Pergamon

Topology Vol. 36, No. 6, pp. 1355–1379, 1997

0040-9383/97 $17.00 + 0.00

PII: S0040-9383(97)00001-3

ENLACEMENTS ASYMPTOTIQUES

JEAN-MARC GAMBAUDO et ÉTIENNE GHYS

(*Received* 18 *July* 1995)

1. INTRODUCTION

Dans [1], V. Arnold étudie les champs de vecteurs qui préservent le volume sur la sphère de dimension 3 (et, plus généralement, sur les sphères d'homologie). Il associe à un tel champ un nombre réel qui mesure «le nombre d'enlacement asymptotique moyen» de deux orbites.

Dans [9], D. Ruelle considère lui aussi de tels champs et les suppose de plus non singuliers. Il leur associe un nombre réel qui mesure la « vitesse asymptotique de rotation» de la différentielle du flot engendré. Sa construction se généralise en fait à certains difféomorphismes et flots symplectiques.

Dans [3], E. Calabi définit plusieurs invariants associés à des difféomorphismes symplectiques, dont la signification géométrique est moins claire.

Le but de notre travail est double. D'une part, nous proposons une étude comparée de ces trois types d'invariants en cherchant, en particulier, à les généraliser à des flots qui préservent des mesures qui ne sont plus nécessairement une forme volume. D'autre part, nous établissons l'invariance topologique des nombres de Calabi et Ruelle, ainsi que du nombre d'Arnold dans un cas particulier (proposant ainsi un élément de réponse à une question de V. Arnold).

Cet article est décomposé en deux parties. La première traite essentiellement des difféomorphismes du disque de dimension 2 et de leurs invariants de Calabi et de Ruelle. La seconde considère les flots des variétés de dimension 3 et leurs invariants d'Arnold et de Ruelle.

Nous remercions Patrick Iglesias: c'est lors d'une réunion mathématique organisée avec lui à Cruis, dans les Alpes de Haute Provence, que ce travail a débuté.

2. LES DIFFÉOMORPHISMES DU DISQUE

2.1. *L'invariant de Calabi*

Commençons par quelques notations. Nous désignons par $\|-\|$ la norme euclidienne usuelle dans le plan $\mathbf{R}^2$ de coordonnées (p, q), par $\mathbf{D}^2$ le disque unité fermé dans $\mathbf{R}^2$ et par $\partial\mathbf{D}^2$ le bord de ce disque. Le groupe des difféomorphismes de classe C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ de $\mathbf{D}^2$ qui sont l'identité près du bord est noté $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$. Pour $r = 0$, nous notons plutôt Homéo$(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$. Si μ est une mesure finie sur $\mathbf{D}^2$, le sous-groupe des difféomorphismes qui respectent μ est noté $\mathrm{Diff}^r(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \mu)$. Nous considérons en particulier le cas où μ est l'élément d'aire habituel $dp \wedge dq$ sur $\mathbf{D}^2$, noté *aire*.

Rappelons la définition de l'invariant de Calabi (voir [3]):

$$\mathscr{C}: \mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire) \to \mathbf{R}.$$

Soit donc ϕ un difféomorphisme de $\mathbf{D}^2$ qui respecte l'aire et qui est l'identité près du bord. Soit α une 1-forme différentielle sur $\mathbf{D}^2$ qui est une primitive de la 2-forme d'aire. Puisque ϕ préserve l'aire, la forme $\phi^*\alpha - \alpha$ est fermée et nulle près du bord (si ϕ n'est que C^1, la fermeture de cette forme de classe C^0 doit être comprise au sens où son intégrale sur un petit lacet est nulle). Il existe donc une unique fonction $H(\phi,\alpha):\mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}^2$, de classe C^1, nulle près du bord, telle que:

$$dH(\phi,\alpha) = \phi^*\alpha - \alpha.$$

L'*invariant de Calabi* de ϕ est défini par:

$$\mathscr{C}(\phi) = \int_{\mathbf{D}^2} H(\phi,\alpha)$$

où l'intégrale est calculée par rapport à la mesure *aire*. Assurons nous d'abord que ceci est cohérent, c'est-à-dire que $\mathscr{C}(\phi)$ est bien indépendant de α. En effet, un autre choix consiste à remplacer α par $\alpha + du$ où $u:\mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^1 quelconque. La fonction $H(\phi, \alpha + du)$ est alors:

$$H(\phi,\alpha + du) = H(\phi,\alpha) + u \circ \phi - u$$

dont l'intégrale sur $\mathbf{D}^2$ est bien égale à celle de $H(\phi,\alpha)$ car ϕ préserve l'aire.

Une propriété importante qui a motivé la définition de cet invariant, s'énonce ainsi:

Proposition 2.1 (Calabi [3]). *$\mathscr{C}:\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2, aire) \to \mathbf{R}$ est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. La vérification est immédiate. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2, aire)$. Nous avons:

$$(\phi_1 \circ \phi_2)^*\alpha - \alpha = (\phi_2^*\phi_1^*\alpha - \phi_1^*\alpha) + (\phi_1^*\alpha - \alpha).$$

Remarquons que $\phi_1^*\alpha$ est une primitive de la forme d'aire. Ainsi:

$$dH(\phi_1 \circ \phi_2,\alpha) = dH(\phi_2,\phi_1^*\alpha) + dH(\phi_1,\alpha),$$

et donc:

$$H(\phi_1 \circ \phi_2,\alpha) = H(\phi_2,\phi_1^*\alpha) + H(\phi_1,\alpha).$$

Par intégration sur le disque, nous avons bien, comme annoncé:

$$\mathscr{C}(\phi_1 \circ \phi_2) = \mathscr{C}(\phi_1) + \mathscr{C}(\phi_2). \qquad \square$$

A. Banyaga a démontré dans [2] que le noyau de $\mathscr{C}$ est un groupe *simple*. En particulier, tout homomorphisme du groupe $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2, aire)$ dans un groupe abélien G s'obtient en composant $\mathscr{C}$ et un certain homomorphisme de $\mathbf{R}$ vers G.

Remarquons que E. Calabi définit en fait plusieurs invariants pour les difféomorphismes symplectiques des variétés symplectiques générales. Cependant, dans le cas du disque, seul $\mathscr{C}$ est non trivial et c'est pour cette raison que nous appelons ici $\mathscr{C}$ l'invariant de Calabi.

La question de savoir si l'invariant de Calabi peut être défini sur le groupe $\mathrm{Homéo}(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2, aire)$ semble difficile; elle est reliée à la question de la simplicité de ce groupe qui est un problème ouvert. Nous verrons cependant que deux éléments de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$ qui sont conjugués par un élément de $\mathrm{Hom\acute{e}o}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, ont le même invariant de Calabi.

Bien entendu, la même définition que nous avons décrite se généralise au groupe des difféomorphismes *symplectiques* d'une boule de dimension paire. Il suffit alors de remplacer la forme d'aire par la forme symplectique. Cependant la notion même d'*homéomorphisme* symplectique n'est pas claire en dimension supérieure à 2.

Un exemple. Nous considérons le cas simple des flots hamiltoniens en dimension 2. Soit $\mathscr{H}: \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞, nulle près du bord. Le champ de vecteurs hamiltonien $X_{\mathscr{H}}$ est le dual symplectique de la 1-forme $d\mathscr{H}$, i.e.:

$$\mathrm{d}\mathscr{H}(-) = aire(-, X_{\mathscr{H}}).$$

Ce champ engendre un flot $\phi^t_{\mathscr{H}}$ dont tous les éléments respectent l'aire et sont l'identité près du bord. Nous nous proposons de montrer l'égalité suivante:

PROPOSITION 2.2

$$\mathscr{C}(\phi^t_{\mathscr{H}}) = -2t \int_{\mathbf{D}^2} \mathscr{H}.$$

Démonstration. Évidemment, puisque $\mathscr{C}$ est un homomorphisme de groupes et que le nombre $\mathscr{C}(\phi^t_{\mathscr{H}})$ dépend continûment de t, il dépend linéairement de t. Pour établir la proposition, il suffit donc d'évaluer la dérivée en 0 de $\mathscr{C}(\phi^t_{\mathscr{H}})$. Par définition, nous avons:

$$(\phi^t_{\mathscr{H}})^* \alpha - \alpha = dH(\phi^t_{\mathscr{H}}, \alpha).$$

La dérivée en 0 donne:

$$\mathscr{L}_{X_{\mathscr{H}}} \alpha = d\left(\frac{\partial}{\partial t} H(\phi^t_{\mathscr{H}}, \alpha)|_{t=0}\right)$$

où $\mathscr{L}_{X_{\mathscr{H}}} = \iota_{X_{\mathscr{H}}} d + d\iota_{X_{\mathscr{H}}}$ est la dérivée de Lie. Ainsi:

$$\iota_{X_{\mathscr{H}}} aire + d\iota_{X_{\mathscr{H}}} \alpha = d\left(\frac{\partial}{\partial t} H(\phi^t_{\mathscr{H}}, \alpha)|_{t=0}\right).$$

Puisque $X_{\mathscr{H}}$ est le dual symplectique de $d\mathscr{H}$, nous obtenons, par intégration:

$$-\mathscr{H} + \iota_{X_{\mathscr{H}}} \alpha = \frac{\partial}{\partial t} H(\phi^t_{\mathscr{H}}, \alpha)\bigg|_{t=0}.$$

Comme primitive de $aire = dp \wedge dq$, choisissons $\alpha = p\, dq$. Puisque:

$$X_{\mathscr{H}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}$$

nous obtenons:

$$-\mathscr{H} + p \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial t} H(\phi^t_{\mathscr{H}}, \alpha)\bigg|_{t=0}.$$

Nous pouvons maintenant calculer la dérivée de $\mathscr{C}(\phi^t_{\mathscr{H}})$:

$$\frac{d}{dt}\mathscr{C}(\phi^t_{\mathscr{H}})|_{t=0} = \int_{\mathbf{D}^2}\frac{\partial}{\partial t}H(\phi^t_{\mathscr{H}},\alpha)|_{t=0} = \int_{\mathbf{D}^2}\left(-\mathscr{H} + p\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p}\right).$$

La démonstration s'achève en intégrant par parties:

$$\frac{d}{dt}\mathscr{C}(\phi^t_{\mathscr{H}})|_{t=0} = -2\int_{\mathbf{D}^2}\mathscr{H}. \qquad \square$$

La corollaire suivant montre qu'il n'est pas possible d'étendre la définition de $\mathscr{C}$ aux homéomorphismes par un simple procédé de limite.

COROLLAIRE 2.3. *L'invariant de Calabi n'est pas continu dans la topologie C^0.*

Démonstration. Soit $h_n\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ (pour $n\geqslant 0$), une suite de fonctions de classe $\mathbf{C}^\infty$ telles que:

1. h_n est constante près de 0,
2. $h_n(r)$ est nulle pour $r > 1/n$,
3. $\int_0^1 h_n(r)2\pi r\,dr = 1$.

Les fonctions $\mathscr{H}_n\colon\mathbf{D}^2\to\mathbf{R}$ définies par $\mathscr{H}_n(x) = h_n(\|x\|)$ définissent des flots hamiltoniens dont les applications « temps 1 » sont des difféomorphismes $\phi^1_{\mathscr{H}_n}$ de $\mathbf{D}^2$ ayant les propriétés suivantes:

1. $\phi^1_{\mathscr{H}_n}$ coïncide avec l'identité en dehors du disque de centre $O = (0,0)$ et de rayon $1/n$. Par conséquent, la suite $\phi^1_{\mathscr{H}_n}$ converge vers l'identité dans la topologie C^0, quand n tend vers l'infini.
2. $\mathscr{C}(\phi^1_{\mathscr{H}_n})$ n'est pas nul. En effet nous avons montré que $\mathscr{C}(\phi^1_{\mathscr{H}_n}) = -2\int_{\mathbf{D}^2}\mathscr{H}_n$ qui ici vaut -2.

