Feuilletages Totalement Géodésiques *

YVES CARRIERE et ETIENNE GHYS

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 20060, Rio de Janeiro, RJ, Brésil et Université des Sciences et Techniques de Lille I, 59650 Villeneuve d'Ascq, France

INTRODUCTION

Plusieurs travaux récents ont montré l'intérêt que peut apporter l'usage d'une métrique riemannienne dans l'étude topologique des feuilletages (Cf [Har, Law], [Rum], [Sul], etc...). D'une manière générale, il s'agissait de caractériser, d'un point de vue homologique, les feuilletages dont les feuilles sont des sous variétés minimales. En codimension 1, ces critères homologiques ont des conséquences topologiques. Celles ci sont toutefois incomplètes en ce sens que, par exemple, on ne peut décrire les variétés supportant de tels feuilletages.

Nous nous interessons à un problème plus restrictif: celui des feuilletages totalement géodésiques de codimension 1 sur les variétés compactes. Nous nous limiterons ici au cas des variétés de dimension trois. (Un travail ultérieur contiendra une étude en dimension supérieure). Contrairement au cas des feuilletages par feuilles minimales, nous avons ici la caractérisation topologique complète suivante.

THÉORÈME: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1, orientable et transversalement orientable sur une variété compacte de dimension 3. Alors, $\mathscr{F}$ est géodésible si et seulement si:

1) soit $\mathscr{F}$ est transverse à une fibration de Seifert;

2) soit $\mathscr{F}$ est le "feuilletage modèle" décrit dans [Ghy, Ser].

Dans la première partie de ce travail, nous explicitons une observation de [Rei] et [Rum] selon laquelle le flot normal à un feuilletage totalement géodésique engendre un feuilletage riemannien. Ceci nous permet de montrer que les feuilletages décrits dans le théorème sont effectivement géodésiques.

La seconde partie décrit le revêtement universel d'un feuilletage totalement géodésique. En applications, nous obtenons une caractérisation, en toutes dimensions, des feuilletages totalement géodésiques possédant une feuille compacte, ainsi qu'une réduction de la structure transverse du flot normal à une (G, T) structure.

La troisième partie contient une étude des feuilletages de dimension 1 et de codimension 2 possédant une (G, T) structure transverse, ce qui conduit au théorème annoncé.

1 – UN CRITÈRE DE GÉODÉSIBILITÉ

Tous les feuilletages considérés seront de classe C^∞, orientables et transversalement orientables, sur une variété riemannienne complète. Un feuilletage est dit "totalement géodésique" si toutes ses feuilles sont totalement géodésiques, c'est à dire si toute géodésique tangente au feuilletage en un point l'est partout. Un feuilletage est dit "géodésible" s'il existe une métrique riemannienne pour laquelle il est totalement géodésique.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur une variété riemannienne M. On notera $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire sur le fibré tangent à M et ∇ la connection de Levi-Cevita associée.

* Reçu le 4ème November, 1980; presenté par MANFREDO DO CARMO.

Rappelons que $\mathscr{F}$ est totalement géodésique si et seulement si la seconde forme quadratique des feuilles est nulle. C'est à dire que, pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathscr{F}$ et tout champ Z normal à $\mathscr{F}$, on a:

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle = 0.$$

Par ailleurs, rappelons la formule suivante, fondamentale pour la suite:

$$(1) \quad 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y,Z \rangle + Y\langle Z,X \rangle + - Z\langle X,Y \rangle - \langle X,[Y,Z] \rangle + + \langle Y,[Z,X] \rangle + \langle Z,[X,Y] \rangle.$$

EXEMPLE 1: Soit H le groupe de Lie résoluble, dont l'algèbre de Lie (des champs de vecteurs invariants à droite) est engendrée par X, Y, Z vérifiant les relations de crochet:

$$[X,Y] = Y$$
$$[X,Z] = -Z$$
$$[Y,Z] = 0$$

Munissons H de la métrique invariante à droite pour laquelle X, Y, Z forment une base orthonormée. Soit Γ un sous groupe discret uniforme de H (il en existe), et soit M l'espace homogène H/Γ. Le champ de plans engendré par X, Y est intégrable, passe au quotient sur M et définit un feuilletage totalement géodésique. (C'est le "feuilletage modèle" de [Ghy,Ser] où l'on en trouvera une description plus précise). Pour s'en assurer, il suffit d'utiliser la formule (1) et les relations de crochet et d'orthogonalité entre les champs X, Y et Z.

