

Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1984-2001.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

PROBABILITÉS. — *Entropie mesurée et partitions de l'unité.* Note de Étienne Ghys, Rémi Langevin et Pawel Walczak, présentée par René Thom.

Dans cette Note nous définissons l'entropie d'un opérateur linéaire \mathcal{D} de $L^\infty(X, \mu)$. Lorsque \mathcal{D} est associé à une transformation T d'un espace de probabilité (X, \mathcal{A}, μ) préservant la mesure μ , son entropie est égale à celle de T . Nous espérons que d'autres opérateurs, comme la diffusion le long des feuilles d'un feuilletage admettrait une entropie non triviale.

PROBABILITY THEORY. — Metric entropy and partitions of unity.

In this Note we define the entropy of a linear operator \mathcal{D} of $L^\infty(X, \mu)$. When \mathcal{D} is associated to a transformation T of a probability space (X, \mathcal{A}, μ) preserving the measure μ its entropy is equal to the entropy of T . We hope that other operators, as diffusion along the leaves of a foliation will admit non trivial entropy.

Kolmogorov définit l'entropie d'une transformation T d'un espace de probabilité (X, \mathcal{A}, μ) qui préserve la mesure μ . L'entropie mesure la façon dont T opère sur les partitions finies de X .

En remarquant que T opère aussi sur les partitions de l'unité sur X , nous sommes amenés à définir l'entropie d'un opérateur linéaire \mathcal{D} de $L^\infty(X, \mu)$ tel que

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{D}(f) \geq 0; \\ (2) \quad \mathcal{D}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}; \\ (3) \quad \int f d\mu = \int \mathcal{D}(f) d\mu. \end{array} \right.$$

Le but de cette Note est de montrer que l'entropie de l'opérateur \mathcal{D} associé à une transformation est précisément égale à l'entropie mesurée (quelquefois appelée entropie métrique) de T .

Remarquons que d'autres extensions de la notion d'entropie existent déjà : entropie associée à un graphe [4], à un « Dynamische Verbänd » [5].

A un feuilletage d'une variété riemannienne compacte correspond un semi-groupe d'opérateurs \mathcal{D}_t associé au laplacien feuilleté (voir [2]). Lucy Garnett démontre qu'il existe des mesures de probabilité, appelées mesures harmoniques, laissées invariantes par \mathcal{D}_t . L'entropie de cet opérateur n'est pas infinie. Bien que nous ne sachions pas expliciter son calcul, nous espérons cependant que l'entropie mesurée ainsi associée à une mesure harmonique ne sera pas toujours nulle. Il serait alors intéressant, comme ce fut fait pour un homéomorphisme, de la comparer à l'entropie géométrique du feuilletage (voir [3]) analogue à l'entropie topologique d'un difféomorphisme.

Soit (X, μ) un espace mesuré, μ une mesure de probabilité.

Donnons une définition de l'entropie d'une fonction, généralisant l'entropie $p \cdot \log p$ de la fonction indicatrice d'une partie A de mesure p de X , et telle que l'entropie d'une fonction constante soit nulle.

DÉFINITION 1. — Soit φ une fonction mesurable essentiellement bornée positive ou nulle; posons :

$$\varepsilon(\varphi) = - \int_X \varphi \log \int_X \varphi + \int_X \varphi \log \varphi.$$

$\varepsilon(\varphi)$ est positive ou nulle et bornée, on vérifiera

$$\varepsilon(\varphi + \psi) \leq \varepsilon(\varphi) + \varepsilon(\psi).$$

DÉFINITION 1' — Soit φ et ψ deux fonctions positives ou nulles de $L^\infty(X, \mu)$. L'entropie conditionnelle de φ connaissant ψ est définie par :

$$\varepsilon(\varphi|\psi) = - \int_X \varphi \psi \log \frac{\int \varphi \psi}{\int \psi} + \int_X \varphi \psi \log \varphi.$$

On vérifiera : $\varepsilon(\varphi|1) = \varepsilon(\varphi)$.