Puisque l'invariant de Calabi de l'identité est évidemment nul, le corollaire est établi. $\square$

Nous proposons maintenant une interprétation intuitive simple de l'invariant de Calabi. Nous remercions Albert Fathi pour nous avoir fait remarqué que cette interprétation se trouve dans sa thèse [5]. Rappelons que le groupe Homéo$(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2)$ est contractile pour la topologie C^0. Soit donc h un élément de ce groupe et $(h_t)_{t\in[0,1]}$ une isotopie entre $h_0 = \mathrm{id}$ et $h_1 = h$. Si x et y sont deux points distincts de $\mathbf{D}^2$, nous pouvons considérer le vecteur non nul v_t joignant $h_t(x)$ à $h_t(y)$. Lorsque t varie de 0 à 1, ce vecteur v_t tourne d'un angle (compté en tours) que nous noterons $\mathrm{Ang}_h(x,y)$. Comme la notation le suggère, ce nombre réel est indépendant de l'isotopie (h_t) choisie. En effet, puisque Homéo$(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2)$ est contractile, deux isotopies h^0_t et h^1_t peuvent être jointes par un chemin d'isotopies h^s_t ($t\in[0,1]$, $s\in[0,1]$, $h^s_0 = \mathrm{id}$, $h^s_1 = h$). L'angle dont tourne le vecteur correspondant v^s_t lorsque t varie de 0 à 1 est bien sûr indépendant de s car il est, d'une part, continu en s et, d'autre part, sa réduction modulo $\mathbf{Z}$ n'est autre que l'angle dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ entre $v_0 = v^s_0$ et $v_1 = v^s_1$.

La fonction Ang_h est définie et continue sur le complémentaire de la diagonale diag dans $\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2$. Il est facile de construire des exemples d'homéomorphismes h tels que Ang_h n'est pas bornée. Cependant, nous allons voir que si h est de classe C^1, alors Ang_h est une fonction bornée. Soit en effet $\mathscr{K}$ l'éclaté de diag dans $\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2$. En termes plus concrets $\mathscr{K}$ est le compact formé des triplets de points (x, y, Δ) où x et y sont des points de $\mathbf{D}^2$ et Δ une droite du plan contenant x et y. Bien sûr, si x et y sont distincts, ils déterminent Δ de sorte que $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2 - \mathrm{diag}$ se plonge naturellement dans $\mathscr{K}$ comme un ouvert dense. Nous affirmons que si h est de classe C^1, la fonction Ang_h se prolonge à $\mathscr{K}$ en une fonction continue et, en particulier, Ang_h est bornée. Il s'agit en fait d'étendre la définition de Ang_h aux triplets du type (x, x, Δ). Soit (h_t) une isotopie entre id et h parmi les C^1-difféomorphismes de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$. Nous définissons alors $\mathrm{Ang}_h(x, x, \Delta)$ comme la variation de l'angle des droites $dh_t(\Delta)$, images de Δ par la différentielle dh_t, lorsque t varie de 0 à 1. Le nombre ainsi obtenu ne dépend pas du choix de l'isotopie (h_t) et ceci définit bien l'extension continue souhaitée de Ang à $\mathscr{K}$. Cette extension sera d'ailleurs à la base de la démonstration de l'invariance topologique du nombre de Ruelle.

Nous pouvons maintenant donner une interprétation de l'invariant de Calabi:

THÉORÈME 2.4 (Fathi [5]). *Soit ϕ un élément de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$. Alors l'invariant de Calabi est l'intégrale de l'angle Ang_ϕ, i.e.*

$$\mathscr{C}(\phi) = \iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_\phi(x, y)\, dx\, dy.$$

Nous voyons ici clairement la difficulté de prolonger $\mathscr{C}$ aux homéomorphismes: le comportement local d'un homéomorphisme peut être tel que $\mathrm{Ang}_\phi(x, y)$ n'est pas intégrable de sorte que le membre de droite dans le théorème n'a plus de sens. Remarquons par ailleurs que nous ne connaissons aucune interprétation intuitive analogue de l'invariant de Calabi en dimension supérieure.

Nous donnerons deux démonstrations de ce théorème:

Première démonstration. Nous vérifions que le second membre de l'égalité définit bien un homomorphisme de groupes. Soient h_1 et h_2 deux homéomorphismes de $\mathrm{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$. Il est clair que:

$$\mathrm{Ang}_{h_2 \circ h_1}(x, y) = \mathrm{Ang}_{h_1}(x, y) + \mathrm{Ang}_{h_2}(h_1(x), h_1(y)).$$

Supposons maintenant que h_1 et h_2 respectent l'aire et que Ang_{h_1} et Ang_{h_2} soient bornés, ce qui est le cas si h_1 et h_2 sont dans $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, comme nous l'avons déjà vu. En intégrant sur $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$, nous obtenons:

$$\iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{h_2 \circ h_1}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{h_1}(x, y)\, dx\, dy + \iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{h_2}(x, y)\, dx\, dy.$$

D'après le théorème de Banyaga cité plus haut, il existe donc un homomorphisme de groupes $v: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tel que pour tout élément ϕ de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, nous avons:

$$\iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_\phi(x, y)\, dx\, dy = v(\mathscr{C}(\phi)).$$

Puisque le membre de gauche et $\mathscr{C}(\phi)$ dépendent continûment de ϕ dans la topologie C^1, l'homomorphisme v est continu, c'est-à-dire qu'il existe une constante k telle que pour tout ϕ:

$$\iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_\phi(x, y)\, dx\, dy = k\mathscr{C}(\phi).$$

A vrai dire, la valeur exacte de cette constante k dépend des choix des normalisations faits. Pour l'évaluer, et montrer qu'en fait $k = 1$, il suffit de choisir un exemple pour lequel nous puissions calculer les deux membres. Nous allons bien sûr considérer le cas des flots hamiltoniens les plus simples, i.e. possédant une symétrie de révolution.

Soit $\rho : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ constante au voisinage de 0 et nulle au voisinage de 1. Les coordonnées dans $\mathbf{D}^2 \subset \mathbf{R}^2$ étant encore notées (p,q), considérons la fonction:

$$\mathscr{H} : (p,q) \in \mathbf{D}^2 \mapsto \rho(\sqrt{p^2+q^2}) \in \mathbf{R}.$$

Le champ hamiltonien correspondant s'écrit:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} = -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\, \rho'(\sqrt{p^2+q^2})$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\, \rho'(\sqrt{p^2+q^2}).$$

Le point $\phi^t_{\mathscr{H}}(p,q)$ décrit, quand le temps varie, un cercle de rayon constant $p^2+q^2 = r^2$, avec une vitesse angulaire $\omega(r) = \rho'(r)/2\pi r$ (comptée en tours/s).

Considérons alors deux points $x = (p_1, q_1)$ et $y = (p_2, q_2)$ dans $\mathbf{D}^2$ et supposons par exemple que $r_1^2 = p_1^2 + q_1^2 > r_2^2 = p_2^2 + q_2^2$. Il est facile de décrire la variation de l'angle du vecteur $\overrightarrow{\phi^t_{\mathscr{H}}(x)\phi^t_{\mathscr{H}}(y)}$. Au temps t, le point $\phi^t_{\mathscr{H}}(x)$ a tourné autour de l'origine O d'un angle $t\rho'(r_1)/2\pi r_1$. D'autre part, puisque le cercle de rayon r_2 est à l'intérieur du cercle de rayon r_1, l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{O\phi^t_{\mathscr{H}}(x)}$ et $\overrightarrow{\phi^t_{\mathscr{H}}(y)\phi^t_{\mathscr{H}}(x)}$ est aigu pour tout t. Nous avons donc:

$$\left| \mathrm{Ang}_{\phi^t_{\mathscr{H}}}(x,y) - t\,\frac{\rho'(r_1)}{2\pi r_1} \right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En fixant le point x et en intégrant sur le domaine où y est de norme inférieure à r_1, nous obtenons:

$$\left| \int_{r_2 < r_1} \mathrm{Ang}_{\phi^t_{\mathscr{H}}}(x,y)\, dy - t\,\frac{\rho'(r_1)}{2\pi r_1}\, \pi r_1^2 \right| \leqslant \frac{\pi r_1^2}{2}.$$

En intégrant alors par rapport à x, nous avons:

$$\left| \iint_{r_2 < r_1} \mathrm{Ang}_{\phi^t_{\mathscr{H}}}(x,y)\, dx\, dy - t \int_0^1 \rho'(r_1)\, \frac{r_1}{2}\, 2\pi r_1\, dr_1 \right| \leqslant \frac{\pi^2}{4}.$$

En observant que $\mathrm{Ang}_{\phi^t_{\mathscr{H}}}(x,y) = \mathrm{Ang}_{\phi^t_{\mathscr{H}}}(y,x)$, nous obtenons l'estimation:

$$\left| \iint_{\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{\phi^t_{\mathscr{H}}}(x,y)\, dx\, dy - 2t \int_0^1 \rho'(r_1)\, \frac{r_1}{2}\, 2\pi r_1\, dr_1 \right| \leqslant \frac{\pi^2}{2}.$$

Par intégration par parties, et puisque ρ est nulle pour $r = 1$, nous avons:

$$\int_0^1 \rho'(r_1)\pi r_1^2\, dr_1 = -\int_0^1 \rho(r_1) 2\pi r_1\, dr_1 = -\int_{\mathbf{D}^2} \mathscr{H}.$$

Or nous avons montré que $\mathscr{C}(\phi_{\mathscr{H}}^t) = -2t\int_{\mathbf{D}^2}\mathscr{H}$. Ainsi:

$$\left|\iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{\phi_{\mathscr{H}}^t}(x,y)\,dx\,dy - \mathscr{C}(\phi_{\mathscr{H}}^t)\right| \leqslant \frac{\pi^2}{2}.$$

Comme le membre de gauche de l'équation précédente varie linéairement en t, nous montrons finalement que:

$$\mathscr{C}(\phi_{\mathscr{H}}^t) = \iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{\phi_{\mathscr{H}}^t}(x,y)\,dx\,dy.$$

La constante cherchée est donc bien 1. □

Seconde démonstration. En fait, pour démontrer ce théorème, il n'est pas nécessaire d'utiliser toute la puissance du théorème de Banyaga.

Soit G le noyau de l'homomorphisme:

$$\phi \mapsto \mathscr{C}(\phi) - \iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_{\phi}(x,y)\,dx\,dy.$$

C'est évidemment un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, *fermé* dans la topologie C^1. Nous devons montrer que $G = \mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, et procédons de la manière suivante:

1. G contient les flots hamiltoniens $\phi_{\mathscr{H}}^t$ où $\mathscr{H}: \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ est de classe C^∞, constant près de l'origine et ne dépend que du rayon. C'est ce que nous avons fait précédemment.
2. G contient les flots hamiltoniens $\phi_{\mathscr{H}}^t$ où $\mathscr{H}: \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ est le composé d'un hamiltonien du type précédent et d'un élément ϕ de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$. En effet, $\phi_{\mathscr{H}\circ\phi}^t$ est conjugué à $\phi_{\mathscr{H}}^t$ par ϕ et G est distingué.
3. Si G contient $\phi_{\mathscr{H}_1}^t$ et $\phi_{\mathscr{H}_2}^t$, où $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2: \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ sont deux hamiltoniens de classe C^∞, nuls près du bord, alors G contient aussi $\phi_{\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2}^t$. Ceci résulte du fait que:

$$\phi_{\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2}^t = \lim_{n\to\infty} (\phi_{\mathscr{H}_1}^{t/n} \circ \phi_{\mathscr{H}_2}^{t/n})^n$$

   dans la topologie C^∞.
4. G contient tous les flots hamiltoniens $\phi_{\mathscr{H}}^t$, où $\mathscr{H}$ est de classe C^∞, et nul près du bord. En effet, l'ensemble des $\mathscr{H}$ tels que $\phi_{\mathscr{H}}^t$ soit dans G est un sous-espace vectoriel (d'après 3), fermé, invariant par composition à la source par tous les éléments de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$ (d'après 2), et qui contient toutes les fonctions radiales, constantes au voisinage de l'origine (d'après 1). Cet espace contient toutes les fonctions de classe C^∞. En effet, d'après le théorème de Hahn-Banach, dans le cas contraire il existerait une distribution sur $\mathbf{D}^2$, invariante par $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, et qui s'annulerait sur toutes les fonctions radiales constantes au voisinage de l'origine; c'est évidemment impossible.
5. G coïncide avec $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$. Pour cela, il suffit de montrer que G contient $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$. Or, d'après un cas particulier du théorème de Moser, tout élément ϕ de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$ est l'application « temps 1» d'une isotopie hamiltonienne ϕ_t ($t \in [0,1]$, $\phi_0 = \mathrm{id}$, $\phi_1 = \phi$). Autrement dit, il existe $\mathscr{H}_t: \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ un hamiltonien de classe C^∞, nul près du bord et dépendant de t, tel que, pour $t \in [0,1]$:

$$d\mathscr{H}_t(-) = aire\left(-, \frac{\partial \phi_t}{\partial t}\right).$$

En découpant $[0,1]$ en intervalles $[i/n,(i+1)/n]$, pour $i=0,1,\ldots,n-1$; nous obtenons la limite suivante dans la topologie C^∞:

$$\phi = \lim_{n\to\infty} (\phi^{1/n}_{\mathscr{H}_{(n-1)/n}} \circ \phi^{1/n}_{\mathscr{H}_{(n-2)/n}} \circ \cdots \circ \phi^{1/n}_{\mathscr{H}_0}). \qquad \square$$

Outre le fait que le théorème précédent donne une interprétation intuitive de l'invariant de Calabi, il nous permet d'une part de généraliser la définition aux autres mesures invariantes et, d'autre part, de démontrer l'invariance topologique.

