NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

Étienne GHYS

PRÉSENTATION GÉNÉRALE.

À la fin du dix-neuvième siècle, H. Poincaré créa la théorie des *systèmes dynamiques.* Il s'agissait essentiellement de comprendre le comportement qualitatif des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire des champs de vecteurs sur les variétés. Cette notion stricte s'est considérablement élargie au cours du vingtième siècle, englobant successivement l'étude des itérations d'un difféomorphisme, des orbites d'une action de groupe (ou de pseudogroupe) sur un espace topologique, des feuilletages et des laminations, et même des relations d'équivalence mesurables sur un espace borélien.

La plupart de mes travaux se situent dans ce contexte élargi de la théorie des systèmes dynamiques. Les techniques utilisées ne sont pas propres aux systèmes dynamiques mais empruntent également des ingrédients à la topologie, la géométrie différentielle, la topologie algébrique, la théorie des groupes et la théorie ergodique. L'incroyable unité des mathématiques m'a toujours fasciné et j'ai évité de restreindre le champ de mon activité de recherche. Mais, si je me suis toujours intéressé à des objets mathématiques assez variés, j'ai par contre essayé de me forger un point de vue "dynamique" assez uniforme dans mon approche des problèmes traités.

Je fais partie des mathématiciens qui accordent une importance considérable aux exemples. Certes, le but des systèmes dynamiques est d'analyser un domaine aussi vaste que possible de situations, mais j'ai souvent essayé de comprendre certains exemples remarquables dans l'univers des possibilités. La question de savoir si l'intérêt mathématique doit se porter avant tout sur des objets génériques ou au contraire sur ceux qui possèdent des symétries particulières est très ancienne : l'icosaèdre mérite-t-il par exemple plus d'intérêt qu'un polyèdre générique ? La réponse dépend bien sûr du goût de chacun et du sous-domaine considéré des mathématiques. En ce qui me concerne, alors que la théorie des systèmes dynamiques met souvent l'accent sur la généricité, je me suis attaché à caractériser certains exemples que j'affectionne particulièrement. Voici une question typique qui revient plusieurs fois dans mes travaux : comment reconnaître sur la dynamique des géodésiques qu'une variété riemannienne est à courbure constante ? Il me semble que les systèmes dynamiques regorgent d'exemples d'une grande richesse, extrêmement symétriques et rigides, dont l'étude précise permet ensuite une meilleure compréhension d'objets moins symétriques, plus génériques, et plus amorphes.

Le but de ce texte est de donner une présentation succincte de mes travaux. Par nécessité, certaines parties peuvent être considérées comme techniques et ceci m'a conduit à diviser le texte en deux parties. Dans la première, je commence par présenter mon "paysage mathématique" en décrivant un petit nombre d'objets qui me sont familiers. Ceci me donne l'occasion de donner quelques définitions indispensables. J'ai également fait le choix d'énoncer dans cette partie quelques résultats que j'ai obtenus et qui illustrent mes travaux. J'espère que cette première partie élémentaire sera d'un accès aisé pour le lecteur qui n'est pas nécessairement intéressé par les aspects plus techniques. La seconde partie est destinée à présenter mes travaux de manière plus systématique : je l'ai décomposée en sept paragraphes consacrés aux *systèmes d'*Anosov, aux *feuilletages riemanniens*, aux *actions de groupes sur le cercle* et *sur les variétés en général*, aux *classes caractéristiques*, à la *dynamique holomorphe* et aux *laminations*.

PREMIÈRE PARTIE.
QUELQUES EXEMPLES.

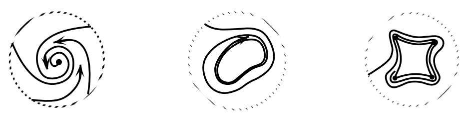
I.– Exemples de systèmes dynamiques.

À travers les quelques exemples qui suivent, je voudrais présenter mon domaine de recherche, les définitions de base, et quelques problèmes ouverts.

Exemple 1. Considérons d'abord une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

où P et Q sont des polynômes en les variables réelles x, y et supposons que P et Q n'ont qu'un nombre fini de zéros communs. Bien sûr, les solutions $(x(t), y(t))$ n'existent en général que localement en t : elles peuvent quitter tout compact en un temps fini. Par contre, par chaque point du plan passe une unique solution maximale. En dehors de l'ensemble fini où P et Q s'annulent simultanément, ces solutions maximales définissent des courbes immergées disjointes deux à deux et on aimerait comprendre la topologie de cet "enchevêtrement de courbes". Pour analyser le comportement global de ce type d'équation différentielle, on est conduit à compactifier le plan $\mathbf{R}^2$ en le plan projectif $\mathbf{RP}^2$ mais le champ de vecteurs polynomial ne se prolonge pas au plan projectif. Cependant le *feuilletage* (singulier) défini par les orbites du champ se prolonge : le complémentaire d'un nombre fini de points dans $\mathbf{RP}^2$ est la réunion disjointe de courbes immergées (les feuilles) qui sont des réunions d'orbites du champ initial (car ces feuilles peuvent couper la droite de l'infini). Les feuilles ont un comportement dynamique bien qu'elles ne soient en aucun cas paramétrées par le "temps" ; elles peuvent par exemple spiraler sur une feuille compacte. Utilisant cette compactification et la topologie très simple du plan projectif (ou plus précisément de la sphère, son revêtement double), Poincaré obtient le premier résultat non trivial dans la théorie des systèmes dynamiques, décrivant une propriété qualitative valable pour *toute* équation polynomiale du type précédent : une (demi-) feuille passant par un point non singulier ne peut s'accumuler que sur un point singulier, une feuille compacte (cycle limite), ou un "graphique" constitué d'un nombre fini de points singuliers et par des arcs d'orbites "connectant" ces points entre eux (troisième cas sur la figure). Par exemple, une orbite d'une équation polynomiale en dimension 2 ne peut pas être dense dans le plan. Ce théorème fut précisé par la suite par Bendixson.



Évidemment, Poincaré avait conscience du fait que ce type de résultat n'est pas valable pour des équations différentielles sur d'autres espaces. Par exemple, l'équation $dx/dt = 1; dy/dt = \alpha$ où α est un nombre irrationnel et x, y sont maintenant compris comme appartenant à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, a des solutions qui sont les projections des droites de $\mathbf{R}^2$ de pentes α dans le tore $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$: elles sont denses dans le tore. Il s'agit là d'une question fondamentale qui m'a toujours guidé : *quelle est l'influence de la topologie de l'espace ambiant sur le comportement qualitatif des systèmes dynamiques qu'elle supporte ?*

