# Poincaré et les espaces

Étienne Ghys

Nous sommes tous habitués à l'espace qui nous entoure, avec ses trois dimensions, longueur, largeur et profondeur. Remarquez l'article défini : l'espace. Pour la plupart d'entre nous, il n'y a qu'un espace, celui dans lequel nous vivons, dans lequel nous sommes immergés, dans lequel nous nous déplaçons. Tout se passe comme si le but de la géométrie était d'étudier un objet physique bien particulier, l'espace, ou tout au moins un «quelque chose» qui contient «toutes les choses». Quelle est donc la nature de cette chose qu'est l'espace ? Pour paraphraser Saint Augustin (qui parlait plutôt du temps), «Quand on ne me le demande pas je le sais mais dès qu'on me le demande et que je tente de l'expliquer, je ne le sais plus».

Aujourd'hui, je voudrais essayer d'expliquer comment le mot «géométrie», qui ne s'employait jadis qu'au singulier, a été mis au pluriel vers 1900, lorsqu'une multitude de nouveaux espaces sont apparus. Les étudiants en mathématiques en 2017 ne conçoivent même plus que le mot ait pu un jour être au singulier. Ils manipulent en permanence des espaces de toutes les dimensions : des espaces de Hilbert, des espaces de modules, des espaces de phases, des espaces fonctionnels, etc. etc. Connaissez-vous l'application *NgramViewer*, de *Google* ? Pour chaque mot, elle vous trace l'évolution de son usage depuis deux siècles, en pourcentage de leur immense corpus *GoogleBooks*. Regardez «géométrie» au singulier depuis 1800 : son usage est à peu près constant. «Géométries» au pluriel semble quant à lui apparaître vers 1900.

Même s'il serait simpliste de prétendre que cette explosion de l'espace en de multiples espaces n'est due qu'à un seul homme, je voudrais centrer ma présentation sur trois articles philosophiques écrits par Henri Poincaré au tournant du siècle. «L'espace et la géométrie», en 1895, «L'espace et ses trois dimensions», en 1903, et enfin «Pourquoi l'espace a trois dimensions» en 1912, l'année de sa mort. Selon moi, ces trois articles fournissent un bon exemple de changement de paradigme en géométrie : une révolution dans la manière de penser la géométrie.

Il me faut auparavant rappeler quelques-unes des théories de l'espace qui ont précédé Poincaré.

Tout d'abord une mise en garde. Jusque la fin du dix-huitième siècle, la frontière entre les mathématiques et la physique n'était pas toujours très claire. Il y a ce qu'on appellerait aujourd'hui l'espace physique, celui dans lequel nous vivons et nous faisons des expériences, et il y a un espace mathématique, qui en est en quelque sorte une version abstraite, celui dans lequel le mathématicien démontre ses théorèmes. Il est important de distinguer aujourd'hui ces deux concepts, mais il serait difficile de trouver un mathématicien-physicien-philosophe qui explicite cette différence avant le dix-neuvième siècle.

Descartes voyait l'espace comme rempli de tourbillons qui entraînaient les planètes dans leur danse. Leibniz ne voulait pas dissocier l'espace de la matière : le vide n'avait pas de sens selon lui. Quant à Newton, il nous a laissé le concept d'espace absolu. Aujourd'hui, nous enseignons à nos étudiants qu'un point de l'espace a trois coordonnées, $(x, y, z)$, qui sont trois nombres qu'on appelle réels. Comment les parties de l'espace qui sont vides de matière peuvent-elles être constitués de points ? De quoi sont faits ces points si l'espace est vide ? Newton se sortait de cette impasse par une pirouette théologique qui ne convainc plus grand-monde aujourd'hui. Selon lui, l'espace vide n'est pas vraiment vide mais il est constitué de «quelque chose» que nous ne pouvons pas percevoir mais qui est le «sensorium dei», le milieu grâce auquel Dieu perçoit et agit sur les corps, comme les planètes par exemple. Passons. Il n'empêche que la vision de l'espace comme constitué de points, chacun avec ses trois coordonnées, a dominé la science pendant longtemps. Le triomphe de la mécanique céleste au dix-huitième siècle est largement fondé sur cette conception newtonienne de l'espace absolu.

