Géodésiques sur les surfaces à courbure négative

Étienne Ghys

1 Hadamard et Poincaré : la découverte du chaos

Je vais suivre une démarche historique en commençant par décrire l'article qui est à l'origine de tout ce sujet. Il s'agit d'un travail merveilleux d'Hadamard publié en 1898 qui porte à peu près le même titre que cet exposé [7] : *Géodésiques sur les surfaces à courbures opposées.* Pour comprendre les motivations d'Hadamard, il faut d'abord lire Poincaré qui a écrit un rapport sur l'article d'Hadamard pour les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* et qui a par ailleurs écrit lui-même, quelques années plus tard, un article sur un sujet voisin ([10]) dans lequel il dit du bien de l'article d'Hadamard tout en ajoutant perfidement que, lui, fait des choses plus compliquées que Hadamard !

« *Dans mes* Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, *j'ai étudié les particularités des solutions du problème des trois corps et en particulier, des solutions périodiques et asymptotiques. Il suffit de se reporter à ce que j'ai écrit à ce sujet pour comprendre l'extrême complexité de ce problème ; à côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques d'une surface ; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique ; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis, si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle ; dans le problème des lignes géodésiques, en effet, la vitesse est constante et peut être regardée comme une des données de la question.*

Monsieur Hadamard l'a bien compris, et c'est ce qui l'a déterminé à étudier les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées ; il a donné une solution complète de ce problème dans un mémoire du plus haut intérêt. Mais ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes.

J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes ; malheureusement, le problème est beaucoup plus difficile que celui qui a été résolu par M. Hadamard. »

Les choses sont très claires depuis le début : il s'agit de faire de la *mécanique céleste.* On veut comprendre le mouvement des planètes autour du soleil. Poincaré le dit explicitement : on cherche un exemple de problème de mécanique qui soit plus simple que le « vrai » problème mais pour lequel on peut trouver une solution satisfaisante, tout en gardant quand même suffisamment des difficultés initiales.

Je vous rappelle rapidement ce qu'est une *géodésique* d'une surface plongée dans l'espace $\mathbf{R}^3$. Il y a plusieurs définitions possibles. La première consiste à dire que c'est une courbe décrite par un point matériel qui se déplace librement sur la surface, sans frottement, soumis seulement à la force de réaction qui le contraint à rester sur la surface, perpendiculaire au plan tangent. Autrement dit à chaque instant l'accélération est perpendiculaire à la surface. Selon la deuxième définition, ce sont les courbes qui minimisent localement l'énergie cinétique parmi les courbes de mêmes extrémités, ce qui entraîne qu'elles minimisent aussi localement la longueur.

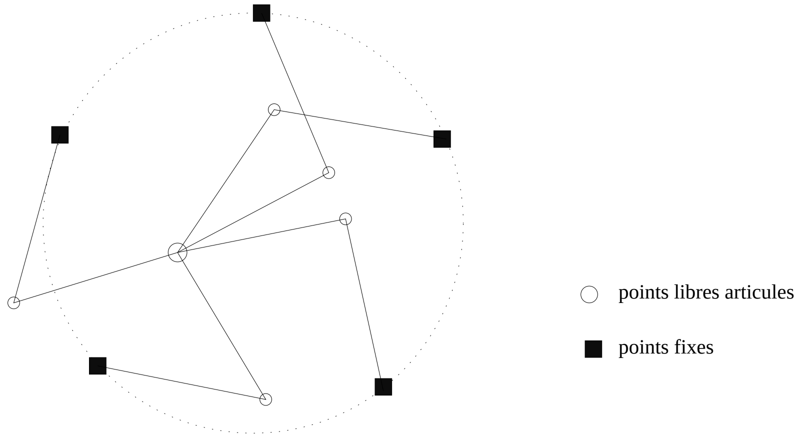

FIG. 1 – Système articulé : « araignée à cinq pattes ».

Le mouvement d'un point matériel qui est seulement astreint à rester sur une surface est l'un des problèmes les plus simples qu'on puisse rencontrer en mécanique, et pourtant, nous allons voir qu'il possède une grande richesse.

Voici un exemple que j'aime bien : vous plantez dans le tableau cinq clous, disons équirépartis sur un cercle. En chacun de ces cinq points, vous fixez l'une des extrémités d'un bras métallique constitué de deux barres rigides et articulé en son milieu. Vous joignez les cinq extrémités libres en un même point (voir figure 1). Ce point peut, en gros, se déplacer comme il veut mais, une fois que vous avez placé ce point central, les barres ont chacune deux positions possibles, sauf si elles sont tendues. Supposons de plus que les pattes sont suffisamment courtes, c'est-à-dire que le point central ne peut atteindre aucun des points fixes. L'exercice que je vous propose est de déterminer l'*espace des configurations* de ce système. Quelle est sa topologie ? Je vous donne la solution[1] : c'est une surface lisse compacte et orientable de genre 5.

Autrement dit, quand on étudie des systèmes mécaniques constitués de barres articulées, de ressorts etc., on est amené très rapidement à étudier des mouvements d'objets dans des espaces dont la topologie est compliquée.

Autre remarque : cette surface est munie d'une *métrique riemannienne* donnée par l'énergie cinétique. En chacun des six sommets mobiles on met une masse, et on suppose chaque barre est de masse nulle. Si l'objet est en mouvement, sa vitesse instantanée $\vec{v}$ correspond à la donnée en chaque sommet mobile d'un vecteur vitesse $\vec{v_i}$ dans le plan. L'énergie cinétique de l'objet est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque sommet. Autrement dit chaque vecteur tangent à l'espace des configurations a une norme[2] donnée par $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{6} m_i v_i^2$. J'avais l'intention de calculer la courbure, mais je ne suis pas bon pour les calculs[3]. Avec un peu de chance elle est négative ?

C'est un exemple de système dynamique auquel Hadamard et Poincaré auraient pu penser. Des masses peuvent se déplacer et pour simplifier vous supposez que l'espace des configurations est de dimension deux. On se pose la question de décrire le mouvement sur le long terme.

Quelques mots sur l'article d'Hadamard. Il est relativement célèbre car c'est dans cet article, encore plus explicitement que dans celui de Poincaré, qu'intervient le concept de *système dynamique chaotique*. En 1898 Hadamard écrit « *tout changement, si minime qu'il soit, apporté à la direction*

[1](N.d.r.) L'espace des configurations est naturellement une sous-variété compacte orientable de $\mathbf{R}^{12}$. Le « corps » de l'araignée parcourt un pentagone ne contenant aucun pied. À chaque position du corps dans ce pentagone correspondent 2^5 positions du système. Autrement dit l'espace des configurations admet un pavage par 2^5 pentagones où chaque sommet est commun à 4 faces. Le calcul de la caractéristique d'Euler donne alors la réponse. Si on rallonge les jambes le genre devient 85 et si on fait varier les paramètres positions des points fixes, longueurs des barres et position des articulations, le genre peut atteindre 97.

[2](N.d.r.) Il s'agit de la métrique riemannienne induite par le produit scalaire (pondéré par les m_i) de $(\mathbf{R}^2)^6$ sur l'espace des configurations vu comme sous-variété de $\mathbf{R}^{12}$.

[3](N.d.r.) Contrairement (peut-être) aux apparences le calcul de la courbure est vraiment très lourd.

initiale d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe ». En termes modernes, il explicite le fait que le comportement dynamique des géodésiques est, comme on dit aujourd'hui, *sensible aux conditions initiales* : une toute petite perturbation sur les conditions initiales peut mener à des perturbations gigantesques après un temps suffisamment grand. Hadamard va plus loin : il se pose la question de savoir si son étude des surfaces peut avoir des conséquences sur de « vrais » systèmes dynamiques, et il écrit : « *Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront-elles dans d'autres problèmes de Mécanique ? Se présenteront-elles, en particulier, dans l'étude des mouvements des corps célestes ? C'est ce qu'on ne pourrait affirmer. Il est probable, cependant, que les résultats obtenus dans ces cas difficiles seront analogues aux précédents, au moins par leur complexité* ». Autrement dit, dans cet article assez prophétique, Hadamard comprend vraiment tout ce que pourrait représenter la sensibilité aux conditions initiales non seulement sur des petits problèmes de géodésiques sur les surfaces, dont l'intérêt est surtout académique, mais plus généralement dans des systèmes mécaniques complexes comme le système solaire par exemple.

