

ÉTIENNE GHYS

**Feuilletages riemanniens sur les variétés
simplement connexes**

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n^o 4 (1984), p. 203-223.

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_203_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES RIEMANNIENS SUR LES VARIÉTÉS SIMPLEMENT CONNEXES

par Étienne GHYS

Introduction.

L'objet de cet article est de décrire certaines propriétés qualitatives des feuilletages riemanniens sur les variétés compactes et simplement connexes. Les exemples les plus simples de feuilletages riemanniens sont ceux définis par q formes fermées de degré 1 linéairement indépendantes en chaque point. Bien que de tels feuilletages ne peuvent exister sur une variété compacte et simplement connexe, nous verrons qu'ils constituent en quelque sorte les « blocs élémentaires » à partir desquels on peut reconstruire tous les feuilletages qui nous intéressent ici.

Un théorème de D. Tischler affirme que ces feuilletages définis par des formes fermées peuvent être approchés par des fibrations (de base un tore) (cf. [13]). Dans notre cas, nous obtenons un résultat similaire. Convenons d'appeler « fibration de Seifert généralisée » un feuilletage riemannien dont toutes les feuilles sont compactes. D'une manière générale, nous considérerons ces fibrations de Seifert généralisées comme des feuilletages « triviaux » (même si leur étude n'est pas toujours aisée...).

THÉORÈME A. — *Soit M une variété compacte et simplement connexe. Alors, tout feuilletage riemannien sur M peut être arbitrairement approché par une fibration de Seifert généralisée. Si l'on suppose de plus que la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est non nulle, tout feuilletage riemannien sur M possède une feuille compacte.*

Le fibré normal d'un feuilletage riemannien est muni d'une métrique naturelle. Nous montrons que si la variété ambiante est simplement

connexe, il est possible de construire une métrique riemannienne qui se comporte bien sur le fibré tangent du feuilletage.

THÉORÈME B. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété compacte et simplement connexe M . Alors, il existe une métrique riemannienne sur M qui est quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$ et telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient des sous-variétés minimales de M .*

Finalement, nous appliquons les résultats précédents à l'étude des feuilletages riemanniens sur les sphères et les espaces projectifs.

THÉORÈME C. — *Soit S une variété compacte simplement connexe qui est une sphère d'homologie rationnelle. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur S . Alors, deux cas sont possibles :*

- 1) *soit $\mathcal{F}$ est en fait une fibration de Seifert généralisée.*
- 2) *soit $\mathcal{F}$ est de dimension 1. Dans ce cas, il existe une métrique riemannienne sur S telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient les orbites d'un groupe à 1-paramètre d'isométries de S .*

Dans tous les cas, $\mathcal{F}$ possède au moins une feuille compacte.

Soit P une variété compacte et simplement connexe dont l'anneau de cohomologie rationnelle est isomorphe à celui d'un espace projectif complexe ou quaternionique. Alors, tout feuilletage riemannien sur P est en fait une fibration de Seifert.

Je remercie P. Molino pour ses remarques concernant ce travail. Dans la partie 1, nous rappelons les résultats essentiels de son étude qualitative des feuilletages riemanniens ([10]). La partie 2 traite le cas élémentaire où la codimension est 2; les théorèmes A, B et C sont alors démontrés dans les parties 3, 4 et 5.

1. Structure des feuilletages riemanniens - Exemples.

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes, il nous faut rappeler rapidement les résultats de P. Molino concernant les feuilletages riemanniens en général (cf. [10]). Cela nous permettra par la même occasion de fixer nos notations.

Un feuilletage riemannien est défini par des submersions locales sur une variété riemannienne transverse T , les changements de cartes transverses étant des isométries locales de T .

S'il se trouve, de plus, que T est muni d'un parallélisme et que les changements de cartes transverses préservent ce parallélisme, on dit que le feuilletage est « transversalement parallélisable ».

Un cas encore plus particulier est celui où T est un groupe de Lie et où les changements de cartes transverses sont des translations de ce groupe de Lie. Le feuilletage est alors « transversalement de Lie ».

Essentiellement, les résultats de [10] montrent que l'étude des feuilletages riemanniens se ramène à celle des feuilletages transversalement parallélisables et que celle-ci se ramène à celle des feuilletages transversalement de Lie. De manière précise, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété compacte M (que nous supposerons simplement connexe à partir de la partie 2). Soit $\bar{M}$ le fibré de base M dont la fibre au-dessus du point x de M est constituée des repères orthonormés directs du fibré normal à $\mathcal{F}$ en x . (Tous les objets sont supposés orientables, ce qui sera automatique si M est simplement connexe). Il est alors possible de relever le feuilletage $\mathcal{F}$ en un feuilletage $\bar{\mathcal{F}}$ de $\bar{M}$, de même dimension que $\mathcal{F}$, invariant par l'action naturelle de $SO(q)$ sur $\bar{M}$. Le feuilletage $\bar{\mathcal{F}}$ est alors transversalement parallélisable. Par ailleurs, si L est une feuille de $\mathcal{F}$, l'adhérence de L , notée N , est une sous-variété de $\bar{M}$ et la restriction de $\bar{\mathcal{F}}$ à N est un feuilletage transversalement de Lie, modelé sur un groupe de Lie G . Enfin, la collection de ces adhérences définit une fibration de $\bar{M}$, appelée « fibration basique », de fibre N , au-dessus d'une certaine base, notée B . Cette fibration sera notée p .

Nous nous contenterons de deux exemples classiques de feuilletages riemanniens.

Exemple 1.1. — Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage dont toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe d'holonomie fini, $\mathcal{F}$ est riemannien. (Il s'agit d'une conséquence élémentaire du théorème de stabilité de Reeb). Nous appellerons ces feuilletages des « fibrations de Seifert généralisées ». Nous aurons besoin par la suite d'un résultat de A. Haefliger montrant que ces fibrations de Seifert se comportent essentiellement comme de véritables fibrations, tout au moins du point de vue de l'homotopie.