Remarquons que, si l'on note φ_t le flot associé au champ Z, on a:

$$(\varphi_t)_*(X) = X - tZ$$
$$(\varphi_t)_*(Y) = Y$$

En particulier, (φ_t) preserve les longueurs orthogonales. Précisons cette notion.

DÉFINITION I-1: Un feuilletage $\mathscr{G}$ sur M est riemannien s'il peut être défini par un atlas

$$(\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\}, \{\gamma_{\alpha\beta}\}, \{\mathbb{R}^n_\alpha, g_\alpha\})$$

où:

i) les U_α forment un recouvrement ouvert de M;

ii) les f_α sont des submersions de U_α sur $\mathbb{R}^n_\alpha$;

iii) g_α est une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^n_\alpha$;

iv) $f_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ où les applications $\gamma_{\alpha\beta} : (\mathbb{R}^n_\beta, g_\beta) \to (\mathbb{R}^n_\alpha, g_\alpha)$ sont des isométries locales.

Donnons une définition équivalente, qui sera plus maniable.

LEMME I-2: Un feuilletage $\mathscr{G}$ est riemannien si et seulement si il existe une métrique riemannienne sur M telle que pour tout champ Z tangent à $\mathscr{G}$ et tout champ X orthogonal à $\mathscr{G}$ It de norme 1, définis sur un ouvert de M, on a:

$$\langle X,[Z,X] \rangle = 0.$$

De plus, étant donné un champ de plans quelconque, supplementaire du fibré tangent à $\mathscr{G}$, on peut choisir la métrique de telle sorte que ce champ de plans soit l'orthogonal de $\mathscr{G}$.

Une telle métrique s'appelle quasi-fibrée (relativement à $\mathscr{G}$) ("Bundle-like" dans la terminologie de Reinhart).

DÉMONSTRATION: Choisissons un champ de plans quelconque, supplémentaire du fibré tangent à $\mathscr{G}$. Il est facile de construire une métrique riemannienne sur M telle que ce champ de plans soit orthogonal à $\mathscr{G}$ et telle que la métrique induite sur ce champ de plans soit localement l'image réciproque de g_α par f_α. Il est clair que le flot associé à tout champ Z tangent à $\mathscr{G}$ preserve les longueurs orthogonales des champs X orthogonaux à $\mathscr{G}$, c'est à dire que:

$$\langle X,[Z,X] \rangle = 0.$$

La réciproque est immédiate. ■

REMARQUES 1): La métrique sur la variété M de l'exemple 1 est quasi-fibrée relativement au feuilletage engendré par Z. D'après le lemme, ce feuilletage est riemannien. En fait, on a la propriété plus forte: il est transversalement de Lie au sens de Fédida.
2) Un flot isométrique (i.e. formé d'isométries) définit un feuilletage riemannien.

La proposition suivante est une version d'un résultat de [Rum] et figure déjà implicitement dans [Rei].

PROPOSITION I-3: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété riemannienne compacte M. Alors $\mathscr{F}$ est totalement géodésique si et seulement si la métrique de M est quasi-fibrée pour le feuilletage orthogonal $\mathscr{F}^{\perp}$.

DEMONSTRATION: Il suffit de remarquer que la formule (1) donne, dans le cas où X est un champ unitaire tangent à $\mathscr{F}$ et Z un champ orthogonal à $\mathscr{F}$ (définis sur un ouvert de M):

$$\langle \nabla_X X, Z \rangle = \langle X, [X,Z] \rangle. \quad ■$$

Nous obtenons le critère de géodésibilité suivant.

PROPOSITION I-4: Un feuilletage de codimension 1 est géodésible si et seulement si il est transverse à un feuilletage riemannien de dimension 1.

DEMONSTRATION: Le lemme montre en effet que l'on peut construire une métrique quasi-fibrée de telle sorte que les deux feuilletages deviennent orthogonaux. ■

REMARQUE: Ce critère est semblable à celui de D. Sullivan caractérisant les feuilletages à feuilles minimales, de codimension 1, comme étant ceux qui possèdent un flot transverse preservant le volume. Ici la condition est évidemment plus forte: le flot transverse preserve une métrique transverse.