Quelques mots maintenant sur le contenu de l'article d'Hadamard. Tout d'abord, il n'est pas évident qu'il existe des surfaces à courbure négative plongées dans l'espace (par exemple, il n'en existe pas de compactes sans bord). La première partie de l'article consiste à construire beaucoup d'exemples de surfaces à courbure négative dont il étudie l'allure. Il y a de très jolis dessins hachurés à la plume. Je vais me limiter ici à des exemples extrêmement simples qu'on appelle aujourd'hui des *pantalons* (voir figure 2), même si ce sont de drôles de pantalons, pattes d'éléphants ! Voici le

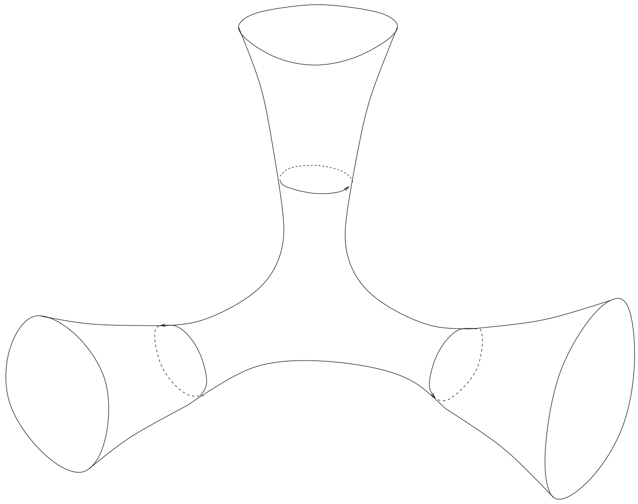

Fig. 2 – Un exemple de surface à courbure négative : le pantalon.

genre de surface que dessine Hadamard dans l'espace $\mathbf{R}^3$. Il donne même les équations. Il démontre que, pour des raisons extrêmement simples, la courbure est partout négative. Il annonce qu'il va essayer de comprendre la nature des géodésiques qui se promènent sur la surface. Dans le cas du pantalon, Hadamard commence par remarquer qu'il existe trois géodésiques fermées (représentées sur la figure 2) qui découpent la surface en une *partie compacte*, toujours en forme de pantalon, et trois *trompettes*. Hadamard aborde la question de savoir quel est le comportement d'une géodésique en distinguant plusieurs cas :

- une géodésique peut partir à l'infini lorsque le paramètre (le temps) tend vers plus l'infini (respectivement moins l'infini). Cela arrive dès qu'elle sort du pantalon compact pour s'engager dans une des trompettes. Elle reste alors toujours dans la trompette et file à l'infini.
- une géodésique peut rester pour tout temps dans la partie compacte. On parle alors de géodésique bornée : ce sont les plus intéressantes.

Bien entendu, une géodésique peut être bornée vers le futur et non bornée vers le passé (ou réciproquement). Parmi les géodésiques bornées, Hadamard étudie plus particulièrement celles qui sont *périodiques*. Il consacre une bonne partie de son article à comprendre la nature de ces géodesiques

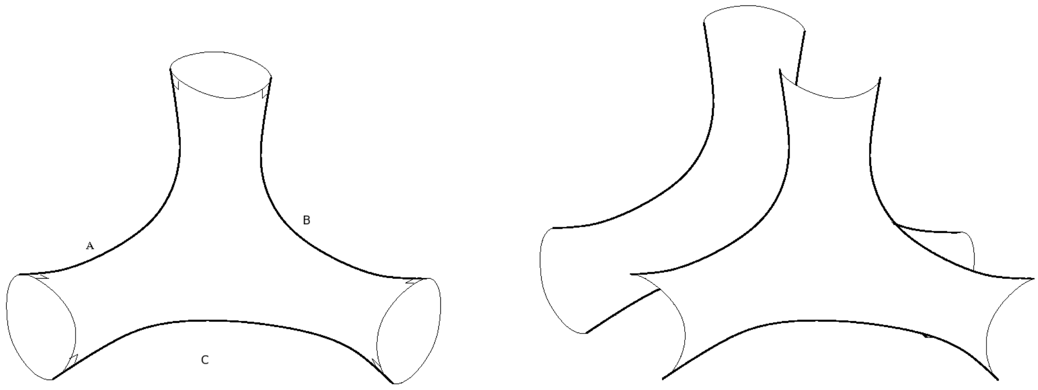

FIG. 3 – Les géodésiques A, B et C du pantalon compact et le découpage en deux hexagones.

périodiques. Bien sûr, toutes les géodésiques bornées ne sont pas périodiques (même si ce n'est pas complètement évident) mais Hadamard montre que *l'adhérence de l'ensemble des géodésiques périodiques est égal à l'ensemble des géodésiques bornées.*

Je vais vous expliquer maintenant sa contribution essentielle à l'étude des géodésiques périodiques, qui a eu un grand retentissement dans les cent ans qui ont suivi. Voici ce qu'il fait (il le fait dans le cas général, moi je vais le faire dans le cas du pantalon où c'est très simple).

Considérons un pantalon compact. Hadamard, en quelque sorte, découpe ce pantalon le long de ses coutures. Il considère les courbes les plus courtes reliant un bord d'un pantalon à un autre. Cela donne trois géodésiques orthogonales au bord comme indiqué sur la figure 3. Il appelle A, B et C ces trois courbes. Si vous découpez le pantalon le long des coutures A, B et C, vous obtenez deux hexagones. Autrement dit, le pantalon est obtenu en recousant deux hexagones. Maintenant, imaginez que vous ayez une géodésique périodique qui se promène sur la surface. Elle tourne, elle tourne, elle tourne et revient sur elle-même. Lors de son excursion, cette géodésique va rencontrer les coutures dans un certain ordre : on va lire un mot dans l'alphabet $\{A, B, C\}$. La courbure est négative donc, comme après une entrée dans une trompette on n'en sort plus, après avoir coupé la courbe A une géodésique périodique doit couper la courbe B ou la courbe C. Ainsi, à une géodésique périodique est associé un mot fini, par exemple $ABABC$, parfaitement défini à l'ordre cyclique près. Le théorème d'Hadamard affirme que c'est une bijection, c'est-à-dire si vous vous donnez un mot, il existe une unique géodésique qui réalise ce mot (on savait déjà, depuis Jacobi, que lorsque la courbure est négative deux géodésiques infiniment voisines ne peuvent se couper deux fois). Donc il y a *codage* (c'est le mot que l'on emploie aujourd'hui) des géodésiques périodiques par les mots dans un alphabet, en l'occurence à trois lettres. La preuve n'est pas très difficile mais c'est vraiment le début de ce qu'on appelle la théorie des *systèmes dynamiques symboliques*, où on essaie de comprendre un système dynamique compliqué par une suite de symboles. Pour être précis, il faudrait dire que le mot n'est pas quelconque puisque deux lettres identiques ne peuvent pas se suivre (évident, car après un A par exemple on ne peut sortir de l'hexagone que par un B ou un C). Il faudrait dire aussi que la géodésique associée à un mot n'est pas vraiment unique mais qu'il y en a deux... en effet, si la première lettre du mot est un A par exemple, il faut dire dans quel sens la géodésique coupe la couture A et ensuite il n'y a plus de choix pour les orientations : oublions ces détails sans intérêt.

2 Morse et Thue : la combinatoire des mots infinis

Beaucoup de gens disent que ce n'est pas vrai, qu'on ne peut pas considérer que Hadamard est le fondateur de la dynamique symbolique car il ne s'intéressait à ce codage que pour les géodésiques périodiques. Jamais il n'a essayé (sauf à lire entre les lignes) d'interpréter des géodésiques *non périodiques* par des mots. Pour cela, il a fallu attendre une vingtaine d'années : c'est l'article de Morse dont je veux vous parler maintenant, qui reprenait sa thèse de doctorat [9].