Le grand changement est sans conteste dû à Emmanuel Kant, à la fin du dix-huitième siècle. Il a lui-même qualifié sa nouvelle conception de «révolution copernicienne». Avant lui, il y avait un espace dans lequel un certain nombre d'objets de toutes natures se déplaçaient et nous, êtres humains, nous observions ces objets grâce à nos cinq sens qui nous permettent de les localiser. Avec Kant, ce n'est plus l'objet qui est au centre du processus mais l'être humain qui reçoit des informations du monde extérieur. Kant ne se prononce pas sur la nature de ce monde extérieur, il ne cherche pas à le structurer, à lui attribuer des coordonnées, à en faire un espace absolu de dimension 3, à la Newton. Ce monde extérieur, peu importe ce qu'il est intrinsèquement puisque nous ne pouvons l'appréhender qu'à travers nos sens imparfaits. En revanche, Kant postule l'existence d'une structure propre à l'être humain, une espèce de cadre qui analyse nos sensations, les trie, les ordonne, et fabrique notre conception spatiale. Bien entendu, il ne décrit pas la nature de ce cadre puisque la neurobiologie n'existait pas à l'époque. En employant un mot d'aujourd'hui, tout se passe comme si notre cerveau contenait un logiciel appelé «espace». Ce logiciel reçoit une quantité énorme d'informations, à travers la vision bien sûr, mais également à travers les autres sens. Ce logiciel travaille et fabrique l'espace tel que nous le vivons, avec ses trois dimensions etc. En résumé, l'espace n'existe pas indépendamment de nous, il existe en chacun de nous, sous la forme d'un logiciel que nous possédons à la naissance, comme une caractéristique a priori de l'espèce humaine. Et, toujours selon

Kant, notre logiciel «espace» est euclidien et de dimension 3. Pourquoi la dimension 3 ? Parce que nous sommes faits ainsi, parce que c'est comme ça, de la même manière que nous avons deux mains et pas trois ! Il faut insister cependant sur un point important ; l'espace de Kant est unique. Même s'il est en chacun de nous, nous avons tous le même logiciel.

C'est alors que quelques «révolutionnaires» sont venus briser le dogme. D'abord, dans le premier tiers du 19 ème siècle, Gauss, Bolyai et Lobatchevsky ont «créé un monde nouveau» non-euclidien où les théorèmes de géométrie sont différents. Par exemple, le théorème de Pythagore n'y est plus valide. C'est à cette époque que la distinction entre espaces mathématique et physique commence à devenir explicite. Bolyai crée un espace mathématique complètement abstrait sans chercher un lien avec le monde physique. Il s'agit de pures élucubrations de mathématiciens qui s'amusent avec des espaces virtuels.

Gauss et Lobatchevsky se demandent quant à eux si la géométrie à grande échelle de l'espace interstellaire est vraiment euclidienne et cherchent à faire des expériences dans cet espace physique. On raconte que Gauss n'avait pas voulu publier ses découvertes sur ce sujet car il ne souhaitait pas entrer en conflit avec la philosophie de Kant, au pouvoir quasi-exclusif en Allemagne à l'époque. Puis, avec Riemann et quelques autres, c'est la dimension 3 qui a été remise en question, parfois en pensant à l'espace de la physique, parfois à des espaces mathématiques.

Les mathématiques progressent souvent pour le plaisir, sans but concret. J'aimerais dire un mot par exemple de Alicia Boole, une femme sans aucune formation universitaire, dans l'Angleterre victorienne, qui s'est intéressée très jeune à la géométrie euclidienne de dimension 4. Seule, sans lien académique, elle a découvert les 6 polyèdres réguliers de la quatrième dimension par des méthodes très visuelles, grâce à des modèles en carton illustrant des coupes tridimensionnelles. Pour le plaisir de la géométrie abstraite, tout simplement.

Il faut également dire que ces nouveaux espaces enflamment les esprits de quelques intellectuels attirés par le spiritisme, pendant une bonne partie du dix-neuvième siècle. La quatrième dimension serait-elle une porte vers le monde des esprits ? Même des physiciens extrêmement sérieux se tournent vers le spiritisme. Tait, grand physicien expérimentateur écossais, ami et collaborateur de Kelvin et Maxwell, écrit par exemple un livre intitulé «The unseen universe» dans lequel il décrit une suite d'espaces de dimensions croissantes, 3, 4, 5..., l'ensemble permettant de joindre le monde physique et le monde spirituel, à la manière d'une échelle de Jacob.

À la fin du 19 ème, Poincaré rédige les articles que j'ai mentionnés plus tôt, qui séparent très nettement les aspects mathématiques, physiques, philosophiques et psychologiques.