Exemple 2. Considérons toujours une équation différentielle polynomiale du type précédent mais cette fois dans le domaine complexe, c'est-à-dire que P et Q sont maintenant des polynômes en les variables complexes x, y. Ici encore, les solutions ne sont que localement définies en général mais pas uniquement parce que les solutions tendent vers l'infini en un temps fini : des phénomènes de ramifications compliqués peuvent se produire sur lesquels je reviendrai plus loin (le "temps" t est ici un nombre complexe). La solution maximale passant par un point non singulier doit maintenant être pensée comme une surface de Riemann immergée dans $\mathbf{C}^2$. Dans le cas des équations différentielles réelles, les solutions maximales sont des courbes réelles et leur topologie ne peut donc être que celle d'une droite ou d'un cercle mais, dans le cas complexe, les surfaces de Riemann peuvent avoir une topologie extrêmement riche : leur genre peut par exemple être infini, elles peuvent avoir une infinité de bouts, chacun de ces bouts peut "spiraler" sur tel ou tel ensemble limite etc. Voici donc une vaste famille d'objets qui ont à l'évidence un caractère dynamique mais dont les orbites ne sont pas paramétrèes par le "temps". Ici encore, il est possible de compactifier la situation sur le plan projectif complexe $\mathbf{CP}^2$: le complémentaire d'un nombre fini de points est la réunion disjointe de surfaces de Riemann immergées dont on aimerait comprendre la topologie. C'est à Painlevé que l'on doit cette approche qualitative des équations différentielles dans le domaine complexe et c'est en s'inspirant de ces travaux que Ehresman et Reeb dégagèrent bien plus tard la notion de feuilletage. Précisément, un *feuilletage* est une partition d'une variété en sous-variétés connexes immergées (les feuilles) qui est localement triviale dans le sens que, localement, elle s'identifie à la partition d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ par les plans $\mathbf{R}^p \times \{u\} (u \in \mathbf{R}^{n-p})$. Ces feuilletages sont le cadre idéal pour l'étude d'une dynamique générale. Les exemples les plus triviaux sont donnés par les fibres d'une fibration localement triviale pour lesquels l'espace des feuilles s'identifie à la base de la fibration. Mais les exemples les plus riches n'ont pas d'espace des feuilles raisonnables et il faut faire appel à d'autres techniques pour en aborder l'étude. L'étude des feuilletages algébriques de $\mathbf{CP}^2$ (privé d'un nombre fini de points) est d'une grande richesse ; beaucoup de problèmes ouverts subsistent, en dépit des travaux de nombreux mathématiciens. On aimerait par exemple trouver un analogue au théorème de Poincaré-Bendixson cité plus haut. Il existe des exemples d'équations différentielles polynomiales dans le domaine complexe dont certaines solutions sont denses dans $\mathbf{CP}^2$, mais on ignore toujours si *toute solution* *d'une équation différentielle polynomiale dans $\mathbf{C}^2$ s'accumule sur un point singulier.*

Exemple 3. Une variété riemannienne compacte M n'est pas en soi un objet dynamique mais on peut lui associer un système dynamique classique. Le *flot géodésique* est un flot qui agit sur le fibré unitaire tangent $T_1(M)$. Étant donné un vecteur unitaire v tangent à M en un point x, il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbf{R} \to M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Si t est un nombre réel, on peut alors considérer le vecteur unitaire tangent $v_t = \gamma'(t)$. Si l'on pose $\phi^t(v) = v_t$, on définit ainsi un groupe à un paramètre ϕ^t de difféomorphismes de $T_1(M)$. La dynamique de ce flot est riche d'informations sur la géométrie de la variété riemannienne M au point qu'*il est parfois possible de déterminer complètement la métrique à partir de son flot géodésique.* Un cas particulièrement important est au centre de mes travaux : si la variété M est à courbure (sectionnelle) strictement négative, le flot géodésique associé possède de fortes propriétés hyperboliques, sur lesquelles je reviendrai plus tard, qui en font les prototypes de *flots d'*Anosov. Ces flots ont des propriétés de stabilité étonnantes, initialement mises en évidence par Hadamard dans son magnifique article sur les “surfaces à courbures opposées”, puis précisées par Hopf et Anosov, entre autres. Voici par exemple un énoncé particulièrement frappant dû à Gromov : les flots géodésiques de deux métriques riemanniennes à courbure strictement négative quelconques, sur la même variété compacte M, sont topologiquement équivalents ; cela signifie qu'il existe un homéomorphisme entre les fibrés unitaires tangents qui envoie les orbites de l'un des flots sur les orbites de l'autre. J'insiste cependant sur le fait que cet homéomorphisme n'est en général pas différentiable et qu'il ne conjugue pas les flots. *Le problème général de la classification topologique des difféomorphismes et des flots d'*Anosov *reste largement ouvert* même si des progrès importants ont été réalisés.

Lorsque M est une surface compacte connexe orientée à courbure constante -1, on peut l'identifier au quotient du disque de Poincaré $\mathbf{D}^2$ par l'action d'un groupe discret Γ d'isométries, qui peut donc être considéré comme un sous-groupe discret et cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ (qui est isomorphe, je le rappelle, au groupe des isométries directes de $\mathbf{D}^2$). Le fibré unitaire tangent à M s'identifie alors au quotient $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ et le flot géodésique sur ce fibré unitaire s'identifie à l'action à gauche du sous-groupe à un paramètre des matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sur le quotient à droite $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$. Ainsi, l'étude des géodésiques sur les surfaces à courbure négative constante est intimement liée aux *groupes fuchsiens*, c'est-à-dire aux sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$.

Le flot géodésique n'est pas le seul objet dynamique que l'on peut associer à une variété riemannienne : on peut également lui associer le *mouvement brownien.* On sait en effet qu'une métrique riemannienne permet de définir une *mesure de* Wiener μ_x sur l'espace $\Omega_x(M)$ des chemins continus $c : \mathbf{R}_+ \to M$ tels que $c(0) = x$. En combinant ces mesures avec le volume (normalisé) de M, on obtient une mesure de probabilité m sur l'espace $\Omega(M)$ de tous les chemins continus $c : \mathbf{R}_+ \to M$.

Évidemment, $\Omega(M)$ est naturellement muni d'un semi-flot Φ_τ (pour $\tau > 0$) (et donc d'une dynamique) défini par $\Phi_\tau(c)(t) = c(t+\tau)$. Il est facile de s'assurer que ce semi-flot préserve la mesure m de sorte qu'on peut envisager une étude ergodique riche d'informations sur la géométrie de la variété initiale M. De manière analogue, partant d'un feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont équipées d'une métrique riemannienne, on peut considérer l'espace $\Omega(\mathcal{F})$ des chemins dont l'image est contenue dans une feuille. Cet espace est encore muni d'un semi-flot Φ_τ et on obtient ainsi un moyen commode d'associer à un feuilletage une "vraie dynamique" (*i.e.* paramétrée par un "temps" τ). Je donnerai dans la suite quelques exemples d'applications de cette technique, ayant des conséquences purement topologiques ou géométriques, indépendantes du mouvement brownien.

Exemple 4. Considérons une matrice A de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ et supposons que $|tr(A)| > 2$ de sorte que l'une de ses valeurs propres est réelle de module strictement supérieur à 1 (l'autre valeur propre est alors de module strictement inférieur à 1). Cette matrice agit par automorphismes sur le plan $\mathbf{R}^2$ en préservant le réseau entier $\mathbf{Z}^2$ et définit donc un difféomorphisme A du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Cet exemple, maintenant classique, est d'une richesse étonnante. Tout d'abord, les points périodiques de A sont denses car un instant de réflexion montre que ces points périodiques sont précisément les points dont les coordonnées sont rationnelles. Mais on doit semble-t-il à Thom l'observation selon laquelle tout difféomorphisme homotope à A possède une infinité de points périodiques. Il suffit en effet d'utiliser la formule des points fixes de Lefschetz pour les itérés du difféomorphisme et de constater que la trace des puissances successives de A tend vers l'infini exponentiellement. Dans ses premiers travaux sur la stabilité des systèmes dynamiques, Smale avait dégagé une notion de difféomorphismes, aujourd'hui appelés Morse-Smale, qui possèdent en particulier un nombre fini d'orbites périodiques et qui sont structurellement stables : tout difféomorphisme suffisamment proche leur est conjugué par un homéomorphisme. Smale avait pensé un moment qu'un difféomorphisme générique pourrait être de type Morse-Smale mais l'exemple de la matrice A et l'observation de Thom montrent clairement qu'il n'en est rien. Par la suite, ce difféomorphisme est devenu l'exemple le plus simple de difféomorphisme d'Anosov, dont la dynamique est compliquée mais qui est structurellement stable. J'aurai l'occasion de revenir sur cet exemple car il apparaît dans beaucoup de mes travaux, sous des aspects très variés. Je vais me contenter ici d'expliquer un lien inattendu avec le flot géodésique des surfaces à courbure constante négative que nous avons rencontré plus haut.