L'article de Morse est paru en 1920, bien que soumis en 1918. Morse a le courage de ne pas hésiter à considérer les mots *infinis*. Il code les géodésiques bornées par des mots *bi-infinis* c'est-à-dire infinis des deux côtés : il regarde les coutures qu'une géodésique bornée rencontre dans le futur et dans le passé. C'est la première fois qu'apparaît ce qu'on appelle aujourd'hui le *décalage*, le « shift » en anglais. On essaie de comprendre la dynamique du décalage sur un espace de symboles, ici l'espace des suites bi-infinies dans un alphabet à trois lettres : $\{A, B, C\}^{\mathbf{Z}}$. Je vais vous donner un exemple d'une chose que démontre Morse et qui n'est pas triviale.

Morse se demande si l'adhérence d'une géodésique bornée contient toujours une géodésique périodique et montre que la réponse est non. Rappelez-vous que Hadamard a montré que l'adhérence de l'ensemble des géodésiques périodiques est l'ensemble des géodésiques bornées. Mais ici, c'est différent : ce n'est pas parce qu'on peut approcher toute condition initiale menant à une géodésique bornée par une suite de géodésiques périodiques que toute géodésique bornée contient une géodésique périodique dans son adhérence.

C'est une histoire intéressante. Pour montrer cela, Morse invente une suite de symboles que l'on appelle aujourd'hui la *suite de Thue-Morse* parce qu'elle avait été inventée par Thue auparavant, en 1906 ([12],[13]), mais que Morse ignorait. Christian Mauduit, qui connaît bien cette histoire m'a raconté que l'article de Thue est très original : dans l'introduction il explique qu'il va faire un article qui ne sert à rien, juste pour le plaisir de résoudre une énigme qui s'est présentée à lui. Et puis, ce problème s'est présenté à nouveau à Morse, puis par la suite ça a servi à beaucoup de choses à tel point que j'ai cru comprendre que les cartes bleues sont pleines de suites de Thue. Pauvre Thue, s'il avait su !

Voici le problème de Thue. Imaginez que vous écriviez un mot avec un alphabet de deux lettres A et B mais que vous vous interdisiez que ce mot contienne un carré. Vous commencez par la lettre A. Après si vous mettez de nouveau A, vous auriez A^2 ce qui est interdit : donc vous mettez B. Si vous mettez ensuite B, vous aurez B^2 : donc vous mettez A. Ensuite, si vous mettez A, vous auriez A^2 : donc vous mettez B ; mais alors vous avez écrit $ABAB$ qui est le carré de AB : vous avez perdu ! Il est impossible d'écrire un mot de longueur infinie avec deux lettres et sans carrés. Est-ce qu'on peut le faire sans cube ? Voilà la question qui ne sert à rien. *Existe-t-il une suite infinie en deux lettres dont aucun sous-mot n'est un cube ?*

La réponse est oui, et je vais vous construire un tel mot. Je pense que beaucoup d'entre vous le connaissent. La suite de Thue-Morse est extrêmement facile à construire . . . si on en a l'idée. C'est ce qu'on appelle une *suite par substitution*. Vous considérez les deux substitutions $A \mapsto AB$ et $B \mapsto BA$, vous partez du mot A, vous appliquez les substitutions, puis vous recommencez encore et encore. Vous obtenez

$$A \mapsto \underline{A}B \mapsto \underline{AB}BA \mapsto \underline{ABBA}BAAB \mapsto \underline{ABBABAAB}BAABABBA\ldots$$

vous constatez que, par la structure même des substitutions, chacun des mots que vous écrivez prolonge le précédent. En faisant ceci, vous obtenez un mot infini et je vous laisserai le plaisir de démontrer tout seul que ce mot ne contient pas de cubes.

Voilà pour la suite de Thue, mais ce n'est pas exactement le problème de Morse qui cherche plutôt une suite en *trois* lettres qui ne contient pas de *carrés*. C'est presque la même chose et Morse le résout également. À quoi cela lui sert-il ? Morse prend la suite en question – c'est une suite infinie – et il la recopie à l'envers pour qu'elle soit bi-infinie. Il obtient ainsi une géodésique du pantalon, que l'on va appeler une *géodésique de Morse-Thue*. C'est la géodésique qui suit un itinéraire imposé : elle coupe les coutures exactement dans l'ordre indiqué par la suite. Morse affirme qu'évidemment cette géodésique ne contient pas de géodésique périodique dans son adhérence. En effet, si cette géodésique s'approchait de très très près d'une géodésique périodique, cela voudrait dire que pendant sa vie elle passerait très longtemps, très près de cette géodésique et, en particulier, pendant un moment de sa vie elle tournerait au moins deux fois consécutivement autour de la géodésique périodique en question. Il y aurait donc deux fois consécutivement le même sous-mot, c'est-à-dire un carré. Si la géodésique s'approchait d'une géodésique périodique de très près cela impliquerait une récurrence dans la suite et cela se matérialiserait dans le mot par des sous-mots qui seraient de grandes puissances. Par construction il n'y en a pas, et le problème est donc résolu. Voilà donc un des premiers problèmes de dynamique à avoir été réglé de manière complètement combinatoire. On travaille avec des mots, des lettres, des symboles, des A des B, puis au bout du compte on trouve des géodésiques qui ont un comportement dynamique très particulier : elles ne s'approchent pas des géodésiques périodiques. Voilà ce que je voulais raconter à propos de l'article de Morse, mais, comme vous savez peut-être, Morse fait beaucoup d'autres choses dans cet article !

3 Anosov et la stabilité structurelle

On était en 1920. On passe maintenant à 1960 et des poussières et le héros suivant est Anosov. Je suis vraiment très étonné que ni Hadamard ni Morse ne font de manière explicite la remarque suivante : *pour décrire les géodésiques sur une surface à courbure négative, on utilise des suites de symboles et on ne dit pas quelle est la métrique.* Par exemple, je pourrais changer la métrique à courbure négative sur une surface en forme de pantalon. Eh bien, les géodésiques pour la nouvelle métrique sont toujours codées de la même manière, par les mêmes symboles. Cela veut dire que les géodésiques de l'une des surfaces et les géodésiques de l'autre sont plus ou moins canoniquement en bijection. Il y a quelque part derrière ce codage une notion de rigidité qui laisse entendre que les géodésiques d'une surface à courbure négative ne dépendent pas de la métrique. Il a fallu attendre longtemps pour que cette idée soit dégagée. Hadamard « aurait dû » voir que les géodésiques « ne dépendent pas de la métrique », sauf que bien sûr elles en dépendent. . .

Anosov, en 1966, écrit un article vraiment fondateur [1] appelé (en français) *Le flot géodésique des variétés à courbure négative.* Voici de quoi il s'agit : vous avez une variété, disons compacte, avec une métrique riemannienne, et vous supposez que la courbure est (strictement) négative. Vous pouvez tout à fait vous limiter à la situation d'aujourd'hui, celle d'une surface, c'est déjà intéressant. Pour étudier les géodésiques et en faire un système dynamique, la méthode traditionnelle consiste à associer à cette variété riemannienne M de dimension n une autre variété riemannienne que l'on appelle le *fibré unitaire tangent.* Pour chaque point de votre variété vous considérez tous les vecteurs de norme 1 qui sont issus de ce point. Cela forme une variété de dimension $2n - 1$ notée T_1M, qui fibre au dessus de M et dont les fibres sont des sphères. L'avantage est que sur cette variété les géodésiques de M définissent un flot : le *flot géodésique.* Pour le définir, vous partez d'un élément de T_1M, c'est-à-dire un point et un vecteur unitaire qui en est issu, vous considérez la géodésique de M qui part de ce point tangentiellement à ce vecteur, vous la suivez pendant un temps t, vous vous arrêtez et vous regardez où vous êtes et dans quelle direction vous allez[4]. Vous obtenez ainsi un flot φ_t sur T_1M, un groupe à un paramètre de difféomorphismes, que l'on appelle le *flot géodésique de la variété riemannienne M.*

Maintenant je peux vous énoncer le théorème d'Anosov de 1966 qui répond semble-t-il à une conjecture de Smale, et qui utilise un concept qui s'est avéré fondamental en mathématiques dans les années 1970 et par la suite : la *stabilité structurelle.*

Théorème (Anosov) : *Le flot géodésique d'une variété riemannienne compacte à courbure négative est structurellement stable.*