COROLLAIRE I-5: Tout feuilletage de codimension 1 suffisamment proche d'un feuilletage géodésible est géodésible. ■

Appelons "fibré de Seifert généralisé" un feuilletage par cercles de longueurs bornées.

COROLLAIRE I-6: Tout feuilletage de codimension 1 transverse à un fibré de Seifert généralisé est géodésible.

DÉMONSTRATION: Un fibré de Seifert généralisé peut être défini par une action localement libre de S^1, que l'on peut toujours supposer isométrique. D'après une remarque précédente, un fibré de Seifert généralisé est donc un feuilletage riemannien. ■

II – APPLICATIONS

Les résultats de la première partie vont nous permettre de preciser la structure du relevé d'un feuilletage géodésible dans le revêtement universel.

PROPOSITION II-1: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage totalement géodésique de codimension 1 sur la variété riemannienne M. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et $\tilde{\mathscr{F}}$ le relevé de $\mathscr{F}$ dans $\tilde{M}$ et $\tilde{\mathscr{F}}^{\perp}$ le feuilletage orthogonal a $\tilde{\mathscr{F}}$.

Alors $(\tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathscr{F}}^{\perp})$ est un produit, c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme de $\tilde{M}$ sur $L \times \mathbb{R}$ envoyant les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}$ sur $L \times \{*\}$ et celles de $\tilde{\mathscr{F}}^{\perp}$ sur $\{*\} \times \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION: D'après [Hec], pour montrer que $(\tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathscr{F}}^{\perp})$ est un produit, il suffit de montrer que, toute application:

$$f: [0,1] \times [0,1] - \{(1,1)\} \to M$$

envoyant $\{*\} \times [0,1]$ dans une feuille de $\mathscr{F}^{\perp}$ et $[0,1] \times \{*\}$ dans une feuille de $\mathscr{F}$ se prolonge au carré $[0,1] \times [0,1]$.

Dans le cas considéré, le feuilletage $\mathscr{F}$ étant géodésique, le feuilletage $\mathscr{F}^{\perp}$ est riemannien. Par conséquent la longueur des courbes γ_t: $(t \in [0,1[)$

$$\gamma_t : s \in [0,1] \mapsto f(s,t) \in M$$

est constante. Ceci permet de construire l'extension sonhaitée. ■

PROPOSITION II-2: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété compacte M. Si $\mathscr{F}$ possède une feuille compacte, alors M fibre sur le cercle et $\mathscr{F}$ est transverse à un fibré de Seifert généralisé.

DÉMONSTRATION: D'après la proposition précédente, toute feuille de $\mathscr{F}^{\perp}$ coupe toute feuille de $\mathscr{F}$. Par conséquent une feuille compacte de $\mathscr{F}$ définit une section globale de $\mathscr{F}^{\perp}$, ce qui implique que la variete M fibre sur le cercle. L'application de premier

La proposition suivante est une version d'un résultat de [Rum] et figure déjà implicitement dans [Rei].

PROPOSITION I-3: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété riemannienne compacte M. Alors $\mathscr{F}$ est totalement géodésique si et seulement si la métrique de M est quasi-fibrée pour le feuilletage orthogonal $\mathscr{F}^{\perp}$.

DEMONSTRATION: Il suffit de remarquer que la formule (1) donne, dans le cas où X est un champ unitaire tangent à $\mathscr{F}$ et Z un champ orthogonal à $\mathscr{F}$ (définis sur un ouvert de M):

$$\langle \nabla_X X, Z\rangle = \langle X,[X,Z]\rangle. \quad \blacksquare$$

Nous obtenons le critère de géodésibilité suivant.

PROPOSITION 1-4: Un feuilletage de codimension 1 est géodésible si et seulement si il est transverse à un feuilletage riemannien de dimension 1.

DEMONSTRATION: Le lemme montre en effet que l'on peut construire une métrique quasi-fibrée de telle sorte que les deux feuilletages deviennent orthogonaux. ■

REMARQUE: Ce critère est semblable à celui de D. Sullivan caractérisant les feuilletages à feuilles minimales, de codimension 1, comme étant ceux qui possèdent un flot transverse preservant le volume. Ici la condition est évidemment plus forte: le flot transverse preserve une métrique transverse.

