

à Martine,

Je tiens à remercier Dennis Sullivan pour l'intérêt qu'il a bien voulu me porter. Les conversations passionnantes que j'ai eu la chance d'avoir avec lui m'ont toujours encouragé. Ses travaux ont été pour moi une merveilleuse source d'inspiration.

Je suis reconnaissant à Gilbert Hector d'avoir guidé mes premiers pas de chercheur. C'est à lui que je dois, en particulier, le goût des mathématiques "concrètes", éloignées des formalismes superflus.

André Haefliger a toujours eu la gentillesse de s'intéresser à mes recherches. Grâce à lui, j'ai compris que certains formalismes "utiles" peuvent avoir des retombées géométriques belles et profondes.

Je remercie Michael Gromov, François Laudénbach et Daniel Lehmann d'avoir accepté de participer à ce jury.

Par l'intermédiaire de Paul Schweitzer, je voudrais exprimer ma reconnaissance à l'école mathématique brésilienne et, en particulier, à l'Instituto de Matemática Pura e Aplicada, de Rio de Janeiro, auquel je dois tant.

Mes amis Yves Carrière et Vlad Sergiescu sont mes interlocuteurs de tous les jours. Ensemble, nous nous sommes créés des thèmes de recherches communs et je pense que peu de mathématiciens ont la chance de bénéficier d'une telle collaboration. Sans eux, la plupart de mes travaux n'auraient jamais vu le jour.

Harold Rosenberg et Alberto Verjovsky m'ont aidé et conseillé à plusieurs reprises, je les en remercie sincèrement. Je remercie également Grant Cairns avec lequel j'ai aimé travailler.

L'équipe de Géométrie et Topologie de Lille m'a accueilli chaleureusement. Je tiens à en remercier ses membres et, en particulier, Bernard Callenaere, Gérard Duminy, Aziz El Kacimi-Alaoui, Yves Félix, Youssef Hantout, Daniel Tanré et Jean-Claude Thomas.

Sans Gérard Coeuré, je serais encore à chercher la sortie du labyrinthe administratif "Habilitation". Je le remercie de m'avoir aidé à en sortir.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation matérielle de mes articles ; Raymonde Bérat, Arlette Lengaigne et Claudine Evrard pour la frappe, Monique Lloret, Françoise Wdowczyk, Albert Gournay et Michel Provost pour la reprographie.

AVANT PROPOS

Le but du texte qui suit est de donner une idée d'ensemble des travaux présentés. Nous essayons de montrer que presque tous ces travaux s'inscrivent dans une même ligne générale, dérivée de l'étude qualitative des équations différentielles. Les deux premiers paragraphes sont très généraux ; ils donnent une vision de la théorie des feuilletages dans son contexte historique et mathématique et introduisent les principaux objets mathématiques que nous étudions. Nous avons tenté de rester à un niveau très élémentaire de façon à rendre la lecture accessible à un mathématicien non spécialiste des systèmes dynamiques. Les trois paragraphes suivants décrivent une partie des résultats obtenus en les situant dans le contexte général décrit dans les deux premiers paragraphes.

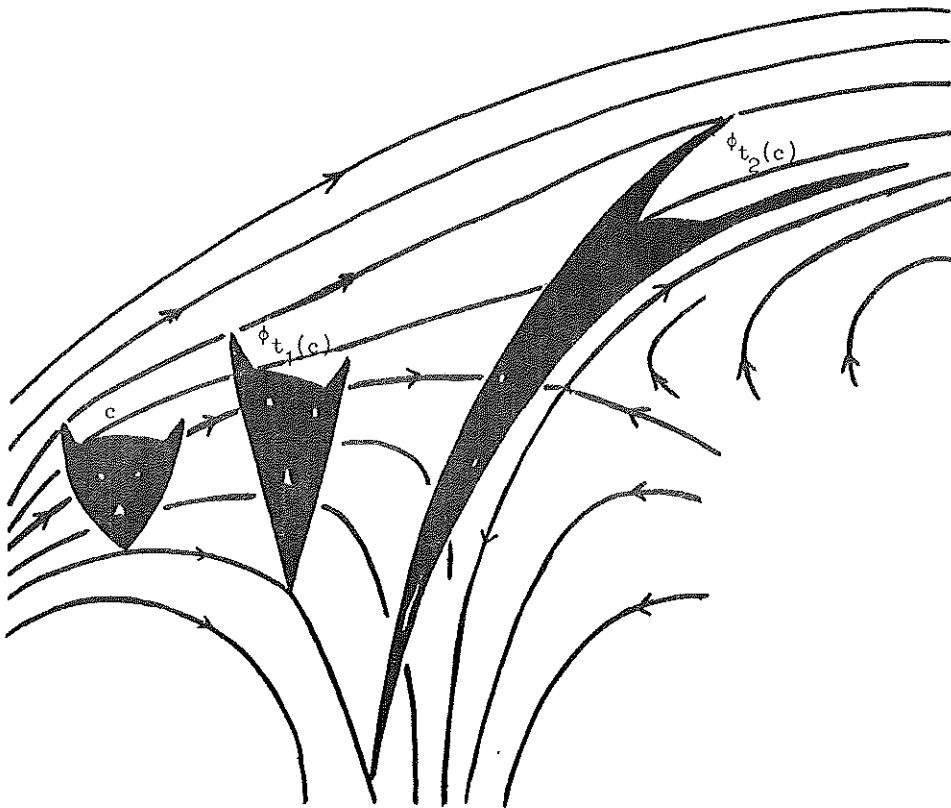


Figure 1 : Le flot d'un champ de vecteurs.

1 - LES SYSTEMES DYNAMIQUES "CLASSIQUES".

La théorie des systèmes dynamiques tire son origine d'un constat d'échec : la plupart des équations différentielles, même "simples", ne peuvent pas être résolues "explicitement". Pour remédier à cette situation, H. Poincaré a l'idée de remplacer l'étude analytique précise des solutions d'une équation différentielle par une étude qualitative de celles-ci. Pour illustrer cette idée, nous allons décrire un des premiers théorèmes obtenus : le théorème de Poincaré-Bendixson.

Supposons que l'on s'intéresse à un champ de vecteurs X sur la sphère de dimension 2, c'est-à-dire à une équation différentielle sur \mathbb{R}^2 qui se "compactifie bien" à l'infini. Dans une telle situation, les courbes intégrales de X (les "solutions" ou "trajectoires") définissent un flot global ϕ_t sur cette sphère S^2 . Précisément, si x est un point de S^2 et t est un réel quelconque (le "temps"), $\phi_t(x)$ est la valeur au temps t de la solution de X qui vaut x au temps $t_0 = 0$. Il est clair que l'étude des solutions de X est équivalente à celle du groupe à 1-paramètre de difféomorphismes ϕ_t . Il est alors naturel de s'intéresser au comportement asymptotique des solutions $\phi_t(x)$ lorsque le temps t tend vers l'infini. Dans ce but, on introduit, pour chaque x de S^2 , un ensemble limite $\omega(x)$ qui est l'ensemble des valeurs d'accumulation de $\phi_t(x)$ lorsque t tend vers $+\infty$. En termes de mécanique, $\omega(x)$ décrit le "régime permanent" du point x .

Essentiellement, le théorème de Poincaré-Bendixson affirme que la structure de cet ensemble limite $\omega(x)$ est très simple. En fait, si X n'a que des singularités isolées, $\omega(x)$ ne peut être que de l'un des trois types suivants :

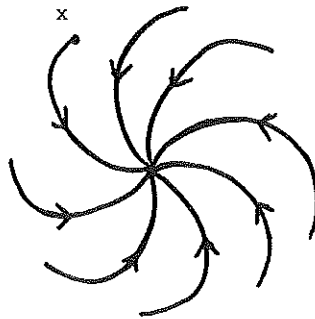


Figure 2 : Une singularité.

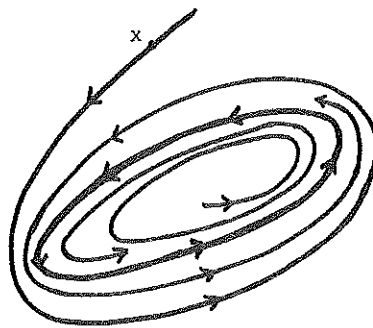


Figure 3 : Une orbite périodique

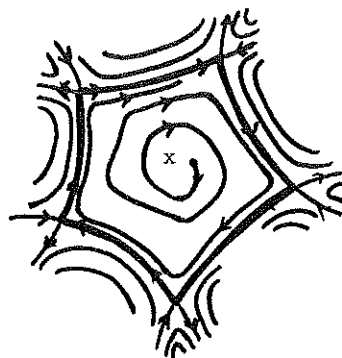


Figure 4 : Un cycle de singularités

a)

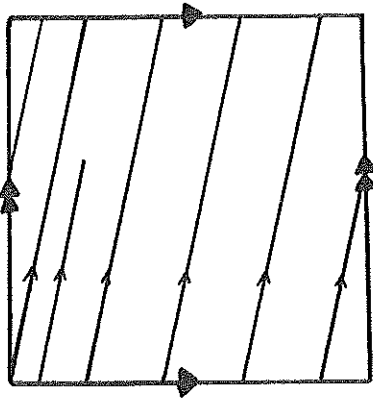
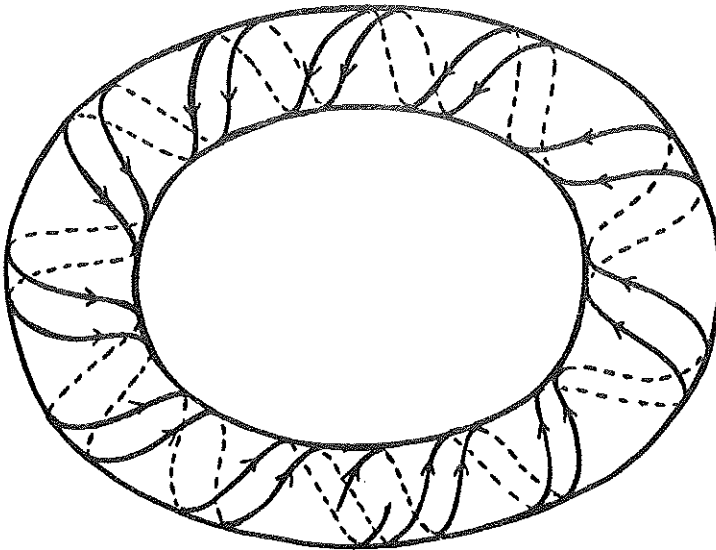


Figure 5 : Un flot linéaire sur un tore représenté, d'une part comme un carré dont on identifie les côtés opposés (a) et, d'autre part, comme un tore plongé dans l'espace (b).

b)



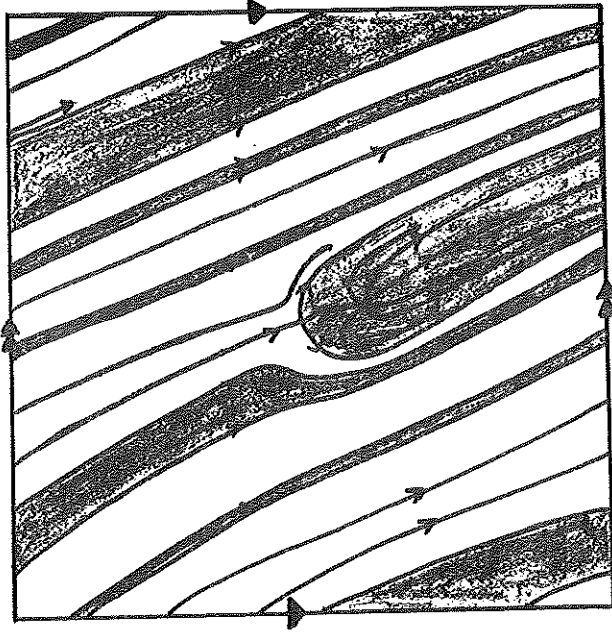


Figure 6 : Le flot de Cherry. La zone sombre est un ouvert invariant.
Tous les points du fermé complémentaire (sauf le point
selle) ont leur orbite positive dense dans ce fermé.

- 1 - Une singularité de X . Dans ce cas, l'orbite de X converge vers une position d'équilibre du système. (Figure 2).
- 2 - Une orbite périodique de X . Après un régime transitoire, le système est essentiellement périodique. (Figure 3).
- 3 - Un cycle de singularités, comme indiqué sur la figure 4.

H. Poincaré s'est immédiatement rendu compte que ce théorème ne peut être vrai que sur la sphère S^2 . En effet, considérons un tore T^2 de dimension 2, identifié à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et considérons le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}$. Le flot ϕ_t de X est défini par $\phi_t(x, y) = (x+t, y+\alpha t) \bmod \mathbb{Z}^2$ et les courbes intégrales de X ne sont autres que les projections dans T^2 des droites de \mathbb{R}^2 de pente α . Si α est irrationnel, ces courbes intégrales sont denses dans T^2 . (Figure 5).

Dans ce cas $\omega(x)$ est le tore T^2 tout entier et n'est donc pas de l'un des types 1, 2 ou 3 que nous avons décrits. Il est même possible de construire des champs de vecteurs sur T^2 pour lesquels $\omega(x)$ est encore plus complexe, par exemple, un fermé d'intérieur vide qui n'est ni une singularité ni une orbite périodique. (Figure 6).

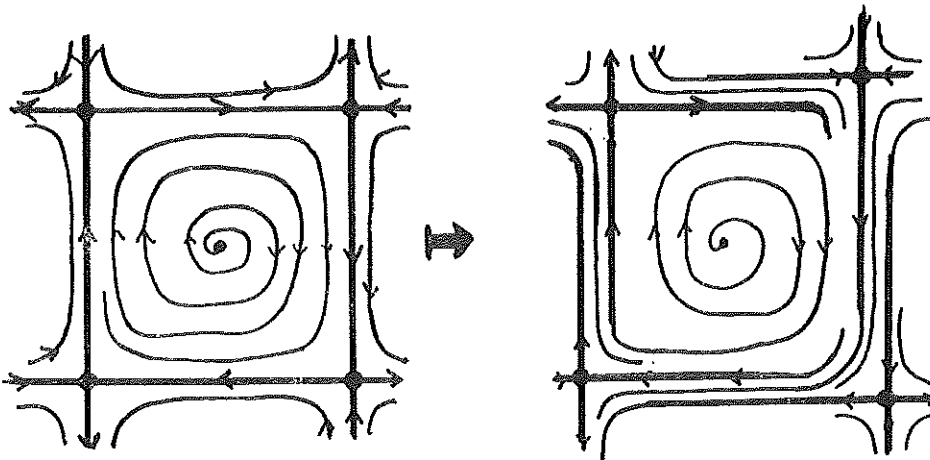


Figure 7 : Disparition d'un cycle de singularités par une petite perturbation.

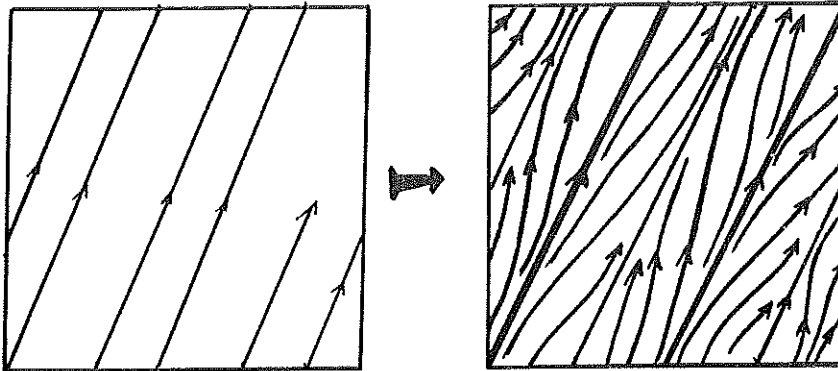


Figure 8 : Un flot linéaire du tore, qui ne satisfait pas le théorème de Poincaré-Bendixson, peut être approché par un flot qui le satisfait.

Ceci motive l'un des principaux problèmes des systèmes dynamiques. Quelle est l'influence de la topologie d'une variété sur la structure des ensembles limites des champs de vecteurs sur cette variété ?

Dans le cas des champs de vecteurs sur une surface, le théorème de Poincaré-Bendixson est cependant "presque vrai" dans le sens où il est vrai pour un ouvert dense de champs de vecteurs. Précisons ce résultat. Si Σ est une surface compacte, l'ensemble des champs de vecteurs sur Σ , de classe C^1 par exemple, forme un espace de Banach $\mathcal{X}^1(\Sigma)$. Il se trouve que, même si $\omega(x)$ peut être compliqué pour un champ individuel, il existe un ouvert dense U dans $\mathcal{X}^1(\Sigma)$ tel que, si X est un champ de U , alors, pour tout x de Σ , l'ensemble limite $\omega(x)$ est une singularité de X ou une orbite périodique. Ce résultat est dû à M. Peixoto. Notons que le cas 3, celui du cycle de singularités, n'apparaît pas dans cet ouvert dense : il s'agit d'un cas "exceptionnel". (Figure 7).