Définition 2.5. Soit ϕ un difféomorphisme de classe C^1 du disque $\mathbf{D}^2$ qui est l'identité près du bord. Soit μ une mesure finie sur $\mathbf{D}^2$ invariante par ϕ et ne possédant pas d'atome. L'invariant de Calabi $\mathscr{C}_\mu(\phi)$ de ϕ relatif à μ est défini par:

$$\mathscr{C}_\mu(\phi) = \iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2} \mathrm{Ang}_\phi(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

On remarquera que cette définition a un sens bien que Ang ne soit pas défini sur la diagonale de $\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2$. En effet, l'hypothèse selon laquelle μ n'a pas d'atome garantit que la diagonale est de mesure nulle pour $\mu\times\mu$.

Pour calculer $\mathscr{C}_\mu(\phi)$, nous pouvons appliquer le théorème ergodique, puisque Ang_ϕ est borné. Les sommes de Birkhoff correspondantes sont:

$$\mathrm{Ang}_\phi(x,y) + \mathrm{Ang}_\phi(\phi(x),\phi(y)) + \cdots + \mathrm{Ang}_\phi(\phi^{n-1}(x),\phi^{n-1}(y))$$

qui sont égales à:

$$\mathrm{Ang}_{\phi^n}(x,y).$$

Ainsi, nous déduisons que pour $\mu\times\mu$ presque tout couple (x,y), la limite suivante existe:

$$\widetilde{\mathrm{Ang}}_\phi(x,y) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{Ang}_{\phi^n}(x,y).$$

De plus:

$$\mathscr{C}_\mu(\phi) = \iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2} \widetilde{\mathrm{Ang}}_\phi(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème d'invariance topologique.

THÉORÈME 2.6. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments de* $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2)$ *qui préservent respectivement les mesures finies sans atome μ_1 et μ_2 sur $\mathbf{D}^2$. Soit h un élément de* $\mathrm{Homéo}(\mathbf{D}^2,\partial\mathbf{D}^2)$ *tel que $\phi_2 = h\circ\phi_1\circ h^{-1}$ et $h_*(\mu_1)=\mu_2$. Alors les invariants de Calabi $\mathscr{C}_{\mu_1}(\phi_1)$ et $\mathscr{C}_{\mu_2}(\phi_2)$ sont égaux.*

Démonstration. La relation $\phi_2 = h\circ\phi_1\circ h^{-1}$ donne:

$$\mathrm{Ang}_{\phi_1}(x,y) - \mathrm{Ang}_{\phi_2}(h(x),h(y)) = \mathrm{Ang}_h(x,y) - \mathrm{Ang}_h(\phi_2(x),\phi_2(y)).$$

En remplaçant ϕ_1 et ϕ_2 par leurs itérés ϕ_1^n et ϕ_2^n, nous obtenons:

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Ang}_{\phi_1^n}(x,y) - \frac{1}{n}\,\mathrm{Ang}_{\phi_2^n}(h(x),h(y)) = \frac{1}{n}\,(\mathrm{Ang}_h(x,y) - \mathrm{Ang}_h(\phi_2^n(x),\phi_2^n(y)).$$

Puisque μ n'a pas d'atome, nous pouvons appliquer le théorème de récurrence de Poincaré sur $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$ − diag pour le difféomorphisme $\phi_1 \times \phi_1$. Nous en déduisons que pour presque tout couple (x, y), il existe une suite n_k tendant vers l'infini telle que $\phi_1^{n_k}(x)$ tende vers x et $\phi_1^{n_k}(y)$ tende vers y. Puisque Ang_h est une fonction continue (mais non nécessairement bornée), nous avons donc pour presque tout couple (x, y):

$$\liminf \frac{1}{n} \left| \mathrm{Ang}_{\phi_1^n}(x, y) - \mathrm{Ang}_{\phi_2^n}(h(x), h(y)) \right| = 0.$$

Par ailleurs, nous savons que pour presque tout (x, y) les deux suites $(1/n)\mathrm{Ang}_{\phi_1^n}(x, y)$ et $(1/n)\mathrm{Ang}_{\phi_2^n}(h(x), h(y))$ convergent vers $\widetilde{\mathrm{Ang}}_{\phi_1}(x, y)$ et $\widetilde{\mathrm{Ang}}_{\phi_2}(h(x), h(y))$. Nous avons donc, pour $\mu_1 \times \mu_1$ presque tout couple (x, y):

$$\widetilde{\mathrm{Ang}}_{\phi_1}(x, y) = \widetilde{\mathrm{Ang}}_{\phi_2}(h(x), h(y)).$$

En intégrant par rapport à $\mu_1 \times \mu_1$, nous obtenons donc:

$$\mathscr{C}_{\mu_1}(\phi_1) = \mathscr{C}_{\mu_2}(\phi_2). \qquad \square$$

2.2. *L'invariant de Ruelle*

Soit ϕ un élément de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ et $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ une isotopie joignant l'identité à ϕ à travers $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$. Nous pouvons étendre cette isotopie à tous les itérés de ϕ en posant, pour tout réel t, $\phi_t = \phi_{t-[t]} \circ \phi^{[t]}$, où $[-]$ désigne la partie entière. *L'enlacement infinitésimal* d'un vecteur non nul u de $\mathbf{R}^2$, pendant le temps T, est le nombre de algébrique de fois que le vecteur $d\phi_t(x)(u)/\|d\phi_t(x)(u)\|$ croise une origine donnée sur le cercle unité. Nous noterons cette quantité $\omega_\phi(x, T)$.

Remarque. Cette quantité dépend évidemment des choix de l'origine choisie sur le cercle et du vecteur u. Cependant changer ces deux données amène à changer l'entier $\omega_\phi(x, T)$ d'au plus une unité. De même, à une unité près, nous aurions pu définir $\omega_\phi(x, T)$ comme la variation de l'angle du vecteur $d\phi_t(x)(u)$ (comptée en tours) lorsque t varie de 0 à T. Cette quantité dépend aussi de l'isotopie choisie; elle n'en dépend cependant pas pour les valeurs entières de T.

Remarque. Cette quantité est presque additive. Plus précisément, pour tout couple de réels T et T', nous avons:

$$|\omega_\phi(x, T + T') - \omega_\phi(x, T) - \omega_\phi(\phi_T(x), T')| \leqslant 1. \qquad (*)$$

C'est cette dernière remarque qui permet à Ruelle de montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.7 (Ruelle [9]). *Soit ϕ un élément de* $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \mu)$. *Alors:*
— *pour μ-presque tout point x dans $\mathbf{D}^2$, la quantité $\omega_\phi(x, T)/T$ converge quand T tend vers $\pm\infty$ vers une limite $\Omega_\phi(x)$,*
— *la fonction $\Omega_\phi : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ est intégrable.*

Nous appelons *invariant de Ruelle* associé au couple (ϕ, μ), et nous notons $\mathscr{R}_\mu(\phi)$, l'intégrale $\int_{\mathbf{D}^2} \Omega_\phi(x)\, d\mu(x)$. Contrairement à l'invariant de Calabi, l'invariant de Ruelle n'est pas un homomorphisme de groupes. Cependant, nous avons la propriété suivante:

PROPOSITION 2.8. *L'invariant de Ruelle*:

$$\mathscr{R}_\mu : \mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \mu) \to \mathbf{R}$$

est un quasi-morphisme *homogène*, i.e.

(i) $|\mathscr{R}_\mu(\phi_1 \circ \phi_2) - \mathscr{R}_\mu(\phi_1) - \mathscr{R}_\mu(\phi_2)| \leqslant 4\mu(\mathbf{D}^2)$,
(ii) $\mathscr{R}_\mu(\phi^n) = n\mathscr{R}_\mu(\phi)$, *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. La propriété (ii) résulte immédiatement de la définition.
L'inégalité $(*)$ nous donne, pour tout $x \in \mathbf{D}^2$ et tout $N > 0$:

$$\left| \frac{1}{N}\,\omega_\phi(x, N) - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \omega_\phi(\phi^i(x), 1)\right| \leqslant 1.$$

Comme la fonction $x \in \mathbf{D}^2 \mapsto \omega_\phi(x, 1)$ est bornée, le théorème ergodique nous assure que pour μ-presque tout $x \in \mathbf{D}^2$ la quantité $(1/N)\sum_{i=0}^{N-1} \omega_\phi(\phi^i(x), 1)$ converge vers une limite $\tilde{\omega}_\phi(x, 1)$. Nous en déduisons donc que pour μ-presque tout $x \in \mathbf{D}^2$:

$$|\Omega_\phi(x) - \tilde{\omega}_\phi(x, 1)| \leqslant 1.$$

En intégrant, nous obtenons:

$$\left| \mathscr{R}_\mu(\phi) - \int_{\mathbf{D}^2} \tilde{\omega}_\phi(x, 1)\, d\mu(x)\right| \leqslant \mu(\mathbf{D}^2).$$

C'est-à-dire, en utilisant à nouveau le théorème ergodique:

$$\left| \mathscr{R}_\mu(\phi) - \int_{\mathbf{D}^2} \omega_\phi(x, 1)\, d\mu(x)\right| \leqslant \mu(\mathbf{D}^2).$$

D'autre part, il est clair que:

$$|\omega_{\phi_1 \circ \phi_2}(x, 1) - \omega_{\phi_1}(\phi_2(x), 1) - \omega_{\phi_2}(x, 1)| \leqslant 1.$$

Par conséquent:

$$|\mathscr{R}_\mu(\phi_1 \circ \phi_2) - \mathscr{R}_\mu(\phi_1) - \mathscr{R}_\mu(\phi_2)| \leqslant 4\mu(\mathbf{D}^2). \qquad \square$$

Remarque. Il résulte en particulier de cette proposition que $\mathscr{R}_\mu$ est invariant par conjugaison différentiable. En effet:

$$\mathscr{R}_\mu(\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}) = \frac{1}{n}\,\mathscr{R}_\mu(\phi \circ \psi^n \circ \phi^{-1}).$$

Or:

$$|\mathscr{R}_\mu(\phi \circ \psi^n \circ \phi^{-1}) - n\mathscr{R}_\mu(\psi)| \leqslant 8\mu(\mathbf{D}^2).$$

Donc:

$$\mathscr{R}_\mu(\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,(n\mathscr{R}_\mu(\psi)) = \mathscr{R}_\mu(\psi).$$

Un exemple. De même qu'au paragraphe précédent, nous étudions le cas des flots hamiltoniens. Soit $\mathscr{H} : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞, nulle près du bord. Pour simplifier, nous supposerons que $\mathscr{H}$ ne possède qu'un nombre fini de valeurs critiques. Soit ζ une valeur régulière, de sorte que $\mathscr{H}^{-1}(\zeta)$ est une réunion finie de courbes fermées simples et disjointes. Nous pouvons attribuer un indice $+1$ ou -1 à chacune de ces courbes suivant que $\mathscr{H}$ croît ou décroît quand nous traversons la courbe de l'intérieur vers l'extérieur. Nous notons $n_{\mathscr{H}}(\zeta)$ la somme des signes des composantes de $\mathscr{H}^{-1}(\zeta)$.