Je rappelle d'abord comment un difféomorphisme Φ d'une variété M définit naturellement un flot ϕ^t, appelé *suspension* de Φ, sur une autre variété M_Φ, de dimension $\dim(M)+1$. Pour cela, on considère d'abord le produit $\overline{M} = M \times \mathbf{R}$ muni du flot $\overline{\phi}^t(x,\tau) = (x, \tau + t)$. On observe ensuite que $\mathbf{Z}$ agit librement et proprement sur $\overline{M}$ par $n \cdot (x,\tau) = (\Phi^n(x), \tau - n)$ et que cette action commute avec le flot $\overline{\phi}^t$. Par passage au quotient, on obtient une variété M_Φ, équipée d'un flot ϕ^t, comme annoncé. Remarquons que M_Φ fibre sur le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ avec des fibres difféomorphes à M, que le flot ϕ^t est transverse à cette fibration, et que l'application de premier retour sur une fibre est conjuguée à Φ.

On doit à Birkhoff le résultat remarquable suivant. Considérons d'une part le flot géodésique d'une surface compacte S (connexe et orientée) à courbure négative et de genre $g \geq 2$ et, d'autre part, la suspension d'une matrice A du type précédent. Ces deux flots ne peuvent pas être topologiquement équivalents puisque les variétés de dimension 3 qui les supportent ne sont pas homéomorphes. Il se trouve cependant qu'en retirant un nombre fini convenable d'orbites périodiques à ces deux variétés, et en choisissant convenablement A en fonction de g, les flots induits sur les variétés ouvertes ainsi obtenues sont topologiquement équivalents. Ainsi, la dynamique topologique des géodésiques sur une surface à courbure négative se réduit pour l'essentiel à une matrice 2×2 !

Une autre similitude de structure entre les matrices A de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ et les flots géodésiques provient de l'observation suivante. Il se trouve que l'espace ambiant M_A de la suspension de A est difféomorphe à un espace homogène du type G_3/Γ où G_3 est un groupe de Lie résoluble de dimension 3, indépendant de la matrice A (telle que $|tr(A)| > 2$), et Γ est un sous-groupe discret et cocompact de G_3 (qui dépend de A). Dans cette identification, la suspension de A peut s'interpréter comme l'action à gauche d'un sous-groupe à un paramètre de G_3 sur le quotient à droite G_3/Γ. Cette description est bien sûr très proche de celle que nous avons donnée des flots géodésiques des surfaces de courbure -1, pour lesquels le groupe résoluble G_3 est remplacé par le groupe semi-simple $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Plus généralement, la donnée d'un groupe de Lie G, d'un sous-groupe discret cocompact Γ (ou même de covolume fini) et d'un sous-groupe fermé $H \subset G$ permet de considérer l'action de H sur G/Γ. L'étude de ce type de dynamiques sur les espaces homogènes s'est révélée particulièrement féconde et riche de conséquences variées, tout particulièrement en théorie des nombres (travaux de Margulis et Ratner). Je reviendrai plusieurs fois dans la suite sur ces dynamiques homogènes.

Exemple 5. Une méthode efficace pour étudier la dynamique d'un feuilletage consiste à lui associer un *pseudogroupe d'holonomie*, dont l'étude a été initiée par Haefliger. Considérons un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q sur une variété M, supposée compacte pour simplifier. On choisit une collection finie de sous-variétés $T_1, T_2, \cdots$ de dimension q, plongées dans M de manière transverse à $\mathcal{F}$ et dont la réunion rencontre toutes les feuilles. La réunion T de ces T_i est munie d'un pseudogroupe d'homéomorphismes. Il s'agit de la collection des homéomorphismes h entre deux ouverts de T tels que pour tout x du domaine de définition de h, les points x et $h(x)$ appartiennent à la même feuille de $\mathcal{F}$. Il s'agit bien d'un pseudogroupe, c'est-à-dire que cette collection d'homéomorphismes est stable par passage à l'inverse, par restriction du domaine de définition, et par composition, là où elle est définie. Toute propriété dynamique du feuilletage peut se traduire en termes du pseudogroupe.

Évidemment, le pseudogroupe dépend du choix de ces transversales mais tous les pseudogroupes obtenus sont équivalents dans un sens qui n'est pas difficile à définir.

Parfois, ce pseudogroupe est un groupe. C'est le cas si le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse à une fibration localement triviale π de M sur une base B dont la dimension est égale à la dimension des feuilles. Chaque feuille est alors un revêtement de B et la situation est alors complètement décrite par le *groupe de monodromie*, c'est-à-dire par un homomorphisme du groupe fondamental de B vers le groupe des homéomorphismes d'une fibre typique F de π. Évidemment, si l'on choisit comme transversale T la fibre F, le pseudogroupe d'holonomie associé n'est autre que ce groupe de monodromie (ou, pour être plus précis, le pseudogroupe induit par ce groupe).

Réciproquement, étant donnés des variétés B et F et un homomorphisme du groupe fondamental de B vers le groupe des homéomorphismes de F, on construit un fibré associé par le procédé bien connu : on considère le produit $\tilde{B} \times F$ du revêtement universel de B par F. Le groupe fondamental $\pi_1(B)$ agit naturellement sur $\tilde{B}$ et également sur F à travers l'homomorphisme donné. L'action produit sur $\tilde{B} \times F$ est libre et propre et la variété quotient M fibre au dessus de B avec des fibres homéomorphes à F. Puisque cette action préserve le feuilletage produit dont les feuilles sont $\tilde{B} \times \{\star\}$, la variété M hérite d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse aux fibres dont la monodromie-holonomie est l'homomorphisme dont on est parti. Ce procédé est souvent appelé *suspension d'un groupe de difféomorphismes* et il généralise évidemment le procédé de suspension d'un difféomorphisme que nous avons rencontré précédemment et qui correspond au cas où B est le cercle.

Ce dictionnaire *feuilletage/pseudogroupe* est d'une grande utilité mais suggère un problème important : *étant donné un pseudogroupe, comment reconnaître s'il est équivalent au pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage sur une variété compacte ?* Un exemple particulièrement mystérieux est celui des équations différentielles polynomiales dans $\mathbf{CP}^2$: on ne connaît que très peu de contraintes sur les pseudogroupes qui apparaissent.