Partant du principe qu'il est sans espoir de décrire tous les champs de vecteurs sur une variété donnée, même qualitativement, on est alors mené à une autre question importante de la théorie. Est-il possible de décrire le comportement qualitatif d'une partie générique, i.e. suffisamment grande, de $\mathcal{X}(\Sigma)$. Pour des raisons techniques, la notion de "générique" n'est pas celle d'ouvert dense dans $\mathcal{X}(\Sigma)$ mais plutôt celle de Baire : une partie de $\mathcal{X}(\Sigma)$ est générique si elle est intersection dénombrable d'ouverts denses. Cette approche est due à S. Smale.

Il nous faut encore préciser ce que l'on entend par "décrire le comportement qualitatif". Pour ce faire, on introduit la définition fondamentale suivante : deux champs X et Y sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme entre les variétés supportant X et Y qui

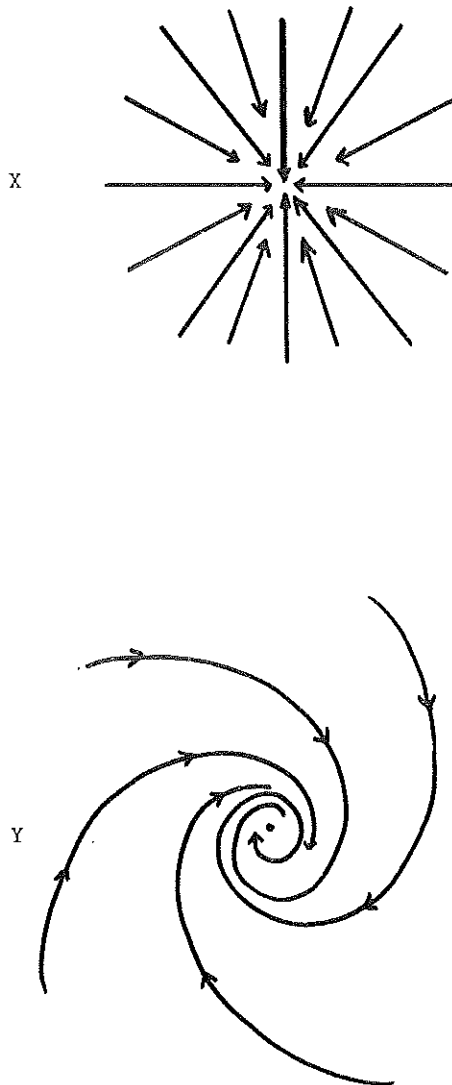


Figure 9 : Deux champs de vecteurs topologiquement équivalents mais non différentiablement équivalents.

envoie les orbites de X sur celles de Y , tout en respectant les orientations naturelles de ces orbites. L'expression "décrire le comportement qualitatif" signifie alors "classifier à équivalence topologique près". Insistons sur le fait qu'une équivalence topologique n'est le plus souvent qu'un homéomorphisme et pas un difféomorphisme. Voici un exemple simple. Soient X et Y les champs suivants de \mathbb{R}^2 : $X = -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$; $Y = (-x+y) \frac{\partial}{\partial x} - (x+y) \frac{\partial}{\partial y}$. Les orbites de X et de Y sont décrites sur la figure 9.

L'allure qualitative est la même : toutes les orbites de X et de Y convergent vers l'origine. Les champs X et Y sont topologiquement équivalents. L'allure différentiable n'est pas la même : on vérifie facilement qu'aucun difféomorphisme de \mathbb{R}^2 ne peut envoyer les orbites de X sur celles de Y .

En fait, le théorème de Peixoto décrit précédemment est plus fort : il donne une réponse complète à la question posée plus haut dans le cas des champs sur les surfaces. On définit une famille de champs dont le comportement qualitatif est simple et bien compris, appelés champs de Morse-Smale et M. Peixoto montre que ces champs de Morse-Smale forment un ouvert dense dans l'espace des champs sur la surface considérée. Ce faisant, il montre qu'une

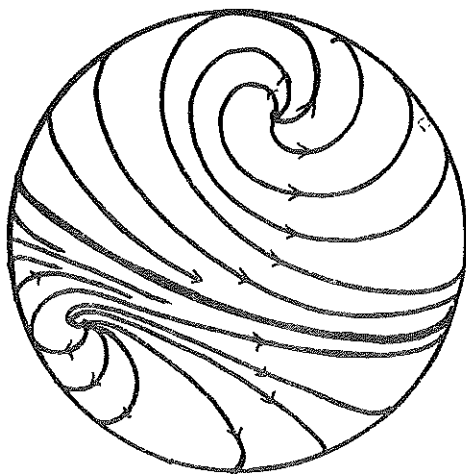


Figure 10 : Un exemple typique de champ de Morse-Smale sur la sphère.

propriété, introduite par L. Pontriaguine, est générique : celle de la stabilité structurelle. Un champ de vecteurs X est "structurellement stable" s'il existe un voisinage V de X dans $\mathcal{X}(\Sigma)$ tel que tous les champs de V sont topologiquement équivalents à X . En termes moins précis, une petite perturbation de X ne change pas son comportement qualitatif. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de M. Peixoto : l'ensemble des champs de Morse-Smale est générique dans $\mathcal{X}(\Sigma)$ et contient précisément les champs structurellement stables.

Ces résultats, valables sur les surfaces, laissaient espérer des résultats analogues sur les variétés de dimension supérieure. Il n'en est rien. D'une part, les champs structurellement stables ne sont plus génériques en général et, d'autre part, certains champs stables peuvent être "compliqués" (i.e. non Morse-Smale). La théorie des systèmes dynamiques entre alors dans une phase plus complexe et certainement moins "ambitieuse" : il ne s'agit plus de décrire tous les champs, ni même un ensemble générique, mais plutôt telle ou telle catégorie spécifique de champs.

Un exemple important de champ compliqué et stable est le flot géodésique d'une surface à courbure négative que nous décrivons maintenant. Soit Σ une surface compacte orientable munie d'une métrique riemannienne. L'ensemble des vecteurs tangents à Σ de longueur 1 forme une sous-variété $T_1(\Sigma)$ du fibré tangent $T\Sigma$ de Σ . Il s'agit d'une variété de dimension 3 fibrée en cercles au-dessus de Σ . Cette variété est naturellement munie d'un "flot géodésique" ϕ_t de la manière suivante : si v est un vecteur unitaire tangent à Σ en un point x , on considère la géodésique γ issue de x et pointant dans la direction de v . Soit y le point de γ situé à une distance algébrique t de x le long de γ et soit w

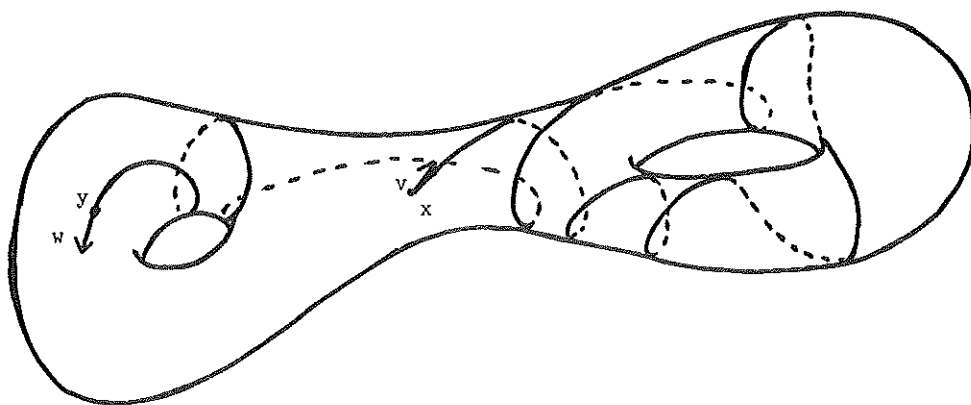
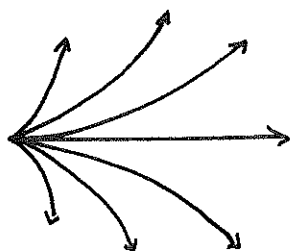
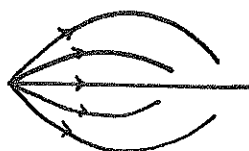


Figure 11 : Le flot géodésique d'une surface.



a)



b)

Figure 12 : Comportement des géodésiques en courbure positive (b) et négative (a). L'instabilité des géodésiques en courbure négative est responsable de la propriété d'Anosov du flot géodésique.

le vecteur unitaire tangent à γ en y . On pose alors $\phi_t(v) = w$.

Ce flot intervient naturellement en mécanique : c'est l'exemple le plus simple de système Hamiltonien (restreint à une surface d'énergie constante). De manière purement mathématique, il est clair que l'étude qualitative des orbites de ϕ_t revient à l'étude de la distribution des géodésiques sur une surface.

Ce flot est compliqué ; les ensembles limites peuvent être $T_1(\Sigma)$ tout entier (géodésique dense), un cercle (géodésique fermée) ou des ensembles autrement plus compliqués, liés aux ensembles de Cantor. Lorsque la courbure de Σ est négative, ce flot est structurellement stable : il s'agit d'un résultat fondamental d'Anosov.

Pour démontrer la stabilité structurelle de ce flot, Anosov n'utilise pas la structure précise de la variété ambiante. En fait, il montre qu'un flot vérifiant certaines propriétés est stable et que le flot géodésique d'une surface à courbure négative vérifie ces propriétés. Voici ces propriétés. Considérons, pour simplifier, un champ de vecteurs non singulier X sur une variété compacte M^3 de dimension 3. On dit que X est un champ d'Anosov

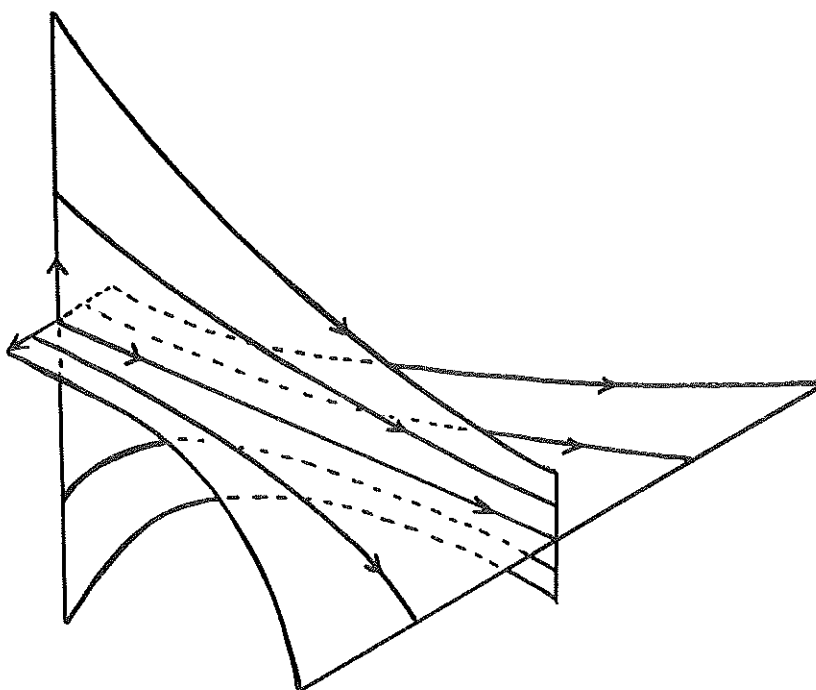


Figure 13 : Structure locale d'un flot d'Anosov.

le vecteur unitaire tangent à γ en y . On pose alors $\phi_t(v) = w$.

Ce flot intervient naturellement en mécanique : c'est l'exemple le plus simple de système Hamiltonien (restreint à une surface d'énergie constante). De manière purement mathématique, il est clair que l'étude qualitative des orbites de ϕ_t revient à l'étude de la distribution des géodésiques sur une surface.

Ce flot est compliqué ; les ensembles limites peuvent être $T_1(\Sigma)$ tout entier (géodésique dense), un cercle (géodésique fermée) ou des ensembles autrement plus compliqués, liés aux ensembles de Cantor. Lorsque la courbure de Σ est négative, ce flot est structurellement stable : il s'agit d'un résultat fondamental d'Anosov.

Pour démontrer la stabilité structurelle de ce flot, Anosov n'utilise pas la structure précise de la variété ambiante. En fait, il montre qu'un flot vérifiant certaines propriétés est stable et que le flot géodésique d'une surface à courbure négative vérifie ces propriétés. Voici ces propriétés. Considérons, pour simplifier, un champ de vecteurs non singulier X sur une variété compacte M^3 de dimension 3. On dit que X est un champ d'Anosov

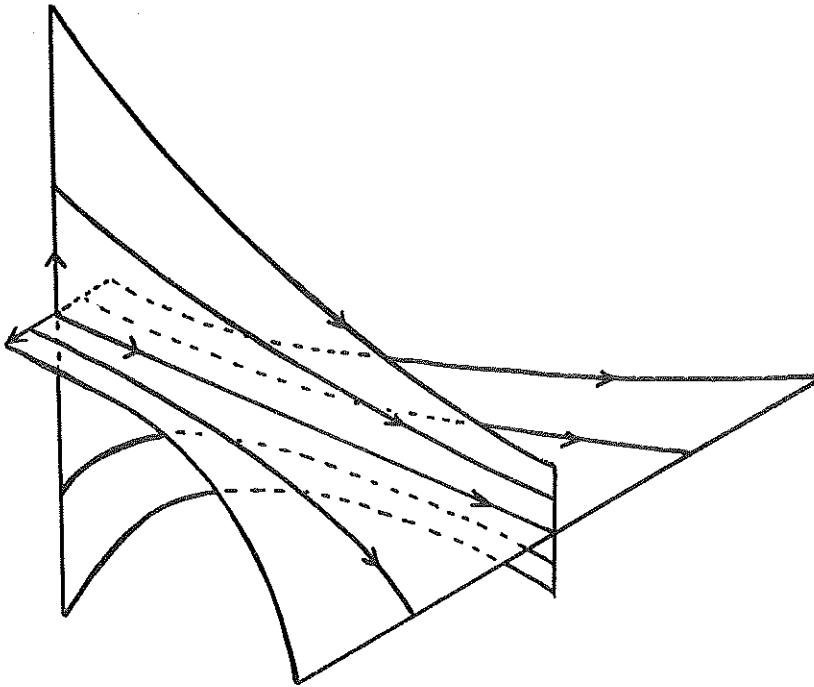


Figure 13 : Structure locale d'un flot d'Anosov.

(ou définit un flot d'Anosov) s'il existe deux champs de vecteurs Y et Z , de classe C^0 , en général, tels que, si ϕ_t désigne le flot de X :

- i) en chaque point X , Y , Z définit une base de l'espace tangent à M^3 .
- ii) la norme de $d\phi_t(Y)$ décroît exponentiellement lorsque t tend vers $+\infty$, et celle de $d\phi_t(Z)$ croît exponentiellement.

La famille des flots d'Anosov est l'une des familles de systèmes dynamiques dont on peut faire une étude précise. Elle jouit de propriétés extrêmement intéressantes. Outre la stabilité structurelle, les propriétés ergodiques (c'est-à-dire statistiques) des orbites ont été très étudiées. On s'est aussi intéressé au problème de la classification topologique de ces flots ; voir le paragraphe 3 pour quelques renseignements à ce sujet.

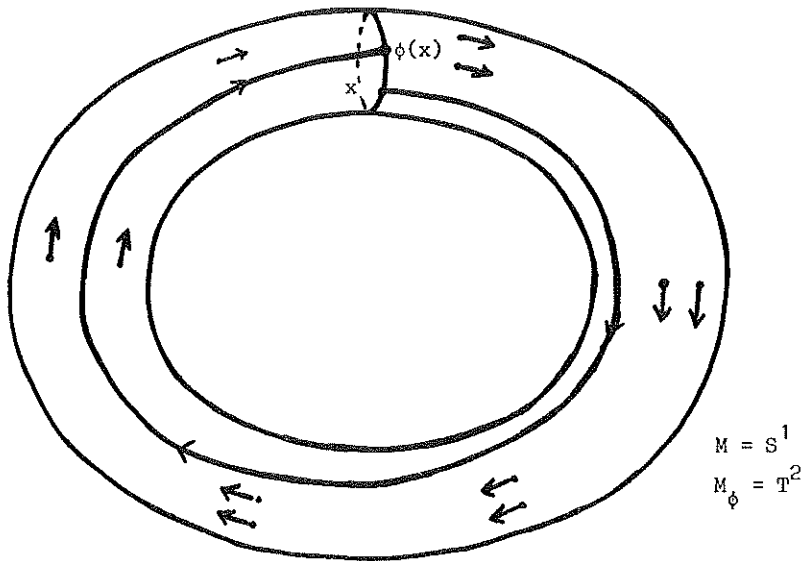
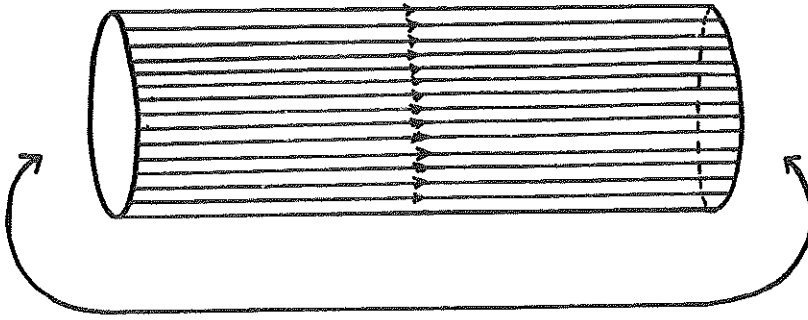


Figure 14 : suspension d'un difféomorphisme.