THÉORÈME 1.2 (Cf. [7]). — *Soit $\mathcal{F}$ une fibration de Seifert généralisée sur une variété compacte M . Soit F la fibre générique de $\mathcal{F}$ et X l'espace des feuilles. Il existe un espace BX et une application continue de M sur*

BX , homotopiquement équivalente à une fibration localement triviale de base BX et de fibre F . De plus, il existe une application naturelle de BX sur X induisant un isomorphisme en cohomologie rationnelle.

Exemple 1.3. — Considérons une action du tore T^n sur une variété M . Si $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow T^n$ est un morphisme, on obtient, par composition, une action de $\mathbb{R}^m$ sur M . Dans certains cas, cette action est localement libre et le feuilletage ainsi défini est alors riemannien. Un exemple simple est obtenu lorsque $M = S^{2n-1}$ et l'action de T^n est l'action orthogonale classique. On choisit $m = 1$ et n'importe quel morphisme φ à image dense convient.

Observons que cette méthode permet de construire des feuilletages riemanniens sans feuilles compactes sur des variétés simplement connexes. Il suffit de prendre $M = S^3 \times S^3$ muni de l'action diagonale de $T^4 = T^2 \times T^2$ et on choisit encore $m = 1$. Il est facile de choisir φ de façon à ce que le feuilletage obtenu (de dimension 1) n'ait pas de feuilles compactes.

Les exemples précédents ont une « dynamique » assez pauvre. Il est possible de construire des exemples plus « sophistiqués » sur des variétés non simplement connexes (cf. [3]).

L'objet de cet article est précisément de montrer qu'aucun phénomène complexe ne peut intervenir sur une variété simplement connexe.

2. Le cas où la codimension est inférieure à 2.

Nous commencerons par supposer que $q \leq 2$. Ce cas se distingue de celui où $q > 2$ par le fait que le groupe fondamental de $SO(q)$ n'est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que lorsque $q > 2$.

Dorénavant, nous supposons toujours que la variété M est simplement connexe.

Si $q = 0$, il n'y a pas de problème... l'unique feuille est compacte !

Le cas où $q = 1$ ne se présente pas; un feuilletage riemannien de codimension 1 peut être défini par une 1-forme fermée s'il est orientable ce qui sera le cas puisque M est simplement connexe. Cette forme fermée est alors exacte et ne peut donc être non singulière.

Le cas $q = 2$ peut effectivement intervenir; pour le traiter, montrons, tout d'abord, le lemme élémentaire suivant :

LEMME 2.1. — *Soit N une variété compacte. Supposons qu'il existe sur N un feuilletage transversalement de Lie, de codimension non nulle, dont les feuilles sont denses. Alors, le groupe fondamental de N ne peut être ni trivial, ni monogène.*

Démonstration. — Cela résulte de propriétés bien connues des feuilletages transversalement de Lie (cf. [5]) : il existe une fibration D du revêtement universel $\tilde{N}$ de N sur le groupe de Lie simplement connexe G correspondant au feuilletage considéré, ainsi qu'une représentation H (dite « d'holonomie ») du groupe fondamental de N dans G , telles que :

1) les fibres de D sont les feuilles du feuilletage transversalement de Lie relevé dans $\tilde{N}$,

2) si $\gamma \in \pi_1(N)$ et si x est un point de $\tilde{N}$, on a $D(\gamma \cdot x) = H(\gamma)D(x)$.

Dans le cas qui nous intéresse, les feuilles sont supposées denses dans N . On déduit que $H(\pi_1(N))$ est dense dans G . Si $\pi_1(N)$ est trivial ou monogène, la seule possibilité est que G soit trivial, c'est-à-dire que le feuilletage considéré soit de codimension 0. Ceci démontre donc le lemme 2.1. $\square$

Considérons donc un feuilletage $\mathcal{F}$ riemannien de codimension 2 sur la variété simplement connexe M . Le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors de codimension 3 et la base B est donc de dimension 0, 1, 2 ou 3.

Le lemme suivant pourrait aussi se déduire de la discussion faite dans [10, p. 72], associée au lemme 2.1.

LEMME 2.2. — *Dans les conditions précédentes, la dimension de B est 2 ou 3.*

Démonstration. — La suite exacte d'homotopie du $SO(2)$ fibré principal $\bar{M}$ donne :

$$\dots \rightarrow \pi_2(\bar{M}) \rightarrow Z \rightarrow \pi_1(\bar{M}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Par conséquent, le groupe fondamental de $\bar{M}$ est soit monogène soit trivial. Si B était réduit à un point, le feuilletage $\mathcal{F}$ serait à feuilles denses, ce qui est exclu par le lemme 2.1. Si B était de dimension 1, la suite

exacte de la fibration p donnerait :

$$\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(\bar{M}) \rightarrow \pi_1(B).$$

Puisque $\pi_2(B) = 0$, on en déduit que $\pi_1(N)$ est engendré par au plus un élément, ce qui contredit encore le lemme 2.1. puisque la restriction de $\mathcal{F}$ à N est transversalement de Lie à feuilles denses. Le lemme 2.2. est donc démontré. $\square$

Le cas où la dimension de B est 3 ne pose pas de problème puisque c'est le cas où toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ (et donc de $\mathcal{F}$) sont compactes. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors une fibration de Seifert généralisée.

LEMME 2.3. — Si B est de dimension 2, alors B est difféomorphe à la sphère S^2 .

Démonstration. — La démonstration du lemme 2.2. montre que $\pi_2(B)$ est non trivial. La base B est donc difféomorphe soit à la sphère S^2 , soit au plan projectif. Il nous suffit donc de montrer que B est orientable et, puisque $\bar{M}$ est orientable, il suffit de montrer que l'on peut choisir une orientation de $p^{-1}(x)$ dépendant continûment du point x . Soit 0 le revêtement à deux feuillets au-dessus de $\bar{M}$ dont la fibre au-dessus du point m est constituée des deux orientations de l'espace tangent à $p^{-1}(p(m))$ en m . Il est clair que $SO(2)$ opère sur 0 en préservant la projection de 0 sur $\bar{M}$. Il s'en suit que 0 est l'image réciproque d'un revêtement au-dessus de M par l'application naturelle de $\bar{M}$ sur M . Puisque M est simplement connexe, 0 est un revêtement trivial et B est orientable. $\square$

Démonstration du théorème A lorsque $q \leq 2$. — Nous devons étudier le cas où B est la sphère S^2 . En fait, il nous suffirait de remarquer que la démonstration du théorème A lorsque $q > 2$, telle que nous la donnerons au paragraphe suivant, n'utilise en fait que la simple connexité de B et s'applique donc au cas qui nous intéresse.