Poincaré y expose d'abord sa théorie du conventionnalisme. Il présente la géométrie non euclidienne en décrivant un monde imaginaire. Les habitants de ce monde habitent dans une boule limitée par une sphère, mais ils ne le savent pas. Dans cette boule, la température n'est pas uniforme, elle est maximum au centre et décroit à mesure qu'on s'approche du bord où elle atteint le zero absolu. Mais les habitants ne sont pas sensibles à la température et ne le savent donc pas. Il en résulte que lorsqu'ils s'approchent du bord de la boule, ils se contractent, ils rétrécissent, sans le savoir. S'ils veulent se mesurer avec une toise, cette toise se rétrécit également si bien que personne ne prend conscience de ce phénomène. S'ils veulent marcher vers ce que nous voyons comme le bord, leurs pas deviennent de plus en plus petits et ils ont beau marcher, ils ne parviennent jamais au bord. Pour eux, l'espace est infini mais pour nous il est fini. «I could be bounded in a nutshell, and count myself a king of infinite space» fait dire Shakespeare à Hamlet ! Lorsqu'ils veulent aller d'un point à un autre en prenant le plus court chemin, nous leur conseillerions d'essayer de se rapprocher du centre car leurs pas y sont plus grands, et leur Euclide leur enseignera qu'il n'y a qu'un plus court chemin qu'ils appelleront une droite, alors que nous dirions que ce plus court chemin est une courbe, en fait un arc de cercle. Leur ministre de l'éducation nationale fixerait des programmes de géométrie non euclidienne car ce serait commode pour décrire leur vie de tous les jours. Quant à nous, qui les observons depuis notre monde euclidien, nous décrivons leur géométrie avec nos pauvres mots euclidiens et c'est assez compliqué d'expliquer que le plus court chemin est circulaire. Réciproquement, les êtres imaginaires qui nous observeraient utiliseraient leur géométrie non euclidienne pour décrire notre géométrie euclidienne. Ils pourraient le faire, mais ce ne serait pas commode pour eux. Les mêmes énoncés géométriques peuvent s'exprimer dans deux langages. Écoutons la conclusion de Poincaré.

«Les axiomes géométriques sont donc [...] des conventions ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre. [...] Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ? Elle n'a aucun sens. Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses [...]. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode.»

Dans son analyse de l'espace physique, Poincaré commence d'emblée par le mettre au pluriel. Il y a l'espace visuel, mais aussi l'espace des sensations tactiles, auditives, gustatives etc. Il explique que chacun de ces espaces est d'une grande complexité et qu'aucun d'entre eux ne ressemble a priori à l'espace euclidien de dimension 3. L'espace visuel par exemple rend compte de l'information que nos rétines reçoivent, qui est plutôt une image de dimension 2 à laquelle il faut ajouter une notion de profondeur, associée tout aussi bien à la capacité d'accommodation de notre cristallin qu'à la vision binoculaire. Cette dimension de profondeur a donc une nature très différente des deux autres dimensions, si bien qu'on est bien loin d'un espace homogène et isotrope. On peut même mettre en question la dimension 3 puisqu'il serait tout à fait possible physiquement que les informations liées à notre cristallin et à nos deux yeux soient différentes. L'espace tactile ressemble encore moins à un l'espace d'Euclide. Alors, comment notre cerveau construit-il cet espace euclidien tridimensionnel ? On pourrait dire, comme Kant, que nous disposons d'un logiciel qui se charge de ce travail, mais on aimerait en savoir un peu plus. La théorie présentée par Poincaré se démarque de Kant, mais pas complètement comme nous allons le voir.

Nous construisons l'espace grâce aux corps solides et à la possibilité de nous déplacer. Lorsque j'observe un objet solide qui s'est déplacé, pourquoi dis-je qu'il s'est déplacé ? Parce que je sais, par expérience, que je peux faire subir consciemment à mon corps des modifications, de façon à annuler le changement sensoriel. Par exemple, je peux suivre des yeux un objet en mouvement de façon à ce qu'il me semble immobile. C'est cette possibilité d'annuler des changements sensoriels qui caractérise les solides. Dans quelques pages brillantes, mais difficilement accessibles à un non mathématicien, Poincaré présente sa théorie de l'espace physique. Selon lui, notre cerveau construit le concept d'espace à travers les mouvements de notre corps qui sont destinés à annuler les modifications sensorielles produites par les solides en mouvement. Bien entendu, pour annuler un changement de sensations il y a beaucoup de mouvements corporels possibles. Poincaré introduit ce qu'on appelle aujourd'hui une relation d'équivalence, et montre que tout cela définit un objet mathématique, que nous appelons un groupe, l'un des concepts mathématiques les plus importants. Ce groupe, nous le baptisons «groupe des déplacements de l'espace». Il y a beaucoup de groupes, une infinité, et il n'y a donc aucune raison a priori que ce groupe corresponde à la géométrie euclidienne de dimension 3. Alors, pourquoi ce groupe plus qu'un autre ? C'est là un phénomène expérimental, explique Poincaré. Le groupe des déplacements d'un espace euclidien de dimension 3 est commode pour décrire les changements sensoriels ressentis par notre corps. Mais cela aurait pu être un autre groupe, une autre dimension, ou une géométrie non euclidienne.