Exemple 6. Dès le début de la théorie des feuilletages, l'accent est mis sur la dynamique topologique, en particulier sous l'impulsion de Reeb dans les années 1960-70. Dans ce domaine, le concept classique d'*ensemble minimal* est central : il s'agit d'un compact $\mathcal{M} \subset M$ qui est non vide, réunion de feuilles, et minimal pour ces propriétés. L'adhérence de toute feuille contient un tel ensemble minimal (par le lemme de Zorn) et cette remarque justifie l'intérêt de l'analyse précise de ces ensembles minimaux. Évidemment, le premier cas à considérer est celui des feuilletages de codimension 1. Dans ce cas, il est facile de montrer qu'un ensemble minimal ne peut être que de trois types : une feuille compacte, la variété toute entière (lorsque toutes les feuilles sont denses) ou un *minimal exceptionnel* dont la topologie transverse est celle d'un ensemble de Cantor. La terminologie choisie pour ce dernier cas illustre le fait que Reeb ignorait si ce cas pouvait effectivement se produire et il lui semblait même qu'un théorème de Denjoy pouvait suggérer que ces objets n'existaient pas pour un feuilletage suffisamment différentiable. Ce théorème affirme en effet qu'un difféomorphisme du cercle de classe C^2 a toutes ses orbites denses ou bien possède une orbite périodique, de sorte que, traduit par suspension, il signifie qu'un feuilletage de classe C^2 sur le tore $\mathbf{T}^2$ ne possède pas de minimal exceptionnel. Sacksteder ne tarda pas à construire des exemples de minimaux exceptionnels et on comprit par la suite qu'ils sont au contraire abondants : les œuvres de Poincaré regorgent d'exemples ! Il suffit de considérer la suspension d'un "groupe fuchsien de seconde espèce". Nous avons déjà rencontré les groupes fuchsiens, sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Ils agissent sur le disque de Poincaré mais également sur son bord, le cercle à l'infini. Ce cercle peut lui-même être pensé comme la droite projective réelle et l'action est l'action projective habituelle. Ainsi l'étude des groupes fuchsiens peut se faire à travers leur action sur le cercle. Ces groupes présentent des dynamiques tout à fait intéressantes. Si le groupe fuchsien Γ n'est pas virtuellement abélien, deux cas peuvent se produire. Dans le premier, toutes les orbites de Γ sont denses dans $\mathbf{RP}^1$ et, dans le second, il existe un ensemble de Cantor contenu dans $\mathbf{RP}^1$, invariant par Γ qui produit par suspension un minimal exceptionnel. Par la suite, une théorie très riche, dite *théorie des niveaux*, a permis de comprendre la dynamique topologique des feuilletages de codimension 1 et de classe C^2. D'une certaine façon, il s'agit de la fusion des théorèmes de Poincaré-Bendixson et de Denjoy, adaptée aux pseudogroupes de difféomorphismes de classe C^2 en dimension (réelle) 1. Beaucoup de problèmes fondamentaux restent cependant ouverts dans ce domaine : par exemple, *on ne sait toujours pas si la mesure de* Lebesgue *d'un minimal exceptionnel est nécessairement nulle.*

II.– Exemples de résultats.

Je regroupe dans ce paragraphe quelques résultats "en vrac" sur lesquels j'essayerai de donner plus de détails et de motivations dans la deuxième partie. J'ai essayé de choisir des théorèmes qui peuvent s'énoncer le plus simplement possible ; j'espère ainsi donner au lecteur une idée rapide et très générale sur mes travaux, mais bien sûr superficielle.

• Considérons une surface compacte orientée S équipée d'une métrique riemannienne à courbure strictement négative. Le revêtement universel $\tilde{S}$ de S peut se compactifier par l'adjonction d'un cercle à l'infini $\partial_\infty \tilde{S}$: un point de ce cercle est une classe d'équivalence de géodésiques $c : \mathbf{R} \to \tilde{S}$ où l'on identifie deux géodésiques c, c' si la distance entre $c(t)$ et $c'(t)$ est bornée pour $t \geq 0$. Étant donnés trois points distincts x, y, z de $\partial_\infty \tilde{S}$, on peut les "relier" deux à deux par des géodésiques et former ainsi un *triangle idéal* dont l'aire est finie.

La courbure d'une métrique à courbure strictement négative sur une surface compacte est constante si et seulement si tous les triangles idéaux de son revêtement universel ont la même aire ([20]).

• Considérons un point p de $\tilde{S}$. Le cercle unité $\mathbf{S}^1_p$ de l'espace tangent à $\tilde{S}$ en p s'identifie naturellement à $\partial_\infty \tilde{S}$: il suffit d'associer à chaque vecteur unitaire le "point limite" de la géodésique issue de p dont la vitesse initiale est ce vecteur. Ainsi tous les cercles unitaires $\mathbf{S}^1_p$ sont identifiés entre eux. On peut imaginer que ces cercles unitaires sont les cercles visuels de divers observateurs p qui observent le même infini $\partial_\infty \tilde{S}$.

Si les identifications entre les divers cercles unitaires $\mathbf{S}^1_p$ sont de classe C^2, la courbure est constante. ([22]).

• Soit S une surface compacte orientée munie d'une métrique à courbure -1. Alors $\tilde{S}$ s'identifie au disque de Poincaré, et son bord à une droite projective réelle. Le groupe fondamental Γ de S opère donc projectivement sur $\partial_\infty \tilde{S} \simeq \mathbf{RP}^1 \simeq \mathbf{S}^1$. Par ailleurs, chaque action de Γ sur le cercle par homéomorphismes directs définit un fibré en cercles orientés au dessus de S auquel est associé un invariant topologique : le *nombre d'*Euler (ou première classe de Chern) de ce fibré. Il s'agit d'un entier qui, dans le cas particulier de l'action de Γ sur le bord de $\partial_\infty \tilde{S}$, est égal à $2g-2$ où g est le genre de S.

*Considérons une action du groupe fondamental d'une surface compacte orientée de genre g sur le cercle, par difféomorphismes directs de classe C^∞. Si le nombre d'*Euler *de l'action est égal à $2g-2$, l'action est C^∞-conjuguée à l'action projective provenant d'une métrique à courbure négative constante sur la surface* ([41]).

• *Soit* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ *le groupe de* Lie *de dimension 2 des applications affines réelles $x \mapsto ax+b$ (avec $a>0$). Considérons une action localement libre de* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ *de classe C^∞ sur une variété compacte M de dimension 3 qui préserve une forme de volume. Alors M est (difféomorphe à) un espace homogène de la forme G/Γ où Γ est un réseau cocompact d'un groupe de* Lie *G de dimension 3 contenant un sous-groupe isomorphe à* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ *et l'action est C^∞-conjuguée à l'action à gauche de* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ *sur* G/Γ ([11]).

• *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension 3 munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont des sous-variétés immergées de dimension 2 totalement géodésiques. Alors, quitte à passer à un revêtement fini, M est en fait l'espace total d'un fibré dont les fibres sont des cercles ou des tores, transverses à $\mathcal{F}$* ([2]).

• *Soit Γ un réseau dans un groupe de* Lie *semi-simple dont le rang réel est au moins 2 (par exemple un sous-groupe d'indice fini de* $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ *pour $n \geq 3$). Alors, il n'existe pas d'action fidèle de Γ sur le cercle par difféomorphismes de classe C^1* ([57]).

• *Soit Γ un groupe nilpotent agissant fidèlement sur la sphère de dimension 2 par difféomorphismes analytiques réels. Alors, le premier groupe dérivé de Γ est commutatif. ([42]).*

Un sous-groupe d'indice fini de SL$(n, \mathbf{Z})$ *(pour* $n \geq 4$*) n'agit pas fidèlement et analytiquement sur la sphère de dimension 2.*

• *Soit* Γ *un réseau dans un groupe de* Lie *semi-simple dont le rang réel est au moins 2. Tout homomorphisme de* Γ *dans le groupe des germes de difféomorphismes analytiques réels de* $\mathbf{R}^n$ *fixant l'origine est analytiquement conjugué à un homomorphisme à valeurs dans le groupe des germes de difféomophismes linéaires* ([55]).