Cela veut dire veut que si vous prenez un *autre* flot ψ_t, sur la même variété, suffisamment proche (pour la topologie C^1, mais ce n'est pas ce qui nous importe aujourd'hui) du flot géodésique φ_t alors c'est « le même ». Enfin . . . c'est le même à conjugaison près par un homéomorphisme, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme du fibré unitaire tangent qui transforme les orbites de φ_t en celles de ψ_t. Vous avez votre flot, votre système dynamique, il est très compliqué. . . Vous prenez un autre flot très proche du premier : eh bien, le nouveau flot est le même qu'avant, transformé par un homéomorphisme. Autrement dit, cela va un peu dans la direction de ce que je disais que Hadamard

[4](N.d.r.) Il s'agit de la méthode habituelle pour transformer une équation différentielle d'ordre 2 en une équation d'ordre 1.

avait raté : les orbites ne sont pas les mêmes mais elles deviennent les mêmes *après modification par un homéomorphisme*. Remarquez que le théorème d'Anosov est local : il vous dit seulement que si on perturbe un peu le flot, alors on a « le même ». Le théorème global que je « reprochais » à Hadamard de ne pas avoir démontré, c'est que si on prend deux métriques à courbure négative, même très lointaines l'une de l'autre, leurs flots géodésiques sont les mêmes à homéomorphisme près. Mais le « plus » dans le théorème d'Anosov par rapport à celui que Hadamard aurait dû énoncer, c'est que le flot perturbé, supposé proche du flot géodésique initial, n'est absolument pas supposé être le flot géodésique d'une métrique riemannienne : il y a beaucoup de flots qui ne sont pas des flots géodésiques !

Ce théorème a été absolument fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques parce qu'il a été le premier exemple d'une situation où il y a stabilité structurelle tout en ayant du chaos : une chose que les gens ne pouvaient pas imaginer avant ces travaux.

4 Gromov et les groupes hyperboliques

On était donc en 1966. Je vous propose d'avancer jusque 1976. Misha Gromov sera notre prochain héros. Je vais parler d'un théorème de Gromov datant de 1976–2000 mais je vais commencer par vous expliquer cet intervalle de temps inhabituel. Gromov a écrit un petit article en 1976 [5] qui s'appelle *Trois remarques sur les géodésiques en courbure négative*. Je ne sais pourquoi cet article ne lui a pas plu ; il n'en était peut-être pas fier, alors il n'a jamais jugé utile de le publier, et pourtant, ma foi, c'est un bon article ! C'est en 2000 que Pierre de La Harpe (peut-être qu'il avait un trou dans le journal *Enseignement Mathématique* dont il était rédacteur en chef) a eu la bonne idée de se dire :« Tiens ! si je demandais à Gromov de publier ses articles non publiés ? ». Il en avait cinq ou six comme ça et Pierre de La Harpe a publié ces articles qui avaient vingt-cinq ans d'âge et qui étaient toujours aussi frais. Il a simplement demandé à Gromov de rajouter quelques commentaires à la fin, pour savoir s'il y avait eu des choses nouvelles depuis. En gros, non ! il n'y avait rien de nouveau... Dans cet article de 1976, Gromov démontre le théorème suivant, mais encore une fois c'est quelque chose dont il n'est pas fier car je suis persuadé qu'il pense qu'il est dû à Hadamard.

Théorème (Gromov) : *Si g_1 et g_2 sont deux métriques à courbure négative sur la même variété compacte M, peut-être lointaines, alors les flots géodésiques de g_1 et g_2 sont « les mêmes », c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme qui envoie les orbites du premier sur celles du second (on dit qu'ils sont topologiquement équivalents).*

Le comportement qualitatif des géodésiques est bien indépendant de la métrique. En fait, Gromov va beaucoup plus loin et se rend compte que sa démonstration donne en fait mieux (il s'en rend compte visiblement *après* l'avoir démontré) : il n'a même pas besoin que les métriques soient sur la même variété !

Théorème (Gromov) : *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemaniennes compactes à courbure négative. Si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes alors leurs flots géodésiques sont topologiquement équivalents.*

Ce n'est pas la peine de supposer que les variétés sont les mêmes. Vous allez me dire que c'est bizarre : si les flots sont topologiquement conjugués, c'est qu'il existe un homéomorphisme entre les fibrés unitaires. Mais, *il résulte de sa démonstration* que si deux variétés riemanniennes à courbure négative ont des groupes fondamentaux isomorphes alors leurs fibrés unitaires sont homéomorphes ! Du coup cela ouvre la question (je crois que c'est encore une conjecture aujourd'hui) : « Est-ce que deux variétés riemaniennes compactes à courbure négative ayant même groupe fondamental sont homéomorphes ? » Cela porte un nom : c'est une forme de la conjecture de Borel. On sait donc au moins que leurs fibrés unitaires le sont.

Gromov ne s'arrête pas en si bon chemin. Puisque le flot géodésique ne dépend pas de la variété et ne dépend que du groupe fondamental, il devrait être possible de construire le fibré unitaire tangent et le flot géodésique à partir du groupe. Je ne vais pas en dire trop parce que cela nous mènerait trop loin et ce n'est qu'une remarque en passant. Gromov invente (un peu plus tard, en 1985, voir [6]) une catégorie de groupes (de présentation finie) – les *groupes hyperboliques* – qui contient en particulier les groupes fondamentaux des variétés compactes à courbure négative mais qui est beaucoup plus vaste. Il y a beaucoup, beaucoup, de groupes qui sont hyperboliques au sens de Gromov mais qui ne sont pas le groupe fondamental d'une variété à courbure négative. Pour chaque groupe hyperbolique Γ, il construit canoniquement un espace – que j'ai envie de noter $T_1\Gamma$ et d'appeler le fibré unitaire tangent du groupe – muni d'un flot – que j'ai envie d'appeler le flot géodésique du groupe. Cette construction est telle que si par hasard le groupe Γ était le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure négative (M, g), elle produit le fibré unitaire de (M, g) et son flot géodésique. C'est merveilleux : on a trouvé la substantifique moëlle du théorème d'Hadamard : *le groupe fondamental. Ce qui est important dans la suite de A, B, C, ce ne sont pas les symboles, c'est le groupe fondamental du pantalon.* À partir de ce groupe on reconstruit l'espace *et* la dynamique.

5 Les réseaux dans le plan et le flot modulaire

Je vous propose de changer légèrement de sujet pour quelques minutes, mais vous verrez bientôt qu'il s'agit en fait du même sujet. Nous allons parler d'objets arithmétiques : les *réseaux*, l'une des spécialités mathématiques de Bordeaux. Ce seront de réseaux très simples, dans le plan. Par définition un réseau est un sous-groupe fermé de $\mathbf{R}^2$ isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. Les réseaux du plan sont donnés par toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers de deux vecteurs non colinéaires. On définit l'*aire* d'un tel réseau comme étant celle de son domaine fondamental (le parallélogramme donné par les deux vecteurs) ou, si vous voulez, l'aire du quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

Ce qui m'intéresse aujourd'hui, c'est d'essayer de comprendre non pas un réseau mais tous les réseaux dans leur ensemble. On va considérer l'*espace des réseaux d'aire* 1. Il y a une façon très simple de le décrire puisqu'après tout les réseaux sont tous isomorphes entre eux. Modulo le groupe spécial linéaire, il n'y a qu'un réseau d'aire 1. Ainsi $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ agit transitivement sur l'espace des réseaux d'aire 1. Par ailleurs, le stabilisateur du réseau canonique $\mathbf{Z}^2$ est par définition, $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, le groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant 1. L'espace des réseaux d'aire 1 est donc $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$. Il s'agit du quotient d'un groupe de Lie de dimension 3 par un sous-groupe discret.

L'espace des réseaux d'aire 1 est donc une variété de dimension 3. L'observation de base que je vais vous expliquer rapidement et qui va être utile pour visualiser tout cela, est que cet espace $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ *est homéomorphe au complémentaire dans S^3 – la sphère de dimension 3 – du nœud de trèfle.*

Une fois qu'on l'aura compris, ce sera très agréable car on pourra *regarder* les choses : S^3 est l'espace dans lequel on habite (ou presque, puisqu'il ne nous manque qu'un point à l'infini !) donc on pourra voir l'espace des réseaux dans notre espace visuel. Je pourrai même vous le projeter sur un écran[5].