DÉFINITION 2. — Soit $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ une partition de l'unité mesurable sur X . L'entropie de Φ est définie par :

$$\varepsilon(\Phi) = \sum_{i=1}^n \varepsilon(\varphi_i).$$

DÉFINITION 2' — Soient $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ et $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ deux partitions de l'unité mesurables sur X , l'entropie de Φ connaissant Ψ est définie par :

$$\varepsilon(\Phi|\Psi) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^m \varepsilon(\varphi_\alpha|\psi_i).$$

Définissons encore le produit de deux partitions de l'unité

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \quad \Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$$

par

$$\Phi \vee \Psi = \{\varphi_\alpha \cdot \psi_i; \alpha=1, \dots, n; i=1, \dots, m\}.$$

DÉFINITION 3. — L'image d'une partition de l'unité $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ par un opérateur \mathcal{D} satisfaisant les trois conditions de l'introduction (*) est :

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{\mathcal{D}(\varphi_\alpha); \alpha=1, \dots, n\}.$$

Si $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ est une partition mesurable de X on notera Φ_A la partition de l'unité

$$\Phi_A = \{\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}\};$$

on a :

$$\Phi_{A \vee B} = \Phi_A \vee \Phi_B.$$

Démontrons maintenant quelques relations analogues à celles démontrées en théorie ergodique (voir par exemple [6] théorème 4.3).

LEMME 1. — Soient Φ et Ψ deux partitions de l'unité sur X ; soient A et B deux partitions de X et \mathcal{D} un opérateur satisfaisant (*). On a :

- (a) $\varepsilon(\Phi \vee \Psi) = \varepsilon(\Phi) + \varepsilon(\Phi|\Psi)$;
- (b) $\varepsilon(\Phi|\Psi) \leq \varepsilon(\Phi)$;
- (c) $\varepsilon(\Phi \vee \Psi) \leq \varepsilon(\Phi) + \varepsilon(\Psi)$;
- (d) $\varepsilon(\Phi \vee \Psi|\Phi_A) \leq \varepsilon(\Phi|\Phi_A) + \varepsilon(\Psi|\Phi_A)$;
- (e) $\varepsilon(\Phi|\Phi_A \vee \Phi_B) \leq \varepsilon(\Phi|\Phi_A)$;
- (f) $\varepsilon(\Phi|\Phi_A) \geq 0$.

Démonstration. — (a) se démontre par un calcul direct;

(b) se déduit de la convexité de la fonction $f(t) = t \log t$ puisque, si

$$C_i = \int \psi_i \quad \text{et} \quad r_i = \left(\int \alpha \psi_i \right) \left(\int \psi_i \right)^{-1}$$

on a

$$f\left(\sum_i C_i Z_i\right) \leq \sum_i C_i f_{(r_i)}$$

(c) se déduit de (a) et (b);

(d) soit $A = \{A_k\}$ (d) s'obtient en appliquant l'inégalité (c) aux partitions $\Phi_k = \{\varphi_\alpha | A_k\}$ et $\Psi_k = \{\psi_i | A_k\}$, A_k étant muni de la mesure de probabilité conditionnelle

$$\mu_k = \frac{1}{\mu(A_k)} \mu | A_k;$$

(e) soit $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ et $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$; $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ étant fixés, posons :

$$c_{k,l} = \frac{1}{\mu(B_j)} \mu(B_j \cap B_k \cap A_l)$$

$$s_{k,l} = \frac{1}{\mu(B_k \cap A_l)} \int_{B_k \cap A_l} \varphi_\alpha$$

La convexité de la fonction f implique l'inégalité :

$$f\left(\sum_{k,l} C_{k,l} \cdot s_{k,l}\right) \leq \sum_{k,l} C_{k,l} f(s_{k,l})$$

ce qui démontre (e);

(f) se déduit de la positivité de $\varepsilon(\varphi | A, \mu | A)$.

DÉFINITION 4. — Pour toute partition de l'unité Φ sur X et tout opérateur \mathcal{D} satisfaisant les conditions (*), posons lorsque cela a un sens

$$\varepsilon(\mathcal{D}, \Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}^k \Phi\right);$$

en particulier le point (c) implique que cette limite existe en utilisant le raisonnement du lemme 1. 19 de [1] lorsque $\mathcal{D} = {}^T\mathcal{D}$, cf. infra.