COROLLAIRE I-5: Tout feuilletage de codimension 1 suffisamment proche d'un feuilletage géodésible est géodésible. ■

Appelons "fibré de Seifert généralisé" un feuilletage par cercles de longueurs bornées.

COROLLAIRE I-6: Tout feuilletage de codimension 1 transverse à un fibré de Seifert généralisé est géodésible.

DÉMONSTRATION: Un fibré de Seifert généralisé peut être défini par une action localement libre de S^1, que l'on peut toujours supposer isométrique. D'après une remarque précédente, un fibré de Seifert généralisé est donc un feuilletage riemannien. ■

II — APPLICATIONS

Les résultats de la première partie vont nous permettre de preciser la structure du relevé d'un feuilletage géodésible dans le revêtement universel.

PROPOSITION II-1: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage totalement géodésique de codimension 1 sur la variété riemannienne M. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et $\tilde{\mathscr{F}}$ le relevé de $\mathscr{F}$ dans $\tilde{M}$ et $\tilde{\mathscr{F}}^{\perp}$ le feuilletage orthogonal a $\tilde{\mathscr{F}}$.

Alors $(\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathscr{F}}^{\perp})$ est un produit, c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme de $\tilde{M}$ sur $L \times \mathbb{R}$ envoyant les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}$ sur $L \times \{*\}$ et celles de $\tilde{\mathscr{F}}^{\perp}$ sur $\{*\} \times \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION: D'après [Hec], pour montrer que $(\tilde{\mathscr{F}},\tilde{\mathscr{F}}^{\perp})$ est un produit, il suffit de montrer que, toute application:

$$f: [0,1] \times [0,1] - \{(1,1)\} \to M$$

envoyant $\{*\} \times [0,1]$ dans une feuille de $\mathscr{F}^{\perp}$ et $[0,1] \times \{*\}$ dans une feuille de $\mathscr{F}$ se prolonge au carré $[0,1] \times [0,1]$.

Dans le cas considéré, le feuilletage $\mathscr{F}$ étant géodésique, le feuilletage $\mathscr{F}^{\perp}$ est riemannien. Par conséquent la longueur des courbes γ_t: $(t \in [0,1[)$

$$\gamma_t : s \in [0,1] \mapsto f(s,t) \in M$$

est constante. Ceci permet de construire l'extension sonhaitée. ■

PROPOSITION II-2: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage géodésible de codimension 1 sur une variété compacte M. Si $\mathscr{F}$ possède une feuille compacte, alors M fibre sur le cercle et $\mathscr{F}$ est transverse à un fibré de Seifert généralisé.

DÉMONSTRATION: D'après la proposition précédente, toute feuille de $\mathscr{F}^{\perp}$ coupe toute feuille de $\mathscr{F}$. Par conséquent une feuille compacte de $\mathscr{F}$ définit une section globale de $\mathscr{F}^{\perp}$, ce qui implique que la variéte M fibre sur le cercle. L'application de premier retour associée à cette section globale est une isométrie d'une variété compacte et peut donc être approchée par une isométrie périodique. ■

On en déduit évidemment la:

Proposition II-3: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage défini par une fibration d'une variété compacte sur le cercle. Alors $\mathscr{F}$ est géodésible si et seulement si la monodromie du fibré est isotope à un difféomorphisme périodique. (Le critère de [Sul] montre que toute fibration est minimale). ■

La Proposition II-1 va nous permettre de préciser la structure transverse du feuilletage $\mathscr{F}^\perp$.

Soit G un groupe d'isométries d'une variété riemannienne simplement connexe T. Parmi les feuilletages riemanniens, nous distinguerons une classe particulière; ceux admettant une (G,T) structure, notion initialement introduite par Ehresman.

Définition II-4: Un feuilletage $\mathscr{G}$ sur M admet une (G,T) structure transverse s'il peut être défini par un atlas:

$$(\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\}, \{\gamma_{\alpha\beta}\})$$

où:

i) les ouverts U_α recouvrent M

ii) f_α est une submersion de U_α dans T

iii) $f_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \circ f_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ où les applications $\gamma_{\alpha\beta}$ sont dans G.