• Convenons de dire qu'une action d'un groupe Γ sur une variété compacte M est *récurrente* si pour tout point x de M, il existe une suite $(\gamma_i)_{i\geq 0}$ d'éléments distincts de Γ telle que $\gamma_i.x$ converge vers x. *Si* Γ *est le groupe libre sur* $a_1, \cdots, a_n$ *(*$n \geq 2$*) et si* M *est une variété compacte analytique réelle, toute action analytique de* Γ *sur* M *suffisamment proche de l'identité est récurrente.* (Une action est proche de l'identité si les difféomorphismes associés aux a_i sont proches de l'identité dans la topologie analytique) ([42]).

• *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage orientable de dimension 2 sur une variété compacte* M*. Si aucune feuille n'est compacte, un nombre non dénombrable d'entre elles sont homéomorphes à l'une des six surfaces suivantes* ([47]).

• *Soit* Γ *un réseau cocompact de* SL$(2, \mathbf{C})$*. La variété complexe* SL$(2, \mathbf{C})/\Gamma$ *est rigide comme variété complexe si et seulement si son premier nombre de* Betti *est nul* ([49]).

DEUXIÈME PARTIE.

DESCRIPTION DES TRAVAUX PRÉSENTÉS.

I.– Feuilletages et flots d'Anosov.

Un des plus jolis théorèmes de la théorie des feuilletages est le théorème de Novikov affirmant qu'un feuilletage de dimension 2 sur la sphère de dimension 3 possède nécessairement une feuille compacte. Dans mon premier travail [1] (en collaboration avec SERGIESCU), j'ai cherché à généraliser ce théorème à des variétés compactes de dimension 3 relativement simples, à savoir celles dont le groupe fondamental est résoluble. Le résultat obtenu est en fait une liste complète des exceptions à ce théorème dans ce nouveau contexte. L'une des exceptions nous a paru remarquablement intéressante ; il s'agit de ce que nous appelons les *feuilletages modèles* qui sont des feuilletages de codimension 1 sur certains fibrés en tores $\mathbf{T}^2$ au dessus du cercle. Pour les construire, on choisit une matrice A de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ telle que $|tr(A)| > 2$. Chaque direction propre de A définit un feuilletage du plan $\mathbf{R}^2$ dont les feuilles sont les droites parallèles à cette direction. En passant au quotient sur le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, on obtient ainsi deux feuilletages qui sont invariants par le difféomorphisme A de $\mathbf{T}^2$. Par produit, on obtient de même deux feuilletages de codimension 1 sur $\mathbf{T}^2\times\mathbf{R}$ qui sont invariants par $(x,t) \in \mathbf{T}^2\times\mathbf{R} \mapsto (A(x), t-1) \in \mathbf{T}^2\times\mathbf{R}$. Passant de nouveau au quotient, on obtient une variété compacte de dimension 3, notée $\mathbf{T}^3_A$, munie de deux feuilletages (de classe C^∞) transverses, de codimension 1. Cette variété $\mathbf{T}^3_A$ fibre sur le cercle et ses fibres sont difféomorphes au tore $\mathbf{T}^2$ de sorte que son groupe fondamental est effectivement résoluble. Notre principal résultat est que sur la variété $\mathbf{T}^3_A$, *à conjugaison C^∞ près, ces deux exemples de feuilletages C^∞ de codimension 1 sont les seuls qui n'ont pas de feuilles compactes.*

On était jusqu'alors habitué à des classifications beaucoup plus faibles où la conjugaison entre l'objet initial et l'objet perturbé n'est que topologique. Il est facile de déformer un difféomorphisme ϕ (ou un flot) de façon à ce que le nouveau difféomorphisme ϕ' ne soit pas différentiablement conjugué à ϕ : si, par exemple, ϕ possède un point fixe x, il suffit de choisir ϕ' de sorte $\phi'(x) = x$ et que les jacobiens de ϕ et ϕ' en x soient différents. C'est à cause de cette grande flexibilité des difféomorphismes que la notion de *conjugaison topologique* s'est rapidement imposée dans les systèmes dynamiques. Si l'on considère comme équivalents deux difféomorphismes qui sont conjugués par un homéomorphisme, on peut trouver des ouverts non vides dans le groupe des difféomorphismes d'une variété (muni de la topologie C^1) formés de difféomorphismes équivalents entre eux. Pour cette raison, les premiers travaux concernant les feuilletages cherchaient également des classifications topologiques. Évidemment, déformer un feuilletages de codimension 1 est bien plus difficile que déformer un difféomorphisme et on peut ainsi espérer des phénomènes de rigidité différentiable pour des feuilletages ou pour des actions de groupes. Il me semble que ce travail [1] est le premier résultat allant dans cette direction. Je ne vais pas entrer dans les détails de la preuve mais un ingrédient important mérite d'être signalé. Partant d'un feuilletage sans feuilles compactes de codimension 1 sur $\mathbf{T}^3_A$, on commence par lui appliquer une isotopie de façon à le rendre transverse à la fibration : cette étape est un peu délicate mais elle met en œuvre des techniques classiques qui remontent aux thèses de ROUSSARIE et THURSTON. Puis on analyse la trace du feuilletage sur une fibre $\mathbf{T}^2$ et on montre qu'elle est conjuguée à la suspension d'un difféomorphisme du cercle. En étudiant le nombre de rotation de celui-ci, on découvre qu'il s'agit d'un nombre irrationnel quadratique sur $\mathbf{Q}$ de sorte que son développement en fraction continue est périodique. Le magnifique théorème de HERMAN sur les difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation satisfait à une condition diophantienne permet alors de montrer que la trace du feuilletage sur la fibre est *différentiablement* conjuguée à un feuilletage par droites et ceci permet de conclure facilement.

Une autre propriété de ces modèles est le fait qu'ils peuvent être définis par une action localement libre du groupe affine de $\mathbf{R}$ (*i.e.* le groupe de LIE de dimension 2, noté $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, formé des transformations $x \mapsto ax + b, a > 0$). Les propriétés dynamiques de ces feuilletages n'en sont que renforcées puisque leurs feuilles sont paramétrées par un "temps bidimensionnel"... Si λ désigne l'une des valeurs propres de A, il existe deux vecteurs Y, Z de $\mathbf{R}^2$ tels que $A(Y) = \lambda Y$ et $A(Z) = \lambda^{-1} Z$ qui permettent de définir deux champs de vecteurs, encore notés Y, Z, sur $\mathbf{T}^3_A$, tangents aux fibres de la fibration sur le cercle. Sur $\mathbf{T}^3_A$ on dispose encore d'un champ de vecteurs qui est la suspension de A ; quitte à multiplier celui-ci par une constante, on obtient finalement trois champs de vecteurs partout linéairement indépendants X, Y, Z dont les crochets de LIE vérifient :

$$[X, Y] = Y \quad ; \quad [X, Z] = -Z \quad ; \quad [Y, Z] = 0.$$

Ceci définit une algèbre de LIE (résoluble) de dimension 3 dont on note G_3 le groupe de LIE simplement connexe associé. Ainsi, $\mathbf{T}^3_A$ peut être vu comme un espace homogène de G_3, c'est-à-dire comme le quotient de G_3 par un certain réseau cocompact $\Gamma_A \subset G_3$. Abstraitement, Γ_A est le produit semi-direct de $\mathbf{Z}^2$ par $\mathbf{Z}$ associé à l'automorphisme A de $\mathbf{Z}^2$. Les deux couples de champs (X, Y) et (X, Z) engendrent l'un et l'autre des sous-algèbres de LIE isomorphes à l'algèbre de LIE de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ et ceci explique pourquoi ces feuilletages modèles sont effectivement définis par une action localement libre de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$. Le groupe G_3 n'est autre que le groupe d'isométries du plan $\mathbf{R}^2$ muni de la métrique lorentzienne $ds^2 = dx^2 - dy^2$ et les copies de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ que nous venons de décrire sont les stabilisateurs des deux droites isotropes passant par l'origine.