PROPOSITION 2.9. *Soit $\mathscr{H}:\mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞, nulle près du bord et ne possédant qu'un nombre fini de valeurs critiques. Soit $\phi^t_{\mathscr{H}}$ le flot hamiltonien correspondant à $\mathscr{H}$. Alors l'invariant de Ruelle de $\phi^t_{\mathscr{H}}$ pour l'élément d'aire est donné par*:

$$\mathscr{R}_{\text{aire}}(\phi^t_{\mathscr{H}}) = t\int_{\mathbf{R}} n_{\mathscr{H}}(\zeta)\,d\zeta.$$

Démonstration. Considérons d'abord une fonction $\rho:[r_1,r_2] \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ et sans point critique $(0 < r_1 < r_2 < 1)$. Soit A_{r_1,r_2} l'anneau de $\mathbf{R}^2$ formé des points de norme comprise entre r_1 et r_2, et $\mathscr{H}:A_{r_1,r_2} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\mathscr{H}(x) = \rho(\|x\|)$. Le flot hamiltonien correspondant $\phi^t_{\mathscr{H}}$ sur A_{r_1,r_2} a déjà été considéré plus haut. La courbe $\phi^t_{\mathscr{H}}(x)$ est un cercle parcouru à vitesse angulaire constante $\omega = \rho'(r)/2\pi r$ (avec $r = \|x\|$). Considérons maintenant un élément de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ qui coïncide avec $\phi^t_{\mathscr{H}}$ sur A_{r_1,r_2}. Nous pouvons alors calculer l'invariant de Ruelle de ce difféomorphisme pour la restriction $aire_{A_{r_1,r_2}}$ de *aire* à A_{r_1,r_2}. Nous trouvons:

$$\int_{r_1}^{r_2} t\,\frac{\rho'(r)}{2\pi r}\,2\pi r\,dr = t(\rho(r_2) - \rho(r_1)) = t\int_{\mathbf{R}} n(r)\,dr$$

où n est la fonction indicatrice de l'intervalle $[\rho(r_2), \rho(r_1)]$ affectée du signe $+1$ ou -1 suivant que ρ est croissante ou décroissante.

Supposons maintenant que $\mathscr{H}:\mathbf{D}^2 \to \mathbf{R}$ soit comme dans la proposition. Soit $[\zeta_1,\zeta_2]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ sans valeur critique de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^{-1}[\zeta_1,\zeta_2]$ est donc une réunion finie d'anneaux. Soit A l'un de ces anneaux. Par un difféomorphisme Φ préservant *aire*, nous pouvons envoyer A sur un anneau du type A_{r_1,r_2} de telle sorte que $\mathscr{H}\circ\Phi^{-1}:A_{r_1,r_2} \to \mathbf{R}$ ne dépende que de la norme de x. En utilisant le calcul précédent et le fait que l'invariant de Ruelle est invariant par conjugaison différentiable préservant la mesure, nous obtenons pour la restriction $aire_A$ de *aire* à A:

$$\mathscr{R}_{\text{aire}_A}(\phi^t_{\mathscr{H}}) = t(\zeta_2 - \zeta_1) = t\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} n(r)\,dr$$

où $n(r) = +1$ ou -1 suivant que $\mathscr{H}$ croît ou décroît lorsque l'anneau est traversé de l'intérieur vers l'extérieur.

Considérons la mesure $aire_{\mathscr{H}^{-1}[\zeta_1,\zeta_2]}$, restriction de *aire* à $\mathscr{H}^{-1}[\zeta_1,\zeta_2]$. Puisque nous savons que $\mathscr{H}^{-1}[\zeta_1,\zeta_2]$ est une réunion finie d'anneaux et que nous venons de calculer l'invariant de Ruelle sur chacun d'eux, nous trouvons:

$$\mathscr{R}_{\text{aire}_{\mathscr{H}^{-1}[\zeta_1,\zeta_2]}}(\phi^t_{\mathscr{H}}) = t\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} n_{\mathscr{H}}(\zeta)\,d\zeta$$

Finalement, notons $\theta_1 < \cdots < \theta_k$ les valeurs critiques de $\mathscr{H}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, nous pouvons obtenir l'invariant de Ruelle pour la restriction de *aire* à $\mathscr{H}^{-1}([\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon] \cup [\theta_2 + \varepsilon, \theta_3 - \varepsilon] \cup \cdots \cup [\theta_{k-1} + \varepsilon, \theta_k - \varepsilon])$. En faisant tendre ε vers 0, nous trouvons comme annoncé dans la proposition:

$$\mathcal{R}_{\text{aire}}(\phi^t_{\mathcal{H}}) = t \int_{\mathbf{R}} n_{\mathcal{H}}(\zeta)\, d\zeta. \qquad \square$$

De même que pour l'invariant de Calabi, nous montrons:

COROLLAIRE 2.10. *L'invariant de Ruelle*

$$\mathcal{R}_{\text{aire}} : \text{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire) \to \mathbf{R}$$

n'est pas continu dans la topologie C^0.

Démonstration. Considérons une suite de fonctions $\rho_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ (pour $n \geqslant 0$) telles que:

1. ρ_n est constante et égale à 1 au voisinage de 0,
2. ρ_n est nulle pour $r \geqslant 1/n$,
3. ρ_n décroît.

Les «temps 1» des flots hamiltoniens correspondants ont tous le même invariant de Ruelle non nul et convergent vers l'identité dans la topologie C^0. □

Pour terminer ce paragraphe signalons que Ruelle définit aussi un invariant pour les difféomorphismes symplectiques de la boule de dimension paire. De même que pour l'invariant de Calabi, la question de l'invariance topologique de ces nombres est ouverte en dimension supérieure à 2. Nous pouvons démontrer maintenant le théorème d'invariance topologique en dimension 2.

THÉORÈME 2.11. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments de Diff$^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ qui préservent respectivement les mesures finies sans atome μ_1 et μ_2 sur $\mathbf{D}^2$. Soit h un élément de* Homéo$(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ *tel que $\phi_2 = h \circ \phi_1 \circ h^{-1}$ et $h_*(\mu_1) = \mu_2$. Alors les invariants de Ruelle $\mathcal{R}_{\mu_1}(\phi_1)$ et $\mathcal{R}_{\mu_2}(\phi_2)$ sont égaux.*

Démonstration. Dans la suite $B_\rho(x)$ désignera la boule fermée de centre x et de rayon ρ. Pour $0 < \alpha < \varepsilon$, et x dans $\mathbf{D}^2$, nous dirons que ϕ dans Diff$^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ possède une (α, ε, x)-*chaîne* si nous pouvons trouver $n_1 \leqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$ et $y \in \mathbf{D}^2$ tels que:

(i) $\phi^n(y) \in B_\varepsilon(\phi^n(x))$ pour $n_1 \leqslant n \leqslant n_2$,
(ii) $\phi^{n_1}(y) \notin B_\alpha(\phi^{n_1}(x))$ et $\phi^{n_2}(y) \notin B_\alpha(\phi^{n_2}(x))$.

La quantité $n_2 - n_1$ sera appelée la *longueur* de la chaîne.
Le lemme suivant est la clé de la démonstration du théorème.

LEMME 2.12. *Soit ϕ dans* Diff$^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$ *qui préserve une mesure finie sans atome μ. Alors, pour presque tout point x dans $\mathbf{D}^2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \alpha < \varepsilon$, pour lequel ϕ possède des (α, ε, x)-chaînes de longueurs arbitrairement grandes.*

Démonstration. Considérons dans $\mathbf{D}^2$ la réunion $\mathcal{X}$ des boules de mesure nulle, dont le centre a ses deux coordonnées rationnelles et le rayon est rationnel. Cet ensemble $\mathcal{X}$ est évidemment de mesure nulle. Prenons alors un point x qui n'est pas dans $\mathcal{X}$. Pour tout $\rho > 0$, la boule $B_\rho(x)$ est de mesure strictement positive (sinon il serait possible de prendre une boule de mesure nulle, dont le centre a ses deux coordonnées rationnelles et le rayon est rationnel qui contienne x et qui soit incluse dans $B_\rho(x)$). Choisissons donc un tel x et $\varepsilon > 0$. Soit maintenant α, tel que $0 < \alpha < \varepsilon$. Si ϕ ne possède pas de (α, ε, x)-chaînes de longueurs arbitrairement grandes, c'est qu'il existe ρ suffisamment petit pour lequel tous les points de $B_\rho(x)$ ont soit leur orbite future qui reste à une distance inférieure à α de l'orbite future de x, soit leur orbite passée qui reste à une distance inférieure à α de l'orbite passée de x. Ainsi $B_\rho(x)$ est la réunion des deux ensembles:

$$\alpha_\rho(x) = \{ y \in B_\rho(x) \mid \phi^n(y) \in B_\alpha(\phi^n(x)),\ \forall n \leqslant 0\}$$

$$\omega_\rho(x) = \{ y \in B_\rho(x) \mid \phi^n(y) \in B_\alpha(\phi^n(x)),\ \forall n \geqslant 0\}.$$

Nous en déduisons que l'un de ces deux ensembles est de mesure non nulle. Pour fixer les notations, supposons $\mu(\omega_\rho(x)) > 0$. Puisque μ n'a pas d'atome, par un argument analogue à celui utilisé dans le théorème de récurrence de Poincaré, on peut trouver un point y dans $\omega_\rho(x)$ dont l'orbite future ne s'écrase pas sur l'orbite future de x. En d'autres termes, il existe $0 < \alpha' < \varepsilon$ et une suite croissante (n_j), avec $n_0 = 0$, tels que $\phi^{n_j}(y) \notin B_{\alpha'}(\phi^{n_j}(x))$ pour tout $j \geqslant 0$. Comme $\phi^n(y) \in B_\varepsilon(\phi^n(x))$ pour tout $n \geqslant 0$, nous avons ainsi construit des $(\alpha', \varepsilon, x)$-chaînes de longueurs arbitrairement grandes. □

Soient ϕ un élément de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2)$, x un point de $\mathbf{D}^2$ et τ_x la translation qui envoie le point x sur l'origine $O = (0, 0)$. Quitte à prolonger par l'identité ϕ en un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$, l'application $\phi_x = \tau_{\phi(x)} \circ \phi \circ \tau_x^{-1}$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui fixe l'origine. Ôtons cette origine à $\mathbf{R}^2$ et compactifions par le cercle des directions orientées. Nous obtenons ainsi un anneau $\mathbf{S}^1 \times [0, \infty[$ (en coordonnées polaires) et ϕ_x induit sur cet anneau un homéomorphisme $\tilde{\phi}_x$. Nous choisissons le relevé Φ_x de $\tilde{\phi}_x$ au revêtement universel $\mathbf{R} \times [0, \infty[$ de façon à ce que Φ_x soit proche l'identité loin de $\mathbf{R} \times \{0\}$. Pour (u_1, u_2) dans $\mathbf{R} \times [0, \infty[$ et $n \geqslant 0$, nous notons $\Phi_{(x,n)}(u_1, u_2)$ le point $\Phi_{\phi^{n-1}(x)} \circ \Phi_{\phi^{n-2}(x)} \circ \cdots \circ \Phi_x(u_1, u_2)$. On définit $\Phi_{(x,n)}(u_1, u_2)$ de manière analogue pour $n \leqslant 0$. Soient $\pi_1 : (u_1, u_2) \mapsto u_1$ et $\pi_2 : (u_1, u_2) \mapsto u_2$ les projections canoniques. Le lemme suivant est une conséquence directe du caractère C^1 de ϕ:

LEMME 2.13. *Pour tout $m > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout point x dans $\mathbf{D}^2$, et tout couple (u_1, u_2) dans $\mathbf{R} \times [0, \infty[$ vérifiant $\pi_2(\Phi_{(x,n)}(u_1, u_2)) < \varepsilon$ pour $0 \leqslant n \leqslant m$, nous avons:*

$$|\pi_1(\Phi_{(x,m)}(u_1, u_2)) - u_1 - \omega_\phi(x, m)| \leqslant 3.$$

Nous noterons par la suite $\varepsilon(\phi, m)$ un ε adapté au lemme précédent. Fixons donc $m > 0$ et choisissons $\varepsilon \leqslant \varepsilon(\phi_1, m)$. Le lemme 2.12 nous assure que, pour presque tout point x dans $\mathbf{D}^2$, il existe $0 < \alpha < \varepsilon$ pour lequel ϕ_1 possède des (α, ε, x)-chaînes de longueurs arbitrairement grandes. Plus précisément, pour tout $N > 0$, nous pouvons trouver $n_1 \leqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$ et $(u, v) \in \mathbf{R} \times [0, \infty[$ tels que:

1. $n_2 - n_1 \geqslant N$,
2. $\pi_2(\Phi_{1(x,n)}(u, v)) \leqslant \varepsilon$, $\forall n_1 \leqslant n \leqslant n_2$,
3. $\pi_2(\Phi_{1(x,n_1)}(u, v)) > \alpha$ et $\pi_2(\Phi_{1(x,n_2)}(u, v)) \leqslant \alpha$.