2 - LES DIVERSES GENERALISATIONS DE LA NOTION DE SYSTEME DYNAMIQUE.

Comme il est courant en mathématiques, l'évolution de la théorie qualitative des champs de vecteurs s'est faite parallèlement à une généralisation progressive des objets étudiés, dépassant le cadre strict des champs de vecteurs.

La première généralisation a été, en fait, une particularisation ! Plutôt que d'étudier un groupe à un paramètre réel de difféomorphismes ϕ_t , on est tenté de "discrétiser" le temps et de considérer en fait un "flot" ϕ_n dont le paramètre n est un entier de \mathbb{Z} . Puisque, dans ce cas $\phi_n = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_1$ (n fois), l'étude de la "cascade" ϕ_n (dans la terminologie d'Anosov) n'est rien d'autre que l'étude des itérées d'un difféomorphisme ϕ_1 d'une variété M .

A strictement parler, l'étude d'un difféomorphisme se ramène à celle d'un flot grâce au procédé dit de "suspension". Si ϕ est un difféomorphisme de M , on considère le produit $M \times \mathbb{R}$ muni du champ trivial $\frac{\partial}{\partial t}$. Le groupe des difféomorphismes de $M \times \mathbb{R}$ du type $(x, t) \rightarrow (\phi^n(x), t-n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) préserve $\frac{\partial}{\partial t}$. On obtient donc un champ de vecteurs X_ϕ sur la variété quotient M_ϕ qui est la suspension de ϕ . En fait, M_ϕ fibre au-dessus du cercle, les fibres étant difféomorphes à M . Le champ X_ϕ est transverse à cette fibration et $\phi : M \rightarrow M$ n'est autre que l'application de premier retour sur une fibre.

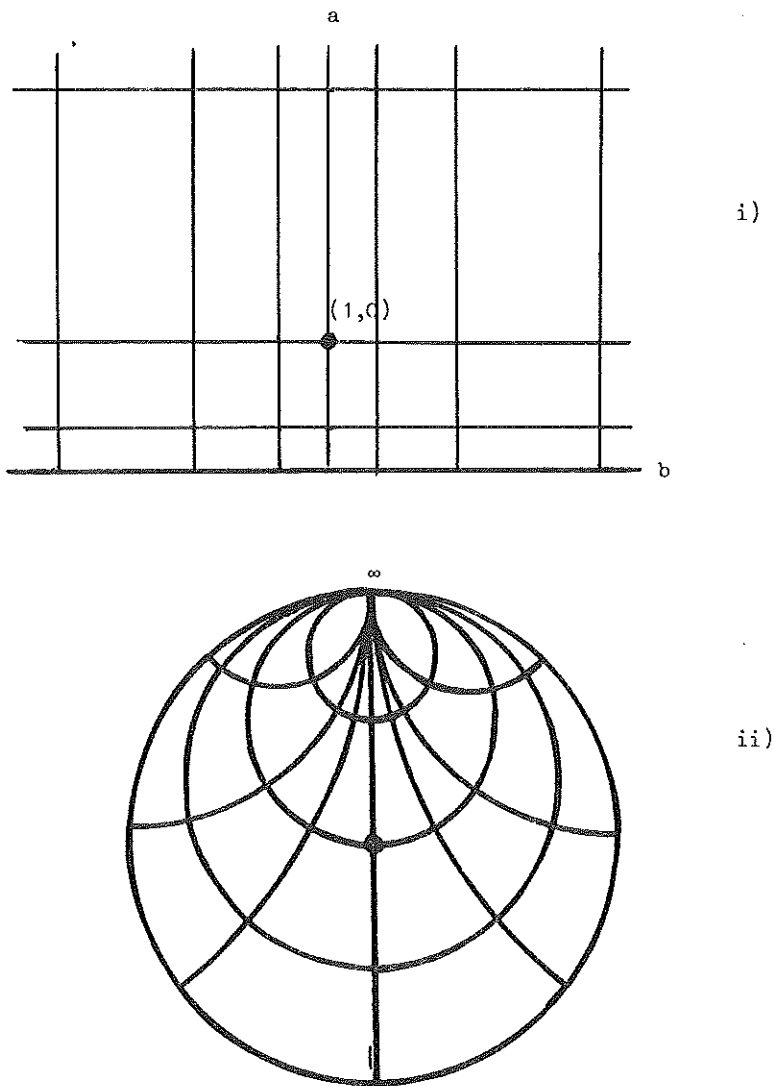


Figure 15 : Le groupe affine GA des bijections affines $ax+b$ de \mathbb{R} ($a > 0$). En i) on a représenté GA dans ses coordonnées "naturelles" a, b . En ii) on a effectué une représentation conforme du demi-plan sur le disque. De cette façon, GA s'identifie au disque de Poincaré ; la métrique hyperbolique étant invariante à gauche.

Il est clair que l'étude des itérées de ϕ est la même que celle des orbites de X_ϕ .

L'intérêt de cette notion est cependant d'indiquer une généralisation plus fructueuse, lorsque le temps n'est ni un réel, ni un entier, mais un élément d'un groupe Γ quelconque. Un système dynamique général ne sera rien d'autre qu'une action du groupe Γ sur une variété M , i.e. un morphisme $\Psi : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(M)$. Deux tels systèmes dynamiques Ψ et Ψ' seront topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme h de M tel que $\Psi' = h \circ \Psi \circ h^{-1}$. Les définitions fondamentales de la théorie classique s'étendent sans difficulté, par exemple celle de la stabilité structurelle.

Deux cas a priori distincts se présentent : celui où Γ est un groupe discret, par exemple un groupe de type fini et celui où Γ est un groupe "continu", typiquement un groupe de Lie. Voici un exemple de la deuxième situation. Considérons le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ des matrices 2×2 de déterminant 1 et le sous-groupe $GA \subset SL(2, \mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Le groupe GA est un groupe de Lie de dimension 2, isomorphe au groupe affine de \mathbb{R} (d'où la notation). Soit Γ un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que le quotient $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ est compact. Puisque GA est un sous-groupe de $SL(2, \mathbb{R})$, il opère par translations à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})$ et donc sur la variété compacte $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ qui est de dimension 3. Il s'avère que l'étude de ce système dynamique généralisé est intimement liée à celle du flot géodésique d'une surface à courbure négative constante. Pour un choix convenable de Γ , cette variété $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ n'est autre que le fibré unitaire tangent d'une telle surface. Si X, Y, Z désigne une base de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ correspondant respectivement aux matrices diagonales, strictement triangulaires supérieures et inférieures, les rela-

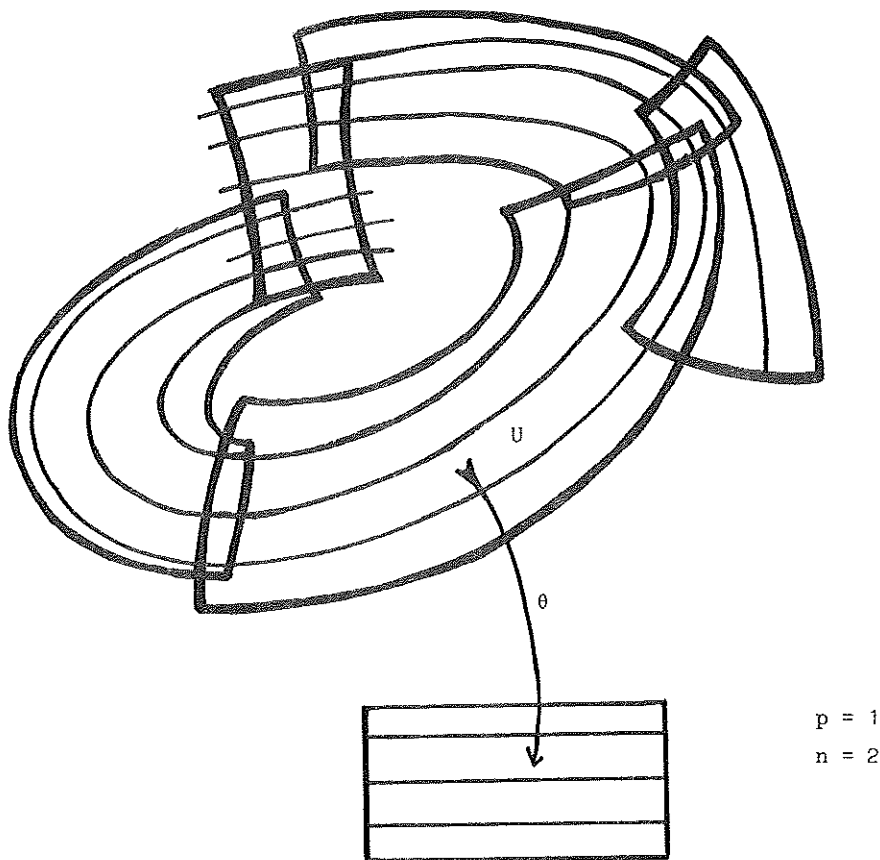


Figure 16 : Structure locale d'un feuilletage (ici $n=2$ et $p=1$).

tions de commutation sont $[X, Y] = Y$; $[X, Z] = -Z$ et $[Y, Z] = 2X$. Le flot de $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ correspondant à X est le flot géodésique, celui correspondant à Y (ou Z) est le flot "horocyclique". Les deux champs X et Y engendrent l'action de GA sur $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$. Les relations infinitésimales $[X, Y] = Y$ et $[X, Z] = -Z$ montrent que le flot de X dilate Y et contracte Z ; le flot de X est d'Anosov.

Avec une telle notion de système dynamique généralisé, on peut se demander si le théorème de Poincaré-Bendixson peut s'étendre dans certaines situations. Ce problème a été effectivement étudié, en particulier, lorsque le groupe qui agit est relativement simple, par exemple \mathbb{R}^2 . Citons le théorème de E. Lima : si \mathbb{R}^2 opère sur la sphère de dimension 3, alors il existe au moins une orbite qui est un cercle (mouvement "périodique") ou un point ("position d'équilibre").

En fait, l'étude qualitative des actions de groupes a montré rapidement un phénomène surprenant : le paramètre, c'est-à-dire la structure de groupe n'intervient, que très peu. La propriété importante est la structure locale d'une action, ce qui a mené à introduire la notion générale de feuilletage et de pseudo-groupe.

Un feuilletage est un système dynamique général "non paramétré". Précisément, une variété M est feuilletée si elle est réunion disjointe de sous-variétés immergées de même dimension p , appelées feuilles (analogues aux orbites ou trajectoires) avec la condition de trivialité locale suivante :

Pour tout point x de M , il existe une carte locale θ d'un voisinage U de x sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ telle que θ envoie les composantes connexes des intersections des feuilles avec U sur les "plaques" $\mathbb{R}^p \times \{*\}$. L'entier p est la dimension du feuilletage et $n-p$ est sa codimension.

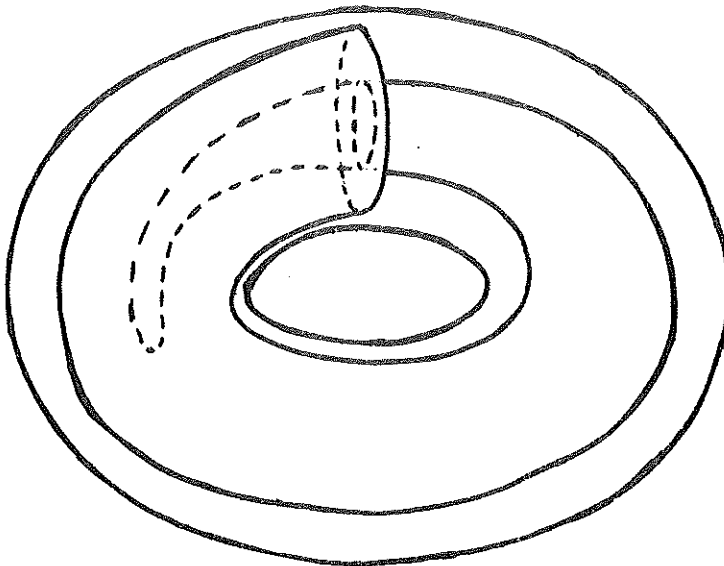
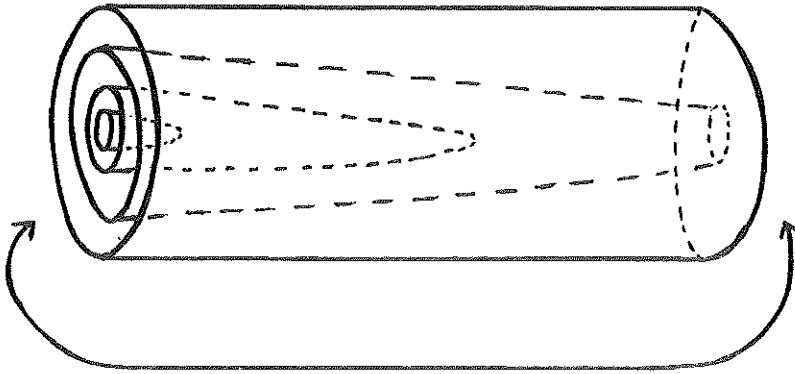


Figure 17 : Le feuilletage de Reeb sur le tore solide.

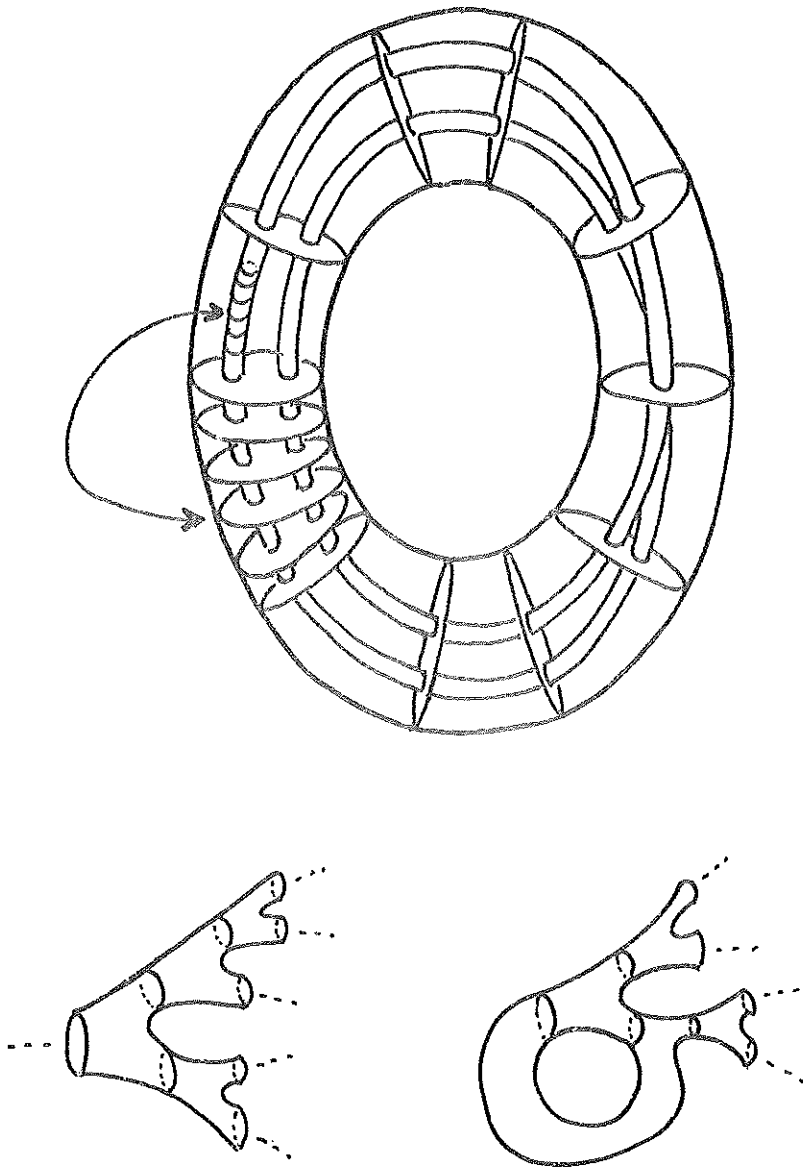


Figure 18 : Un exemple de feuilletage structurellement stable :
le feuilletage de M. Hirsch. La variété de dimension 3
ci-dessus a deux tores dans son bord ; elle est feuilletée
par "pantalons". En recollant convenablement les composantes
du bord entre elles, on obtient le feuilletage considéré.
On a dessiné plus bas deux exemples de feuilles.