Les arithméticiens associent depuis longtemps deux nombres complexes, notés g_2 et g_3, à un réseau Λ dans $\mathbf{R}^2$ identifié à $\mathbf{C}$. Ce sont

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-4} \quad \text{et} \quad g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-6}.$$

Les coefficients 60 et 140 ont leur importance en arithmétique mais ne sont pas importants pour nous. Ainsi, à chaque réseau, vous pouvez associer deux nombres complexes, donc un point de $\mathbf{C}^2$. Le théorème de base, qui remonte au début du 19e siècle, est que, premièrement, ces deux nombres

[5](N.d.r) Des animations ont été projetées pendant l'exposé. Ces séquences ont été réalisées par Jos Leys et Étienne Ghys ; elles peuvent être trouvées à l'adresse http ://www.josleys.com/. Les dessins qui illustrent ce texte (à l'exception des plus sommaires) sont tirés de ces films. Se reporter à la fin du texte pour plus de détails.

suffisent pour caractériser le réseau et, deuxièmement, les couples (g_2, g_3) possibles sont tous les couples vérifiant $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ (en théorie des nombres, on note $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$). Cela veut dire que l'espace des réseaux s'identifie à $\mathbf{C}^2$ privé de la courbe algébrique d'équation $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$. Cela, c'est pour tous les réseaux, mais ceux qui nous intéressent sont d'aire 1. Comment fait-on pour comparer deux réseaux qui n'ont pas la même aire ? Eh bien, on les dilate. Si vous avez un réseau Λ, vous pouvez le dilater en le multipliant par un nombre réel positif u. Vous voyez que $g_2(u\Lambda) = u^{-4}g_2(\Lambda)$ et que $g_3(u\Lambda) = u^{-6}g_3(\Lambda)$ et donc $\Delta(u\Lambda) = u^{12}\Delta(\Lambda)$. L'espace des réseaux d'aire 1 est donc difféomorphe à la sphère S^3 privée de son intersection avec la courbe d'équation $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$. On peut faire le dessin suivant :

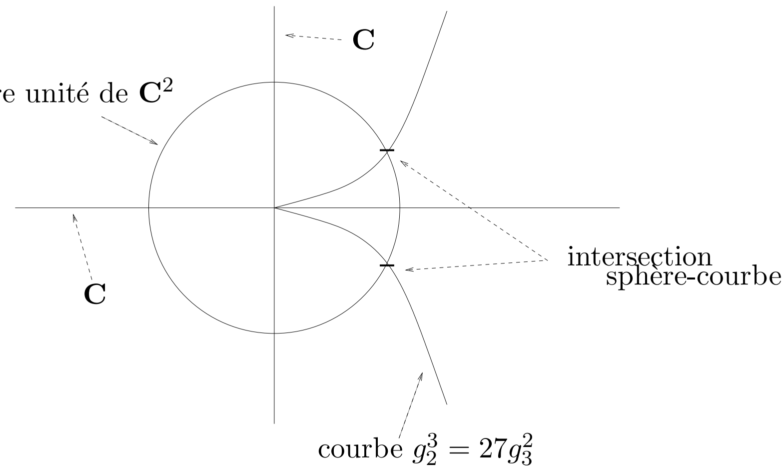

FIG. 4 – L'intersection de la sphère de $\mathbf{C}^2$ et de la courbe $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$.

Les axes du dessin et la courbe d'équation $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ sont de dimension *réelle* 2 alors que le cercle dessiné, qui symbolise à la sphère unité de $\mathbf{C}^2$, est de dimension réelle 3. L'intersection d'un objet tridimensionnel et d'un objet bidimensionnel dans $\mathbf{R}^4$ est de dimension 1, donc l'intersection de la sphère et de la courbe (les deux points sur le dessin) est de dimension réelle 1 : c'est un *nœud*. Vous voyez même que c'est un nœud torique (3, 2) (à cause de son équation $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$), c'est-à-dire un nœud de trèfle. L'espace des réseaux d'aire 1 est bien le complémentaire dans S^3 du nœud de trèfle. Par ailleurs les axes $g_2 = 0$ et $g_3 = 0$ intersectent la sphère S^3 en deux cercles qui sont deux nœuds triviaux mais enlacés une fois. Comme nous sommes dans S^3, on peut dessiner ces trois courbes (ou plutôt en prendre la projection stéréographique dans l'espace suivie d'une projection sur un écran !) pour visualiser l'espace dans lequel on va travailler.

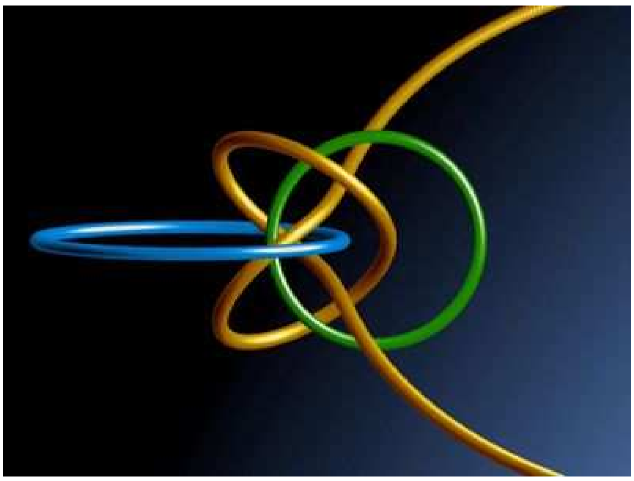

FIG. 5 – L'espace des réseaux d'aire 1.

Maintenant, observons que le nœud de trèfle est un *nœud fibré*. Cela veut dire la chose suivante : si vous prenez un couple (g_2, g_3) dans le complémentaire du nœud de trèfle, vous pouvez l'envoyer sur $g_2^3 - 27g_3^2/|g_2^3 - 27g_3^2|$ qui est dans le cercle unité. Vous obtenez une flèche qui va de S^3 privé du nœud de trèfle vers le cercle S^1. Les topologues appellent ceci une *fibration* d'une variété de dimension 3 sur une variété de dimension 1 et les fibres sont des surfaces que l'on appelle *surfaces de Seifert*, que l'on peut dessiner (cf. figure 6). Ce sont des surfaces dont le bord est le nœud de trèfle. À chaque point du cercle on fait correspondre une telle surface. Maintenant, si le point se déplace

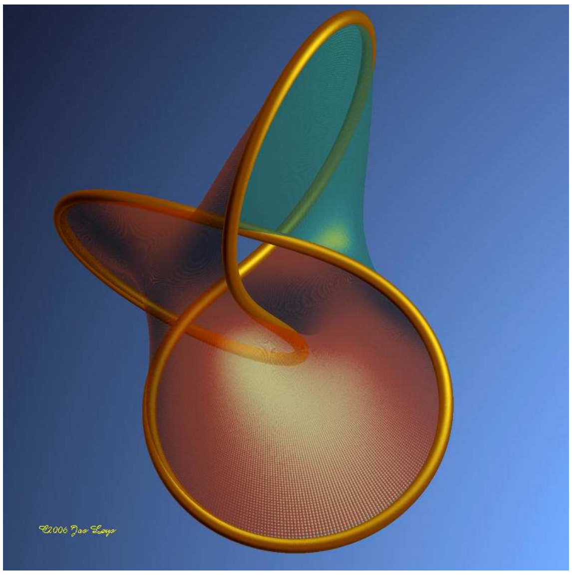

FIG. 6 – Une surface de Seifert.

autour du cercle, vous obtenez ce que les topologues appellent une *décomposition en livre ouvert*, les pages étant les surfaces de Seifert et la reliure le nœud de trèfle.

Sur cet espace des réseaux d'aire 1, il y a un système dynamique extrêmement intéressant qui est étudié depuis fort longtemps. Si vous vous donnez un réseau Λ et un temps t, vous pouvez définir $\varphi_t(\Lambda)$ comme étant l'image du réseau Λ par la matrice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Vous obtenez un autre réseau de même aire. Autrement dit, de chaque point dans le complémentaire du nœud de trèfle part une courbe. Le système dynamique ainsi défini s'appelle le *flot modulaire*. On peut calculer numériquement comment varient g_2 et g_3 et tracer ces courbes. Lorsqu'on fait cela, on voit (cf. figure 7) un système chaotique complètement « fou ». En particulier, comme aurait pu dire Hadamard, le système est sensible aux conditions initiales. De fait, ce flot modulaire n'est rien d'autre que le flot géodésique d'une surface à courbure négative. Laquelle ? Celle qu'on appelle la *surface modulaire*, si chère aux arithméticiens depuis Gauss et dont je vais rappeler la construction.