La démonstration qui suit n'est donc pas indispensable mais nous la présentons cependant car elle a l'avantage de démontrer le théorème A dans un cas explicite et de décrire complètement les feuilletages de codimension 2 que nous étudions.

Puisque $SO(2)$ opère sur $\bar{M}$ tout en préservant globalement les fibres

de p , il opère sur B . Les actions effectives de $SO(2)$ sur S^2 sont aisément classifiables : elles ont exactement deux points fixes p_1 et p_2 et les orbites fibrent le complémentaire de ces points fixes. La codimension d'une feuille de $\mathcal{F}$ dans son adhérence est la dimension du stabilisateur du point correspondant de S^2 sous l'action de $SO(2)$. Les points p_1 et p_2 donnent donc deux feuilles compactes L_1 et L_2 . Celles-ci possèdent des voisinages U_1 et U_2 saturés par $\mathcal{F}$ et difféomorphes à $L_1 \times D^2$ et $L_2 \times D^2$ respectivement. Il est facile de construire un flot φ_t sur S^2 de type « pôle nord-pôle sud », i.e. tel que $\varphi_t(x)$ converge vers p_1 (resp. p_2) lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et commutant avec l'action de $SO(2)$. Deux disques quelconques contenant p_1 (resp. p_2) et invariants par $SO(2)$ se déduisent l'un de l'autre par φ_t , pour un certain t . À l'aide de φ_t , on construit un autre flot ψ_t sur M formé d'automorphisme de $\mathcal{F}$ et possédant la propriété suivante : lorsque t varie la projection dans $B \simeq S^2$ de l'image réciproque dans $\bar{M}$ de $\psi_t(U_i)$ décrit tous les disques invariants par $SO(2)$ et contenant $p_i (i=1,2)$. En envisageant B comme réunion de deux disques invariants par $SO(2)$ contenant respectivement p_1 et p_2 , ne s'intersectant que le long de leur bord commun, on obtient la description suivante de $\mathcal{F}$. La variété M est réunion de deux variétés à bord M_1 et M_2 recollées le long de leur bord. Celles-ci sont respectivement difféomorphes à $L_1 \times D^2$ et $L_2 \times D^2$ car elles sont égales à $\psi_t(U_1)$ et $\psi_s(U_2)$ pour un certain couple de réels (t,s) . On vérifiera, en manipulant les diverses suites exactes, que le groupe fondamental de L_1 (resp. L_2) doit être infini cyclique. Sur M_1 (resp. M_2), le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par la suspension d'une rotation de D^2 d'angle $\alpha_1\pi$ (resp. $\alpha_2\pi$) ($\alpha_1, \alpha_2 \notin \mathbb{Q}$) (puisque $\pi_1(L_1)$ et $\pi_1(L_2)$ sont infinis cycliques). Évidemment, le difféomorphisme de recollement doit être compatible avec les feuilletages induits sur les bords de M_1 et M_2 . Il n'est pas difficile de perturber $\mathcal{F}$ pour obtenir une fibration de Seifert généralisée proche. En effet, approchons α_1 par un rationnel; on obtient ainsi une fibration de Seifert généralisée sur M_1 , proche de $\mathcal{F}$. Le difféomorphisme de recollement fournit alors un feuilletage riemannien sur le bord de M_2 , proche de $\mathcal{F}$. Ce feuilletage est donc la suspension d'un difféomorphisme du cercle, conjugué à une rotation périodique et qui s'étend alors en un difféomorphisme périodique de D^2 , proche de la rotation d'angle $\alpha_2\pi$. Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème A lorsque $q = 2$. La seconde partie ne pose aucun problème puisque nous venons de voir que $\mathcal{F}$ possède toujours une feuille compacte et ceci quelle que soit la caractéristique d'Euler-Poincaré de M . $\square$

3. Démonstration du théorème A lorsque $q > 2$.

La suite exacte d'homotopie montre que si $q > 2$ et si M est simplement connexe, le groupe fondamental de $\bar{M}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou est trivial. S'il n'est pas trivial, le revêtement universel de $\bar{M}$ est un $\text{Spin}(q)$ fibré principal au-dessus de M . On peut relever $\mathcal{F}$ dans le revêtement universel de $\bar{M}$: le feuilletage obtenu jouit des mêmes propriétés que $\mathcal{F}$. En d'autres termes, quitte à remplacer $\text{SO}(q)$ par $\text{Spin}(q)$ et $\bar{M}$ par son revêtement universel, on pourra toujours supposer $\bar{M}$ simplement connexe. Dans la suite, ce revêtement à deux feuillets sera toujours sous-entendu.

La seconde partie du lemme suivant est dans [10].

LEMME 3.1. — *Supposons que $q > 2$. Alors, pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, l'adhérence N de L a un groupe fondamental abélien. La restriction de $\mathcal{F}$ à N est un feuilletage transversalement de Lie modelé sur $\mathbb{R}^n$ pour un certain entier n .*

Démonstration. — La suite exacte d'homotopie de la fibration basique, de fibre N et de base B donne :

$$\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(N) \rightarrow 0 \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow 0.$$

La première partie du lemme résulte du fait que $\pi_2(B)$ est abélien. Soit G le groupe de Lie simplement connexe correspondant à la restriction de $\mathcal{F}$ à N et H la représentation d'holonomie correspondante :

$$H : \pi_1(N) \rightarrow G.$$

L'image de H est dense car chaque feuille est dense dans N .

Le groupe G contient donc un sous-groupe abélien dense; c'est donc que $G = \mathbb{R}^n$.

□

Ce premier lemme montre donc que si M est simplement connexe, la restriction de $\mathcal{F}$ à N peut être définie par n formes fermées de degré 1, linéairement indépendantes en chaque point, notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit $\text{Diff}(N, \mathcal{F})$ le groupe des difféomorphismes de N respectant globalement $\mathcal{F}$. Ce groupe est muni de la topologie C^∞ . Soit $\text{Diff}_0(N, \mathcal{F})$ la composante connexe de l'identité de $\text{Diff}(N, \mathcal{F})$.