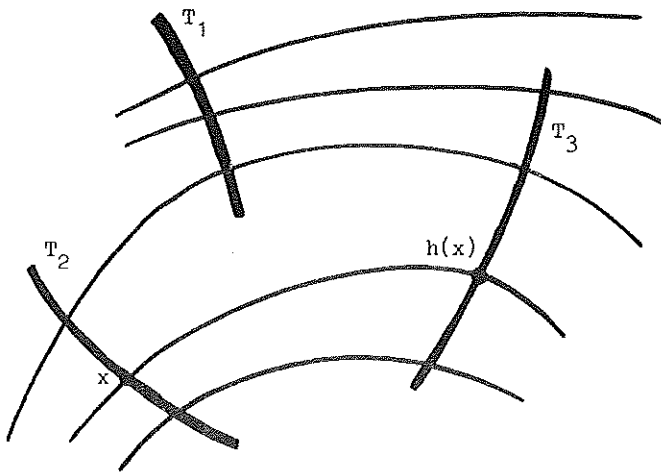


Figure 19 : Le pseudo-groupe transverse d'un feuilletage.

Par exemple, un feuilletage de dimension 1 est un champ de droites, ou, plus précisément, les courbes intégrales d'un tel champ.

Un grand nombre des propriétés des systèmes dynamiques classiques se généralisent aux feuilletages. Un exemple typique de théorème "à la Poincaré-Bendixson" est le théorème de Novikov : tout feuilletage de codimension 1 sur la sphère S^3 possède une feuille compacte homéomorphe à un tore T^2 , ce qui est l'analogue d'un mouvement périodique. Plus précisément, ce tore borde une "composante de Reeb", c'est-à-dire un tore solide $D^2 \times S^1$ feuilleté comme indiqué sur la figure 18.

On peut alors se poser des questions analogues à celles posées précédemment : quelle est l'influence de la topologie d'une variété sur la structure des feuilletages qu'elle supporte ? Existe-t-il des feuilletages structurellement stables ? etc...

Puisque les feuilles d'un feuilletage ne sont pas paramétrées, on est amené à étudier sa "dynamique transverse". Pour ce faire, on considère une collection T_i de sous-variétés de dimension $n-p$ qui sont transverses aux feuilles et dont la réunion coupe toutes les feuilles.

Si T_i et T_j sont deux de ces transversales, on considère alors les homéomorphismes h d'un ouvert de T_i sur un ouvert de T_j tels que, pour tout x , les points x et $h(x)$ sont sur la même feuille. La collection de ces homéomorphismes locaux définit un "pseudo-groupe" d'homéomorphismes de la transversale $T = \bigcup T_i$. Essentiellement, un pseudo-groupe est un groupe où la composition n'est pas définie pour toute paire d'éléments. Le pseudo-groupe que nous venons d'introduire est le pseudo-groupe transverse du feuilletage considéré ; ses orbites, contenues dans T , sont les intersections des feuilles avec T . En fait, l'étude du feuilletage se ramène à

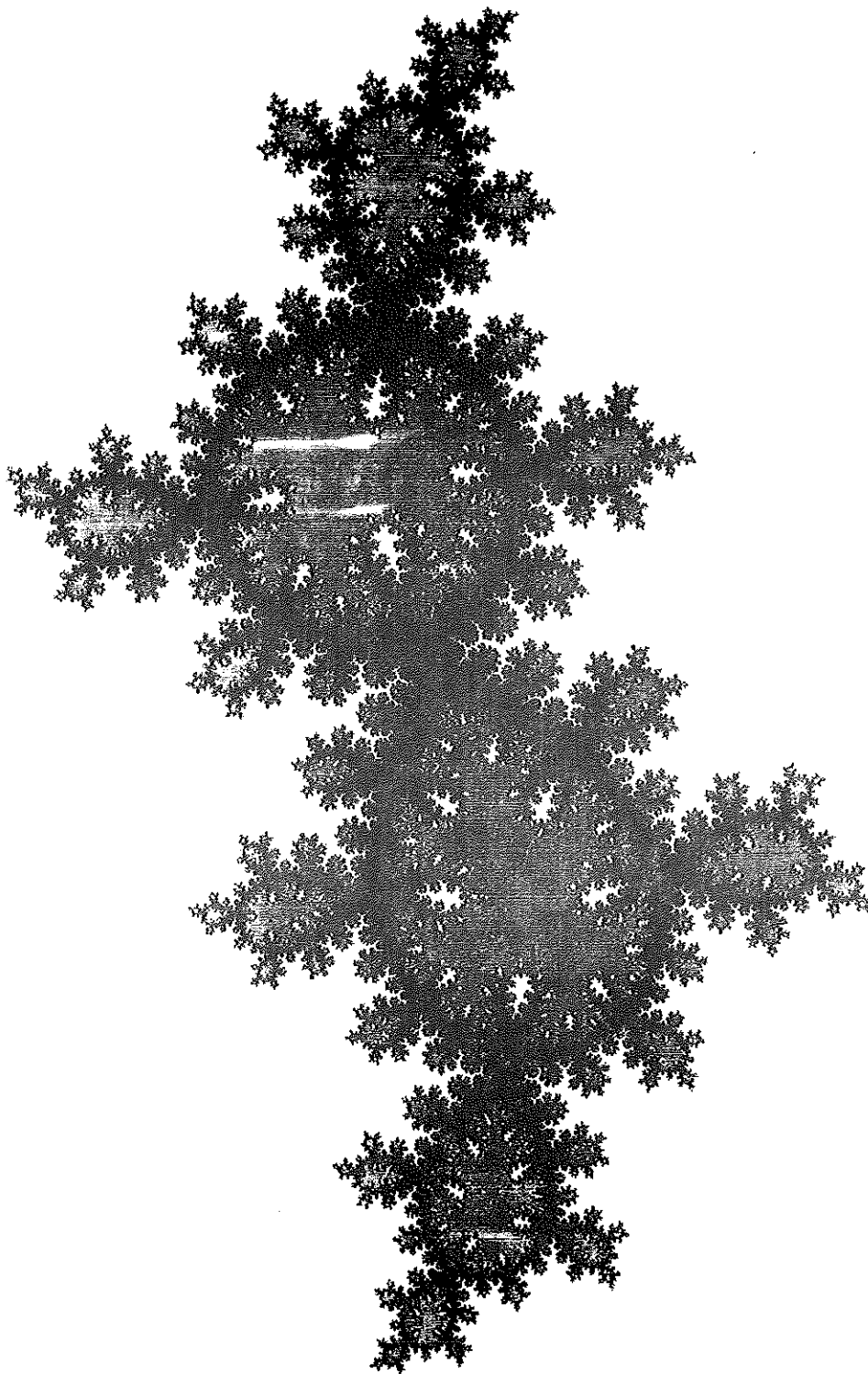


Fig. 20 - L'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle (ici de degré 3 : $R(z) = Z^2 \cdot \frac{z-a}{1-az}$). Il s'agit du plus petit compact non trivial invariant par la fraction rationnelle.

celle du pseudo-groupe transverse. En définitive, nous arrivons à une notion extrêmement générale de système dynamique : un pseudo-groupe d'homéomorphismes locaux. Cette conception est due à A. Haefliger.

De même que dans le cas des flots, il n'y a pas d'espoir d'étudier très précisément les feuilletages les plus généraux ; on impose en général une condition spécifique sur le pseudo-groupe transverse. Nous ne citerons que deux exemples de ce genre de condition dont nous reparlerons plus loin. La première consiste à imposer à la codimension du feuilletage d'être égale à 1 ; on obtient alors une théorie extrêmement riche. Dans une autre direction, on peut demander que le pseudo-groupe transverse soit un pseudo-groupe d'isométries de T pour une certaine métrique riemannienne sur T . On dit alors que le feuilletage est riemannien. En termes imagés, la distance entre deux feuilles d'un feuilletage riemannien est constante. Le problème de la structure des feuilletages riemanniens est maintenant assez bien compris (voir le paragraphe 4).

Un autre cas de pseudo-groupe rencontré naturellement provient de l'étude dynamique d'une application $\phi : M \rightarrow M$ qui n'est pas supposée bijective. Dans ce cas, on ne peut itérer ϕ que positivement, de sorte que l'on dispose d'un système dynamique dont le temps n'est qu'un semi-groupe \mathbb{N} . Cette situation se ramène à la précédente en considérant le pseudo-groupe engendré par ϕ et les diverses "branches" de l'inverse de ϕ . Une famille d'exemples extrêmement riche a été étudiée par G. Julia et P. Fatou au début du siècle et reprise récemment. Il s'agit de l'étude dynamique des fractions rationnelles d'une variable complexe, vues comme transformations de la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$ dans elle-même (non bijectives en général). Les travaux récents ont montré que les généralisations successives dont nous

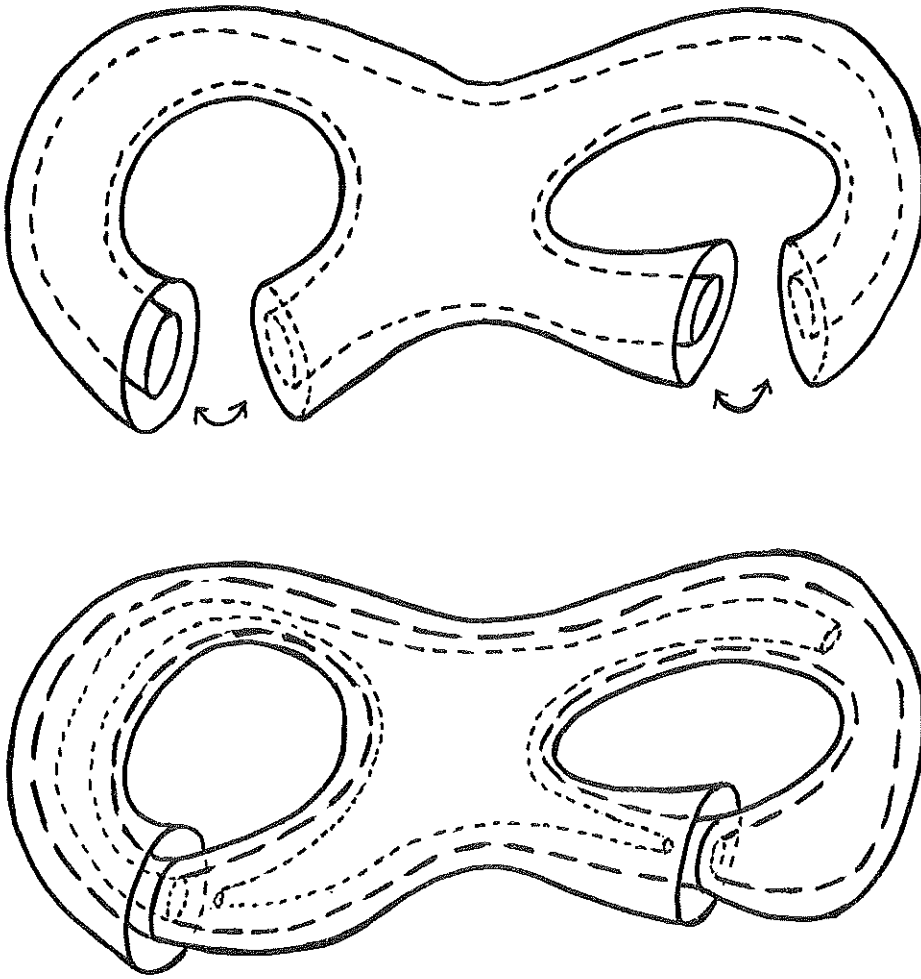


Figure 21 : On a représenté ici la suspension d'une représentation $\phi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$ qui transite à travers un groupe libre.

parlons ne sont pas gratuites ; des techniques communes permettent d'aborder ces fractions rationnelles et les groupes Kleinien, c'est-à-dire les actions d'un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur la sphère de Riemann (D. Sullivan). Un autre exemple a été abordé : il s'agit de la dynamique de l'application $z \mapsto \exp(z)$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . L'article [11], en collaboration avec L. Goldberg et D. Sullivan est une contribution à ce problème.

Pour conclure ces remarques générales, notons que ces diverses généralisations sont liées entre elles. Par exemple, soit Γ le groupe fondamental d'une variété B et considérons une action de Γ sur une variété F . On peut alors construire un feuilletage dont le comportement mime celui de l'action de Γ . Cette construction est la généralisation de la suspension décrite plus haut. Pour cela, on considère le produit $\tilde{B} \times F$ du revêtement universel de B par F . Le groupe Γ opère sur $\tilde{B} \times F$ diagonalement, sur \tilde{B} par automorphismes du revêtement universel et sur F par l'action donnée. La variété quotient par cette action est naturellement munie d'un feuilletage qui provient du feuilletage trivial de $\tilde{B} \times F$ dont les feuilles sont $\tilde{B} \times \{*\}$. La variété quotient fibre au-dessus de B avec une fibre difféomorphe à F . La "monodromie" de ce fibré n'est rien d'autre que l'action de Γ sur F . Ici, encore, il est clair que les études du feuilletage suspendu et de l'action sont essentiellement identiques.

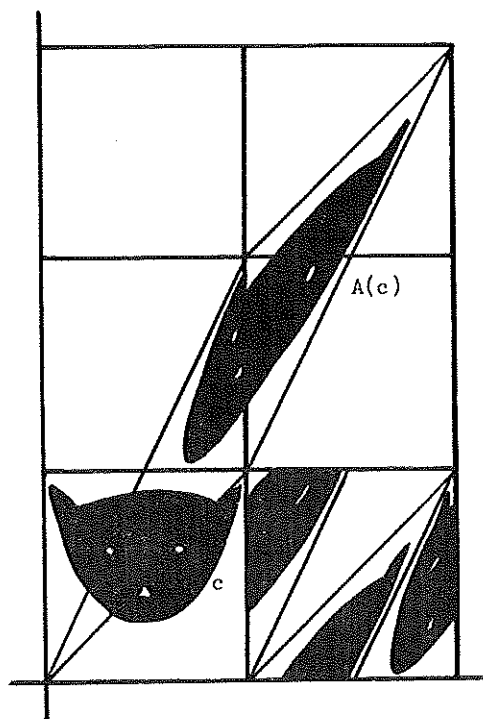


Figure 22 : Le difféomorphisme $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'après Arnold.

3 - FEUILLETAGES ET FLOTS D'ANOSOV.

Le travail [1], en collaboration avec V. Sergiescu, entre directement dans le cadre général décrit plus haut, c'est-à-dire l'étude de l'influence de la topologie d'une variété sur le comportement qualitatif de ses feuilletages. Précisément, nous essayons de généraliser le théorème de Novikov aux variétés de dimension trois les plus "simples", à savoir celles dont le groupe fondamental est résoluble. A strictement parler, ce théorème ne se généralise pas ; par exemple, le tore T^3 de dimension 3 possède des feuilletages linéaires de codimension 1 qui ne contiennent pas de composante de Reeb. Nous sommes cependant en mesure de décrire toutes les "exceptions", c'est-à-dire tous les feuilletages de codimension 1, sans composantes de Reeb, sur les 3-variétés compactes à groupe fondamental résoluble.

Cette classification, que nous ne décrirons pas ici, met en évidence une famille remarquable de feuilletages, que nous appelons "feuilletages modèles".

Considérons une matrice A de $SL(2, \mathbb{Z})$, diagonalisable sur \mathbb{R} et dont l'une des valeurs propres est strictement supérieure à 1. L'automorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 associé à A préserve \mathbb{Z}^2 et définit donc, par passage au quotient, un difféomorphisme du tore $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ encore noté A . Evidemment, ce difféomorphisme A préserve le feuilletage de T^2 dont les feuilles sont les projections dans T^2 des droites de \mathbb{R}^2 parallèles à l'une des directions propres de A . La variété produit $T^2 \times \mathbb{R}$ est alors munie d'un feuilletage produit de codimension 1 qui est invariant par le groupe de difféomorphismes envoyant le point (x, t) sur $(A^n(x), t-n)$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). La variété quotient, notée T_A^3 , est alors équipée d'un feuilletage de codimension 1 qui est le "feuilletage modèle associé à A ".