Vous partez du demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire du demi-plan supérieur muni de la métrique riemannienne à courbure constante négative $(dx^2 + dy^2)/y^2$. L'action du groupe de Möbius, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, sur le demi-plan, définie par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ est isométrique. Cette action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ se relève au fibré unitaire tangent du demi-plan de Poincaré en une action simplement transitive. On identifie donc $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et le fibré unitaire tangent du demi-plan de Poincaré. On appelle surface modulaire le quotient du demi-plan par le groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$. Cette action possède un domaine fondamental que l'on trouve dans beaucoup de livres (voir figure 8). Ce quotient est *presque* une surface (il a deux points singuliers), il est localement isométrique au demi-plan de Poincaré. Il est donc à courbure négative. Le fibré unitaire tangent de cette surface s'identifie naturellement à $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$.

Sur cet espace des réseaux d'aire 1, vous avez donc deux systèmes dynamiques : le flot géodésique et le flot modulaire, qui se trouvent être les mêmes !

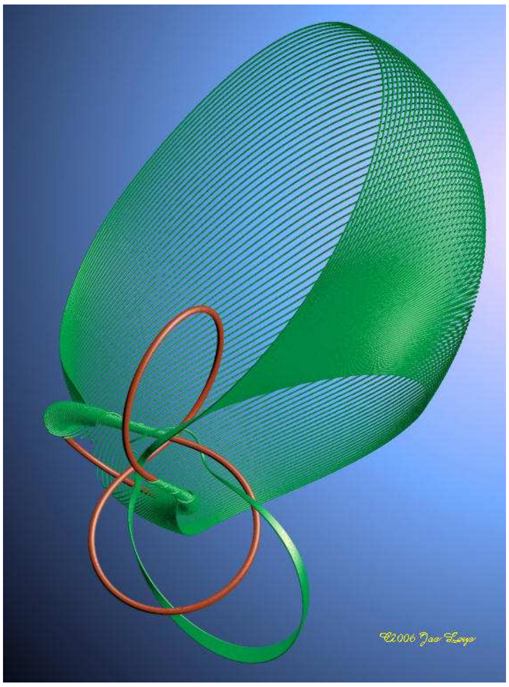

FIG. 7 – Courbe du flot modulaire.

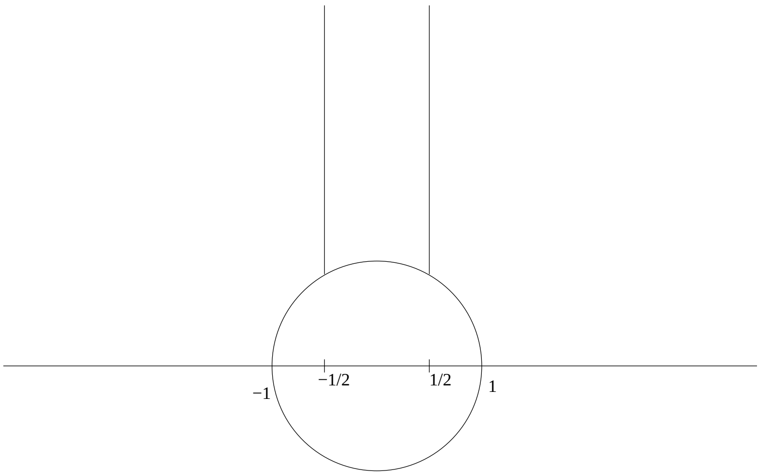

FIG. 8 – Domaine fondamental pour l'action de $PSL(2, \mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.

Tout cela pour vous dire que nous sommes encore en train d'observer un exemple de flot géodésique de surface à courbure négative. En particulier, on devrait être capable d'utiliser les techniques d'Hadamard, Morse, Anosov et Gromov dans ce contexte arithmétique. Les gens ne s'en sont pas privés : Artin par exemple (cf. [2]) a essayé de coder les géodésiques de la surface modulaire par des suites de symboles exactement dans le même esprit que Hadamard. Il est intéressant de constater que Poincaré n'a semble-t-il pas compris cela, lui qui pourtant a inventé le chaos et qui a compris l'interêt arithmétique du demi-plan qui porte son nom. Il semble que Poincaré ait raté l'aspect dynamique du flot géodésique sur les surfaces arithmétiques. Bizarre. Bon, nous pouvons lui pardonner car il y a un certain nombre d'autres choses qui ne lui ont pas échappées ! ! !

Puisqu'on a un flot géodésique, on a envie de comprendre les orbites périodiques. Comment les trouver ? Je vous l'ai dit : l'espace des réseaux est $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ et un élément de cet espace est une matrice M, modulo multiplication à droite par une matrice entière. Sous quelles conditions cette matrice est-elle périodique pour le flot modulaire ? Lorsque je la multiplie par une matrice

$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ pour un certain $t > 0$, je dois retrouver la même chose à une multiplication à droite par une matrice entière A près. On peut écrire

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} M = MA \quad \text{ou} \quad A = M^{-1} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} M.$$

On voit que trouver une orbite périodique revient à diagonaliser une matrice entière. Chaque fois que vous vous donnez une matrice entière, par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, vous appelez un étudiant, vous lui demandez :« Diagonalisez-moi cette matrice ! ». Il va, comme un brave, trouver une matrice M telle que MAM^{-1} est diagonale, sans savoir qu'il aura trouvé une orbite périodique ! Par ailleurs, si A et B sont deux matrices entières qui sont diagonalisées par une même matrice M, alors il existe une matrice entière C et deux entiers p et q, tels que $A = C^p$ et $B = C^q$. Enfin, si $B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$, il est clair que si on remplace A par BA^pB^{-1}, alors M est transformée en MB^{-1} et on obtient la même orbite. Quelle est la conclusion de ces petits calculs ? Qu'il y a bijection naturelle entre deux sortes d'objets : les orbites périodiques du flot modulaire d'une part et les classes de conjugaison de matrices de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ diagonalisables (on dit hyperboliques) et primitives (c'est-à-dire qui ne sont pas une puissance positive d'une autre matrice entière). Ainsi vous vous donnez votre matrice diagonalisable entière préférée, elle définit une orbite périodique du flot modulaire, c'est-à-dire un nœud dans le complémentaire du nœud de trèfle. Tout ceci étant explicite, on peut le faire tracer par l'ordinateur. La figure 9 montre deux exemples de *nœuds modulaires*. Les orbites périodiques que

Fig. 9 – Orbites périodiques du flot modulaire et les matrices entières correspondantes.

vous voyez là sont exactement les orbites périodiques d'Hadamard, celle du flot géodésique d'une surface à courbure négative. Simplement elles sont dessinées dans le fibré unitaire tangent.

Je me suis demandé quel est le lien entre les matrices et les nœuds obtenus. Si vous prenez votre nœud favori, est-ce qu'il existe une matrice qui va produire ce nœud ? Je trouvais cette question intéressante car elle met en parallèle de la dynamique et de l'arithmétique. Initialement, j'ai essayé de montrer que tous les nœuds apparaissent mais finalement ce n'est pas le cas. Je vais vous expliquer pourquoi je suis content. C'est parce que ces nœuds que j'ai rencontrés existent déjà dans un autre contexte. Ils étaient étaient apparus, dans une situation tout à fait différente en relation avec *l'attracteur de Lorenz.*

6 Lorenz et son papillon

Lorenz est un météorologue américain, de formation mathématique[6]. En 1963 il s'intéresse à la dynamique des fluides, plus particulièrement à des problèmes de convection dans l'atmosphère. Il y a des gradients de température, des fluides qui montent, qui descendent, des échanges thermiques...