Ce sont ces faits qui m'ont poussé à étudier les actions du groupe affine sur les variétés de dimension 3 dont le groupe fondamental n'est plus supposé résoluble. Là encore, j'ai rencontré des phénomènes de rigidité très forts.

Le premier résultat que j'ai obtenu dans cette direction est le suivant. *Considérons* *une variété compacte M de dimension 3 munie d'une action localement libre de classe C^∞ du groupe* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$*. Si l'action préserve une forme de volume (ou tout au moins une mesure absolument continue par rapport à la mesure de* LEBESGUE*), alors M est un espace homogène G/Γ d'un groupe de* LIE *G de dimension 3 contenant une copie du groupe* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ *et l'action est différentiablement conjuguée à l'action à gauche de* $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ *sur* G/Γ. Le groupe de LIE G qui apparaît dans ce théorème ne peut être en fait que de deux types : le groupe résoluble G_3 que nous avons déjà rencontré et $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ (ou plutôt son revêtement universel $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$). Concrètement, partant de deux champs de vecteurs X et Y partout linéairement indépendants sur une variété compacte M de dimension 3 , on cherche à construire un troisième champ de vecteurs Z indépendant des deux premiers et formant avec ceux-ci une algèbre de LIE qui est soit celle décrite plus haut soit celle de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, c'est-à-dire :

$$[X,Y] = Y \quad ; \quad [X,Z] = -Z \quad ; \quad [Y,Z] = X.$$

Pour montrer l'existence de ce troisième champ, j'ai eu l'idée d'utiliser des méthodes d'analyse harmonique, nouvelles dans ce contexte. Si l'action de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ préserve un volume μ sur M, alors on peut considérer la représentation unitaire correspondante sur l'espace de Hilbert $L^2(M,\mu)$ et la décomposer en composantes irréductibles. La méthode des orbites de KIRILOV permet d'obtenir une liste des composantes irréductibles qui peuvent apparaître dans cette décomposition et on scinde alors le problème de l'existence de ce troisième champ en autant de problèmes qu'il n'y a de composantes irréductibles. Ces problèmes ne sont pas difficiles à résoudre de sorte qu'on trouve effectivement ce champ Z mais il n'est *a priori* que mesurable, et il faut encore travailler pour montrer qu'il est en fait différentiable... On y parvient grâce à une étude locale de la situation au voisinage des points fixes hyperboliques de l'action étudiée.

Dans le théorème précédent, j'aurais aimé pouvoir me passer de l'hypothèse concernant l'existence d'un volume invariant. J'ai beaucoup travaillé sur cette question sans obtenir cependant de résultat complet. Je suis néanmoins parvenu à démontrer que *si le premier nombre de* BETTI *d'une variété compacte M de dimension 3 est nul, alors toute action localement libre de classe C^∞ sur M préserve une forme de volume de classe C^∞*, et on peut donc lui appliquer le théorème précédent. Cette hypothèse sur le nombre de BETTI me paraît un artefact de la preuve et je n'ai pas perdu espoir (quinze ans plus tard !) de m'en débarrasser.

Cette étude s'est avérée liée à celle des *flots d'*ANOSOV sur les variétés de dimension 3. Je rappelle qu'un flot ϕ^t, défini par un champ de vecteurs non singulier X, sur une variété compacte M de dimension 3 est de type ANOSOV s'il existe deux champs de droites E^{uu} et E^{ss} qui sont respectivement contractés et dilatés exponentiellement par (la différentielle de) ϕ^t lorsque t tend vers $+\infty$. Dans une telle situation, E^{uu} (*resp.* E^{ss}) et le champ de vecteurs X engendrent un feuilletage de codimension 1, dit feuilletage instable (*resp.* stable) de ϕ^t. ANOSOV avait été amené à introduire ces flots car ils constituent les premiers exemples de flots dont la dynamique est compliquée mais qui sont cependant (topologiquement) structurellement stables. Il se trouve que les exemples d'actions de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ que nous avons rencontrés précédemment sont les exemples classiques de feuilletages stables de flots d'Anosov. Le second exemple correspond au flot géodésique d'une surface à courbure négative constante.

Je me suis donc intéressé aux flots d'Anosov pour eux mêmes. Même si ces flots présentent une dynamique extrêmement riche, il faut remarquer qu'au début des années 1980, on ne connaissait pas beaucoup d'exemples, à part les deux que nous avons déjà rencontrés ! Armandariz et Plante avaient montré que sur une variété de dimension 3 dont le groupe fondamental est résoluble, un flot d'Anosov est nécessairement conjugué à la suspension d'un automorphisme hyperbolique A du tore $\mathbf{T}^2$. Il ne me paraissait pas déraisonnable de penser que ces suspensions et les flots géodésiques pourraient bien être les seuls flots d'Anosov en dimension 3. Dans ce but, *j'ai donc étudié tout d'abord les flots d'*Anosov *sur les variétés de dimension 3 qui sont des fibrés en cercles au dessus d'une surface (comme c'est le cas pour un flot géodésique). Le résultat principal de [5] est que, à revêtement fini près, et à équivalence topologique près, les seuls exemples sont précisément les flots géodésiques des surfaces à courbure négative, opérant sur leur fibré unitaire tangent.* Il s'agit donc d'une caractérisation d'une famille de dynamiques à partir d'une hypothèse purement topologique. La preuve utilise d'abord des techniques propres à la topologie des feuilletages de codimension 1 mais aussi à la géométrie hyperbolique puisque j'utilise le concept de quasi-géodésique dans le plan hyperbolique. Les méthodes employées dans cet article ont été reprises par de nombreux chercheurs dans leur analyse des flots d'Anosov (en particulier, Barbot, Fenley et Matsumoto).

On sait aujourd'hui que mon espoir de classification topologique des flots d'Anosov était un peu trop naïf... Grâce à des constructions de type "chirurgie dynamique" sur les orbites périodiques, on peut obtenir un grand nombre d'exemples de flots d'Anosov sur des variétés de dimension 3 très différentes et leur classification est un problème probablement difficile. Une classification plus faible me paraît pourtant raisonnable. Convenons de dire que deux flots ϕ^t et ϕ'^t sur deux variétés M et M' sont "presque topologiquement équivalents" si on peut trouver des orbites périodiques $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ et $\gamma'_1, \cdots, \gamma'_k$ de ϕ^t et ϕ'^t respectivement telles que les flots ϕ^t et ϕ'^t restreints aux variétés ouvertes $M \setminus \cup_{i=1}^k \gamma_i$ et $M' \setminus \cup_{i=1}^k \gamma'_i$ sont topologiquement équivalents. Il n'est pas impossible que deux flots d'Anosov quelconques sur deux variétés compactes (connexes) de dimension 3 possèdent des revêtements finis qui sont presque topologiquement équivalents...