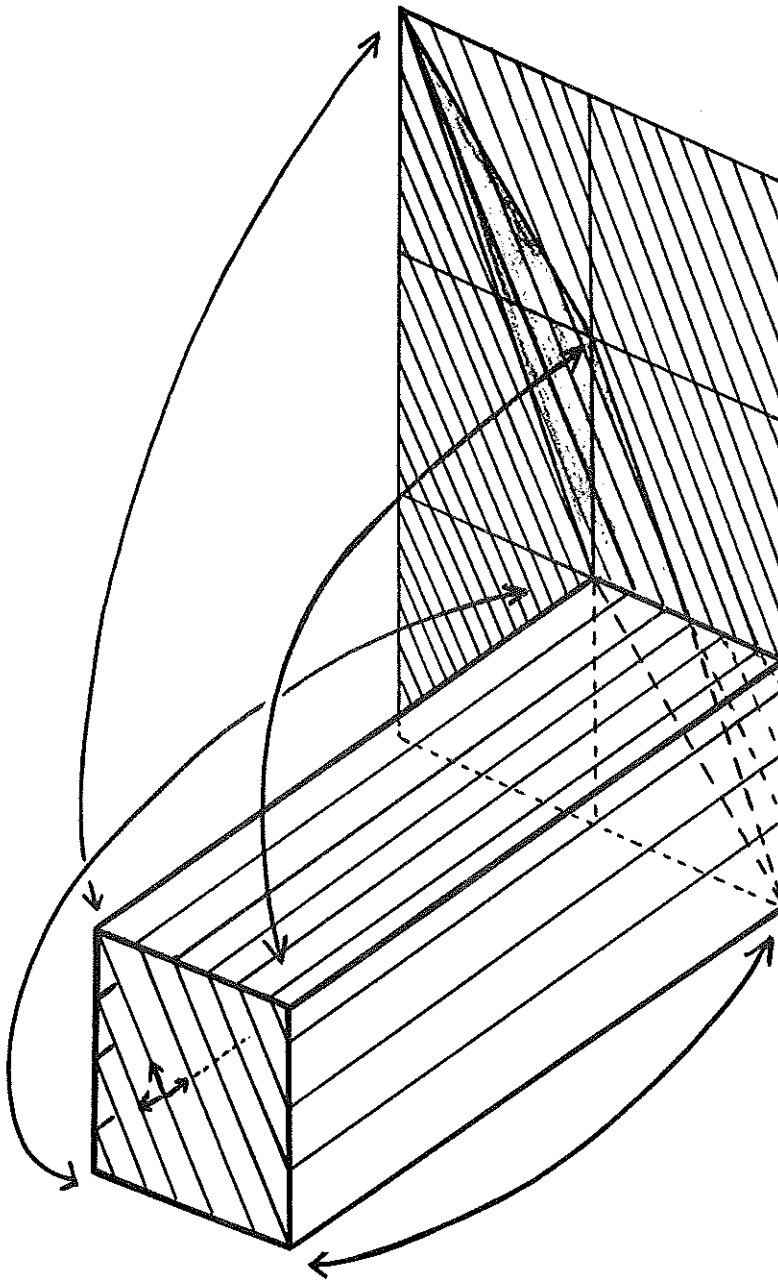


Figure 23 : Le feuilletage modèle.

Ces feuilletages possèdent des propriétés remarquables. Le point le plus intéressant est certainement le fait qu'ils sont classifiables à conjugaison différentiable près. Précisément, nous montrons le théorème suivant : si F est un feuilletage de classe C^∞ , de codimension 1, sans feuilles compactes, sur T_A^3 , alors F est C^∞ -conjugué au feuilletage modèle associé à A . Ce théorème est surprenant dans la mesure où, comme nous l'avons indiqué en 1, les systèmes dynamiques classiques ne peuvent être classifiés qu'à équivalence topologique près.

Essentiellement, la démonstration de ce théorème se fait en deux temps. En utilisant des techniques classiques, on commence par modifier F par isotopie de façon à se ramener au cas où F est transverse à la fibration en tores T^2 de T_A^3 . On étudie alors la trace de F sur l'une de ces fibres et on montre que le nombre de rotation du feuilletage induit (voir paragraphe 5) est un nombre algébrique de degré 2 (correspondant à une valeur propre de A). Pour conclure, on applique alors le théorème de M. Herman suivant lequel un tel feuilletage de T^2 est C^∞ -conjugué à un feuilletage linéaire.

Il n'est pas difficile de montrer qu'un feuilletage proche d'un feuilletage modèle ne peut posséder de feuilles compactes. Comme corollaire, on obtient une propriété de stabilité structurelle forte : tout feuilletage de classe C^∞ , suffisamment proche d'un feuilletage modèle est C^∞ -conjugué à celui-ci. Ceci constitue le premier exemple de feuilletage sans feuille compacte possédant une telle propriété forte de stabilité.

Signalons, par ailleurs, que les composantes de Reeb d'un

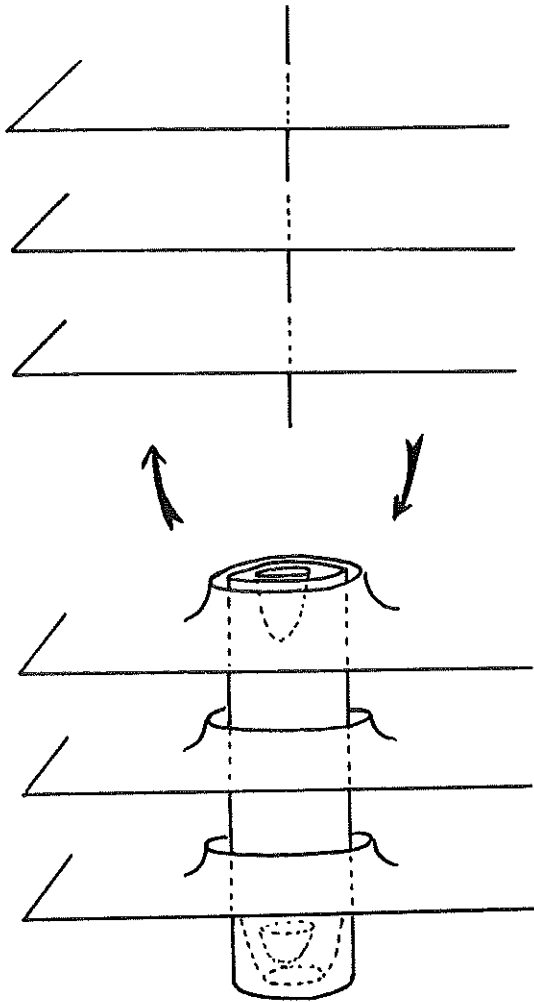


Figure 24 : Le (dé)-tourbillonnement. On modifie le voisinage d'une transversale à un feuilletage pour y introduire une composante de Reeb. Dans le cas analytique, une composante de Reeb peut toujours être éliminée par le procédé inverse.

feuilletage analytique peuvent toujours être éliminées par un procédé simple (le "détourbillonnement", voir figure 24). Ceci permet de décrire complètement tous les feuilletages analytiques sur les 3-variétés à groupe fondamental résoluble.

Cette étude est intimement liée à la structure des flots d'Anosov sur les variétés de dimension 3. Dans les conditions décrites plus haut, le difféomorphisme A de T^2 est un difféomorphisme d'Anosov ; c'est-à-dire qu'il existe deux champs de vecteurs Y et Z sur T^2 qui sont respectivement contractés et dilatés par A . Ces champs correspondent aux directions propres de A . La suspension de A fournit alors un flot d'Anosov sur T_A^3 . Les champs Y et Z de T^2 permettent alors de construire des champs encore notés Y et Z sur T_A^3 . Si X désigne le champ de vecteur de T_A^3 obtenu par suspension de A , on obtient ainsi trois champs X, Y, Z qui vérifient les relations de commutations infinitésimales suivantes : $[X, Y] = Y$; $[X, Z] = -Z$; $[Y, Z] = 0$. En observant que la relation $[X, Y] = Y$ définit l'algèbre de Lie du groupe affine GA décrit en 2, on obtient que les feuilletages modèles peuvent être paramétrés par une action (localement libre) du groupe GA sur T_A^3 . Cet exemple illustre bien les diverses généralisations de la notion de système dynamique ; sur T_A^3 , sont présents un flot d'Anosov (X), une action de groupe et un feuilletage de codimension 1.

Ces phénomènes de rigidité différentiable des feuilletages modèles restaient quelque peu mystérieux. Étaient-ils dûs à la structure de la variété ambiante ou, au contraire, au fait qu'ils sont définis par une action de GA ? Cette question est la motivation essentielle de [10] où nous nous intéressons à l'étude dynamique des actions localement libres de GA sur une variété compacte de dimension 3 supposée a priori quelconque. Effectivement, les ré-

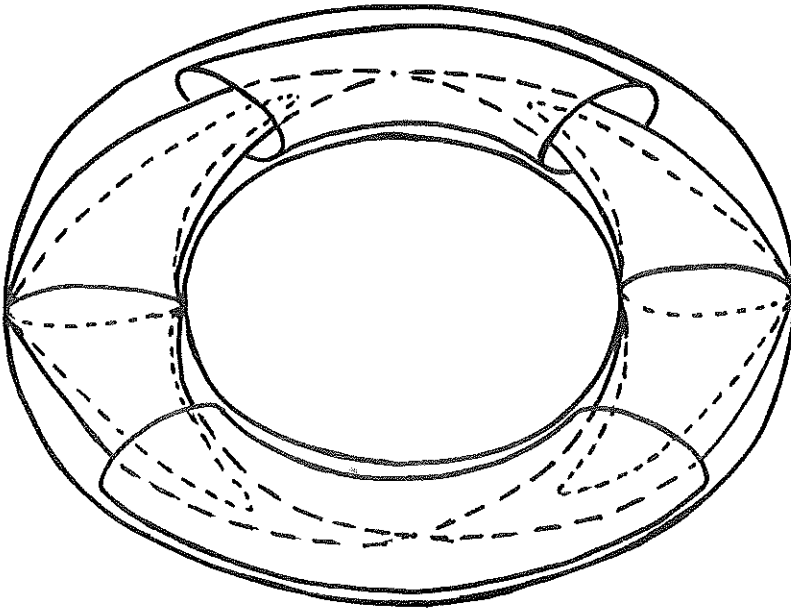


Figure 25 : Les classes de conjugaisons de $SL(2, \mathbb{R})$. Tout élément de $SL(2, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $R.M$ où $R \in SO(2)$ et $M \in GA$. Puisque GA s'identifie au disque de Poincaré, $SL(2, \mathbb{R})$ s'identifie à l'intérieur d'un tore solide.

sultats obtenus montrent que les phénomènes de rigidité proviennent de la structure du groupe GA .

Voici les résultats principaux de ce travail (nous décrirons en 4 un important corollaire lié aux groupes fuchsien). Nous avons déjà rencontré deux exemples d'actions de GA : celles correspondant au flot géodésique, i.e. sur $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ et, d'autre part, celles que nous venons de décrire sur T_A^3 . Le premier résultat important de [10] est le suivant : si $\phi : GA \times M^3 \rightarrow M^3$ est une action localement libre, de classe C^∞ , qui préserve un volume sur M^3 , alors, en fait, M^3 est du type T_A^3 ou $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}/\Gamma$ (où $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ est le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$). De plus, l'action étudiée est C^∞ -conjugée à l'une des actions que nous avons décrites.

Le principe de la démonstration est le suivant. Par hypothèse, nous disposons de deux champs de vecteurs X et Y sur M^3 , linéairement indépendants en chaque point, qui vérifient la relation $[X, Y] = Y$. Nous cherchons à construire un groupe de Lie G de dimension 3 qui contient GA et une action localement libre de G sur M^3 qui étende celle de GA . De cette façon, M^3 sera un espace homogène de G et l'action de GA sur M^3 sera l'action naturelle de $GA \subset G$ sur $M^3 \cong G/\Gamma$. Il sera alors facile de conclure. Construire ce groupe G revient à construire un troisième champ de vecteurs Z sur M^3 , partout indépendant de $\{X, Y\}$ et tel que les crochets $[X, Z]$ et $[Y, Z]$ soient des combinaisons linéaires de X, Y, Z à coefficients constants. Ceci mène à une équation fonctionnelle qui est linéaire lorsque l'action de GA étudiée préserve le volume. Dans cette situation, on peut effectivement résoudre cette



Figure 26 : L'action de GA sur le fibré unitaire tangent d'une surface à courbure -1 . La surface est représentée par un octogone dans le plan hyperbolique ; les verticales correspondent aux fibres de la fibration en cercles de $T_1(\Sigma)$. Chaque "plaque" horizontale est un "morceau" d'orbite de GA . Cette figure illustre la structure d'Anosov du champ X de GA .

équation fonctionnelle grâce au fait que les représentations unitaires irréductibles de GA dans les espaces de Hilbert sont complètement classifiées.

On peut cependant se demander dans quelle mesure l'hypothèse concernant le volume est importante. Nous avons répondu à cette question en imposant une condition sur la topologie de la variété ambiante M^3 : si le premier nombre de Betti de M^3 est nul, alors toute action localement libre de GA sur M^3 préserve un volume. Sur ces "sphères d'homologie", l'étude des actions localement libres de GA est donc complètement élucidée.

Deux techniques importantes sont mises en action pour démontrer ce dernier résultat. D'une part, nous utilisons la notion de partition de Markov qui permet de ramener l'étude dynamique d'un difféomorphisme d'Anosov à une "dynamique symbolique" (voir figure 27). D'autre part, nous utilisons la théorie d'Osseledec-Pesin-Ruelle qui permet d'étudier le comportement asymptotique de la différentielle des itérées d'un difféomorphisme.

Avec une motivation similaire, nous avons cherché à savoir quelles sont les variétés de dimension 3 qui admettent un flot d'Anosov et, de manière plus générale, à décrire ces flots. P. Armandariz et J. Plante avaient déjà montré que si M est une 3-variété dont le groupe fondamental est résoluble et qui admet un flot d'Anosov, alors M est, en fait, T_A^3 pour une certaine matrice A et le flot est topologiquement équivalent à la suspension de A . Nous avons étudié ce même problème sur le fibré unitaire tangent d'une surface. Notre résultat principal est le suivant [5] : Soit M une variété qui est un fibré en cercles au-dessus d'une surface Σ et ϕ_t un flot d'Anosov sur M . Alors M est un revêtement

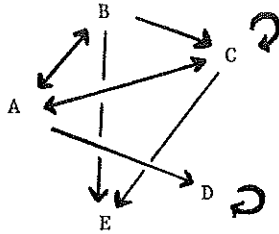
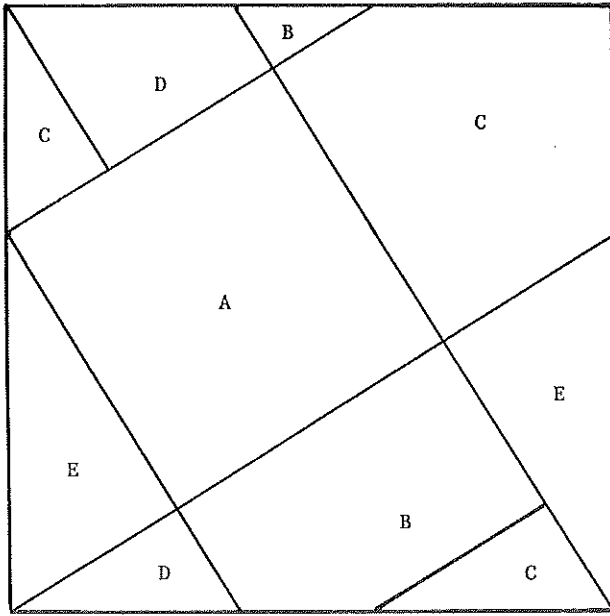


Figure 27 : Une partition de Markov pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le tore T^2 est décomposé en 5 rectangles A, B, C, D, E. On construit le graphe associé : une arête relie A à D par exemple car $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (A) \cap D \neq \emptyset$. A "presque" tout point x de T^2 correspond un chemin infini dans ce graphe correspondant aux rectangles successivement visités par x . Réciproquement, le chemin dans le graphe permet de reconstruire x .

fini du fibré unitaire tangent à Σ et le flot ϕ_t est topologiquement équivalent au relevé dans M du flot géodésique de Σ muni d'une métrique quelconque à courbure négative. Nous décrivons ainsi tous les fibrés en cercles de dimension 3 qui admettent un flot d'Anosov ainsi que la dynamique de ceux-ci. La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur deux faits géométriques. Le premier, que nous retrouverons au paragraphe 4, est le suivant : Soit ϕ_t un flot non singulier sur une variété M tel que $d\phi_t$ préserve un champ d'hyperplans transverse à ϕ_t (par exemple un flot d'Anosov), alors il existe une métrique sur M telle que les orbites de ϕ_t soient des géodésiques. Le second est une propriété du disque hyperbolique (ou "de Poincaré") D^2 . Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D^2$ une courbe qui est "presque géodésique" dans le sens que la distance entre $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ est comprise entre $C^{-1}|t_1 - t_2|$ et $C|t_1 - t_2|$ pour une certaine constante $C > 1$. Alors γ reste à une distance bornée d'une véritable géodésique de D^2 .

Remarquons que d'autres flots d'Anosov en dimension 3 sont connus mais que la description générale des variétés de dimension 3 qui en supportent reste ouvert.

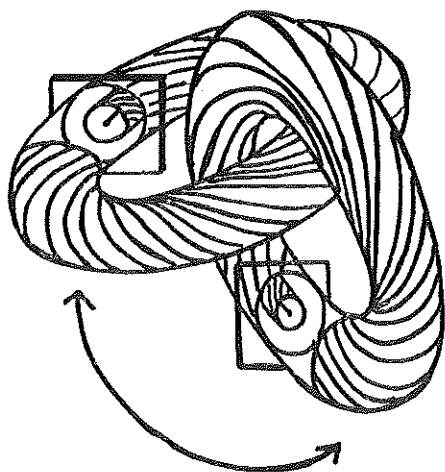


Figure 28 : Un flot riemannien sur la sphère S^3 obtenue en recollant deux tores solides le long de leurs bords.