En utilisant la presque additivité de $\omega_{\phi_1}(x, n)$ nous en déduisons que:

$$|\pi_1(\Phi_{1(x,n_2)}(u, v)) - \pi_1(\Phi_{1(x,n_1)}(u, v)) - \omega_{\phi_1}(\phi_1^{n_1}(x), n_2 - n_1)| \leqslant 5\,\frac{(n_2 - n_1)}{m}.$$

Les applications ϕ_{1x} et $\phi_{2h(x)}$ sont conjuguées par l'homéomorphisme $h_x = \tau_{h(x)} \circ h \circ \tau_x^{-1}$ qui fixe l'origine. L'homéomorphisme induit sur l'anneau ouvert $\mathbf{R}^2 - \{O\}$ se relève en un homéomorphisme H_x du demi-plan ouvert $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ que nous pouvons choisir tel que $H_x \circ \Phi_{1x} = \Phi_{2h(x)} \circ H_x$, proche de l'identité loin de $\mathbf{R} \times \{0\}$ et dépendant continûment de x. Nous avons évidemment l'estimation suivante:

LEMME 2.14. *Pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $K(\alpha) > 0$ telle que, pour tout point x de $\mathbf{D}^2$, et tout couple (u,v) de $\mathbf{R} \times [0, \infty[$ vérifiant $v \geqslant \alpha$, nous avons:*

$$|\pi_1(H_x(u,v)) - u| \leqslant K(\alpha).$$

Prenons maintenant ε suffisamment petit de façon à ce que pour tout point x dans $\mathbf{D}^2$, nous ayons $h(B_\varepsilon(x)) \subset B_{\varepsilon(\phi_2,m)}(h(x))$. Nous obtenons alors:

$$|\pi_1(\Phi_{2(x,n_2)}(H_x(u,v))) - \pi_1(\Phi_{2(x,n_1)}(H_x(u,v))) - \omega_{\phi_2}(\phi_2^{n_1}(h(x)), n_2 - n_1)| \leqslant 5\,\frac{(n_2 - n_1)}{m}$$

soit encore:

$$|\pi_1(H_{\phi_2^{n_2}(x)}(\Phi_{1(x,n_2)}(u,v))) - \pi_1(H_{\phi_2^{n_1}(x)}(\Phi_{1(x,n_1)}(u,v))) - \omega_{\phi_2}(h(\phi_1^{n_1}(x)), n_2 - n_1)| \leqslant 5\,\frac{(n_2 - n_1)}{m}.$$

Le lemme 2.14 nous donne ainsi:

$$|\omega_{\phi_2}(h(\phi_1^{n_1}(x)), n_2 - n_1) - \omega_{\phi_1}(\phi_1^{n_1}(x), n_2 - n_1)| \leqslant 10\,\frac{(n_2 - n_1)}{m} + 2K(\alpha)$$

ce qui nous donne, en utilisant la propriété $(*)$:

$$|(\omega_{\phi_2}(h(x), n_2) - \omega_{\phi_1}(x, n_2)) - (\omega_{\phi_2}(h(x), n_1) - \omega_{\phi_1}(x, n_1))| \leqslant 10\,\frac{(n_2 - n_1)}{m} + 2K(\alpha) + 4.$$

Or, il existe dans $\mathbf{D}^2$ un ensemble $\mathscr{B}$ de μ_1-mesure totale, pour lequel tout élément x dans $\mathscr{B}$ vérifie les trois propriétés suivantes:

1. pour tout ε, il existe α tel que ϕ_1 possède des (α, ε, x)-chaînes de longueurs arbitrairement grandes,
2. la quantité $\omega_{\phi_1}(x, n)/n$ converge quand n tend vers $\pm\infty$,
3. la quantité $\omega_{\phi_2}(h(x), n)/n$ converge quand n tend vers $\pm\infty$.

Pour x dans $\mathscr{B}$ nous avons donc:

$$|\Omega_{\phi_2}(h(x)) - \Omega_{\phi_1}(x)| \leqslant 10/m.$$

Cette inégalité étant satisfaite pour tout $m > 0$, nous obtenons:

$$\Omega_{\phi_2}(h(x)) = \Omega_{\phi_1}(x).$$

En intégrant sur $\mathscr{B}$ et donc sur $\mathbf{D}^2$, nous trouvons:

$$\mathscr{R}_{\mu_1}(\phi_1) = \mathscr{R}_{\mu_2}(\phi_2). \qquad \square$$

Remarque. Le théorème 2.11 ne se généralise pas aux mesures atomiques: il est facile de trouver des difféomorphismes du disque fixant l'origine dont les différentielles en l'origine sont des rotations d'angles différents et qui sont cependant conjugués par un homéomorphisme fixant lui aussi l'origine.

Cependant, Naishul considère dans [7] l'ensemble $\mathcal{N}$ des homéomorphismes h qui sont définis dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$ et qui vérifient les propriétés suivantes:

1. h fixe l'origine,
2. h est différentiable à l'origine et la différentielle est une rotation d'angle noté $\theta(h)$,
3. toute courbe simple entourant l'origine rencontre son image par h. Notons que ceci est vrai en particulier si h préserve l'aire ou encore si h est holomorphe.

Il montre alors le résultat suivant:

THÉORÈME 2.15. *Soient h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{N}$ qui sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme qui préserve l'orientation. Alors $\theta(h_1)$ et $\theta(h_2)$ sont égaux.*

Notons qu'en utilisant les techniques que nous avons introduites pour la démonstration du théorème 2.6, il est possible de montrer le résultat de Naishul dans le cas des homéomorphismes qui préservent l'aire (voir [6]).

3. LES FLOTS SUR LES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

3.1. L'invariant d'Arnold

Commençons par rappeler la définition de cet invariant (appelé d'ailleurs *invariant asymptotique de Hopf* par Arnold). Soit V une variété connexe fermée et orientée de dimension 3, dont le premier groupe d'homologie entière est nul. Si k_1 et k_2 sont deux courbes simples fermées orientées et disjointes dans V, i.e. deux nœuds disjoints, *le nombre d'enlacement* de k_1 et k_2, noté $\mathrm{Enl}(k_1, k_2)$ est défini de la manière classique suivante. Soit Σ_1 une surface orientée à bord plongée dans V dont le bord est k_1 (l'existence de cette surface résulte de notre hypothèse homologique). On définit alors $\mathrm{Enl}(k_1, k_2)$ comme le nombre d'intersection algébrique de k_2 avec Σ_1. Il est facile de s'assurer que ce nombre ne dépend pas du choix de Σ_1 (voir par exemple [8]).

Supposons maintenant que V soit équipée d'une forme volume *vol* et soit X un champ de vecteurs sur V dont le flot engendré, ϕ^t, préserve *vol*. Choisissons une métrique riemannienne auxiliaire générique g sur V et, pour tout couple (x, y) de points de V, choisissons l'une des géodésiques, $\gamma_{x,y}$, de longueur minimale joignant x à y. Soient $T > 0$ et x un point de V. L'arc d'orbite de X joignant x à $\phi^T(x)$ suivi de l'arc de géodésique $\gamma_{\phi^T(x),x}$ est un lacet qui, pour presque tout x et T est un nœud $k(T, x)$ (i.e. n'a pas de point double). Pour presque tout couple (x, y) et presque tout T_1 et $T_2 > 0$, les deux nœuds $k(T_1, x)$ et $k(T_2, y)$ sont disjoints et Arnold démontre alors que la limite:

$$\lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \mathrm{Enl}(k(T_1, x), k(T_2, y)) = A_X(x, y)$$

existe presque partout. Il est facile par ailleurs de s'assurer que cette limite ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne auxiliaire. *L'invariant d'Arnold* du champ X, noté $\mathscr{A}(X)$ est défini comme:

$$\mathscr{A}(X) = \iint_{V \times V} A_X(x, y)\, dx\, dy$$

où, pour ne pas surcharger les notations, nous notons simplement $dx\,dy$ l'élément de volume naturel sur $V \times V$ provenant de *vol*. Ce nombre peut aussi se calculer de la manière suivante. La 2-forme différentielle $\iota_X\, vol$ est fermée car le flot préserve *vol*. Puisque V est une sphère d'homologie, cette forme s'écrit $d\alpha$ où α est une 1-forme différentielle sur la variété V. Arnold démontre que:

$$\mathscr{A}(X) = \int_V \alpha \wedge d\alpha.$$

La définition de l'invariant d'Arnold peut se généraliser au cas d'une sous-variété compacte à bord V de $\mathbf{R}^3$ munie d'un champ de vecteurs X tangent au bord dont le flot engendré préserve le volume usuel de $\mathbf{R}^3$. On notera cependant que dans ce cas le nombre $\mathscr{A}(X)$ dépend du plongement de V dans $\mathbf{R}^3$ car les enlacements des nœuds sont calculés dans $\mathbf{R}^3$.

Le résultat principal de ce paragraphe est un lien entre l'invariant d'Arnold et celui de Calabi.

Soit ϕ un élément de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$. Considérons le tore solide $\mathbf{T}_\phi$ obtenu par passage au quotient de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}$ par:

$$(x, t) \mapsto (\phi^n(x), t + n) \qquad (n \in \mathbf{Z}).$$

Puisque ces identifications préservent le volume $aire \wedge dt$, le tore solide $\mathbf{T}_\phi$ est équipé d'une forme volume *vol*. De même, le champ de vecteurs $\partial/\partial t$ passe au quotient en un champ de vecteurs $X(\phi)$ sur $\mathbf{T}_\phi$ qui préserve *vol*. Nous dirons que ce champ est *la suspension* de ϕ. Puisque ϕ est l'identité près du bord de $\mathbf{D}^2$, le bord de $\mathbf{T}_\phi$ est canoniquement le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et le champ $X(\phi)$ sur le bord est le champ dont toutes les orbites sont périodiques et de période 1. Nous considérons un plongement ι de $\mathbf{T}_\phi$ dans $\mathbf{R}^3$ comme un tore de révolution standard plongé de telle sorte que son bord $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 = \partial\mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ se plonge par:

$$\begin{aligned} \iota\colon & (\exp(2i\pi\theta), t) \in \partial\mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \\ & \mapsto ((R + r\cos 2\pi\theta)\cos 2\pi t, (R + r\cos 2\pi\theta)\sin 2\pi t, r\sin 2\pi\theta) \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

où les constantes R et r sont choisies de telle façon que le plongement de $\mathbf{T}_\phi$ puisse préserver le volume (l'existence d'un tel plongement résulte du théorème de Moser). Nous choisissons ι tel que l'image du disque $\mathbf{D}^2 \times \{t\}$ soit un disque euclidien contenu dans le plan vertical de $\mathbf{R}^3$ d'argument $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Nous considérerons toujours la suspension de ϕ comme un flot défini dans la sous-variété à bord $\iota(\mathbf{T}_\phi)$ de $\mathbf{R}^3$.