LEMME 3.2. — Soit $\varphi \in \text{Diff}_0(N, \mathcal{F})$. Alors pour tout i , on a

$$\varphi^* \alpha_i = \alpha_i.$$

(On peut paraphraser ceci en disant que φ préserve la structure transverse de Lie ou encore que φ est « transversalement » une translation).

Démonstration. — Soit φ_t un chemin de $\text{Diff}_0(N, \mathcal{F})$ reliant $\varphi_0 = \text{id}$ à $\varphi_1 = \varphi$. Pour chaque valeur $s \in [0, 1]$, définissons un champ de vecteurs X_s par :

$$X_s(x) = \frac{d}{dt} (\varphi_t(x))|_{t=s}.$$

Il est clair que X_s est un champ de vecteurs feuilleté, c'est-à-dire que son flot préserve $\mathcal{F}$. Par conséquent, X_s est localement projetable en un champ de vecteurs invariant par toutes les translations de $H(\pi_1(N))$ et donc par toutes les translations puisque $H(\pi_1(N))$ est dense dans $\mathbf{R}^n$. Les champs X_s sont donc localement projetables sur des champs constants de $\mathbf{R}^n$ et le flot associé à X_s préserve donc les formes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. On a alors :

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t^* \alpha_i)|_{t=s} = \mathcal{L}_{X_s} \alpha_i = 0.$$

Soit

$$\varphi_t^* \alpha_i = \varphi_0^* \alpha_i = \alpha_i.$$

□

Puisque le feuilletage $(\bar{M}, \mathcal{F})$ est transversalement parallélisable, le groupe structural de la fibration basique p peut se réduire à $\text{Diff}(N, \mathcal{F})$. Nous nous sommes ramenés au cas où $\bar{M}$ est simplement connexe, B l'est donc aussi et l'on peut alors réduire le groupe structural de p à $\text{Diff}_0(N, \mathcal{F})$. Le lemme 3.2. signifie que l'on peut transporter sans ambiguïté les formes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sur les différentes fibres de p . Notons $\alpha_{1,x}, \alpha_{2,x}, \dots, \alpha_{n,x}$ les formes ainsi obtenues sur la fibre $p^{-1}(x)$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la première partie du théorème A.

THÉORÈME 3.3. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété compacte et simplement connexe M . Alors, $\mathcal{F}$ peut être arbitrairement approché par une fibration de Seifert généralisée.

Démonstration. — On commence par munir M d'une métrique riemannienne quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$. La variété $\bar{M}$ est alors munie d'une métrique invariante par l'action de $SO(q)$ (ou de $Spin(q)$) s'il a fallu remplacer $\bar{M}$ par son revêtement universel). Puisque le groupe structural de p a été réduit à un groupe connexe par arcs, on peut définir, pour tout x de B , un isomorphisme canonique de $H^1(p^{-1}(x), \mathbf{R})$ sur $H^1(N, \mathbf{R})$, cet isomorphisme dépendant « continûment » de x .

Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ n petites classes de cohomologie telles que $[\alpha_1] + u_1, [\alpha_2] + u_2, \dots, [\alpha_n] + u_n$ soient des classes de cohomologie rationnelles. Pour chaque x de B , soit $u_{1,x}, u_{2,x}, \dots, u_{n,x}$ les formes harmoniques de $p^{-1}(x)$ dont les classes de cohomologie sont $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Dans chaque fibre, nous pouvons construire les n formes de degré 1

$$\tilde{\alpha}_{1,x} = \alpha_{1,x} + u_{1,x}, \quad \tilde{\alpha}_{2,x} = \alpha_{2,x} + u_{2,x}, \quad \dots, \quad \tilde{\alpha}_{n,x} = \alpha_{n,x} + u_{n,x}.$$

Celles-ci sont linéairement indépendantes en chaque point si les classes $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont suffisamment petites. On obtient dans chaque fibre un feuilletage proche de $\mathcal{F}$ dont toutes les feuilles sont compactes car les formes $\tilde{\alpha}_{i,x}$ sont à périodes rationnelles. De plus, l'action de $SO(q)$ (ou de $Spin(q)$) préserve ces formes car elle préserve les formes $\alpha_{i,x}$ (lemme 3.2.) ainsi que les formes $u_{i,x}$ (unicité des formes harmoniques dans leur classe de cohomologie). Ce feuilletage est transverse à l'action de $SO(q)$ (ou de $Spin(q)$) car $\mathcal{F}$ l'est. On obtient donc par passage au quotient sur M , un feuilletage riemannien à feuilles compactes approchant $\mathcal{F}$. Il s'agit de la fibration de Seifert généralisée que nous cherchions. $\square$

Remarque 3.4. — Soit $\mathcal{G}$ la fibration de Seifert généralisée que nous venons de construire. La démonstration précédente montre que :

- 1) $\mathcal{G}$ provient d'une fibration $\mathcal{G}$ de $\bar{M}$ approchant $\mathcal{F}$:
- 2) $\mathcal{G}$ est invariant sous l'action de $SO(q)$;
- 3) Les feuilles de $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}$) sont situées dans les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}$).
- 4) La restriction de $\mathcal{G}$ à l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ est définie par une fibration sur le tore T^n et la structure de groupe sur ce tore est bien définie (Cf. 3.2.).
- 5) Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des revêtements galoisiens des feuilles de $\mathcal{G}$, de groupe abélien libre (voir [8]).

Cette dernière remarque montre que le nombre de bouts des feuilles de $\mathcal{F}$ est égal à celui d'un groupe abélien, c'est-à-dire 0, 1 ou 2. On retrouve là le résultat de [14]. (Je remercie V. Sergiescu pour m'avoir fait part de cette observation).