Cette définition revient à remplacer, dans la Définition I-1 des feuilletages riemanniens, les $\gamma_{\alpha\beta}$ par des isométries globales d'une même variété riemannienne.

Tous les feuilletages riemanniens n'admettent pas de (G,T) structure, mais, pour le cas particulier du flot orthogonal à un feuilletage totalement géodésique, on a:

Proposition II-5: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1, totalement géodésique sur une variété compacte. Alors, le feuilletage orthogonal $\mathscr{F}^\perp$ admet une (G,T) structure transverse.

Démonstration: Le revêtement universel de M est difféomorphe à $L \times \mathbb{R}$. Le groupe fondamental de M opère sur $L \times \mathbb{R}$ en préservant les deux facteurs, et en opérant par isométries sur le premier facteur. En particulier, le feuilletage $\mathscr{F}^\perp$ possède un (Isom (L),L) structure transverse. ■

Dans la partie suivante, nous montrons que les seuls feuilletages géodésibles, en dimension 3, sont ceux donnés par l'Exemple 1 et le Corollaire I-6. La proposition précédente permet de ramener cette classification à celle des feuilletages de dimension 1 admettant une (G,T) structure transverse. Ce sont ces feuilletages que nous étudions maintenant.

III — FLOTS A STRUCTURE TRANSVERSE EN DIMENSION 3

La proposition suivante nous permet de nous limiter au cas où T est à courbure constante.

Proposition III-1: Tout feuilletage admettant une (G,T) structure transverse avec $\dim T = 2$ admet aussi une (G′,T′) structure transverse où T′ est soit le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, soit le demiplan de Poincaré $\mathbb{H}^2$, soit la sphère canonique S^2. On dira alors que le feuilletage est transversalement euclidien, hyperbolique ou elliptique suivant le cas.

Démonstration: On sait que toute surface simplement connexe T est conformément équivalente à T′ où T′ désigne soit $\mathbb{R}^2$, soit $\mathbb{H}^2$, soit S^2. Le groupe d'isométries G s'avère donc conjugué à un groupe G′ fait un groupe d'isométries de T′.

Si T′ est le demi-plan de Poincaré, les bijections conformes de H^2 étant les isométries de $\mathbb{H}^2$, le groupe G′ est en fait un group d'isométries de T′.

Si T′ est le plan euclidien, le groupe G′ est un sous groupe du groupe des similitudes de $\mathbb{R}^2$. Un élément de G′ ne pouvant avoir de point fixe dilatant ou contractant, G′ est en fait un sous groupe du groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$.

Si T′ est la sphère S^2, le groupe G′ est un sous groupe du groupe des bijections conformes de S^2 isomorphe à $PGL_2(\mathbb{C})$. Le groupe G′ étant par ailleurs relativement compact puisqu'isomorphe à un sous groupe du groupe des isométries de la variété compacte T, il peut être réduit à SO(3), c'est à dire à un groupe d'isométries de S^2. ■

Les feuilletages de dimension 1 transversalement hyperboliques sont classifiés dans [Thu]. Nous nous proposons de classifier ceux qui sont transversalement euclidiens et elliptiques. La même démonstration nous permettra de retrouver, de manière plus simple la classification de [Thu].

Soit $\mathscr{G}$ un feuilletage ayant une (G,T) structure transverse sur la variété compacte M. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et π la projection naturelle de $\tilde{M}$ sur M. Le relevé $\tilde{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ dans $\tilde{M}$ est défini par une fibration globale p de $\tilde{M}$ sur T (Cf [Thu]). Le groupe fondamental de M opérant sur $\tilde{M}$ en préservant les fibres de p, il existe une unique représentation

$$\Phi: \pi_1(M) \to G$$

telle que pour tout $\tilde{m}$ de $\tilde{M}$ et tout γ de $\pi_1(M)$, on ait:

$$p(\gamma \cdot \tilde{m}) = \Phi(\gamma) \cdot p(\tilde{m}).$$

Dans le cas où $\mathscr{G}$ est de dimension 1, $\tilde{M}$ est un fibré en droites ou en cercles orientable sur T qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ ou à S^2. Deux cas sont donc possibles; soit T est la sphère S^2 et $\tilde{M}$ est un fibré en cercles sur S^2, soit p est un fibré trivial de fibre $\mathbb{R}$. Dans le premier cas, toutes les orbites de $\tilde{\mathscr{G}}$ et donc, a fortiori celles de $\mathscr{G}$, sont fermées, c'est à dire que $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert. Ce cas à part, p est un fibré trivial en droites, on en déduit que le point $p(\tilde{m})$ est fixe pour l'un des $\Phi(\gamma)$ (avec $\gamma \neq 1$) si et seulement si l'orbite de $\mathscr{G}$ passant par $\pi(\tilde{m})$ est périodique.