Dans un second travail [22], j'ai essayé de caractériser ces flots géodésiques en courbure négative constante à partir de propriétés de régularité des feuilletages associés. Dans la définition d'un flot d'Anosov, les champs de droites E^{ss} et E^{uu} ne sont pas supposés différentiables. Il est en effet important pour la théorie que l'ensemble des flots d'Anosov soit ouvert dans la topologie C^1 et on peut montrer qu'une perturbation générique du flot géodésique d'une surface compacte à courbure

-1 mène à un flot d'Anosov dont les distributions stables et instables ne sont que Hölder continues et pas différentiables. Dans [22], j'ai cherché à déterminer les flots d'Anosov (toujours en dimension 3) pour lesquels E^{ss} et E^{uu} sont de classe C^2. Mon idée initiale est la suivante. Supposons donc que E^{ss} et E^{uu} soient de classe C^2 et analysons la situation localement : en projetant les courbes intégrales de E^{ss} sur un espace local d'orbites pour E^{uu}, on obtient une famille à deux paramètres de courbes dans un disque bidimensionnel. Ce type d'objet local est précisément celui que l'on rencontre dans l'étude des solutions d'une équation différentielle du second ordre $F(x, y, y', y'') = 0$. À la fin du dix-neuvième siècle, Tressé avait construit des invariants différentiels locaux associés à une telle équation différentielle de nature tensorielle. Dans notre cas, puisque le flot d'Anosov préserve E^{ss} et E^{uu}, ces tenseurs doivent être invariants par le flot et la complexité de la dynamique entraîne que ces invariants sont en fait nuls ! Cela signifie que les équations différentielles du second ordre que l'on rencontre sont équivalentes à l'équation $y'' = 0$ ou encore que la famille à deux paramètres de courbes est équivalente, à difféomorphisme près, à la famille des droites dans le plan. Ceci permet d'engendrer une géométrie projective locale invariante par le flot. En résumé, la condition de différentiabilité des champs E^{ss} et E^{uu} et la complexité de la dynamique ont permis d'exhiber une structure géométrique rigide invariante. Il n'est alors pas très difficile d'achever la classification. Avant d'énoncer le résultat final, il me faut expliquer une construction très générale que j'ai introduite dans cet article. Soit X un champ de vecteurs non singulier sur une variété compacte M et ω et ω' deux 1-formes fermées suffisamment petites pour que $(1 + \omega(X))X$ et $(1 + \omega'(X))X$ soient non singuliers. Alors on peut montrer que si ω et ω' sont cohomologues, il existe un difféomorphisme qui envoie $(1 + \omega(X))X$ sur $(1 + \omega'(X))X$. Autrement dit, étant donné un champ de vecteurs non singulier et une petite classe de cohomologie dans $H^1(M; \mathbf{R})$, on peut construire un autre champ de vecteurs bien défini à conjugaison différentiable près. On dira que ces nouveaux champs de vecteurs sont obtenus à partir de X par un *changement de temps localement constant*. Je peux maintenant énoncer le résultat principal de [22]. *Si un flot d'*Anosov *possède des distributions stables et instables, E^{ss} et E^{uu}, de classe C^2, alors, à revêtement fini près, il est obtenu à partir d'un flot géodésique à courbure négative constante, ou à partir de la suspension d'une matrice hyperbolique de* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$*, par un changement de temps localement constant.*

Un corollaire facile du théorème précédent a donné lieu par la suite à beaucoup de développements en dimension supérieure. *Soit m une métrique riemannienne à courbure négative sur une surface compacte. Si le feuilletage stable du flot géodésique est de classe C^2, alors la courbure de m est constante.* Si j'ai décrit quelques idées de la preuve de ce théorème, c'est qu'elles illustrent un thème que j'affectionne particulièrement et qui revient à de nombreuses reprises dans mes travaux : une dynamique compliquée préservant une structure géométrique force cette structure à être localement homogène. Ce thème géométrique a d'ailleurs fait l'objet d'un magnifique article de Gromov (Rigid transformation groups).

Les articles [37] et [41] sont dans le prolongement de ces travaux : j'étudie les flots d'ANOSOV pour lesquels les feuilletages stable et instable faibles ($E^{ss} \oplus \mathbf{R}X$ et $E^{uu} \oplus \mathbf{R}X$) sont très réguliers. Cette généralisation n'est pas gratuite : si l'on multiplie un champ de vecteurs X de type ANOSOV par une fonction qui ne s'annule pas, on obtient un autre champ de type ANOSOV mais les variétés stable et instable E^{ss} et E^{uu} ont en général changé. Par contre, les espaces stable et instable faibles n'ont pas changé ce qui les rend beaucoup plus naturels car invariants par changements d'horloge. Les résultats obtenus sont analogues et les preuves sont bien plus compliquées mais consistent encore à "chercher la géométrie invariante". La classification des flots d'ANOSOV dont les feuilletages stable et instable faibles sont différentiables ne se réduit cependant pas aux flots géodésiques en courbure constante. Je définis une classe de flots d'ANOSOV ϕ^t que j'appelle *quasi-fuchsiens* et qui résultent en quelque sorte de la fusion de deux métriques à courbure constante g_1 et g_2 : le feuilletage stable (*resp.* instable) faible de ϕ^t est celui du flot géodésique de g_1 (*resp.* g_2). *Ces flots quasi-fuchsiens ainsi que les suspensions d'automorphismes hyperboliques du tore sont les seuls flots d'*ANOSOV *à feuilletages stable et instable faibles de classe C^2.*

Les flots d'ANOSOV peuvent bien sûr être définis dans toutes les dimensions (≥ 3) : un flot associé à un champ de vecteurs non singulier est de type ANOSOV si l'on peut décomposer le fibré tangent en une somme $E^{ss} \oplus E^{uu} \oplus \mathbf{R}X$ de telle sorte que les sous-fibrés E^{ss} et E^{uu} sont invariants pas la différentielle du flot, E^{ss} étant contracté et E^{uu} étant dilaté. En dimension supérieure ou égale à 3, la situation est encore plus mystérieuse mais *lorsque la codimension est égale à 1 (*i.e. *lorsque la dimension de E^{ss} ou de E^{uu} est égale à 1),* VERJOVSKY *a conjecturé que les seuls exemples sur des variétés de dimension au moins 4 sont topologiquement conjugués à des suspensions d'automorphismes de tores $\mathbf{T}^n$. Cette conjecture reste ouverte mais je crois avoir fait un progrès significatif en l'établissant sous des conditions de régularité assez faibles pour les distributions E^{ss} et E^{uu}* ([24]).

Je décrirai plus loins deux autres contributions à l'étude des systèmes d'ANOSOV, que je préfère placer parmi mes travaux plus récents autour de la dynamique holomorphe.

II.– Feuilletages riemanniens et totalement géodésiques.

Les *feuilletages riemanniens* sont ceux pour lesquels les feuilles restent "parallèles". Précisément, un feuilletage est riemannien s'il existe une métrique riemannienne sur le fibré normal qui est invariante par holonomie. Évidemment, on n'attend pas de ce genre de feuilletages qu'ils aient une dynamique compliquée, de même qu'on n'attend pas d'une isométrie d'une variété riemannienne d'être chaotique ! Cependant, la topologie et la géométrie de ces feuilletages peuvent être analysées de manière assez précise. Les travaux présentés dans cette partie ont donc un caractère beaucoup plus géométrique et topologique que dynamique.

Si le fibré normal d'un feuilletage peut être trivialisé de manière invariante par holonomie, ce feuilletage est évidemment riemannien : il suffit de choisir la métrique qui rend cette trivialisation orthonormée. On dit alors que le feuilletage est *transversalement parallélisable*. Si les champs de vecteurs qui constituent ce parallélisme transverse constituent une algèbre de LIE, on dit que le feuilletage est *transversalement de* LIE. Dans cette situation, le pseudogroupe d'holonomie est équivalent à un *groupe d'holonomie* Γ agissant par translations à gauche sur un groupe de LIE G. Par exemple si le *groupe structural* G est $\mathbf{R}$, un feuilletage transversalement de LIE n'est rien d'autre qu'une 1-forme fermée et Γ est le groupe des périodes usuel.