Passons à la démonstration de la seconde partie du théorème A :

THÉORÈME 3.5. — *Si M est compacte et simplement connexe et si la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est non nulle, tout feuilletage riemannien de M possède une feuille compacte.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{G}$ une fibration de Seifert généralisée approchant $\mathcal{F}$ telle qu'elle a été fournie par la démonstration du théorème 3.3. ci-dessus. Soit $\bar{\mathcal{G}}$ la fibration de $\bar{M}$ correspondante (Remarque 3.4; 1). Notons $\bar{X}$ l'espace des feuilles de $\bar{\mathcal{G}}$ (dans ce cas la base d'un fibré) et X l'espace des feuilles de $\mathcal{G}$ (i.e. le quotient de $\bar{X}$ par l'action de $SO(q)$). La remarque 3.4.4) montre que T^n opère sur $\bar{X}$ de façon $SO(q)$ équivariante. On obtient donc une action de T^n sur X .

La restriction de $\mathcal{G}$ à l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ est une fibration sur le quotient de T^n par le stabilisateur du point de X considéré sous l'action que nous venons de décrire. En particulier, tout point de X fixé par l'action de T^n fournit une feuille compacte de $\mathcal{F}$. Il nous suffit donc de trouver un tel point fixe. Remarquons que X est une variété cohomologique (voir [1], par exemple). D'après le théorème 1.2., $\chi(M) = \chi(F) \cdot \chi(X)$ et donc $\chi(X) \neq 0$. Le théorème 3.5. se ramène donc au :

LEMME 3.6. — *Si X est une variété cohomologique rationnelle compacte, de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle, toute action du tore T^n sur X possède un point fixe.*

Démonstration. — D'après [1, Chap. VI, th. 1-1], une telle action ne possède qu'un nombre fini de sous-groupes d'isotropie. Si l'on suppose qu'aucun de ces sous-groupes n'est le tore T^n tout entier, il est facile de trouver un élément de T^n qui n'appartient à aucun de ces sous-groupes. On obtient alors une transformation de X homotope à l'identité et sans point fixe. Ceci contredit le théorème de Lefschetz. Cette contradiction termine la démonstration du lemme et donc du théorème A. $\square$

Remarque 3.7. — Il existe des feuilletages riemanniens qui ne peuvent être approchés par des fibrations de Seifert généralisées. L'exemple le plus

simple est un feuilletage transversalement de Lie modelé sur le groupe affine de $\mathbf{R}$, de dimension 1, sur une variété de dimension 3, (cf. [3] pour une description de ce feuilletage). Pour cet exemple, une approximation est impossible car la variété n'est pas un fibré de Seifert. Un exemple de nature différente est donné dans [9].

Par ailleurs, nous avons déjà observé qu'il existe des feuilletages riemanniens sans feuilles compactes sur $S^3 \times S^3$. L'hypothèse $\chi(M) \neq 0$ est donc indispensable dans la seconde partie du théorème A.

4. Minimalisabilité des feuilletages riemanniens.

Rappelons tout d'abord le résultat suivant (cf. [6], [12]).

THÉORÈME 4.1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orientable de dimension m sur une variété compacte M . Il existe une métrique riemannienne sur M telle que toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés minimales de M si et seulement si il existe une m -forme différentielle ω telle que*

- 1) ω restreint à chaque feuille est une forme de volume.
- 2) $d\omega(X_1, X_2, \dots, X_{m+1})$ s'annule dès que m vecteurs sont tangents à $\mathcal{F}$.

On montre dans [12] que, s'il existe une forme ω satisfaisant 1) et 2), alors il existe une autre forme, encore notée ω , satisfaisant 1) et 2) et telle que, de plus, le noyau de ω soit un supplémentaire de l'espace tangent à $\mathcal{F}$. Pour simplifier, nous appellerons une telle forme une « forme minimisante ».

Rappelons par ailleurs qu'un feuilletage défini par des 1-formes fermées linéairement indépendantes est toujours minimalisable, c'est-à-dire qu'il existe une métrique telle que les feuilles soient des sous-variétés minimales (Cf. [6]).

Le théorème précédent va nous permettre de relever notre problème dans $\bar{M}$.

LEMME 4.2. — *Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage riemannien et si $(\bar{M}, \bar{\mathcal{F}})$ est le relèvement décrit dans la partie 1, alors il existe une métrique telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient des sous-variétés minimales si et seulement si il existe une telle métrique pour $\bar{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. — Soit $\pi: \bar{M} \rightarrow M$ la projection du $SO(q)$ fibré principal (rappelons que, dans certains cas, il faut remplacer $SO(q)$ par $Spin(q)$). Si ω est une m -forme sur M satisfaisant les conditions 1) et 2) pour $\mathcal{F}$, il est clair que $\pi^*\omega$ satisfait les mêmes conditions pour $\mathcal{F}$.

Réciproquement, soit ω une m -forme sur $\bar{M}$ satisfaisant les conditions 1) et 2) pour $\mathcal{F}$. Si $R \in SO(q)$, notons $R^*\omega$ l'action de R sur ω . Il est clair que $R^*\omega$ satisfait aussi ces conditions, de même que

$$\Omega = \int_{SO(q)} R^*\omega dR.$$

Cette dernière forme Ω est $SO(q)$ -équivariante. Par ailleurs, le fibré $\bar{M}$ admet une connexion canonique : la connexion de Levi-Civita transverse. En utilisant le relèvement horizontal correspondant à cette connexion, la forme Ω permet de construire naturellement sur M une m -forme qui est celle que nous cherchions. □

Nous pouvons donc nous limiter à l'étude des feuilletages transversalement parallélisables.

Fixons quelques notations supplémentaires. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage quelconque sur une variété compacte M , nous noterons $\Lambda^*(T^*\mathcal{F})$ le fibré en algèbres extérieures et $\Omega^*(\mathcal{F})$ l'espace des sections de ce fibré que nous appellerons les « formes feuilletées ». Il existe une dérivation naturelle $d_{\mathcal{F}}: \Omega^*(\mathcal{F}) \rightarrow \Omega^{*+1}(\mathcal{F})$ et la cohomologie associée est la « cohomologie feuilletée », $H^*(M, \mathcal{F})$, étudiée par exemple dans [4]. L'injection i de $T\mathcal{F}$ dans TM permet d'associer à chaque forme ω sur M sa « restriction » $i^*\omega$ qui est une forme feuilletée de $\Omega^*(\mathcal{F})$.