Etudions d'abord le cas elliptique.

Théorème III-3: Soit $\mathscr{G}$ un feuilletage de dimension 1, transversalement elliptique sur une 3-variété fermée M. Alors, ou bien $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert, ou bien $\mathscr{G}$ est la suspension d'une rotation de la sphère S^2.

Démonstration: Si $\mathscr{G}$ n'est pas un fibré de Seifert, le revêtement universel de M est $S^2 \times \mathbb{R}$ et les orbites de $\tilde{\mathscr{G}}$ vont d'un "bout à l'autre". On peut donc appliquer le résultat principal de [Fri] qui implique que $\mathscr{G}$ admet une section globale, qui est alors une sphère. Le feuilletage $\mathscr{G}$ est donc une suspension d'une rotation. ■

Nous ferons l'étude des cas euclidiens et hyperboliques simultanément. Desormais (G,T) désigne soit $(\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2),\mathbb{R}^2)$, soit $(\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2),\mathbb{H}^2)$ et $\mathscr{G}$ désine un feuilletage de dimension 1 transversalement (G,T).

Le lemme suivant est dans [Thu].

Lemme III-4: Si Φ n'est pas injective ou si l'image de Φ est discrète dans G, alors $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert.

Démonstration: La première partie du lemme résulte du rapport existant entre point fixe de $\Phi(\gamma)$ et orbite périodique.

Si l'image de Φ est discrète dans G, il est facile de voir que, pour tout x de T, l'orbite de x par $\Phi(\pi_1(M))$ est discrète dans T. Ceci implique que toutes les orbites de $\mathscr{G}$ sont fermées. ■

Nous supposerons desormais que $\mathscr{G}$ n'est pas un fibré de Seifert.

Lemme III-5: Les orbites fermées de $\mathscr{G}$ sont isolées; de manière équivalente, la reunion des points fixes des $\Phi(\gamma)$ $(\gamma \neq 1)$ est discrète dans T.

Démonstration: En effet, si une suite d'orbites périodiques de $\mathscr{G}$ s'accumulait sur une orbite périodique, l'holonomie de celle ci serait une rotation ayant une infinité de points périodiques, donc une rotation périodique. Ceci implique que toutes les orbites voisines de l'orbite limite sont périodiques et que $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert, ce que nous avons exclu. ■

Lemme III-6: Soit Γ l'adhérence de $\Phi(\pi_1 M))$ dans G. Les éléments de Γ opèrent sans point fixe sur T.

Démonstration: Soit Γ_0 la composante connexe de l'identité dans Γ. Puisque $\Phi(\pi_1(M))$ est non discret, Γ_0 n'est pas trivial. Soit K la réunion des points fixes des éléments non triviaux de $\Phi(\pi_1(M))$. Alors K est compact puisqu'isomorphe à un sous groupe du groupe des isométries de la variété compacte T, il peut être réduit à SO(3), c'est à dire à un groupe d'isométries de S^2. ∎

Les feuilletages de dimension 1 transversalement hyperboliques sont classifiés dans [Thu]. Nous nous proposons de classifier ceux qui sont transversalement euclidiens et elliptiques. La même démonstration nous permettra de retrouver, de manière plus simple la classification de [Thu].