THÉORÈME 3.1. *L'invariant d'Arnold de la suspension de ϕ, calculé dans le plongement précédent, est égal à l'invariant de Calabi de ϕ.*

Avant de démontrer ce théorème, nous en donnons une généralisation sur la sphère $\mathbf{S}^3$. Soient maintenant ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$. Nous pouvons recoller $\mathbf{T}_{\phi_1}$ et $\mathbf{T}_{\phi_2}$ le long de leurs bords de façon compatible avec $X(\phi_1)$ et $X(\phi_2)$ afin d'obtenir la sphère $\mathbf{S}^3$. À chaque couple (ϕ_1, ϕ_2) d'éléments de $\mathrm{Diff}^1(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, aire)$, nous venons donc d'associer un champ de vecteurs $X(\phi_1, \phi_2)$ sur la sphère $\mathbf{S}^3$ qui préserve une forme volume *vol* (de masse totale $2 \times \pi \times 1$). Nous dirons que $X(\phi_1, \phi_2)$ est *la suspension double* de (ϕ_1, ϕ_2). Par exemple, si ϕ_1 et ϕ_2 sont l'identité, la suspension double correspondante est la fibration de Hopf de $\mathbf{S}^3$ paramétrée de telle sorte que toutes ses orbites soient de période 1.

THÉORÈME 3.2. *L'invariant d'Arnold de la suspension double $X(\phi_1, \phi_2)$ et les invariants de Calabi de ϕ_1 et ϕ_2 sont reliés par la relation suivante:*

$$\mathscr{A}(X(\phi_1, \phi_2)) = 4\pi^2 + \mathscr{C}(\phi_1) + \mathscr{C}(\phi_2).$$

Démonstration de Théorème 3.1. Le plongement $\imath$ nous permet d'identifier $\mathbf{T}_\phi$ à $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, c'est-à-dire que nous disposons d'une isotopie ϕ_t (pour $t \in \mathbf{R}$) du disque $\mathbf{D}^2$ telle que $\phi_t = \phi^t$ pour t entier, obtenue en projetant le flot de $X(\phi)$ sur le premier facteur. Si x et y sont deux points distincts du disque tels que $y - x$ n'est pas un vecteur vertical positif de $\mathbf{R}^2$ de même que $\phi_T(y) - \phi_T(x)$ (avec $T > 0$), nous pouvons considérer le nombre algébrique de fois où le vecteur $\phi_t(y) - \phi_t(x)$ devient vertical positif lorsque t décrit l'intervalle $[0, T]$. Ce nombre, noté $\widehat{\mathrm{Ang}}_{\phi_T}(x, y)$, est relié à la variation $\mathrm{Ang}_{\phi_T}(x, y)$ introduite au paragraphe 2 par la relation suivante:

$$\widehat{\mathrm{Ang}}_{\phi_T}(x, y) - \mathrm{Ang}_{\phi_T}(x, y) = w(\phi_T(y) - \phi_T(x)) - w(y - x)$$

où w est la fonction définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $[0, 1[$ qui est la partie fractionnaire de l'angle avec le vecteur vertical positif.

Rappelons comment calculer en pratique le nombre d'enlacement de deux nœuds k_1 et k_2 de $\mathbf{R}^3$. Nous projetons k_1 et k_2 sur un plan dit horizontal, parallèlement à une direction verticale et supposons que cette projection soit générique. Pour chaque point où k_1 passe au dessus de k_2, nous associons le nombre $+1$ ou -1 selon l'orientation des projections. Le nombre d'enlacement des deux nœuds est alors la somme de ces nombres.

Soit $x \in \mathbf{D}^2 \times \{0\}$ (considéré comme une partie de $\imath(\mathbf{T}_\phi) \subset \mathbf{R}^3$) et T un entier positif. L'arc d'orbite de $X(\phi)$ issu de x de longueur T se décompose en T arcs, joignant x à $\phi(x)$, $\phi(x)$ à $\phi^2(x)$ etc. Procédons de la même façon avec un point y. Pour presque tout couple (x, y), le nombre algébrique de fois où l'arc joignant x à $\phi^T(x)$ passe au dessus de celui joignant y à $\phi^T(y)$ est:

$$\sum_{i=0}^{i=T-1} \sum_{j=0}^{j=T-1} \widehat{\mathrm{Ang}}_\phi(\phi^i(x), \phi^j(y))$$

En tenant compte de la relation liant Ang et $\widehat{\mathrm{Ang}}$ donnée plus haut et des simplifications qui en résultent dans la somme double précédente, nous constatons que cette dernière diffère de:

$$\sum_{i=0}^{i=T-1} \sum_{j=0}^{j=T-1} \mathrm{Ang}_\phi(\phi^i(x), \phi^j(y))$$

d'une quantité majorée par une fonction linéaire de T.

Il en résulte que si T est réel, les nœuds $k(T, x)$ et $k(T, y)$ utilisés pour définir l'invariant d'Arnold ont un nombre d'enlacement (lorsqu'ils sont disjoints) qui est tel que:

$$\left| \mathrm{Enl}(k(x, T), k(y, T)) - \sum_{i=0}^{i=[T-1]} \sum_{j=0}^{j=[T-1]} \mathrm{Ang}_\phi(\phi^i(x), \phi^j(y)) \right|$$

est majoré par une fonction linéaire de T (où $[-]$ désigne la partie entière).

Or, le théorème ergodique pour l'action de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2$ donnée par:

$$((i,j),(x,y))\in(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})\times(\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2)\mapsto(\phi^i(x),\phi^j(y))\in\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2,$$

nous indique que la limite:

$$A'(x,y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{[T]^2}\sum_{i=0}^{i=[T-1]}\sum_{j=0}^{j=[T-1]}\mathrm{Ang}_\phi(\phi^i(x),\phi^j(y))$$

existe presque partout et que:

$$\iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2}A'(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2}\mathrm{Ang}_\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

Nous reconnaissons dans le second membre la quantité que nous avons identifiée à l'invariant de Calabi $\mathscr{C}(\phi)$.

Il résulte de l'estimation que nous avons faite du nombre d'enlacement de $k(T,x)$ et $k(T,y)$ que la limite $A'(x,y)$ est aussi la limite $A_{X(\phi)}(x,y)$ qui entre dans la définition de l'invariant d'Arnold.

D'autre part, nous avons évidemment:

$$\iint_{\mathbf{T}_{\phi_1}\times\mathbf{T}_{\phi_1}}A_{X(\phi)}(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\mathbf{D}^2\times\mathbf{D}^2}A'(x,y)\,dx\,dy.$$

En résumé, nous avons montré que:

$$\mathscr{A}(X(\phi))=\mathscr{C}(\phi).$$

Ceci termine la démonstration. □

Démonstration de Théorème 3.2. L'invariant d'Arnold du champ $X(\phi_1,\phi_2)$ est l'intégrale double:

$$\mathscr{A}(X(\phi_1,\phi_2))=\iint_{\mathbf{S}^3\times\mathbf{S}^3}A_{X(\phi_1,\phi_2)}(x,y)\,dx\,dy.$$

La sphère $\mathbf{S}^3$ est la réunion des deux tores solides $\mathbf{T}_{\phi_1}$ et $\mathbf{T}_{\phi_2}$. Cette intégrale se décompose donc en la somme de quatre intégrales suivant que x et y appartiennent à $\mathbf{T}_{\phi_1}$ ou $\mathbf{T}_{\phi_2}$.

Nous affirmons d'abord que si x et y appartiennent à deux tores solides différents, alors $A_{X(\phi_1,\phi_2)}(x,y)=1$. Ceci résulte du fait que les âmes des deux tores solides ont un nombre d'enlacement égal à 1 et qu'un arc d'orbite de $X(\phi_1,\phi_2)$ de longueur T contenu dans $\mathbf{T}_{\phi_1}$ (resp. $\mathbf{T}_{\phi_2}$), coupe le disque $\mathbf{D}^2\times\{0\}$ de $\mathbf{T}_{\phi_1}$ (resp. $\mathbf{T}_{\phi_2}$) un nombre de fois égal à T, à une unité près. Puisque le volume de $\mathbf{T}_{\phi_1}\times\mathbf{T}_{\phi_2}\cup\mathbf{T}_{\phi_2}\times\mathbf{T}_{\phi_1}\subset\mathbf{S}^3\times\mathbf{S}^3$ est $2\pi^2$, l'intégrale de $A_{X(\phi_1,\phi_2)}(x,y)$ sur cette partie est $2\pi^2$.

L'enlacement asymptotique de deux orbites dans un même tore solide (par exemple $\mathbf{T}_{\phi_1}$) a été calculé dans le théorème 3.1. Il faut cependant prendre garde au fait suivant. Fixons un point base $*$ dans l'intérieur de $\mathbf{T}_{\phi_2}$ et considérons la projection stéréographique de $\mathbf{S}^3-\{*\}$ sur $\mathbf{R}^3$. Cette projection, restreinte à $\mathbf{T}_{\phi_1}$, donne un plongement $\jmath$ dans $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas isotope, par une isotopie de $\mathbf{R}^3$, au plongement $\imath$ que nous avons considéré précédemment. Les nœuds $k(T,x)$ et $k(T,y)$ n'ont donc pas le même enlacement selon qu'on les plonge dans $\mathbf{R}^3$ par $\imath$ ou par $\jmath$. Il est cependant facile de comparer $\imath$ et $\jmath$. À isotopie de $\mathbf{R}^3$ près, le second s'obtient à partir du premier en composant à la source par le difféomorphisme suivant de $\mathbf{T}_{\phi_1} \simeq \mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$:

$$(z,t) \in \mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \mapsto (z \exp(2\imath\pi t), t) \in \mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}.$$

Si k et k' sont deux nœuds dans $\mathbf{T}_{\phi_1}$, on peut maintenant comparer les nombres d'enlacement des deux nœuds $\imath(k)$ et $\imath(k')$ d'une part et $\jmath(k)$ et $\jmath(k')$ d'autre part. On se convainc facilement que la différence entre ces deux nombres s'écrit $[k][k']$ où $[k]$ et $[k']$ sont les classes d'homologie (dans $\mathbf{Z}$) des lacets k et k' (dans $\mathbf{T}_{\phi_1}$ qui a le type d'homotopie du cercle).

Revenons à notre situation. Le nœud $k(T,x)$, contenu dans $\mathbf{T}_{\phi_1}$, a une classe d'homologie qui diffère de T d'une quantité bornée. Ainsi les nombres d'enlacement de $\imath(k(T,x))$ et $\imath(k(T,y))$ d'une part et $\jmath(k(T,x))$ et $\jmath(k(T,y))$ d'autre part, diffèrent d'une quantité équivalente à T^2. Autrement dit:

$$A_{X(\phi_1,\phi_2)}(x,y) = A_{X(\phi_1)}(x,y) + 1.$$

En intégrant sur $\mathbf{T}_{\phi_1} \times \mathbf{T}_{\phi_1}$, et en tenant compte du fait que nous avons déjà évalué l'intégrale de $A_{X(\phi_1)}(x,y)$ dans 3.1, nous obtenons l'égalité:

$$\iint_{\mathbf{T}_{\phi_1} \times \mathbf{T}_{\phi_1}} A_{X(\phi_1,\phi_2)}(x,y)\,dx\,dy = \pi^2 + \mathscr{C}(\phi_1)$$

qui termine la démonstration du théorème. □

Remarque. Nous ignorons si le nombre d'Arnold est un invariant topologique en général. Cependant, le théorème précédent, associé au théorème d'invariance topologique de l'invariant de Calabi, montre que le nombre d'Arnold est effectivement un invariant topologique dans le cadre des flots qui sont obtenus par suspension.