Considérons maintenant une transformation T de (X, \mathcal{A}, μ) préservant la mesure de probabilité μ et notons ${}^T\mathcal{D}$ l'opérateur défini par ${}^T\mathcal{D}(\varphi) = \varphi \circ T$. Cet opérateur vérifie les conditions (*).

LEMME 2. — Soient Φ et Ψ deux partitions de l'unité sur X ; on a :

$$\varepsilon({}^T\mathcal{D} \Phi | {}^T\mathcal{D} \Psi) = \varepsilon(\Phi | \Psi).$$

LEMME 3. — Soient Φ une partition de l'unité sur X et A une partition mesurable de X . L'opérateur ${}^T\mathcal{D}$ satisfait l'inégalité

$$\varepsilon({}^T\mathcal{D}, \Phi) \leq \varepsilon({}^T\mathcal{D}, \Phi_A) + \varepsilon(\Phi | \Phi_A).$$

Démonstration. — Le lemme 1 implique l'inégalité

$$\varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} {}^T\mathcal{D}^k \Phi\right) \leq \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} {}^T\mathcal{D}^k \Phi\right) \vee \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}^j \Phi_A\right).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} {}^T\mathcal{D}^k \Phi\right) &\leq \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} {}^T\mathcal{D}^k \Phi_A\right) + \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} {}^T\mathcal{D}^k \Phi \middle| \bigvee_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}^j \Phi_A\right) \\ &\leq \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} {}^T\mathcal{D}^k \Phi_A\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon\left({}^T\mathcal{D}^k \Phi \middle| \bigvee_{j=0}^{n-1} \mathcal{D}^j \Phi_A\right) \end{aligned}$$

et puisque $T^j \mathcal{D}^j(\Phi_A)$ provient de la partition $\{T^j A_i\}$ on a

$$\varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^k \Phi\right) \leq \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^k \Phi_A\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon(T^k \Phi | T^k \Phi_A) \leq \varepsilon\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^k \Phi_A\right) + n \varepsilon(\Phi | \Phi_A)$$

ceci quel que soit n .

THÉORÈME. — *L'entropie mesurée de la transformation T est égale à l'entropie de l'opérateur associé $T^{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. — L'entropie mesurée $\varepsilon(T)$ de la transformation T est

$$\varepsilon(T) = \sup \varepsilon(T^{\mathcal{D}}, \Phi_A)$$

où A décrit l'ensemble des parties mesurables de X (voir [6] p. 87).

L'inégalité $\varepsilon(T) \leq \varepsilon(T^{\mathcal{D}})$ en découle.

Soient maintenant Φ une partition de l'unité sur X et ε un nombre positif. Il existe une partition A de X telle que l'entropie conditionnelle $\varepsilon(\Phi | \Phi_A)$ soit inférieure à ε . Il suffit de prendre

$$A = \left\{ \bigcap \varphi_\alpha^{-1} \left\{ \frac{i\alpha}{n}, \frac{i\alpha+1}{n} \right\}, 0 \leq i_\alpha \leq r-1 \right\}$$

pour n assez grand.

Le lemme 3 implique alors que

$$\varepsilon(T^{\mathcal{D}}, \Phi) \leq \varepsilon(T^{\mathcal{D}}, \Phi_A) \pm \varepsilon \leq \varepsilon(T) + \varepsilon$$

et donc que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\varepsilon(T^{\mathcal{D}}) \leq \varepsilon(T) + \varepsilon$. \square

Reçue le 14 avril 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. BOWEN, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Springer Verlag, Lecture Notes in Math., n° 470, 1975.
- [2] L. GARNETT, *Foliations, the ergodic theorem and brownian motion*, *J. Funct. Anal.*, 51, 1983, p. 285-311.
- [3] E. GHYS, R. LANGEVIN et P. WALCZAK, *Geometric entropy of foliations*, preprint.
- [4] M. GROMOV, *On the entropy of holomorphic maps*, preprint.
- [5] G. PALM, *Entropie und eizenger in dynamischen Verbänden*, *Wahrsch. Verw. Geb.*, 36, 1976, p. 27-45.
- [6] P. WALTERS, *An introduction to ergodic theory*, Springer Verlag, 1982.

*Département de Mathématiques, Université de Lille-I,
59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex.*