pi_1(S))$ est contenue dans un conjugué de A , B ou C dans $A *_C B$. Mais ceci est impossible car l'image de $\pi_1(S)$ par f_* est le groupe $A *_C B$ tout entier. On obtient donc la contradiction cherchée. Il nous reste à traiter le cas où l'image G de $\pi_1(S)$ par f_* est une HNN extension du type $A *_C$. La démonstration est alors exactement la même à ceci près que $K(A *_C, 1)$ est réalisé à partir d'une copie de $K(A, 1)$ et de $K(C, 1) \times [0, 1]$ en recollant les deux "bords" de $K(C, 1) \times [0, 1]$ à $K(A, 1)$ à l'aide des deux plongements de C dans A dont on dispose fig. 3.

La démonstration se transpose sans difficulté dans ce cas puisqu'il reste vrai qu'un élément de torsion de $A *_C$ est conjugué d'un élément de torsion de A . ■

Remerciements—Vlad Sergiescu s'est intéressé à ce travail tout au long de son élaboration; je le remercie pour son soutien amical et pour ses nombreuses remarques qui m'ont été très utiles.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. ANDERSON et G. HECTOR: Groups which act analytically on the circle, article non publié.
2. J. CANTWELL et L. CONLON: Poincaré Bendixson theory for leaves of codimension one. *Trans. A.M.S.* **265** (1981), 181–209.
3. D. EISENBUD, U. HIRSCH et W. NEUMANN: Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphisms of the circle. *Comment. Math. Helvetici* **56** (1981), 638–660.
4. E. GHYS et V. SERGIESCU: Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle, à paraître dans *Comment. Math. Helvetici*.
5. W. GOLDMAN: Discontinuous groups and the Euler class. Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, University of California, Berkeley (1980).
6. S. GOODMAN et J. PLANTE: Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geom.* **14** (1979), 401–407.
7. G. HECTOR: Actions de groupes de difféomorphismes de $\{0, 1\}$. Géométrie différentielle, Colloque, Santiago de Compostela, (1972); *Lecture Notes in Mathematics*, no. 392, pp. 14–22. Springer, Berlin.
8. G. HECTOR: Classification cohomologique des germes de feuilletages. Publications internes de l'UER de Mathématiques Pures de Lille, no. 53, (1975).
9. G. HECTOR: Feuilletages en cylindres, IIIe Elam, Rio de Janeiro, (1976); *Lectures Notes in Mathematics* no. 594, pp. 252–271. Springer, Berlin.
10. G. HECTOR: Architecture des feuilletages de classe C^2 , S.M.F. *Astérisque* **107–108** (1983), 243–258.
11. G. HECTOR et V. HIRSCH: *Introduction to the Geometry of Foliations*, Part B. Vieweg, Wiesbaden (1983).
12. H. HOPF: Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Comment. Math. Helvetici* **16** (1943), 81.
13. B. RAYMOND: Ensembles de Cantor et feuilletages. Publication Mathématique d'Orsay, no. 191–7656.
14. P. SCOTT: Subgroups of surface groups are almost geometric. *J. London Math. Soc.* **17** (1978), 555–565.
15. P. SCOTT et T. WALL: Topological methods in groups theory. In *Lectures Notes Series* 36 (1977) (Edited by C. T. C. Wall), pp. 137–203. London Mathematical Society.

16. J. STALLINGS: *Group Theory and Three-dimensional Manifolds*. Yale Mathematical Monographs, New Haven (1971).
17. J. WOOD: Bundles with totally disconnected structure group. *Comment. Math. Helvetici*. **46** (1971), 257–273.

Université des Sciences et Techniques de Lille 1
UER de Mathématiques Pures et Appliquées
U.A. au CNRS 751,
59655–Villeneuve d'Ascq Cedex,
France