Remarque. Nous avons déjà signalé que l'invariant de Calabi peut se généraliser aux mesures sans atome quelconques. Puisque le théorème précédent établit un lien entre les invariants de Calabi et d'Arnold, nous pouvons envisager de généraliser l'invariant d'Arnold au cas des mesures non concentrées sur les orbites périodiques. C'est effectivement possible, tout au moins pour les flots non singuliers.

Pour simplifier, nous considérons un champ de vecteurs X de classe C^2 dans un domaine compact $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}^3$ et préservant une mesure μ qui donne une masse nulle à toute orbite périodique.

Rappelons d'abord la formule de Gauss qui permet (elle aussi) de calculer l'enlacement entre deux nœuds disjoints $k_1, k_2 : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^3$ (voir [8]):

$$\operatorname{Enl}(k_1,k_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\left(\dfrac{dk_1}{dt}, \dfrac{dk_2}{dt}, k_1(t) - k_2(s)\right)}{\| k_1(t) - k_2(s) \|^3}\,dt\,ds.$$

Soient x et y deux points de $\mathscr{D}$. Considérons l'intégrale:

$$a_T(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^T \int_0^T \frac{X(\phi^t(x)), X(\phi^s(y)), \phi^t(x) - \phi^s(y))}{\| \phi^t(x) - \phi^s(y) \|^3}\,dt\,ds$$

qui est bien définie lorsque les arcs d'orbites de x à $\phi^T(x)$ et de y à $\phi^T(y)$ sont disjoints. Notons $k(T,x)$ la courbe fermée formée de l'arc d'orbite de x à $\phi^T(x)$ suivi par le segment de droite joignant $\phi^T(x)$ *à* x. Il est facile de s'assurer qu'il existe des constantes C_1 et $C_2 > 0$ (indépendantes de x, y, et T) telles que:

$$|\operatorname{Enl}(k(T,x), k(T,y)) - a_T(x,y)| \leqslant C_1 T + C_2$$

dès que ces nombres ont un sens (i.e. quand $k(T,x)$ et $k(T,y)$ sont deux nœuds disjoints).

Par conséquent, les deux limites suivantes existent pour les mêmes couples (x,y) et coïncident:

$$A(x,y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \operatorname{Enl}(k(T,x), k(T,y)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} a_T(x,y).$$

Nous affirmons que cette limite existe pour $\mu\times\mu$ presque tout couple (x,y). Nous pouvons être tenté d'utiliser le théorème ergodique pour l'action de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$:

$$((t,s),(x,y)) \in \mathbf{R}^2\times\mathscr{D}\times\mathscr{D} \mapsto (\phi^t(x), \phi^s(y)) \in \mathscr{D}\times\mathscr{D}.$$

Cependant, le terme entrant dans l'intégrale définissant a_T n'est pas clairement intégrable pour une mesure μ qui n'est pas une forme de volume. Il suffit en fait de faire la remarque suivante:

Soit $\tau > 0$ un nombre fixé (petit). La fonction $a_T(x,y)$ est alors uniformément bornée là où elle est définie (i.e. lorsque les arcs d'orbites de x à $\phi^\tau(x)$ et de y à $\phi^\tau(y)$ sont disjoints). Remarquons alors que:

$$a_{N\tau}(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} a_\tau(\phi^{i\tau}(x), \phi^{j\tau}(y))$$

et nous pouvons maintenant utiliser le théorème ergodique pour la fonction bornée a_τ et l'action de $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$ engendrée par les $(\phi^{i\tau}, \phi^{j\tau})$. Ceci montre que

$$A(x,y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} a_T(x,y)$$

existe pour presque tout couple (x,y). Nous définissons bien sûr *l'invariant d'Arnold relatif à* μ par:

$$\mathscr{A}_\mu(X) = \iint_{\mathscr{D}\times\mathscr{D}} A(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Cette généralisation de la définition se trouve dans [4].

Remarque. Si nous changeons le paramétrage du flot ϕ^t, c'est-à-dire si nous multiplions le champ X par une fonction C^1 strictement positive $f: V \to \mathbf{R}^+$, nous avons:

$$\phi^t_{fX}(x) = \phi_X^{\tau(x,t)}(x),$$

où:

$$\tau(x,t) = \int_0^t f(\phi^s(x))\,ds.$$

Si le flot ϕ_X^t préserve une mesure de probabilité μ qui ne charge pas les orbites périodiques, alors le flot ϕ_{fX}^t préserve la mesure de probabilité:

$$\mu_f = \frac{1}{\int \frac{1}{f} d\mu} \frac{1}{f} \mu$$

qui ne charge pas non plus les orbites périodiques. Il est facile de voir que, pour μ-presque tout couple (x, y), la quantité $A_X(x, y)$ est transformée en $A_{fX}(x, y) = \tilde{f}(x)\tilde{f}(y)A_X(x, y)$, où:

$$\tilde{f}(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau(x, t)}{t}.$$

Si la mesure invariante μ est ergodique, la relation qui lie l'invariant d'Arnold du champ X pour la mesure μ, et celui du champ fX pour la mesure μ_f est:

$$\mathscr{A}_{\mu_f}(fX) = \left(\int_V f(x)\, d\mu(x) \right)^2 \mathscr{A}_\mu(X).$$

3.2. L'invariant de Ruelle pour les champs de vecteurs

Soit V une variété fermée, connexe, orientée, de dimension 3, et soit X un champ de vecteurs sur V de classe C^1 sans singularité et ϕ^t le flot associé. Nous supposons, en outre, que le fibré normal au flot est trivial: c'est-à-dire que nous pouvons paramétrer le fibré tangent à V de façon à ce que $TV = V \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, où la direction du flot s'envoie sur $V \times \{(0,0)\} \times \mathbf{R}$. Nous noterons $\tau : TV \to \mathbf{R}^2$ la projection sur le second facteur. Nous supposons bien sûr que l'orientation de V est compatible avec celle de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

Nous pouvons à nouveau, dans ce cadre plus général, définir *l'enlacement infinitésimal* d'un vecteur tangent u à V en un point x, non parallèle au champ (i.e. $\tau(u) \neq 0$), pendant le temps T. Il s'agit du nombre algébrique de fois que le vecteur $\tau d\phi^t(x)(u)/\|\tau d\phi^t(x)(u)\|$ croise une origine donnée sur le cercle unité quand t varie de 0 à T. Nous notons cette quantité $\Omega_{\phi^t}(x, T)$. Nous pouvons alors faire des remarques analogues *à* celles que nous avions faites dans le cas des difféomorphismes:

Remarque. Un choix différent de l'origine sur le cercle ou du vecteur u mènerait à modifier la quantité $\omega_{\phi^t}(x, T)$ d'au plus une unité.

Remarque. Cette quantité est presque additive. Plus précisément, pour tout couple de réels (T, T'), nous avons:

$$|\omega_{\phi^t}(x, T + T') - \omega_{\phi^t}(x, T) - \omega_{\phi^t}(\phi^T(x), T')| \leqslant 1.$$

C'est cette dernière remarque qui permet à nouveau à Ruelle de montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3.3 (Ruelle [9]). *Soient V une variété fermée, connexe, orientée, de dimension 3, ϕ^t un flot sans singularité sur V dont le fibré normal est trivial et μ une mesure invariante par ϕ^t. Alors:*

— *Pour μ-presque tout point x dans V, la quantité $\omega_{\phi^t}(x, T)/T$ converge quand T tend vers $\pm\infty$ vers une limite $\Omega_{\phi^t}(x)$,*
— *La fonction $\Omega_{\phi^t} : V \to \mathbf{R}$ est intégrable.*

Nous appelons *invariant de Ruelle* associé au couple (ϕ^t, μ) et nous notons $\mathcal{R}_\mu(\phi^t)$, l'intégrale $\int_V \Omega_{\phi^t}(x)\, d\mu(x)$.

A priori, l'invariant $\mathcal{R}_\mu(\phi^t)$ dépend de la trivialisation τ du fibré normal. Notons provisoirement $\mathcal{R}_\mu^\tau(\phi^t)$ pour insister sur cette dépendance. Soient τ_1 et τ_2 deux trivialisations du fibré normal. En écrivant τ_1 dans les coordonnées données par τ_2, nous obtenons ainsi une application «différence» que nous noterons $\tau_1 - \tau_2 : V \to \mathrm{GL}^+(2, \mathbf{R})$. Puisque $\mathrm{GL}^+(2, \mathbf{R})$ se rétracte sur $\mathrm{SO}(2)$, les classes d'homotopie de trivialisations sont paramétrées par les classes d'homotopie de V vers un cercle, c'est à-dire par $H^1(V, \mathbf{Z})$. Nous notons $[\tau_1 - \tau_2]$ la classe de cohomologie correspondante. Si $[\tau_1 - \tau_2]$ est nulle i.e. si les deux trivialisations sont homotopes, il est facile de s'assurer que les nombres $\omega_{\phi^t}(x, T)$ calculés à l'aide des deux trivialisations diffèrent d'une quantité bornée, indépendante de x et de T. Dans ce cas $\mathcal{R}_\mu^{\tau_1}(\phi^t)$ et $\mathcal{R}_\mu^{\tau_2}(\phi^t)$ coïncident évidemment. Un cas particulier important, auquel nous nous limiterons par la suite est bien sûr celui où $H^1(V, \mathbf{Z}) = 0$, car l'invariant de Ruelle d'un flot est alors défini sans ambiguïté. Dans le cas général, nous indiquons cependant la formule qui permet de comparer $\mathcal{R}_\mu^{\tau_1}(\phi^t)$ et $\mathcal{R}_\mu^{\tau_2}(\phi^t)$.

Rappelons d'abord la notion de cycle asymptotique de Schwartzmann [10]. Choisissons une métrique riemannienne auxiliaire sur V. Pour x dans V et $T > 0$, joignons $\phi^t(x)$ à x par une géodésique de longueur minimale. La courbe fermée $k(T, x)$ formée de l'arc d'orbite allant de x à $\phi^t(x)$ suivi de l'arc de géodésique a une certaine classe d'homologie $[k(T, x)] \in H_1(V, \mathbf{R})$. Il se trouve que pour μ-presque tout x, la limite:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\, [k(T, x)] = \tilde{k}(x) \in H_1(V, \mathbf{R})$$

existe. *Le cycle asymptotique* de Schwartzmann du flot ϕ^t est alors l'intégrale:

$$\mathrm{Sch}(\phi^t) = \int_V \tilde{k}(x)\, d\mu(x) \in H_1(V, \mathbf{R}).$$

Voici donc la formule annoncée pour la modification du nombre de Ruelle par changement de trivialisation:

Proposition 3.4. *Si τ_1 et τ_2 sont deux trivialisations du fibré normal de ϕ^t, nous avons:*

$$\mathcal{R}_\mu^{\tau_1}(\phi^t) - \mathcal{R}_\mu^{\tau_2}(\phi^t) = [\tau_1 - \tau_2]\, \mathrm{Sch}(\phi^t) \in \mathbf{R}.$$

Démonstration. Soient x dans V, $T > 0$ et u un vecteur tangent à V en x tel que $\tau_1(u) \neq 0$. Considérons la courbe $t \in [0, \mathrm{T}] \mapsto d\phi^t(x)(u) \in TV$. Les deux trivialisations donnent deux courbes:

$$t \mapsto \tau_1(d\phi^t(x)(u)) \in \mathbf{R}^2$$

et

$$t \mapsto \tau_2(d\phi^t(x)(u)) \in \mathbf{R}^2.$$

La première est l'image de la seconde par la courbe de matrices:

$$t \mapsto (\tau_1 - \tau_2)(\phi^t(x)) \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbf{R}).$$

Il s'agit de calculer les nombres $\omega_{\phi^t}(x, T)$ à l'aide de chacune des deux trivialisations. En fait ces quantités sont le nombre de fois où les deux courbes sont verticales. À une quantité bornée près, la différence entre ces deux nombres est égale au «nombre de rotation» de