Si ω est une forme volume feuilletée, c'est-à-dire une forme feuilletée de degré maximal et non singulière lorsqu'on la restreint aux feuilles de $\mathcal{F}$, on peut considérer la classe de cohomologie feuilletée $[\omega] \in H^m(M, \mathcal{F})$. Le lemme suivant est une généralisation d'un lemme de Moser (cf. [11]), auquel il se réduit lorsque la codimension est nulle. Nous repoussons sa démonstration ainsi que celle du lemme suivant à la fin du paragraphe, de façon à ne pas obscurcir la démonstration du théorème B.

LEMME 4.3. — Soit $\text{Diff}(M, \mathcal{F}, [\omega])$ le groupe des difféomorphismes de M respectant $\mathcal{F}$ globalement et préservant la classe de cohomologie feuilletée $[\omega]$. Alors, l'inclusion du groupe des difféomorphismes de M

préservant $\mathcal{F}$ globalement et préservant la forme feuilletée ω , dans $\text{Diff}(M, \mathcal{F}, [\omega])$ est une équivalence faible d'homotopie.

LEMME 4.4. — Supposons que $(M, \mathcal{F})$ soit défini par des 1-formes fermées linéairement indépendantes et que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient denses. Soit ω une forme minimisante et soit $\text{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ la composante connexe de l'identité du groupe des difféomorphismes respectant $\mathcal{F}$ globalement. Alors, l'inclusion du groupe des difféomorphismes respectant, de plus, la forme feuilletée $i^*\omega$ associée à ω , dans $\text{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ est une équivalence faible d'homotopie.

Nous pouvons maintenant démontrer une version faible du théorème B.

PROPOSITION 4.5. — Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement parallélisable sur une variété compacte et simplement connexe M , alors $\mathcal{F}$ est minimalisable.

Démonstration. — Soit $p: M \rightarrow B$ la fibration basique, de fibre N . D'après le lemme 3.1., la restriction de $\mathcal{F}$ à N est définie par n 1-formes fermées linéairement indépendantes en chaque point. Soit ω une m -forme minimisante sur N . Remarquons que le lemme 3.1 s'applique encore si $q \leq 2$ car sa démonstration n'utilise que la simple connexité de B et que nous savons que B est une sphère lorsque $q = 2$ et que $\mathcal{F}$ n'est pas une fibration de Seifert.

D'après le lemme 4.4. et la simple connexité de la base B de la fibration basique, le groupe structural de p se réduit au groupe préservant $i^*\omega$. On peut donc définir sans ambiguïté une m -forme feuilletée $\bar{\omega}$ sur M . Soit $\mathcal{V}$ le champ de m -vecteurs tangent à $\mathcal{F}$ tel que $\bar{\omega}(\mathcal{V}) = 1$.

Recouvrons B par des ouverts $\mathcal{V}_i$ trivialisants pour p et soit θ_i une telle trivialisation

$$\theta_i: p^{-1}(\mathcal{V}_i) \rightarrow \mathcal{V}_i \times N.$$

Soit $\text{pr}_i: \mathcal{V}_i \times N \rightarrow N$ la projection. D'après la réduction du groupe structural, on peut supposer que

$$\theta_i^* \text{pr}_i^* i^* \omega = \bar{\omega} \quad (*).$$

Si (f_i) est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{V}_i$, on définit une m -forme Ω sur M par

$$\Omega = \sum_i (f_i \circ p) \theta_i^* \text{pr}_i^* \omega.$$

Nous voulons montrer que Ω satisfait les conditions 1) et 2) du théorème 4.1.

Tout d'abord

$$\Omega(\mathcal{V}) = \sum (f_i \circ p) \theta_i^* \text{pr}_i^* \omega(\mathcal{V}) = 1$$

d'après (*). La condition 1) est donc satisfaite.

Par hypothèse, $d\omega(\mathcal{V}, Y)$ s'annule pour tout vecteur Y . Par ailleurs, p^*df_i s'annule sur tout vecteur tangent aux fibres de p . On a donc

$$\begin{aligned} \pm d\Omega(\mathcal{V}, X) &= \sum_i df_i(p_*(X)) \theta_i^* \text{pr}_i^* \omega(\mathcal{V}) \\ &= \sum_i df_i(p_*(X)) \bar{\omega}(\mathcal{V}) \\ &= \sum_i df_i(p_*(X)) = d\left(\sum_i f_i\right)(p_*(X)) = 0. \end{aligned}$$

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donc minimalisable.

□

Démonstration du théorème B. — Si $q > 2$, la proposition précédente, le lemme 4.2. et le fait que nous avons déjà remarqué que M est simplement connexe montrent que $\mathcal{F}$ est minimalisable.

Si $q = 2$, la variété $\bar{M}$ n'est pas simplement connexe. Cependant, d'après les lemmes 2.2. et 2.3., deux cas sont possibles. Soit $\mathcal{F}$ est une fibration de Seifert généralisée et il est alors minimalisable (cf. [12]). Soit la base de la fibration basique $p: \bar{M} \rightarrow B$ est la sphère S^2 et, en particulier, est simplement connexe. On vérifiera que la démonstration de la proposition 4.5. n'utilise en fait que la simple connexité de B . La même démonstration fonctionne donc dans le cas $q = 2$.

D'autre part, étant donnée une métrique riemannienne telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient minimales, on peut perturber celle-ci de la façon suivante. Les vecteurs tangents à $\mathcal{F}$ gardent la même longueur et la nouvelle métrique sur l'orthogonal des feuilles est donnée par la structure riemannienne transverse. On vérifie aisément que les feuilles restent minimales. Cette métrique est d'ailleurs quasi-fibrée par construction.

□

Remarque 4.6. — Il existe des feuilletages riemanniens qui ne sont pas minimalisables (cf. [3]).

Démonstration du lemme « de Moser » 4.3. — La démonstration est une simple adaptation de la démonstration usuelle, utilisant la méthode du « chemin » (Cf. [11]).