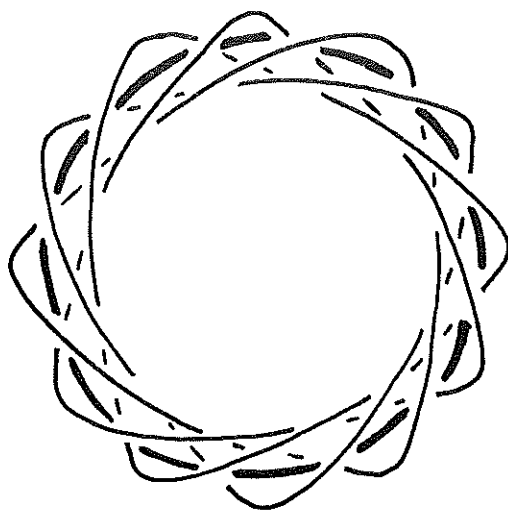


Figure 29 : Un fibré de Seifert.

4 - ETUDE QUALITATIVE DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS ET TOTALEMENT GEODESIQUES.

La description du comportement qualitatif d'un feuilletage riemannien est due à P. Molino. Nous ne citerons qu'une seule propriété montrant que les ensembles limites d'un tel feuilletage ne peuvent pas être trop complexes : l'adhérence d'une feuille est toujours une sous-variété.

Ici encore, nous avons cherché à comprendre l'influence de la topologie d'une variété sur le comportement de ses feuilletages riemanniens. Nous sommes amenés à faire l'hypothèse que la variété ambiante est compacte et simplement connexe [6]. Sous cette hypothèse, nous pouvons décrire assez précisément le comportement d'un feuilletage riemannien. Par exemple, nous montrons que si F est un feuilletage riemannien sur une variété compacte 1-connexe, alors F peut être arbitrairement approché par un "feuilletage dynamiquement trivial", c'est-à-dire un feuilletage (riemannien) donc toutes les feuilles sont compactes. A titre d'exemple, nous traitons complètement le cas des feuilletages riemanniens sur les sphères et les espaces projectifs. Une description complète est alors possible : à part, les champs de Killing, les seuls feuilletages riemanniens sont les "fibrations de Seifert".

Citons rapidement un article consacré à un problème similaire [9]. Il s'agit de savoir si un pseudo-groupe abstrait d'isométries peut être réalisé comme le pseudo-groupe transverse d'un feuilletage riemannien. On donne diverses obstructions, de nature cohomologique.

Inversement, dans [14] (en collaboration avec Y. Carrière), nous étudions le rapport entre une propriété ergodique d'un feuilletage riemannien (la "moyennabilité") et la structure algébrique de son pseudo-groupe transverse.

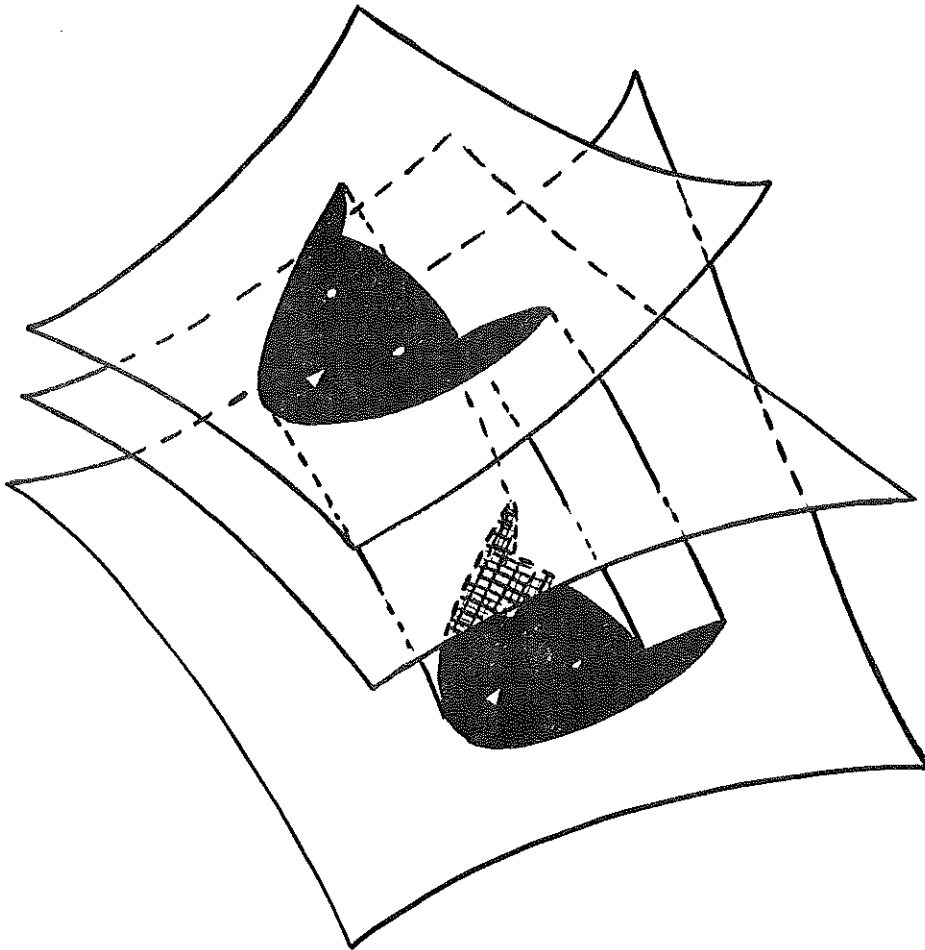


Figure 30 : Un feuilletage totalement géodésique de codimension 1.
Les courbes orthogonales définissent des isométries
locales entre feuilles.

Cette meilleure compréhension des feuilletages riemanniens nous a permis d'aborder un problème de géométrie riemannienne : l'étude qualitative des feuilletages totalement géodésiques. Evidemment, on dit qu'un feuilletage sur une variété riemannienne est totalement géodésique si toutes ses feuilles sont totalement géodésiques. Ces feuilletages sont en "dualité" avec les feuilletages riemanniens pour la raison suivante. Soit F un feuilletage totalement géodésique sur une variété riemannienne M et considérons le champ de plans F^\perp orthogonal aux feuilles de F . Il est possible que ce champ de plans ne soit pas intégrable, c'est-à-dire qu'il ne définisse pas un feuilletage orthogonal, mais, s'il l'est, le feuilletage orthogonal est riemannien. Réciproquement, si le feuilletage F^\perp est riemannien, alors F est totalement géodésique. Dans le cas où F^\perp n'est pas intégrable, il définit cependant un "champ de plans riemannien" dont on peut faire une étude analogue à celle des feuilletages riemanniens. L'étude de F se fera donc par le biais de celle de F^\perp .

Le premier cas à considérer est celui où F est de codimension 1 car alors F^\perp est un champ de droites et donc automatiquement intégrable. Il se trouve que les feuilletages riemanniens de dimension 1 sont extrêmement bien compris grâce aux travaux de Y. Carrière. On peut donc envisager une étude précise des feuilletages géodésiques de codimension 1.

Cette étude s'est faite en deux temps. Tout d'abord, dans [3], (en collaboration avec Y. Carrière), nous avons considéré le cas où la variété ambiante est de dimension 3. Dans ce cas, la structure des feuilletages riemanniens est si précise qu'il est possible d'en donner la liste complète. On obtient alors le résultat suivant ; les seuls feuilletages totalement géodésiques de codimension 1 sur les variétés

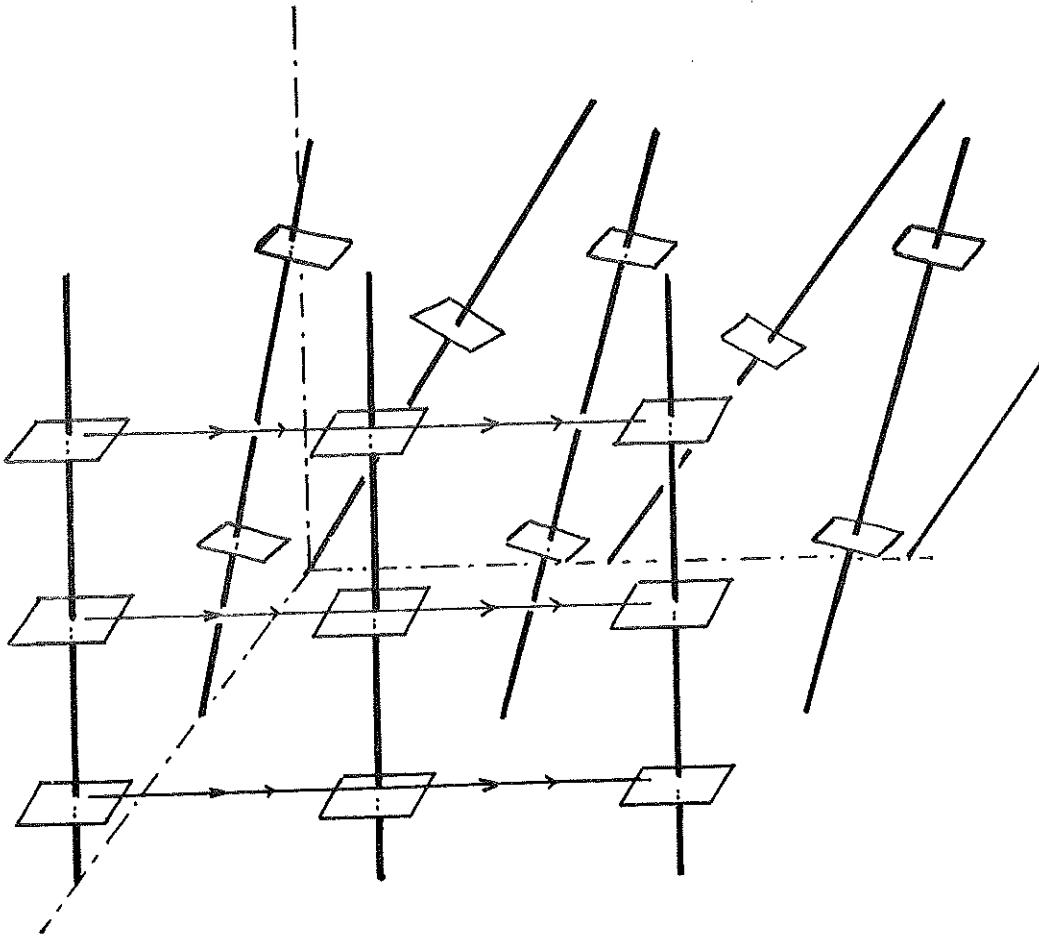
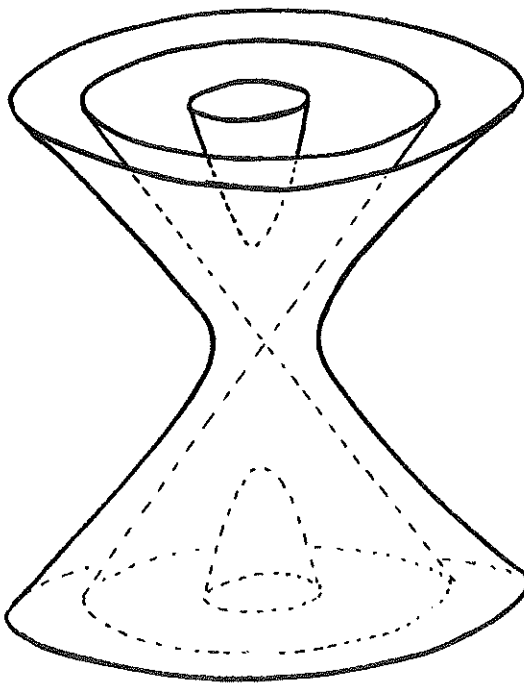


Figure 31 : Un feuilletage totalement géodésique de codimension 2. Les feuilles sont les droites "verticales". Le champ de plans orthogonal même s'il n'est pas intégrable, peut être considéré comme une "connexion" dont l'holonomie (flèches horizontales) définit des isométries locales entre feuilles.

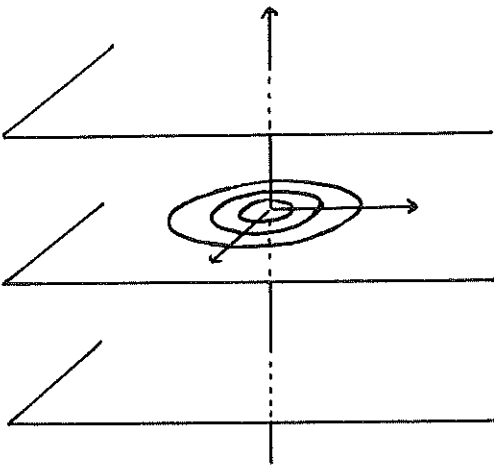
de dimension 3 sont, d'une part, les feuilletages modèles que nous avons décrits en 3, et d'autre part, les feuilletages transverses à une fibration de Seifert. Le fait que les feuilletages modèles sont géodésiques provient du fait que le flot Z de T_A^3 définit un feuilletage riemannien transverse de dimension 1.

La généralisation de ce résultat aux variétés de dimension supérieure à 3 est plus délicate car les flots riemanniens ne sont pas connus aussi précisément. Nous sommes parvenus à une généralisation dans [4]. Essentiellement, nous commençons par définir une famille assez générale de feuilletages sur des variétés de dimension grande. La construction de cette famille est directement inspirée de celle des feuilletages modèles. Nous montrons alors que ces feuilletages modèles généralisés ainsi que ceux qui sont transverses à une fibration de Seifert généralisée épuisent la liste des feuilletages géodésiques de codimension 1.

Lorsque la codimension de F n'est plus égale à 1, le champ de plans F^\perp n'est plus nécessairement intégrable. Le premier cas intéressant où cette situation peut effectivement se produire est le cas d'un feuilletage de codimension 2 sur une variété de dimension 4. C'est ce que nous étudions dans [13] (en collaboration avec G. Cairns). Notre premier résultat consiste à montrer que, dans cette situation, on peut toujours supposer que les feuilles de F ont une courbure constante, égale à -1 , 0 ou 1 . Ceci permet de distinguer les cas "hyperboliques, paraboliques et elliptiques". Seuls les cas hyperboliques et paraboliques posent problème. La technique d'approche est alors la suivante. On considère le fibré unitaire tangent aux feuilles, ce qui produit une variété



$SL_2(\mathbb{R})$



$Isom(\mathbb{R}^2)$

Figure 32 : Orbites des représentations adjointes de $SL(2, \mathbb{R})$ et $Isom(\mathbb{R}^2)$. Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ la seule orbite compacte est $\{0\}$, le centre approximatif de $SL(2, \mathbb{R})$ est trivial. Dans le cas de $Isom(\mathbb{R}^2)$ le centre approximatif correspond aux translations de \mathbb{R}^2 .

M' de dimension 5 munie d'un feuilletage géodésique F' de codimension 2. Ce dernier feuilletage peut être défini par une action localement libre d'un groupe de Lie G de dimension 3 ($\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ dans le cas hyperbolique et le revêtement universel de $Isom(\mathbb{R}^2)$ dans le cas parabolique). Puisque F' est géodésique, cette action préserve le champ de plans F'^{\perp} et on peut donc considérer F' comme analogue à un fibré principal dont F'^{\perp} est une connexion. La courbure de cette "connexion" mesure la non-intégrabilité de F'^{\perp} ; c'est une 2-forme sur TF'^{\perp} à valeur dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Cette forme se transforme sous l'action de G par la représentation adjointe de G . La compacité de M' force alors cette courbure à ne prendre des valeurs que dans "le centre approximatif de \mathfrak{g} " ; c'est-à-dire "essentiellement" dans la partie de \mathfrak{g} formée des éléments dont l'orbite sous la représentation adjointe est compacte. Le centre approximatif de $SL(2, \mathbb{R})$ est trivial (voir figure 32). On en déduit que si F est un feuilletage totalement géodésique hyperbolique, alors F^{\perp} est nécessairement intégrable et définit donc un feuilletage riemannien dont l'étude donne des renseignements sur F . Ceci nous permet de montrer, par exemple, le résultat suivant, lié, une fois de plus à la structure topologique de la variété ambiante. Si M^4 est une variété compacte, simplement connexe, munie d'un feuilletage totalement géodésique de codimension 2, alors M^4 est nécessairement un fibré en sphères S^2 au-dessus de S^2 et le feuilletage coïncide avec la fibration.