[6]décédé en avril 2008

C'est extrêmement compliqué. Pour y comprendre quelque chose, Lorenz simplifie le problème à l'extrême. Il développe en série de Fourier, ne garde que les premières harmoniques, simplifie de manière grossière (mais consciente !) le problème. Il arrive à une équation différentielle ordinaire qui est censée représenter en gros le phénomène. C'est une équation qui n'est pas très compliquée : il s'agit du champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$ donné par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 10(y-x) \\ \dot{y} & = & 28x - y - xz \\ \dot{z} & = & xy - \frac{8}{3}z \end{array} \right. .$$

Puis il prend son ordinateur et il trace des orbites. Il voit alors pour la première fois des choses qu'on voit un peu partout maintenant (voir figure 10). C'est un exemple étonnant : un système

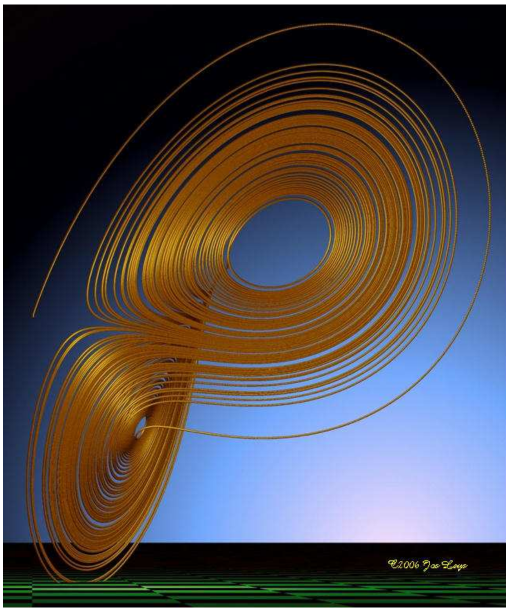

FIG. 10 – Attracteur de Lorenz.

extrêmement simple dont le comportement semble chaotique. Vous voyez bien sur l'animation que le comportement d'une orbite est assez imprévisible. Coup de pub ou sens des médias, Lorenz donne une conférence en 1972 (voir [8]) dont le titre est *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?* C'est *l'effet papillon* qui est devenu célèbre ; l'un des rares phénomènes mathématiques qui sont sortis du monde mathématique ; il y a un peu les fractales, un peu la théorie des catastrophes, puis il y a l'effet papillon dont tout le monde parle, sans forcément savoir ce que c'est. Finalement bravo à M. Lorenz ! Il a reussi à transmettre une idée mathématique – puisque c'est une idée mathématique – au grand public.

Lorenz constate qu'en prenant une équation aussi simple que celle-là, qui provient du système de convection dans l'atmosphère, on arrive à une situation chaotique avec dépendance sensible aux conditions initiales et, de la même manière que Hadamard se demandait si son théorème démontré pour les surfaces va s'appliquer pour le vrai problème qui l'intéresse – en l'occurence le mouvement des planètes – Lorenz se demande si le comportement qu'il constate sur sa « petite » équation différentielle va s'appliquer pour le mouvement des fluides dans l'atmosphère, pour la météorologie etc. Le débat est encore ouvert aujourd'hui – beaucoup de gens discutent là-dessus – mais ce n'est pas le sujet de cette conférence.

Cet objet que Lorenz a vu sur son ordinateur, « son » attracteur, qui est un très bel objet mathématique, les topologues ont essayé de le comprendre. En 1986, les deux célèbres topologues Joan Birman et Bob Williams se sont dit que la première chose que l'on devait peut être faire serait de décrire les orbites périodiques. Toujours les mêmes idées qui reviennent ! C'est la phrase célèbre de Poincaré (il savait bien faire des belles phrases) :« *les solutions périodiques sont la seule brèche* *par laquelle nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable* ». Pour attaquer ce qui semble inattaquable – l'attracteur de Lorenz – peut-être qu'essayer de comprendre les orbites périodiques est une bonne chose. Birman et Williams suivent la recommandation de Poincaré, ils se demandent quelles sont, *d'un point de vue topologique*, les orbites périodiques de l'attracteur de Lorenz c'est-à-dire quels sont les nœuds qu'elles représentent ? La figure 11 donne quelques exemples d'orbites périodiques (qui ne sont pas faciles à trouver numériquement car justement le problème est sensible aux conditions initiales).

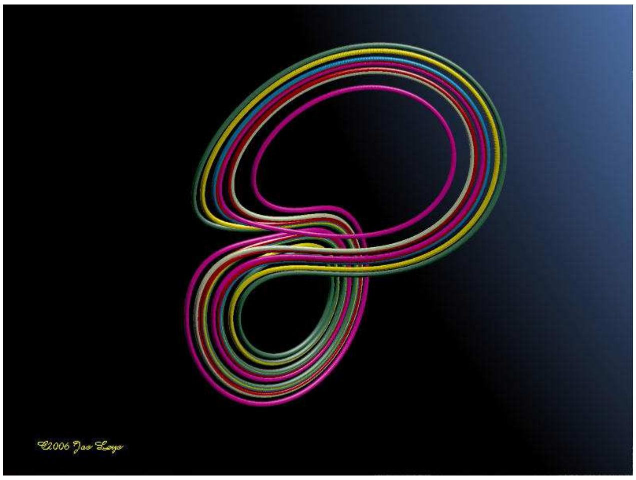

FIG. 11 – Quelques nœuds de l'attracteurs de Lorenz

Ils montrent dans le superbe article [3] que les nœuds de Lorenz, c'est-à-dire ceux qui sont réalisés par des orbites périodiques de l'attracteur de Lorenz, sont très particuliers. Ils démontrent que des tas d'invariants que l'on rencontre en théorie des nœuds sont spéciaux : leur signature est positive, ce sont des nœuds fibrés etc. Ils font une étude très approfondie de ces nœuds de Lorenz et, d'une certaine manière, cela leur permet de mieux appréhender cet attracteur de Lorenz.

7 Nœuds de Lorenz et nœuds modulaires

Je crois que vous voyez où je veux en venir maintenant : au théorème suivant.

Théorème [4] : *Les nœuds de Lorenz (ceux réalisés comme orbite périodique de l'attracteur de Lorenz) sont topologiquement les mêmes (on dit* isotopes*) que les nœuds modulaires (ceux réalisés comme orbite périodique du flot modulaire).*

Je ne vais pas le démontrer car le temps passe et je vais devoir me contenter de quelques mots imprécis. Dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$, il y a les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on sait depuis très longtemps que dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ toute matrice est conjuguée à un produit de A et de B. Vous le trouverez, par exemple, dans le merveilleux petit bouquin de Serre *Cours d'arithmétique* [11]. La démonstration n'est pas compliquée. Vous prenez maintenant une matrice entière diagonalisable ; elle est conjuguée à un produit de A et de B. Cela vous donne un mot dans l'alphabet $\{A, B\}$ que vous interprétez comme une suite d'instructions « gauche » et « droite » et vous cherchez dans l'attracteur de Lorenz une orbite périodique qui va tantôt dans l'oreille droite de Mickey, tantôt dans l'oreille gauche comme indiqué par le mot. Si vous avez $AAABAAB$ vous cherchez un orbite qui s'enroule trois fois autour de l'oreille gauche puis une fois à droite puis deux fois à gauche et enfin une fois à droite. Vous démontrez que pour chaque mot il existe une orbite et une seule de l'attracteur de Lorenz qui a ce code. Réciproquement du côté du flot modulaire, comme il s'agit du flot géodésique de la surface modulaire, on a le codage d'Hadamard. Autrement dit les orbites périodiques de l'un et de l'autre sont couplées. Il ne reste plus qu'à montrer que les orbites couplées sont isotopes. Ce qui est fait en utilisant ce que Birman et Williams appellent un *template*, un patron en français. La démonstration est suffisamment explicite pour que l'on puisse programmer l'isotopie sur ordinateur. La figure 12 montre les points de départ et d'arrivée de l'isotopie.

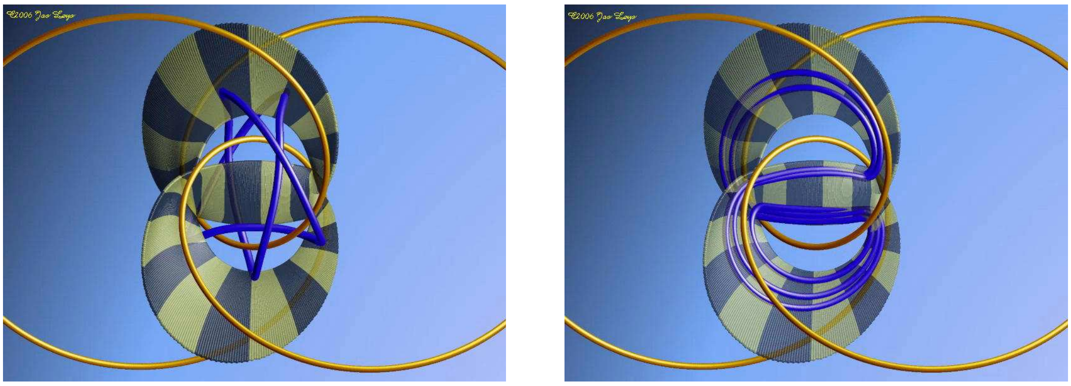

FIG. 12 – Isotopie entre un nœud modulaire et le nœud de Lorenz couplé.