Soit $\varphi : S^k \rightarrow \text{Diff}(M, \mathcal{F}, [\omega])$ une application continue. Par hypothèse, pour tout $u \in S^k$, la forme $\varphi(u)^*\omega - \omega$ est $d_{\mathcal{F}}$ exacte. Observons que, comme toute application linéaire continue, $d_{\mathcal{F}} : \Omega^{m-1}(\mathcal{F}) \rightarrow d_{\mathcal{F}}(\Omega^{m-1}(\mathcal{F}))$ est une fibration de Serre. Il existe donc un relèvement $I : S^k \rightarrow \Omega^{m-1}(\mathcal{F})$ tel que, pour tout u de S^k , on ait $d_{\mathcal{F}} I(u) = \varphi(u)^*\omega - \omega$.

Posons, pour tout $t \in [0, 1]$ et $u \in S^k$

$$\omega_{u,t} = (1-t)\omega + t\varphi(u)^*\omega.$$

Soit $X_{u,t}$ le champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}$ tel que le produit intérieur de $\omega_{u,t}$ par $X_{u,t}$ soit égal à $I(u)$. Si $F_{u,t}(x)$ désigne la solution de l'équation différentielle non autonome

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{u,t}(x) = X_{u,t}(x)$$

$$F_{u,0}(x) = x$$

on vérifie que $\frac{d}{dt} F_{u,t}^* \omega_{u,t} = 0$.

Par conséquent, le difféomorphisme $\varphi(u) \circ F_{u,1}$ préserve ω . On définit alors une homotopie $H_t : u \in S^k \mapsto \varphi(u) \circ F_{u,t}$. Pour $t = 0$, on a $H_0 = \varphi$ et pour $t = 1$, H_1 envoie S^k dans le groupe des difféomorphismes de M respectant $\mathcal{F}$ et préservant la forme ω . □

Démonstration du lemme 4.4. — Nous allons montrer que $\text{Diff}_0(M, \mathcal{F}) \subset \text{Diff}(M, \mathcal{F}, [i^*\omega])$. Le lemme 4.4. sera alors une conséquence du lemme 4.3. que nous venons de démontrer.

Soit $\varphi \in \text{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ et φ_t un chemin de $\text{Diff}_0(M, \mathcal{F})$ reliant id_M à φ . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ un système de n 1-formes fermées définissant

$\mathcal{F}$ et soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ les n champs de vecteurs tels que :

$$\begin{aligned}\alpha_i(X_j) &= \delta_{ij} \\ X_i &\in \text{Ker } \omega.\end{aligned}$$

Notons X_i^s le flot de X_i . D'après le lemme 3.2., le difféomorphisme φ_i est « transversalement une translation ». Par conséquent, il existe q fonctions $s_1(t), \dots, s_n(t)$, uniquement déterminées, telles que

$$\varphi_i(x) = \psi_i \circ X_1^{s_1(t)} \circ X_2^{s_2(t)} \circ \dots \circ X_n^{s_n(t)}(x)$$

où

$$s_1(0) = s_2(0) = \dots = s_n(0) = 0$$

et ψ_i est un difféomorphisme respectant *chaque* feuille de $\mathcal{F}$ (alors que φ_i ne respecte $\mathcal{F}$ que globalement).

On fait alors les deux observations suivantes :

D'une part, les flots X_i^s préservent la *forme* feuilletée $i^*\omega$, obtenue par restriction de ω à $T\mathcal{F}$. En effet, la dérivée de Lie de ω dans la direction X_i est :

$$\mathcal{L}_{X_i}\omega = i_{X_i}d\omega + di_{X_i}\omega$$

qui s'annule sur tout m -vecteur tangent à $\mathcal{F}$ puisque $X_i \in \text{Ker } \omega$ et que ω satisfait la condition 2) du théorème 4.4.

D'autre part, ψ_i définit une homotopie feuilletée intégrable entre $\psi_0 = \text{id}$ et ψ_1 . La classe de cohomologie feuilletée de $i^*\omega$ est donc préservée par ψ_1 (Cf. [4]).

Par conséquent, on a $\varphi^*([i^*\omega]) = [i^*\omega]$.

□

5. Feuilletages riemanniens sur les sphères et les espaces projectifs.

Les résultats précédents montrent clairement que, pour étudier les feuilletages riemanniens sur les sphères, il nous faut obtenir des informations sur les fibrations de Seifert généralisées sur ces sphères. Le

théorème 1.2. nous permet de ramener cette étude à celle des véritables fibrations. Le résultat suivant est probablement déjà connu :

PROPOSITION 5.1. — *Soit S un CW-complexe simplement connexe qui est une sphère d'homologie rationnelle. Supposons que S est un fibré de Serre de fibre F et de base B où F et B ont le type d'homotopie de CW-complexes de dimensions cohomologiques rationnelles finies (et non nulles). Alors F est une sphère d'homologie rationnelle, de dimension impaire.*

Démonstration. — La fibre homotopique de l'injection de F dans S a le type d'homotopie de l'espace des lacets de B . La suite exacte de Wang donne alors :

$$\begin{aligned} \rightarrow H^{m-r}(\Omega(B), \mathbb{Q}) \rightarrow H^m(F, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\theta^*} H^m(\Omega(B), \mathbb{Q}) \\ \rightarrow H^{m-r+1}(\Omega(B), \mathbb{Q}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

où r désigne la dimension cohomologique rationnelle de S et θ^* est induit par l'application de $\Omega(B)$ dans F . D'après nos hypothèses, la somme des dimensions cohomologiques rationnelles de F et de B est égale à r . Pour $m \leq r$, le morphisme θ^* est injectif et pour $m > r$ on a $H^m(F, \mathbb{Q}) = 0$. Par conséquent, l'anneau de cohomologie rationnelle de F s'injecte dans celui de l'espace des lacets de B . Par ailleurs, il est bien connu que la cohomologie de l'espace des lacets d'un CW-complexe est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes et d'une algèbre extérieure. Les seules sous-algèbres de dimension finie d'une telle algèbre sont les algèbres extérieures basées sur un nombre fini d'éléments de degrés impairs. En d'autres termes, la cohomologie de F est celle d'un produit de sphères de dimensions impaires. Nous sommes précisément dans les hypothèses d'un théorème de [2] qui affirme que, dans cette même situation, F a en fait la cohomologie d'une sphère de dimension impaire.