Soit $\mathscr{G}$ un feuilletage ayant une (G,T) structure transverse sur la variété compacte M. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et π la projection naturelle de $\tilde{M}$ sur M. Le relevé $\tilde{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ dans $\tilde{M}$ est défini par une fibration globale p de $\tilde{M}$ sur T (Cf [Thu]). Le groupe fondamental de M opérant sur $\tilde{M}$ en préservant les fibres de p, il existe une unique représentation

$$\Phi: \pi_1(M) \to G$$

telle que pour tout $\tilde{m}$ de $\tilde{M}$ et tout γ de $\pi_1(M)$, on ait:

$$p(\gamma \cdot \tilde{m}) = \Phi(\gamma) \cdot p(\tilde{m}).$$

Dans le cas où $\mathscr{G}$ est de dimension 1, $\tilde{M}$ est un fibré en droites ou en cercles orientable sur T qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ ou à S^2. Deux cas sont donc possibles; soit T est la sphère S^2 et $\tilde{M}$ est un fibré en cercles sur S^2, soit p est un fibré trivial de fibre $\mathbb{R}$. Dans le premier cas, toutes les orbites de $\tilde{\mathscr{G}}$ et donc, a fortiori celles de $\mathscr{G}$, sont fermées, c'est à dire que $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert. Ce cas à part, p est un fibré trivial en droites, on en déduit que le point $p(\tilde{m})$ est fixe pour l'un des $\Phi(\gamma)$ (avec $\gamma \neq 1$) si et seulement si l'orbite de $\mathscr{G}$ passant par $\pi(\tilde{m})$ est périodique.

Etudions d'abord le cas elliptique.

THÉORÈME III-3: Soit $\mathscr{G}$ un feuilletage de dimension 1, transversalement elliptique sur une 3-variété fermée M. Alors, ou bien $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert, ou bien $\mathscr{G}$ est la suspension d'une rotation de la sphère S^2.

DÉMONSTRATION: Si $\mathscr{G}$ n'est pas un fibré de Seifert, le revêtement universel de M est $S^2 \times \mathbb{R}$ et les orbites de $\tilde{\mathscr{G}}$ vont d'un "bout à l'autre". On peut donc appliquer le résultat principal de [Fri] qui implique que $\mathscr{G}$ admet une section globale, qui est alors une sphère. Le feuilletage $\mathscr{G}$ est donc une suspension d'une rotation. ∎

Nous ferons l'étude des cas euclidiens et hyperboliques simultanément. Desormais (G,T) désigne soit $(\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2),\mathbb{R}^2)$, soit $(\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2),\mathbb{H}^2)$ et $\mathscr{G}$ désine un feuilletage de dimension 1 transversalement (G,T).

Le lemme suivant est dans [Thu].

LEMME III-4: Si Φ n'est pas injective ou si l'image de Φ est discrète dans G, alors $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert.

DÉMONSTRATION: La première partie du lemme résulte du rapport existant entre point fixe de $\Phi(\gamma)$ et orbite périodique.

Si l'image de Φ est discrète dans G, il est facile de voir que, pour tout x de T, l'orbite de x par $\Phi(\pi_1(M))$ est discrète dans T. Ceci implique que toutes les orbites de $\mathscr{G}$ sont fermées. ∎

Nous supposerons desormais que $\mathscr{G}$ n'est pas un fibré de Seifert.

LEMME III-5: Les orbites fermées de $\mathscr{G}$ sont isolées; de manière équivalente, la reunion des points fixes des $\Phi(\gamma)$ $(\gamma \neq 1)$ est discrète dans T.

DÉMONSTRATION: En effet, si une suite d'orbites périodiques de $\mathscr{G}$ s'accumulait sur une orbite périodique, l'holonomie de celle ci serait une rotation ayant une infinité de points périodiques, donc une rotation périodique. Ceci implique que toutes les orbites voisines de l'orbite limite sont périodiques et que $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert, ce que nous avons exclu. ∎

LEMME III-6: Soit Γ l'adhérence de $\Phi(\pi_1 M))$ dans G. Les éléments de Γ opèrent sans point fixe sur T.

DÉMONSTRATION: Soit Γ_o la composante connexe de l'identité dans Γ. Puisque $\Phi(\pi_1(M))$ est non discret, Γ_o n'est pas trivial. Soit K la réunion des points fixes des éléments non triviaux de $\Phi(\pi_1(M))$. Alors K est une partie discrète globalement invariante par $\Phi(\pi_1(M))$ donc par Γ, et donc invariante point par point par Γ_o. Un élément de G ayant au plus 1 point fixe dans T, on en déduit que K est soit vide soit réduit à un point $\{x_o\}$. Ce dernier cas est impossible car la fonction

$$\tilde{m} \in \tilde{M} \mapsto \mathrm{dist}(p(\tilde{m}), x_0)$$

serait une fonction non bornée sur $\tilde{M}$ invariante par l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$, ce qui contredit la compacité de M. On en déduit que Γ opère sans point fixe sur T car l'ensemble des éléments de G opérant sans point fixe est fermée dans G. ■