On obtient des tas de conclusions sur les nœuds modulaires : toutes les propriétés topologiques des nœuds de Lorenz établies par Birman et Williams sont vraies pour les nœuds modulaires.

Je voudrais conclure avec deux remarques. D'abord, dire ce j'ai l'intention de faire maintenant (et qui commence à m'agacer parce que je n'y arrive pas[7]). J'ai ce dictionnaire entre deux objets vraiment différents : l'objet purement arithmétique – le nœud modulaire – et l'objet purement dynamique – le nœud de Lorenz. Les théorèmes de Birman et Williams me disent des choses sur la nature des nœuds de Lorenz et bien sûr j'en déduis des choses sur les nœuds modulaires. Par exemple, théorème : *les nœuds modulaires sont à signature positive.* Ce que je voudrais maintenant, ce serait retrouver les résultats de Birman et Williams par l'arithmétique. Je veux démontrer, par exemple, que ces nœuds sont fibrés grâce à des méthodes d'arithmétique avec des séries L ou je ne sais quoi ?

La dernière chose je voudrais vous raconter est l'histoire de ces films[8]. J'ai rencontré, essentiellement par internet, un monsieur qui est ingénieur, qui n'avait aucune connexion avec les maths, simplement qui aime bien les maths et qui aime faire des dessins. Il s'appelle Jos Leys et habite à Anvers. On a d'abord discuté par internet et puis il a commencé à m'aider à faire des dessins mathématiques. Au bout d'un moment je lui ai dit : « si on faisait des films ? » il m'a dit :« je ne sais pas faire des films, mais je veux bien apprendre. » Depuis maintenant près d'un an, nous échangeons au moins dix mails par jour. Aujourd'hui je ne vous ai montré qu'une toute petite partie de ce que nous avons fait. On a beaucoup travaillé. De mon côté, j'ai appris énormément de numérique, je suis entré dans les codes, toutes ces choses. Lui qui ne connaissait absolument rien en math manipule maintenant des fonctions thêtas de Jacobi et des séries d'Eisenstein etc. etc. On progresse tous les deux et j'en suis content. Vu le résultat (je suis assez fier de ce qu'on a fait) on est parti sur un vaste projet : faire un film de longue durée. J'ai fait le scénario et ça va durer deux heures. C'est peut être un peu fou . . . . Nous voudrions un film abordable par tout le monde. Ce serait très élémentaire et même si on est naïf, on vise un public genre lycéen. On voudrait commencer tout au début, prendre le temps pour arriver à expliquer. On a déjà engrangé une bonne demi-heure de film, entièrement numérique. Enfin, une critique contre le CNRS. Je travaille au CNRS et j'en suis très fier. Il y a une institution qui s'appelle CNRS-images. Leur travail est de faire des films, de présenter des scientifiques. Vous savez, quand vous voyez des chercheurs en blouses blanches à la télé, eh bien ce sont souvent eux qui les filment. J'ai pris mon téléphone, j'ai appelé CNRS-images. Je leur ai dit :« voilà je suis mathématicien, je cherche à faire un film, est-ce que ça vous intéresse de m'aider ? Il y a des choses que je ne sais pas faire, par exemple mettre de la musique sur un film sans problèmes

[7]J'ai fait quelques progrès depuis cette conférence !
[8](N.d.r.) Ceux projetés durant l'exposé et dont les figures 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12 sont tirées.

juridiques, ou diffuser commercialement un DVD mathématique ». Eh bien, ça n'intéresse pas ces personnes de m'aider. Donc nous avons décidé de travailler à deux, et maintenant à trois puisqu'il y a un thésard à Lyon (Aurélien Alvarez) qui s'est joint à nous. On s'amuse bien, on le fera seuls, et il n'y aura pas le logo du CNRS sur le DVD[9].

Merci beaucoup pour votre attention[10].

Question : Il y a une question qui me semble naturelle. Pourquoi ces nœuds apparaissent-ils en deux endroits, deux domaines différents ? Ce sont deux domaines qui paraissent totalement déconnectés : la météorologie, l'arithmétique... Ces nœuds, à la fois modulaires et de Lorenz, ne sont-ils pas universels ? N'apparaissent-ils pas dans d'autres domaines ? Je ne sais où encore.

E.Ghys : Je vais donner une indication qui peut paraître peu raisonnable. On sait – Arnold a beaucoup insisté là-dessus – que les équations d'Euler du mouvement des fluides parfaits, ne sont après tout que le flot géodésique sur le groupe de Lie de dimension infinie des difféomorphismes préservant le volume. Plus précisément, si je prends le groupe des difféomorphismes préservant le volume, son algèbre de Lie est consistuée des champs de vecteurs à divergence nulle, sur laquelle il y a une forme quadratique : la norme L^2. Si j'écris l'équation des géodésiques, j'obtiens les équations d'Euler. Arnold suggère que c'est parce que la courbure est essentiellement négative, parce que l'on a affaire au flot géodésique d'une variété à courbure négative, que la météo est à ce point instable.

Voilà peut-être un pont qui joint les deux aspects. Le flot modulaire est le flot géodésique sur la surface modulaire qui est à courbure négative constante. Les équations de Lorenz sont une approximation de dimension finie d'un flot géodésique sur un espace de dimension infinie (même si, à vrai dire, Lorenz partait de l'équation de Navier-Stokes). Maintenant, je pose la question aux spécialistes de l'équation d'Euler. L'équation d'Euler est une EDP sur un espace de dimension infinie. Depuis des lustres, on étudie les solutions stationnaires, celles qui ne dépendent pas du temps. Existe-t-il des solutions qui sont non-stationnaires mais qui se déplacent sur une sous-variété de dimension finie, par exemple trois ? Existe-t-il à l'intérieur de l'espace des phases de l'équation d'Euler des sous-variétés de dimension trois sur lesquelles l'équation d'Euler se restreindrait en le flot modulaire ? Ce n'est pas impossible théoriquement, c'est peut-être trop ambitieux, mais qui sait...

Références

[1] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature.* (En Russe) Trudy Mat. Inst. Steklov. **90** (1967), 209 pp.

[2] E. Artin, *Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), p. 170-175.

[3] J. Birman et R. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems. I. Lorenz's equations.* Topology **22** (1983), no. 1, p. 47–82.

[4] É. Ghys, *Knots and Dynamics*, Proceedings du Congrès International de Madrid 2006, Eur. Math. Soc., Zürich (2007) p. 247–277.

[5] M. Gromov, *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group.* Enseign. Math. (2) **46** (2000), no. 3-4, p. 391–402.

[6] M. Gromov, *Hyperbolic groups.* Essays in group theory, p. 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York, 1987.

[7] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques,* J. Math. Pures Appl. **4** (1898), p. 27–74. Œuvres, tome II, p. 729–775.

[9](N.d.r.) Le film est maintenant achevé, pour plus d'information se reporter à l'adresse http ://www.dimensions-math.org/

[10]Je tiens à remercier Pierre Mounoud qui a bien voulu retranscrire cette conférence, que je n'ai modifiée ensuite que très légèrement

[8] E. N. Lorenz, *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?*, in *The essence of chaos (The Jessie and John Danz Lecture Series)*, University of Washington Press (1993).

[9] H. M. Morse, *A One-to-One Representation of Geodesics on a Surface of Negative Curvature*, Amer. J. Math. **43** (1921), no. 1, p. 33–51.

[10] H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), p 237-274. Œuvres, Tome VI, p. 38–85.

[11] J-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF (1988).

[12] A. Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana **1** (1906), p. 1–22.

[13] A. Thue, *Über die gegenseitige Lage gleicher Teilegewisser Zeichenreihen*, Norske vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana **7** (1912), p. 1–67.