□

COROLLAIRE 5.2. — *Soit $\mathcal{F}$ une fibration de Seifert généralisée sur une variété compacte S qui est simplement connexe et qui est une sphère d'homologie rationnelle. Alors, soit $\mathcal{F}$ est de dimension 1, soit le groupe fondamental de toutes les feuilles est fini.*

Démonstration. — Soit X l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$. D'après le théorème 1.2., il existe un espace BX et une application de S sur BX

homotopiquement équivalente à une fibration de base BX et de fibre F où F est la fibre générique de $\mathcal{F}$.

D'après la proposition précédente, F est une sphère d'homologie rationnelle. Si la dimension de $\mathcal{F}$ est supérieure à 2, le premier nombre de Betti de F est nul. Par ailleurs, la suite exacte d'homotopie de la fibration $F \rightarrow S \rightarrow BX$ montre que le groupe fondamental de F est abélien. Puisque $H^1(F, \mathbb{Q}) = 0$, c'est que ce groupe fondamental est fini. Les feuilles singulières admettant F comme revêtement fini, leur groupe fondamental est lui aussi fini.

□

Nous pouvons maintenant démontrer la première partie du théorème C.

THÉORÈME 5.3. — *Soit S une variété compacte et simplement connexe qui est une sphère d'homologie rationnelle. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien sur S , deux cas sont possibles :*

- 1) *soit $\mathcal{F}$ est une fibration de Seifert généralisée;*
- 2) *soit $\mathcal{F}$ est de dimension 1. Dans ce cas, il existe une métrique riemannienne de S telle que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les orbites d'un groupe à un paramètre d'isométries de S .*

Dans tous les cas, $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte.

Démonstration. — Supposons que la dimension de $\mathcal{F}$ est supérieure à 2. D'après le théorème A, nous pouvons approcher $\mathcal{F}$ par une fibration de Seifert généralisée. D'après la remarque 3.4.5), les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des revêtements des feuilles de cette fibration de Seifert. Puisque celles-ci ont un groupe fondamental fini (5.2.), les feuilles de $\mathcal{F}$ sont elles-mêmes compactes et $\mathcal{F}$ est en fait une fibration de Seifert généralisée.

L'affirmation relative au groupe à un paramètre d'isométries de S résulte du théorème B et de [3] où il est montré qu'un flot riemannien dont les orbites sont des sous-variétés minimales (c'est-à-dire des géodésiques dans ce cas) peut être paramétré par un flot d'isométries. De manière équivalente, ce flot est obtenu à partir d'une action du tore T^n , par restriction à un sous-groupe à 1 paramètre.

Pour montrer que de tels flots possèdent toujours une orbite compacte, on applique la même méthode que dans la démonstration de la seconde partie du théorème A. On approche le feuilletage par une fibration de Seifert (usuelle) sur S et on appelle X l'espace des feuilles de cette

fibration de Seifert. Il existe une action d'un tore sur X et il s'agit de trouver un point fixe pour cette action. Soit BX l'espace fourni par le théorème 1.2. L'examen de la suite spectrale de la fibration (à homotopie près) de S sur BX de fibre S^1 montre que BX a la cohomologie d'un espace projectif complexe. La caractéristique d'Euler-Poincaré de BX est donc non nulle. Il en est donc de même pour X et le lemme 3.6. permet de conclure. □

La deuxième partie du théorème C est maintenant facile à établir.

THÉORÈME 5.4. — *Soit P une variété compacte et simplement connexe ayant un anneau de cohomologie rationnelle isomorphe à celui de $P_n(\mathbb{C})$ ou $P_n(\mathbb{H})$. Alors, tout feuilletage riemannien de P est en fait une fibration de Seifert généralisée.*

Démonstration. — Il est facile de construire au-dessus de P un S^1 ou S^3 fibré principal de « Hopf » $S \rightarrow P$ tel que S soit une sphère d'homologie simplement connexe de dimension $2n + 1$ ou $4n + 3$. L'image réciproque d'un feuilletage riemannien sur P donne un feuilletage riemannien sur S de dimension strictement supérieure à 1. D'après le théorème 5.3., celui-ci est une fibration de Seifert généralisée. Il en était donc de même pour le feuilletage initial de P . □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL, Seminar on transformation groups, *Annals of Mathematical Studies*, 46 (1960), Princeton University Press.
- [2] A. BOREL, Impossibilité de fibrer une sphère par un produit de sphères, *C.R.A.S.*, Paris, 231 (1950), 943-45.
- [3] Y. CARRIÈRE, Flots riemanniens, à paraître dans *Astérisque* (Journées sur les structures transverses, Toulouse, 1982).
- [4] A. EL KACIMI-ALAOUI, Sur la cohomologie feuilletée, *Compositio Mathematica*, 49 (1983), 195-215.
- [5] E. FEDIDA, Feuilletages du plan, feuilletages de Lie, Thèse Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1973, *Lecture Notes in Math.*, 652, pp. 183-195.
- [6] A. HAEFLIGER, Some remarks on foliations with minimal leaves, *J. of Differential Geometry*, 15 (1980), 269-284.
- [7] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, à paraître dans *Astérisque* (Journées sur les structures transverses, Toulouse, 1982).
- [8] G. JOUBERT et R. MOUSSU, Feuilletages sans holonomie d'une variété fermée, *C.R.A.S.*, Paris, 270 (1970), 507-509.

- [9] D. LEHMANN, Sur la généralisation d'un théorème de Tischler à certains feuilletages nilpotents, *Nederl. Akad. Weten. Indag. Math.*, 41 (1979), 177-189.
- [10] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, *Akad. van Weten. Proceedings*, 85 (1982), 45-76.
- [11] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, *Trans. A.M.S.*, 120 (1965), 286-294.
- [12] H. RUMMLER, Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts, *Com. Mat. Helv.*, 54 (1979), 224-239.
- [13] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1 , *Topology*, 9 (1970), 153-154.
- [14] H. E. WINKELNKEMPER, The number of ends of the universal leaf of a riemannian foliation, to appear in *Proc. of special year in Diff. Geom.*, University of Maryland, 1982.

Manuscrit reçu le 2 novembre 1983.

Étienne GHYS,
Université des Sciences
et Techniques de Lille I
UER de Mathématiques
Pures et Appliquées
E.R.A. au C.N.R.S. 07590
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