Nous sommes en mesure de démontrer le

THÉORÈME III-7: Soit $\mathscr{G}$ un feuilletage de dimension 1, transversalement hyperbolique on euclidien sur une 3-variété fermée M Alors:

ou bien $\mathscr{G}$ est un fibré de Seifert

ou bien $\mathscr{G}$ est conjugué on feuilletage engendré par le champ Z de l'Exemple 1 (Cas hyperbolique)

ou bien $\mathscr{G}$ est conjugué à un feuilletage linéaire du tore T^3. (Cas euclidien).

DÉMONSTRATION: Dans le cas euclidien, le lemme précédent montre que le groupe $\Phi(\pi_1(M))$ est un groupe de translations de $\mathbb{R}^2$.

Dans le cas hyperbolique, Γ est un sous groupe de Lie de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) \simeq SL_2(\mathbb{R})$, de dimension supérieure à 1 et opérant sans point fixe sur $\mathbb{H}^2$. Il est facile de voir que ceci implique que Γ est conjugué à un sous groupe du groupe des transformations

$$z \in \mathbb{H}^2 \mapsto az + b \in \mathbb{H}^2 \quad (a > 0).$$

Dans les deux cas, le feuilletage $\mathscr{G}$ admet une structure transverse de Lie (Cf [Fed]). On conclut à l'aide de [Car,Car]. ■

COROLLAIRE III-8: Si $\mathscr{G}$ est un feuilletage de dimension 1, riemannien, sur une 3-variété fermée M, deux cas sont possibles:

i) soit $\mathscr{G}$ est le feuilletage engendré par le champ Z de l'Exemple 1

ii) soit $\mathscr{G}$ est approchable par une fibration de Seifert. ■

Nous pouvons enfin donner le théorème de classification des feuilletages géodésibles en dimension 3.

THÉORÈME III-9: Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur une variété fermée de dimension 3. Alors $\mathscr{F}$ est géodésible si et seulement si:

i) soit $\mathscr{F}$ est conjugué an feuilletage modèle de l'Exemple 1;

ii) soit $\mathscr{F}$ est transverse à une fibration de Seifert.

DÉMONSTRATION: D'après le corollaire précédent, le feuilletage orthogonal peut, soit être approché par une fibration de Seifert, soit est conjugué au feuilletage engendré par le champ Z de l'Exemple 1.

En utilisant les resultats de [Ghy,Ser] qui contiennent une classification des feuilletages sans feuille compacte sur les variétés de l'Exemple 1, on en déduit facilement que tout feuilletage transverse au champ Z est différentiablement conjugué de l'Exemple 1. ■

BIBLIOGRAPHIE

[Car-Car] CARON, P. & Y. CARRIÈRE, *Flots* transversale-*ment de Lie, à* paraître.

[Fed] FEDIDA, E., (1973), *Feuilletages du plan, Feuilletages de Lie*, Thèse. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

[Fri] FRIED, D., *Cross-sections to flow*, Thesis, University of California, Berkeley.

[Ghy-Ser] GHYS, E. & V. SERGIESCU, (1980), Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages, *Topology*, **19**, pp. 179-197.

[Har-Law] HARVEY, R. & B. LAWSON, *Calibrated foliations (Foliations and mass minimizing currents)*. Preprint.

[Hec] HECTOR, G., (1976), *Croissance des feuilletages presque sans holonomie*, Lecture Notes, School of Topology, PUC-RJ.

[Rei] REINHART, B., (1959), Foliated manifolds with bundle-like metrics, *Ann. of Math.*, **69**, pp. 119-132.

[Rum] RUMMLER, H., (1979), Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts, *Comm. Math. Helv.*, **54**, pp. 224-239.

[Sul] SULLIVAN, D., (1979), A homological characterisation of foliations consisting of minimal surfaces. *Comment. Math. Helv.* **54**, pp. 218-223.

[Thu] THURSTON, W., *Lectures 1978*, Chap. 4. Preprint.