$(\tau_1 - \tau_2)(\phi^t(x))$ i.e. au nombre algébrique de fois où le vecteur $(\tau_1 - \tau_2)(\phi^t(x))(v)$ devient vertical (où v est un vecteur quelconque non nul de $\mathbf{R}^2$). Ce nombre de rotation est bien défini à une quantité bornée près et peut lui-même s'évaluer de la façon suivante. Nous considérons l'image du lacet $k(T, x)$ par $(\tau_1 - \tau_2)$. C'est un lacet de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbf{R})$ dont la classe d'homologie est l'entier $[\tau_1 - \tau_2] . [k(T, x)]$. Ainsi, à une quantité bornée près, la différence entre les nombres $\omega_{\phi^t}(x, T)$ calculés à l'aide de chacune des deux trivialisations est $[\tau_1 - \tau_2] . [k(T, x)]$. En divisant par T, en passant à la limite $T \to \infty$, et en intégrant sur V, nous obtenons la proposition. □

Remarque. Si nous changeons le paramétrage du flot ϕ^t, c'est-à-dire si nous multiplions le champ X par une fonction C^1 strictement positive $f: V \to \mathbf{R}^+$, nous avons:

$$\phi^t_{fX}(x) = \phi_X^{\tau(x,t)}(x),$$

où:

$$\tau(x, t) = \int_0^t f(\phi^s(x))\, ds.$$

Si le flot ϕ^t_X préserve une mesure de probabilité μ, alors le flot ϕ^t_{fX} préserve la mesure:

$$\mu_f = \frac{1}{\int \frac{1}{f} d\mu} \frac{1}{f} \mu$$

qui ne charge pas non plus les orbites périodiques. Il est facile de voir que voir que, pour μ-presque tout couple (x, y), la quantité $\Omega_X(x)$ est transformée en $\Omega_{fX}(x) = \tilde{f}(x)\Omega_X(x)$, où

$$\tilde{f}(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau(x, t)}{t}.$$

Si la mesure invariante μ est ergodique, la relation qui lie l'invariant de Ruelle du champ X pour la mesure μ, et celui du champ fX pour la mesure μ_f est:

$$\mathcal{R}_{\mu f}(fX) = \left(\int_V f(x)\, d\mu(x) \right) \mathcal{R}_\mu(X).$$

Nous supposons à présent que V est une variété fermée, connexe, orientée, et telle que $H^2(V, \mathbf{Z}) = 0$. Tout flot ϕ^t non singulier sur V admet donc un fibré normal trivial puisqu'un fibré vectoriel de rang 2 est caractérisé par sa classe d'Euler dans $H^2(V, \mathbf{Z})$. D'autre part, comme $H^1(V, \mathbf{Z}) = H^2(V, \mathbf{Z}) = 0$ (par dualité de Poincaré), toutes les trivialisations sont homotopes. Ainsi, l'invariant de Ruelle ne dépend plus de la trivialisation. Dans ce cadre, nous nous proposons de démontrer l'invariance topologique de l'invariant de Ruelle:

THÉORÈME 3.5. *Soit V une variété fermée, connexe, orientée, de dimension 3, telle que $H^2(V, \mathbf{Z}) = 0$. Soient ϕ_1^t et ϕ_2^t deux flots sans singularité qui préservent respectivement les mesures finies μ_1 et μ_2 sur V qui ne chargent pas les orbites périodiques. Soit h un homéomorphisme de V qui préserve l'orientation de V tel que $\phi_2^t = h \circ \phi_1^t \circ h^{-1}$ et $h_*(\mu_1) = \mu_2$. Alors les invariants de Ruelle $\mathcal{R}_{\mu_1}(\phi_1^t)$ et $\mathcal{R}_{\mu_2}(\phi_2^t)$ sont égaux.*

Démonstration. La preuve de ce théorème est une adaptation de celle donnée dans le cas des difféomorphismes. Nous nous contenterons d'expliquer le formalisme qui nous permet de nous ramener à une situation analogue où les mêmes techniques peuvent être utilisées.

Soit donc V une variété, fermée, connexe, orientée, de dimension 3, telle que $H^2(V,\mathbf{Z})=0$ et ϕ^t un flot sans singularité sur V. Donnons nous, une métrique riemannienne auxiliaire sur V et notons $\mathrm{Exp}: TV \simeq V\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\to V$ l'application exponentielle associée à cette métrique. Soit $B_\eta(O)$ la boule de centre $O=(0,0)$ et de rayon η dans $\mathbf{R}^2$. Pour η plus petit qu'un certain η_0 indépendant de x dans V, $D_\eta(x)=\mathrm{Exp}(\{x\}\times B_\eta(O)\times\{0\})$ est difféomorphe à un disque et transverse au flot ϕ^t. Il existe donc $0<\varepsilon<\eta_0$ pour lequel, pour tout x dans V, les orbites issues de $D_\varepsilon(x)$ coupent transversalement $D_{\eta_0}(\phi^1(x))$ au bout d'un temps voisin de l'unité. Ceci nous permet, en conjuguant par l'application exponentielle, de définir une famille de difféomorphismes ϕ_x de la boule $B_\varepsilon(O)$ sur son image, qui fixent l'origine. Pour $n\geqslant 0$, nous appelons $\phi_{(x,n)}$ l'application $\phi_{\phi^{n-1}x}\circ\cdots\circ\phi_x$ là où elle est définie et définissons de manière analogue $\phi_{(x,n)}$ pour $n\leqslant 0$.

Si ϕ^t laisse une mesure μ invariante, cette mesure définit par désintégration une mesure sur les sections transverses et donc sur $B_\eta(O)$, que nous notons μ_x et qui vérifie $(\phi_x)_*\mu_x=\mu_{\phi^1(x)}$. Remarquons que si la mesure μ ne charge pas les orbites périodiques, alors les mesures μ_x n'ont pas d'atome.

Dans la suite, par analogie avec le cas des difféomorphismes, nous dirons que ϕ^t possède une (α,ε,x)-*chaîne* si nous pouvons trouver $n_1\leqslant 0$, $n_2\geqslant 0$ et $y\in B_\varepsilon(O)$ tels que:

1. $\phi_{(x,n)}(y)\in B_\varepsilon(O)$ pour $n_1\leqslant n\leqslant n_2$,
2. $\phi_{(x,n_1)}(y)\notin B_\alpha(O)$ et $\phi_{(x,n_2)}(y)\notin B_\alpha(O)$.

La quantité n_2-n_1 sera à nouveau appelée la *longueur* de la chaîne.

Le lemme suivant est l'analogue du Lemme 2.12 pour les difféomorphismes et sa démonstration et essentiellement la même.

LEMME 3.6. *Soit V une variété fermée, connexe, orientée, de dimension* 3, *telle que* $H^2(V,\mathbf{Z})=0$. *Soit ϕ^t un flot sans singularité qui préserve une mesure finie μ sur V, ne chargeant pas les orbites périodiques. Alors, pour μ-presque tout point x dans V et pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $0<\alpha<\varepsilon$, *pour lequel ϕ^t possède des* (α,ε,x)-*chaînes de longueurs arbitrairement grandes.*

Il est facile de vérifier que cette propriété est indépendante de la métrique riemannienne choisie.

Compactifions à nouveau la boule épointée $B_\varepsilon(O)-\{O\}$ par le cercle des directions orientées, nous obtenons un anneau $A_\varepsilon=\mathbf{S}^1\times[0,\varepsilon]$ et ϕ_x induit sur cet anneau une application $\tilde{\phi}_x$ qui est un homéomorphisme sur son image. Nous choisissons un relevé Φ_x de $\tilde{\phi}_x$ au revêtement universel $\mathbf{R}\times[0,\varepsilon[$ de façon à ce que Φ_x varie continûment avec x. Pour (u_1,u_2) dans $\mathbf{R}\times[0,\varepsilon[$, nous notons $\Phi_{(x,n)}$ l'application $\Phi_{\phi^{n-1}(x)}\circ\Phi_{\phi^{n-2}(x)}\circ\cdots\circ\Phi_{(x)}$, lorsqu'elle est définie et $\pi_1:(u_1,u_2)\mapsto u_1$ et $\pi_2:(u_1,u_2)\mapsto u_2$ les projections canoniques. Le lemme suivant, analogue du lemme 2.13, est à nouveau une conséquence directe du caractère C^1 du flot ϕ^t:

LEMME 3.7. *Pour tout* $m>0$, *il existe* $\varepsilon>0$, *tel que pour tout point x dans* $\mathbf{D}^2$, *et tout couple* (u_1,u_2) *dans* $\mathbf{R}\times[0,\varepsilon[$ *vérifiant* $\pi_2(\Phi_{(x,n)})<\varepsilon$ *pour* $0\leqslant n\leqslant m$, *nous avons*:

$$|\pi_1(\Phi_{(x,m)})(u_1,u_2))-u_1-\omega_{\phi^t}(x,m)|\leqslant 3.$$

Pour terminer le développement du formalisme qui nous ramène au cas des difféomorphismes, il nous faut voir maintenant comment la conjugaison h entre deux flots ϕ_1^t et ϕ_2^t, induit une famille d'homéomorphismes h_x conjuguant les applications associées ϕ_{1x} et $\phi_{2h(x)}$.

Les homéomorphismes h_x sont définis de la manière suivante:

Le disque topologique $h(D_\varepsilon(x))$ dans V est topologiquement transverse au flot ϕ_2^t, car h envoie les orbites de ϕ_1^t sur les orbites de ϕ_2^t. Nous pouvons alors projeter $h(D_\varepsilon(x))$ sur $D_{\eta_0}(h(x))$ en suivant le flot ϕ_2^t. Nous obtenons ainsi, en conjuguant par l'application exponentielle, un homéomorphisme h_x de $B_\varepsilon(O)$ sur son image. Nous avons évidemment:

1. $h_x(O) = O$,
2. $h_{\phi^1(x)} \circ \phi_x = \phi_{2h(x)} \circ h_x$,
3. $\mu_{2h(x)} = h_* \mu_{1x}$.

L'hypothèse homologique que nous avons faite, nous permet d'assurer que les relevés H_x au demi-plan ouvert $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ peuvent être choisis de façon à ce que $H_x \circ \Phi_{1x} = \Phi_{2h(x)} \circ H_x$, et que H_x varie continûment avec x. Le lecteur pourra maintenant poursuivre la démonstration que nous avons faite dans le cas des difféomorphismes. □

BIBLIOGRAPHIE

1. V. I. Arnold: The asymptotic Hopf invariant and its applications, *Sel. Math. Sov.* **5** (1986), 327–345.
2. A. Banyaga: On the group of diffeomorphisms preserving an exact symplectic form, in *Differential topology*, Varenna (1976), pp. 5–9.
3. E. Calabi: On the group of automorphisms of a symplectic manifold, in *Problems in analysis*, Symposium in honour of S. Bochner, R. C. Gunning, Ed., Princeton Univ. Press, Princeton (1970), pp. 1–26.
4. G. Contreras and R. Iturriaga: Average linking numbers, preprint (1995).
5. A. Fathi: Transformations et homéomorphismes préservant la mesure. Systèmes dynamiques minimaux., Thèse Orsay (1980).
6. J. M. Gambaudo and E. Pécou: A topological invariant for volume preserving diffeomorphisms, *Ergod. Theory Dyn. Systems* **15** (1995), 535–541.
7. V. A. Naishul: Topological invariant of analytic and area-preserving mapping and their application to analytic differential equations in $\mathbf{C}^2$ and $\mathbf{CP}^2$, *Trans. Moscow Math. Soc.* **2** (1982), 239–242.
8. D. Rolfsen: *Knots and links*, Math. Lect. Series **7**, Publish or perish, Berkeley, CA (1976).
9. D. Ruelle: Rotation numbers for diffeomorphisms and flows, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique* **42** (1985), 109–115.
10. S. Schwartzmann: Asymptotic cycles, *Ann. Math.* **66** (1957), 210–215.

Institut Non Linéaire de Nice Sophia-Antipolis
U.M.R. 129 du CNRS
1361, Route des Lucioles
06560 Valbonne, France

Unité de Mathématiques
Pures et Appliquées de l'École
Normale Supérieure de Lyon
U.M.R. 128 du CNRS
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07, France