Beaucoup de philosophes ont affirmé que la présentation de Poincaré allait à l'encontre de Kant, qui ne voyait aucun côté expérimental dans notre concept spatial. Ce n'est pas tout à fait de cette manière que je vois les choses. D'une certaine manière, Poincaré et Kant affirment que le cerveau humain contient un programme «Espace». Poincaré avance cependant que ce programme doit être paramétré, en choisissant un groupe. Ce choix est purement expérimental : il s'agit de choisir le groupe qui est «le plus commode» pour rendre compte de nos sensations. Comme Kant, l'espace externe n'existe pas indépendamment de nous et il est en nous, mais contrairement à Kant il est paramétré par l'expérience, qui s'avère être de dimension 3 et euclidien. On pourrait presque dire, en plaisantant, que le logiciel de Poincaré est une «machine learning».

Voici ce qu'il écrit : «Des êtres dont l'esprit serait fait comme le nôtre et qui auraient les mêmes sens que nous, mais qui n'auraient reçu aucune éducation préalable, pourraient recevoir d'un monde extérieur convenablement choisi des impressions telles qu'ils seraient amenés à localiser les phénomènes dans un monde non euclidien ou même dans un espace à quatre dimensions».

On raconte que le célèbre mathématicien Conway, alors qu'il était étudiant à Cambridge, s'était construit une espèce de casque muni de deux périscopes pointant dans des directions différentes, de façon à percevoir deux images différentes. Il espérait que son cerveau s'habituerait à cette torture, et qu'il vivrait ainsi dans la quatrième dimension. Il semble bien que son cerveau ne se soit pas habitué, ce qui ne contredit pas Poincaré car Conway avait reçu une éducation préalable, à Cambridge !

Écoutons à nouveau Poincaré : «Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un groupe particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance. [...] Seulement parmi tous les groupes possibles il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels. L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas.»

La contribution fondamentale de Poincaré est donc d'autoriser une liberté totale sur le choix du groupe, aussi bien lorsqu'il s'agit d'espaces physiques que d'espaces mathématiques. Chaque problème, qu'il soit physique ou mathématique, peut être étudié à l'aide d'un groupe ou d'un espace qui est commode. Ces espaces peuvent avoir diverses dimensions et diverses géométries. Aujourd'hui, tout cela est devenu inconscient, comme dans tout paradigme dominant : les étudiants manipulent des espaces et des groupes variés sans se rendre compte qu'ils commettent un crime de lèse Kant.

Voici quelques exemples. Pour la vie de tous les jours, la géométrie euclidienne de dimension 3 est la plus commode. Pour la relativité restreinte, un espace de dimension 4, de coordonnées $(x, y, z, t)$, est commode. Le groupe correspondant, dit de Lorentz-Poincaré, s'avère être également celui de la géométrie non euclidienne. Pour la théorie des cordes, il s'agit plutôt d'un espace de dimension 10 : il s'agit d'ajouter 6 dimensions aux 4 de l'espace temps, et ces 6 dimensions sont en fait trois dimensions complexes, définissant ce qu'on appelle une variété de Calabi-Yau. D'une certaine manière, la théorie quantique travaille dans un espace de Hilbert de dimension infinie. Pour mieux comprendre la mécanique céleste, Poincaré utilise des espaces de phase ou de configurations, dont les dimensions dépendent du nombre d'objets en mouvement. En mathématiques pures, la multitude des espaces est également impressionnante, qu'il s'agisse des espaces de modules, ou d'espaces fonctionnels, d'espace des champs de vecteurs etc. À vrai dire, un mathématicien d'aujourd'hui emploie le mot espace dans de nombreuses situations, souvent sans même s'en rendre compte, dès qu'un ensemble est structuré. Vous entendrez par exemple parler de l'espace des droites, ou même de l'espace des espaces… etc. Cette explosion de l'espace en de multiples espaces au début du vingtième siècle s'est ressentie dans tous les domaines. Par exemple, Grothendieck a réalisé une fusion entre géométrie et arithmétique dans les années 60 en incorporant de nouveaux espaces, baptisés schémas. Pour un théoricien des nombres d'aujourd'hui, l'ensemble des entiers, $0, \pm 1, \pm 2$,etc. est un véritable espace qu'il faut traiter comme une entité géométrique.

Une mutation importante de la géométrie en a résulté, y compris à l'extérieur des mathématiques, en art par exemple. Je n'en parlerai pas puisque je ne suis pas compétent, mais on ne peut que constater que l'art du vingtième a rompu avec les codes classiques de la géométrie et de la perspective académique. Pour terminer, voici trois tableaux du vingtième siècle…