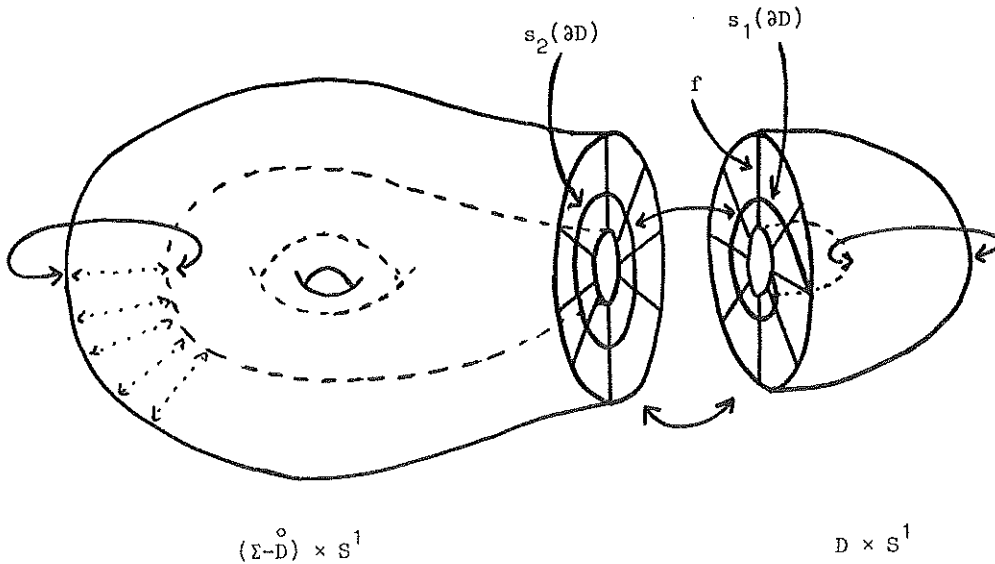


Figure 33 : La classe d'Euler. Soit $p : E \rightarrow \Sigma$ un fibré orienté en cercles au-dessus d'une surface compacte orientée Σ . Si $D \hookrightarrow \Sigma$ est un disque, le fibré est trivial au-dessus de D et $\Sigma - D$ et on peut donc trouver deux sections $s_1 : D \rightarrow E$ et $s_2 : \Sigma - D \rightarrow E$. La courbe $s_2(\partial D)$ est homologue (dans $p^{-1}(\partial D) \cong T^2$) à une combinaison linéaire du type $s_1(\partial D) + n.f$ où $n \in \mathbb{Z}$ et f désigne une fibre de p contenue dans $p^{-1}(\partial D)$. L'entier n est le nombre d'Euler de p , il caractérise p .

M' de dimension 5 munie d'un feuilletage géodésique F' de codimension 2. Ce dernier feuilletage peut être défini par une action localement libre d'un groupe de Lie G de dimension 3 ($\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ dans le cas hyperbolique et le revêtement universel de $Isom(\mathbb{R}^2)$ dans le cas parabolique). Puisque F' est géodésique, cette action préserve le champ de plans F'^{\perp} et on peut donc considérer F' comme analogue à un fibré principal dont F'^{\perp} est une connexion. La courbure de cette "connexion" mesure la non-intégrabilité de F'^{\perp} ; c'est une 2-forme sur TF'^{\perp} à valeur dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Cette forme se transforme sous l'action de G par la représentation adjointe de G . La compacité de M' force alors cette courbure à ne prendre des valeurs que dans "le centre approximatif de \mathfrak{g} " ; c'est-à-dire "essentiellement" dans la partie de \mathfrak{g} formée des éléments dont l'orbite sous la représentation adjointe est compacte. Le centre approximatif de $SL(2, \mathbb{R})$ est trivial (voir figure 32). On en déduit que si F est un feuilletage totalement géodésique hyperbolique, alors F^{\perp} est nécessairement intégrable et définit donc un feuilletage riemannien dont l'étude donne des renseignements sur F . Ceci nous permet de montrer, par exemple, le résultat suivant, lié, une fois de plus à la structure topologique de la variété ambiante. Si M^4 est une variété compacte, simplement connexe, munie d'un feuilletage totalement géodésique de codimension 2, alors M^4 est nécessairement un fibré en sphères S^2 au-dessus de S^2 et le feuilletage coïncide avec la fibration.

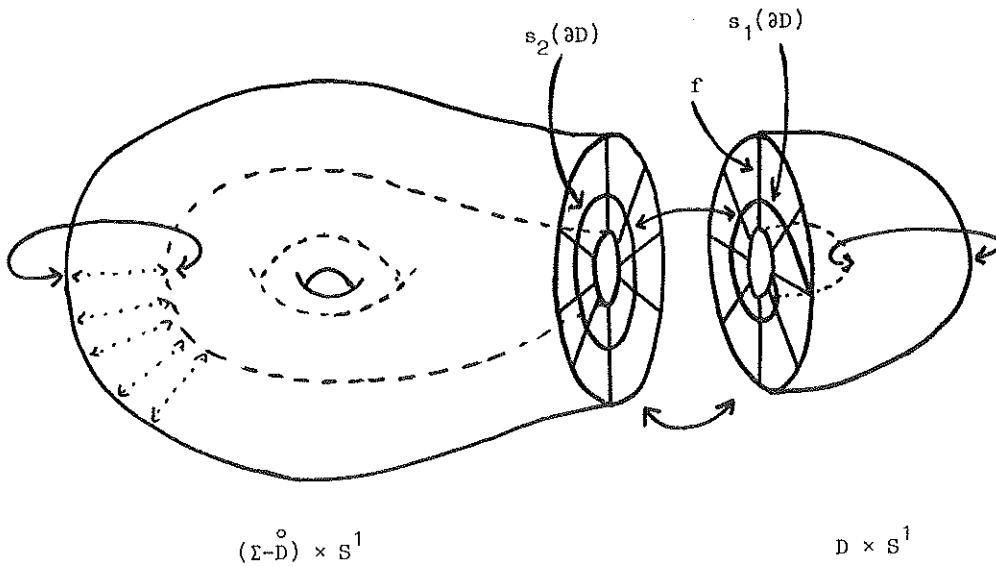


Figure 33 : La classe d'Euler. Soit $p : E \rightarrow \Sigma$ un fibré orienté en cercles au-dessus d'une surface compacte orientée Σ . Si $D \hookrightarrow \Sigma$ est un disque, le fibré est trivial au-dessus de D et $\Sigma - D$ et on peut donc trouver deux sections $s_1 : D \rightarrow E$ et $s_2 : \Sigma - D \rightarrow E$. La courbe $s_2(\partial D)$ est homologue (dans $p^{-1}(\partial D) \cong T^2$) à une combinaison linéaire du type $s_1(\partial D) + n.f$ où $n \in \mathbb{Z}$ et f désigne une fibre de p contenue dans $p^{-1}(\partial D)$. L'entier n est le nombre d'Euler de p , il caractérise p .

5 - ACTIONS DE GROUPE SUR LE CERCLE.

La théorie des difféomorphismes du cercle a été inaugurée par H. Poincaré dans le but d'étudier les champs de vecteurs sur le tore. Si f est un difféomorphisme du cercle qui respecte l'orientation, H. Poincaré lui associe un "nombre de rotation" $\rho(f)$ qui est un élément de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Les propriétés essentielles de ce nombre sont les suivantes. D'une part, $\rho(f)$ est un invariant du système dynamique, c'est-à-dire que deux difféomorphismes topologiquement conjugués ont le même nombre de rotation. D'autre part, $\rho(f)$ permet de détecter l'existence d'orbites périodiques : $\rho(f)$ est un rationnel du type $\frac{p}{q}$ si et seulement si f possède un point périodique d'ordre q . Enfin, si f est de classe C^2 et si $\rho(f)$ est irrationnel, alors f est topologiquement conjugué à la rotation d'angle $\rho(f)$ (théorème de Denjoy). En résumé, $\rho(f)$ contient presque toute l'information dynamique relative à f .

Dans le cadre des généralisations décrites plus haut, il est naturel de se poser la question suivante. Soit Γ un groupe abstrait et $\phi : \Gamma \rightarrow \text{Homéo}^+(S^1)$ une action de Γ sur le cercle. Est-il possible de définir un "nombre de rotation global" de ϕ , c'est-à-dire un invariant topologique de l'action considérée ? C'est le problème étudié dans [12]. L'idée de départ est qu'un invariant faible existe déjà. En effet, si l'on suspend la représentation ϕ , comme décrit en 2, on obtient un fibré en cercles au-dessus de l'espace d'Eilenberg-Mac-Lane $K(\Gamma, 1)$. Ce fibré est classifié par sa classe d'Euler, qui est un élément de $H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$. Il s'avère cependant que les classes d'Euler ainsi obtenues ne sont pas quelconques : il est connu que celles-ci peuvent être représentées par des "cocycles bornés". En fait, M. Gromov introduit des groupes de "cohomologies bornées" $H_b^*(\Gamma; \mathbb{Z})$, associés à un groupe abstrait Γ et montre que les classes d'Euler considérées sont dans l'image d'un certain morphisme naturel de $H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z})$

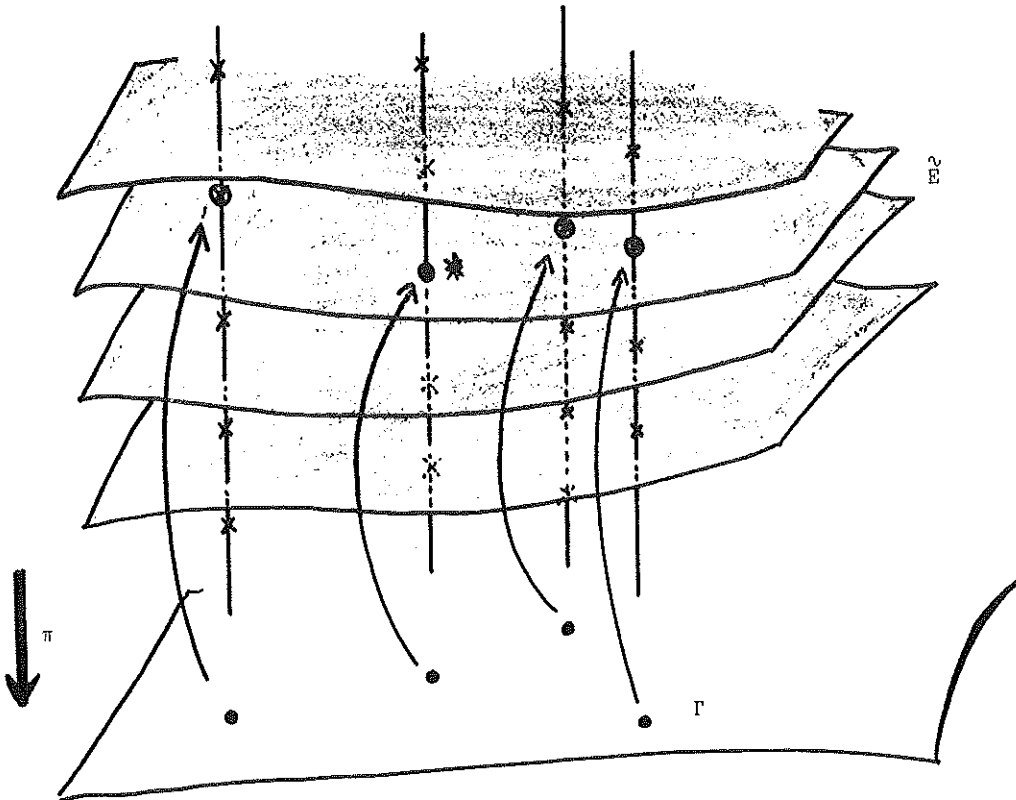


Figure 34 : La classe d'Euler bornée. Si E est un fibré en cercles au-dessus de $K(\Gamma, 1)$, alors E est un $K(\bar{\Gamma}, 1)$ où $\bar{\Gamma}$ est une extension $0 \rightarrow Z \rightarrow \bar{\Gamma} \xrightarrow{\pi} \Gamma \rightarrow 1$. Les groupes Γ et $\bar{\Gamma}$ sont considérés comme des réseaux dans les revêtements universels de $K(\Gamma, 1)$ et $K(\bar{\Gamma}, 1)$. Si E est un fibré défini par suspension, il existe un feuilletage naturel de codimension 1 dans \tilde{E} , revêtement universel de E . L'application $\sigma : \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ définie par " $\sigma(\gamma)$ est le premier point de $\pi^{-1}(\gamma)$ situé au-dessus de la feuille passant par le point base $*$ de \tilde{E} " n'est pas un morphisme. Cependant, σ est un "presque-morphisme" : $c(\gamma_1, \gamma_2) = \sigma(\gamma_1 \gamma_2) \sigma(\gamma_1)^{-1} \sigma(\gamma_2)^{-1}$ ne prend que les valeurs 0 et 1. En fait, c définit un 2-cocycle borné (par 1) de Γ dont la classe de cohomologie est la classe d'Euler.

dans $H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$. Notre contribution consiste à montrer qu'il est possible de définir une "classe d'Euler bornée" $c(\phi)$ qui est un élément de $H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z})$ et qui se projette dans $H^2(\Gamma; \mathbb{Z})$ sur la classe d'Euler usuelle. On montre alors que $c(\phi)$ est effectivement le "nombre de rotation global" que nous cherchions. D'une part, si $\Gamma = \mathbb{Z}$, on retrouve le nombre de rotation de Poincaré et, d'autre part, $c(\phi)$ est un invariant de conjugaison "presque" complet (c'est un invariant complet de semi-conjugaison). En d'autres termes, on peut paramétrer l'espace des classes de semi-conjugaisons de représentations de Γ dans $\text{Hom}^+(S^1)$ par une certaine partie de $H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z})$. Cette partie s'identifie d'ailleurs, en un certain sens, à la boule unité de $H_b^2(\Gamma; \mathbb{Z})$.

Le fait que la classe d'Euler est "bornée" avait initialement été mis en évidence par Milnor et Wood dans le cas particulier où Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte orientée Σ . Dans ce cas, la classe d'Euler est un élément de $H^2(\Sigma; \mathbb{Z})$, c'est-à-dire un entier noté $eu(\phi)$. Le résultat de Milnor-Wood est une inégalité entre $eu(\phi)$ et la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Sigma)$ de Σ : on a $|eu(\phi)| \leq |\chi(\Sigma)|$. Dans [16], nous essayons d'étudier plus précisément les rapports entre $eu(\phi)$, $\chi(\Sigma)$ et les propriétés de la dynamique topologique de ϕ . Lorsqu'un groupe Γ opère sur le cercle, trois cas sont a priori possibles. Les orbites de Γ peuvent être toutes denses, ou il peut exister une orbite finie ou enfin, il peut exister un "minimal exceptionnel". Dans ce dernier cas, il existe un ensemble de Cantor K contenu dans S^1 , invariant par Γ et tel que les orbites des points de K sont denses dans K . Lorsqu'il existe une orbite finie, on montre facilement que $eu(\phi)$ est nul. Notre résultat consiste alors à améliorer l'inégalité de Milnor-Wood en présence de minimal

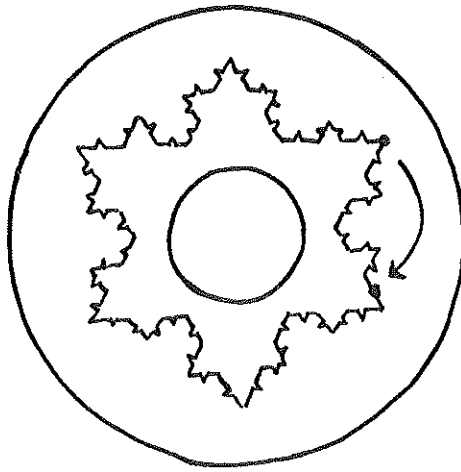
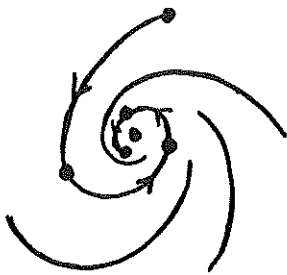
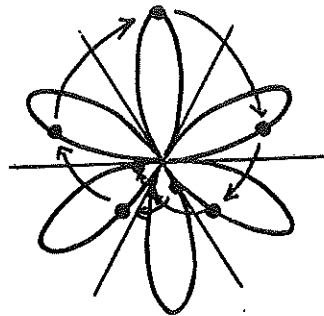


Figure 35 : Transformation holomorphe au voisinage d'une courbe de Jordan.



i)



ii)

Figure 36 : Allure locale d'une transformation du type $f(z) = \lambda z + \dots$ quand $|\lambda| \neq 1$ (i) et λ racine de l'unité (ici racine 6ème ii)).

exceptionnel. Précisément, si ϕ est une action de $\pi_1(\Sigma)$ sur le cercle, de classe C^2 , qui possède un minimal exceptionnel, alors l'inégalité devient stricte : $|\text{eu}(\phi)| < |\chi(S)|$ et si l'action est analytique réelle, alors on a en fait mieux : $\text{eu}(\phi) = 0$.

Nous avons cité précédemment le théorème de Denjoy affirmant qu'un difféomorphisme de S^1 de classe C^2 dont le nombre de rotation est irrationnel a toutes ses orbites denses. Le théorème tombe cependant en défaut si le difféomorphisme n'est que de classe C^1 . Supposons maintenant que l'on dispose d'une courbe de Jordan γ dans le plan complexe et d'une fonction holomorphe injective $F : U \rightarrow V$ définie sur un voisinage U de γ . On suppose de plus que la courbe γ est invariante par F , induisant ainsi un homéomorphisme de γ . Puisque γ n'est a priori que continue, on ne peut appliquer le théorème de Denjoy à cet homéomorphisme. Celui-ci n'est cependant pas quelconque puisqu'il provient d'une fonction holomorphe. Dans [7], nous montrons, en particulier, que le théorème de Denjoy s'étend effectivement à une telle situation : si le nombre de rotation de la restriction de F à γ est irrationnel, les orbites de F sont denses sur γ .

Le problème que nous venons de décrire peut paraître artificiel, il est cependant motivé par une question naturelle concernant l'étude des fractions rationnelles. Soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage de 0 et fixant 0 , par exemple une fraction rationnelle. L'étude locale de f au voisinage de 0 est bien comprise lorsque la dérivée $f'(0)$ en 0 n'est pas de module 1 ; le germe de f est alors conjugué à sa partie linéaire, c'est-à-dire que 0 est alors un point fixe attractant ou répulsif. Lorsque $f'(0) = e^{2i\pi\alpha}$, la situation qualitative est encore connue lorsque α est rationnel. Si α est un nombre irrationnel

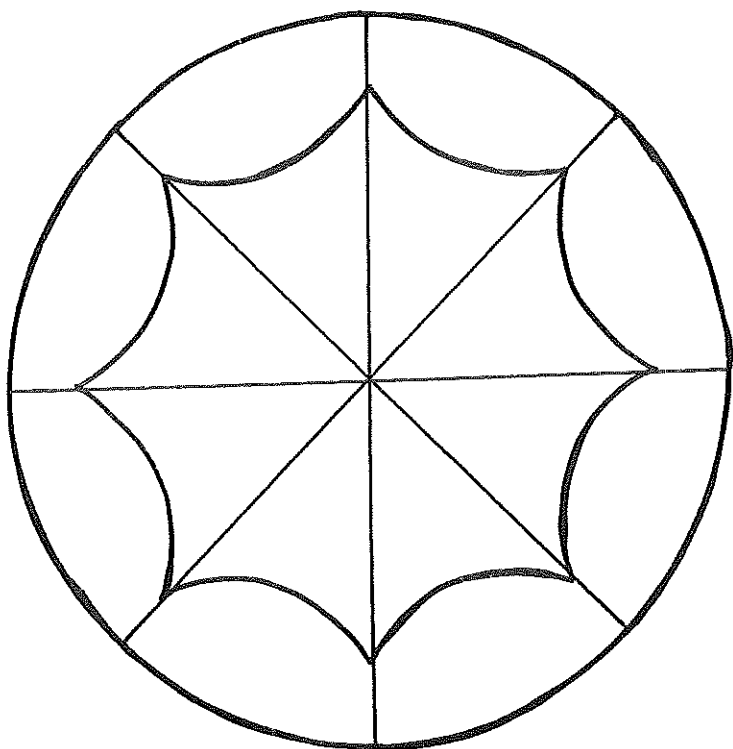


Figure 37 : Un octogone régulier dans le disque de Poincaré dont l'angle aux sommets est $\frac{2\pi}{8}$. En identifiant les côtés à l'aide d'isométries, on obtient une métrique à courbure -1 sur une surface de genre 2 et donc un groupe fuchsien.

satisfaisant une certaine condition arithmétique (condition diophantienne), un théorème de C. Siegel affirme que le germe de f est conjugué à sa partie linéaire, c'est-à-dire à une rotation. Il ne s'agit cependant que d'un théorème local : seul le germe de f est conjugué à une rotation. En fait, il existe un domaine simplement connexe maximal U sur lequel f est conjugué à sa partie linéaire ; ce domaine est le "domaine de stabilité" de f . Une question naturelle se pose : quel est le phénomène qui se produit sur le bord de U qui empêche la linéarisation de se prolonger à un ouvert plus grand ? On conjecture que ce phénomène est la présence d'un point critique de f sur le bord de U . Il est, par ailleurs, concevable que le bord de U soit une courbe de Jordan qui sera invariante par f , d'où la motivation du problème précédent. Ceci nous permet alors de démontrer un cas particulier de cette conjecture : si α satisfait une condition diophantienne et si le bord du domaine de stabilité est une courbe de Jordan, alors il existe un point critique sur le bord de ce domaine. Remarquons que si α ne satisfait pas de condition diophantienne, l'allure qualitative de f au voisinage de 0 reste pour l'essentiel inconnue.

Parmi les groupes agissant sur le cercle, une place fondamentale revient aux groupes fuchsien. Si Σ est une surface compacte orientable, la donnée d'une métrique riemannienne sur Σ à courbure -1 permet d'identifier le groupe fondamental de Σ à un sous-groupe uniforme discret de $PSL(2, \mathbb{R})$, le groupe d'isométries du disque de Poincaré. Puisque $PSL(2, \mathbb{R})$ opère sur la droite projective $P^1(\mathbb{R})$, identifiée au cercle, le groupe $\pi_1(\Sigma)$ opère donc projectivement sur le cercle. L'étude de ces actions de $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 remonte à H. Poincaré ; il s'agit en fait des groupes fuchsien de premier type. Pour une surface fixée, ces actions de $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 dépendent du choix de la métrique à courbure -1 . L'espace de ces mé-

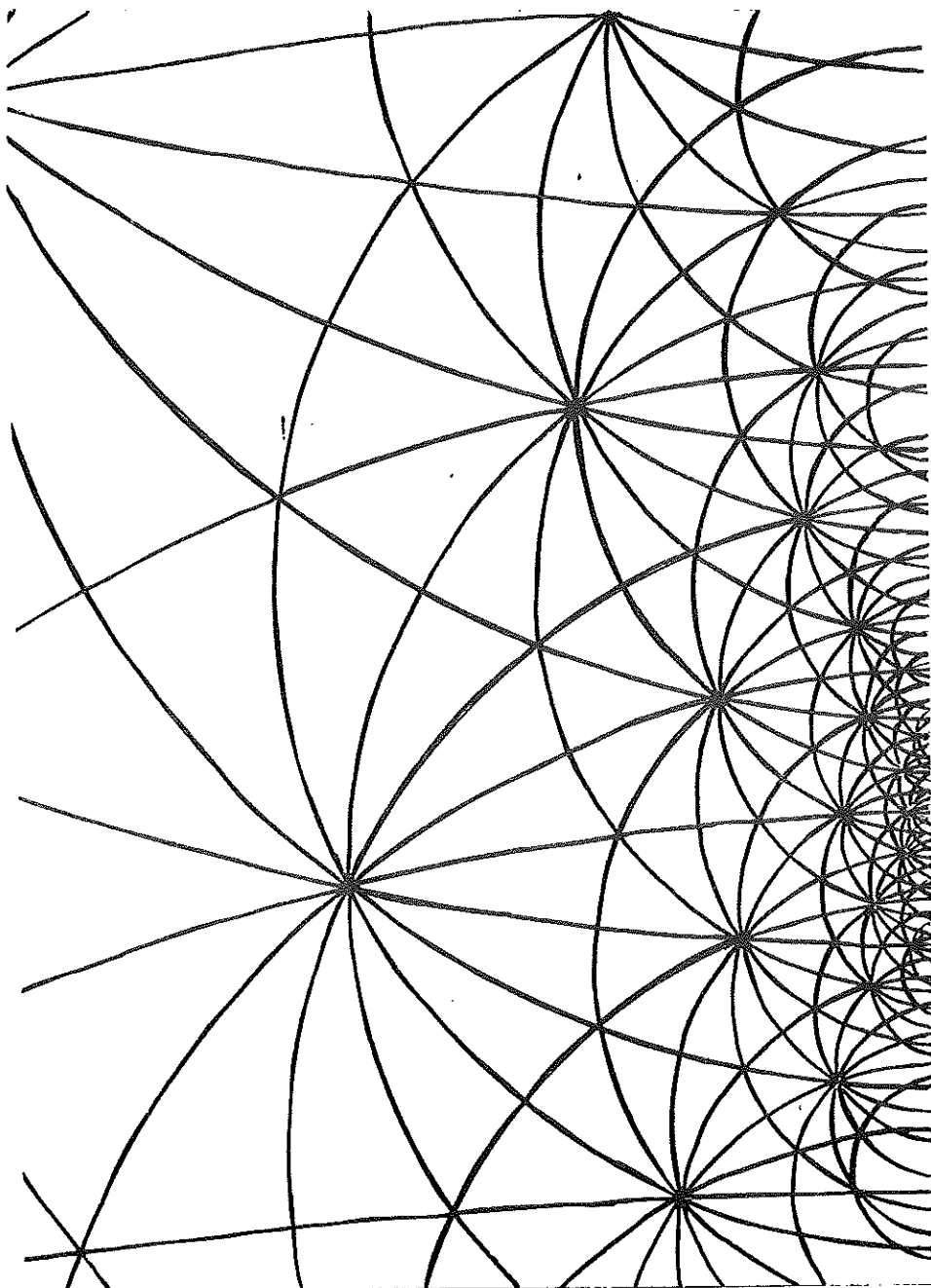


Figure 38 : Un groupe fuchsien

triques, dit espace de Teichmüller, est un espace de dimension $6g-6$ où g est le genre de Σ . Finalement, on se trouve en présence d'une famille extrêmement riche d'actions d'un groupe fixe $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 , qui dépend de $6g-6$ paramètres. Un corollaire géométrique de la stabilité structurelle des flots d'Anosov est le fait que toutes ces actions de $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 sont topologiquement conjuguées deux à deux, bien que deux distinctes ne sont jamais C^1 -conjuguées.

Nous avons cherché à étudier les déformations non fuchsiennes (ou non projectives) des groupes fuchsiens. Précisément, nous partons d'une action ϕ de $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 correspondant à une certaine métrique sur Σ à courbure -1 . L'étude des actions de GA [10] nous permet alors de montrer que toute action C^∞ de $\pi_1(\Sigma)$ sur S^1 qui est proche de ϕ , qu'elle soit fuchsienne ou pas, est en fait C^∞ -conjuguée à une représentation fuchsienne correspondant à une autre métrique sur Σ à courbure -1 . En termes imagés, tout groupe de difféomorphismes de S^1 proche d'un groupe fuchsien est encore un groupe fuchsien, à conjugaison C^∞ près. Là encore, il s'agit d'un phénomène de rigidité extrêmement fort.

A part les groupes fuchsiens, on connaît peu de sous-groupes de $\text{Diff}(S^1)$ ayant une structure cohomologique intéressante. Dans [17], en collaboration avec V. Sergiescu, nous étudions le groupe G formé des homéomorphismes g de $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ayant les propriétés suivantes :

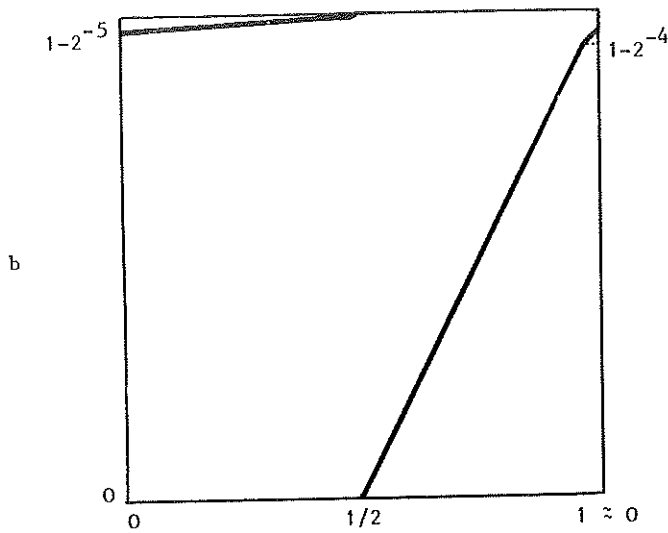
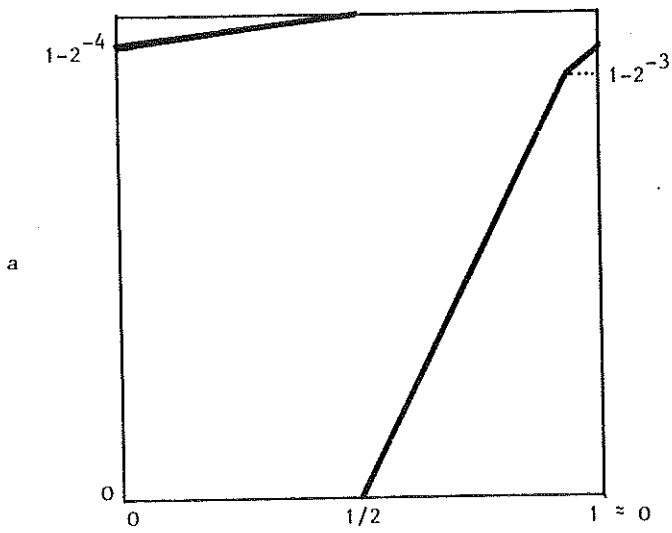


Figure 39 : Graphes de deux générateurs a et b de G .

Les relations définissant G sont :

$$a^5 = 1 ; \quad b^6 = 1 ; \quad b^3 = aba^2b^2a ; \quad bab = a^2ba^2ba^2.$$

- 1) g est affine par morceaux.
- 2) les dérivées à droite et à gauche de g sont des puissances entières (positives ou négatives) de 2.
- 3) les points de discontinuités de la dérivée de g sont des rationnels dyadiques (i.e. du type $\frac{p}{2^q} \bmod \mathbb{Z} \in S^1$).
- 4) $g(0)$ est un rationnel dyadique.

Ce groupe a été introduit par R.J. Thompson dans un but purement algébrique : il s'agit d'un groupe infini, simple, de présentation finie (voir les générateurs, figure 39). Notre étude de G exploite la dynamique de son action sur le cercle. Nous ne citerons que quelques résultats obtenus. Tout d'abord, il est possible de "lisser" l'action de G sans changer sa dynamique topologique ; précisément, il existe des homéomorphismes h de S^1 tels que hGh^{-1} est constitué de difféomorphismes de classe C^∞ . Par ailleurs, certaines représentations de G dans $\text{Diff}^\infty(S^1)$ sont semi-structurellement stables. Enfin, G peut être considéré comme un sous-groupe discret de $\text{Diff}^\infty(S^1)$ et les propriétés de G sont très proches de celles des réseaux dans les groupes de Lie simples. Par exemple, la cohomologie réelle de G est aussi la cohomologie continue de $\text{Diff}(S^1)$ (cohomologie de Gelfand-Fuchs).

LISTE DES TRAVAUX

- [1] *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*,
en collaboration avec V. Sergiescu,
Topology 19 (1980), 179-197.
- [2] *Sur les actions localement libres du groupe affixe*,
Thèse de 3ème cycle, Lille I, 1979.

Cette thèse laissait en suspens une question concernant l'existence
d'un volume invariant ; elle constitue une moitié de [10] où cette
question a été (partiellement) résolue.
- [3] *Feuilletages totalement géodésiques*,
en collaboration,
avec Y. Carrière, An. Acad. Brasil. Ciênc. 1981, 53 (3), 427-432.
- [4] *Classification des feuilletages totalement géodésiques de
codimension un*,
Comment. Math. Helvetici. 58 (1983), 543-572.
- [5] *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles*,
Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1984), 4, 67-80.
- [6] *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*,
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 34, 4, (1984), 203-293.
- [7] *Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan*,
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 298, Série I, n° 16, 1984, 385-388.
- [8] *Une variété qui n'est pas une feuille*,
Topology Vol. 24, N° 1, pp. 67-73, 1985.
- [9] *Groupe d'holonomie des feuilletages de Lie*,
Indagationes Mathematicae, Vol. 47, Fasc. 2, pp. 173-182, 1985.
- [10] *Actions localement libres du groupe affixe*,
Inventiones Mathematicae 82, 479-526 (1985).

- [11] *On the measurable dynamics of $z \mapsto e^z$,*
en collaboration avec L. Goldberg et D. Sullivan,
Erg. Th. & Dynam. Sys. (1985), 5, 329-335.
- [12] *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée,*
à paraître dans Contemporary Mathematics,
Proceedings du Colloque Lefschetz, Mexico, 1984.
- [13] *Totally geodesic foliations on 4-manifolds,*
en collaboration avec G. Cairns, à paraître dans le Journal of
Differential geometry.
- [14] *Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie,*
en collaboration avec Y. Carrière,
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série I, n° 19, 1985, 677-680.
- [15] *Un feuilletage analytique dont la cohomologie basique est de
dimension infinie,*
Publications de l'IRMA de Lille, 1985.
- [16] *Classe d'Euler et minimal exceptionnel,*
à paraître dans Topology.
- [17] *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle,*
en collaboration avec V. Sergiescu, soumis pour publication.