On doit à MOLINO une théorie descriptive des feuilletages riemanniens. Elle consiste, en construisant divers fibrés associés, à montrer qu'il est possible de réduire l'étude des feuilletages riemanniens à celle des feuilletages transversalement parallélisables et cette dernière à celle des feuilletages transversalement de LIE.

Ici encore, j'ai cherché à comprendre l'influence de la topologie d'une variété sur le comportement de ses feuilletages riemanniens. En particulier, si l'on suppose que la variété est simplement connexe, je suis en mesure de décrire assez précisément le comportement qualitatif de ces feuilletages [6]. L'observation de départ est que si l'on applique le "dévissage" de MOLINO à un feuilletage riemannien sur une variété simplement connexe, le groupe de LIE structural G associé est abélien et on peut appliquer les techniques spécifiques aux formes fermées. Je montre par exemple qu'*il est toujours possible d'approcher un feuilletage riemannien sur une variété simplement connexe par des feuilletages "dynamiquement triviaux", c'est-à-dire dont toutes les feuilles sont compactes. J'obtiens également une description complète des feuilletages riemanniens sur les sphères et les espaces projectifs (réels, complexes ou quaternioniques).*

Le pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage riemannien est un pseudogroupe d'isométries et il s'agit donc d'un cadre idéal pour analyser la question générale de HAEFLIGER : partant d'un pseudogroupe, est-il possible de construire un feuilletage sur une variété compacte dont ce soit le pseudogroupe d'holonomie ? Dans certains cas, la question est facile. Par exemple, un sous-groupe de type fini quelconque de $\mathbf{R}$ peut être réalisé comme le groupe des périodes d'une forme fermée non singulière sur une variété compacte bien choisie. HAEFLIGER avait généralisé cette observation aux sous-groupes de type fini des groupes de LIE nilpotents. J'ai abordé la question dans le premier cas intéressant, celui d'un sous-groupe dense du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ agissant sur $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ par translations et donc par isométries [8]. Contrairement au cas nilpotent, un tel groupe ne peut pas toujours être réalisé comme un groupe d'holonomie. *Je montre par exemple que si le groupe engendré par une translation $x \mapsto x+1$ et des homothéties $x \mapsto a_i x$ est réalisable, les nombres a_i doivent être algébriquement dépendants sur* $\mathbf{Q}$. Depuis cet article, un certain nombre de progrès ont été réalisés dans ce domaine mais on est encore bien loin d'une compréhension satisfaisante, même pour les sous-groupes de type fini des groupes de LIE. Les mathématiciens ont depuis longtemps étudié les sous-groupes discrets des groupes de

Lie. Le sujet est bien sûr passionnant mais il me semble que l'étude des sous-groupes denses mériterait un peu plus d'attention ! En particulier, j'aimerais comprendre les sous-groupes denses que Haefliger appelle “de génération compacte” : il s'agit d'une propriété satisfaite par les groupes d'holonomie des feuilletages de Lie sur les variétés compactes.

L'étude de ces pseudogroupes et de leur géométrie m'a mené à étudier dans [9], en collaboration avec Carrière, une question posée par Connes et Sullivan. La version la plus abstraite de “feuilletage” est celle de *relation d'équivalence mesurable sur un espace borélien standard.* Il s'agit d'un ensemble E muni d'une σ-algèbre $\mathcal{B}$ et d'une mesure σ-finie μ de telle sorte que $(E, \mathcal{B})$ soit isomorphe à la σ-algèbre des boréliens sur un espace métrique séparable. Sur cet espace E, on considère une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont le graphe est mesurable, dont les classes d'équivalence sont dénombrables, et telle que le saturé d'un ensemble de mesure nulle est également de mesure nulle. L'exemple auquel il faut penser est bien sûr celui où E est la réunion d'une collection de transversales à un feuilletage différentiable, rencontrant toutes les feuilles, $\mathcal{B}$ est la tribu de boréliens, μ est la mesure de Lebesgue et $\mathcal{R}$ est la relation “appartenir à la même feuille”. On pourrait croire *a priori* qu'en passant du contexte des feuilletages différentiables à celui des relations d'équivalence boréliennes, on a perdu toute information intéressante mais il n'en est rien. De nombreux invariants dynamiques subtils sont en fait des invariants mesurables et la recherche est actuellement très active dans ce domaine. Une définition fondamentale est celle de *relation d'équivalence moyennable* : il s'agit des relations pour lesquelles il existe *une* bijection mesurable F de E dont les orbites sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ (μ-presque partout) et telle que $F_\star\mu \sim \mu$.

Soit Γ *un sous-groupe dénombrable de* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. *Nous montrons que la relation d'équivalence sur* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ *engendrée par les translations à gauche par* Γ *est moyennable si et seulement si* Γ *est discret ou résoluble.* Ce résultat a été généralisé par la suite par Zimmer ce qui a permis de caractériser les feuilletages riemanniens moyennables comme étant précisément ceux dont le groupe structural est résoluble.

Cette meilleure compréhension des feuilletages riemanniens m'a conduit naturellement à étudier les feuilletages *totalement géodésiques.* Il s'agit des feuilletages d'une variété riemannienne dont les feuilles sont des sous-variétés totalement géodésiques. Le lien avec les feuilletages riemanniens est le suivant. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage totalement géodésique sur une variété riemannienne, le champ de plans $\mathcal{F}^\perp$ orthogonal à $\mathcal{F}$ peut ne pas être intégrable, mais s'il l'est, il définit un feuilletage riemannien. Dans tous les cas, $\mathcal{F}^\perp$ définit un “champ de plans riemannien” dont on peut faire une étude tout à fait analogue à celle développée par Molino. L'étude que j'ai entreprise des feuilletages totalement géodésiques s'est donc faite par le biais de l'étude de la distribution orthogonale.

Le premier cas à considérer est celui où la codimension de $\mathcal{F}$ est égale à 1 car alors $\mathcal{F}^\perp$ est de dimension 1 et donc automatiquement intégrable. Ce cas a été traité en deux étapes. Tout d'abord en dimension 3 (en collaboration avec Carrière) [2], nous avons exploité la connaissance précise des flots riemanniens pour arriver à la description complète des feuilletages totalement géodésiques de codimension 1 en dimension 3. Le résultat obtenu est le suivant : *à part les feuilletages transverses aux fibrations de* Seifert*, les seuls feuilletages totalement géodésiques sont les feuilletages modèles dont j'ai parlé plus haut.* Lorsque la dimension de la variété est supérieure à 3, le problème est plus délicat puisque la description des flots riemanniens est moins précise mais je suis parvenu à un résultat de structure essentiellement identique ; *il est possible de décrire explicitement tous les feuilletages totalement géodésiques de codimension 1* [3].

Le problème intéressant qui restait ouvert était bien entendu le cas où la codimension est supérieure ou égale à 2. Ce problème a été abordé dans [13] (en collaboration avec Cairns) dans le cas typique où la variété ambiante est de dimension 4. Nous commençons par montrer que l'on peut toujours supposer que la courbure des feuilles est -1, 0 ou $+1$. Puis, en analysant le défaut d'intégrabilité de $\mathcal{F}^\perp$, nous montrons que *lorsque les feuilles ont une courbure* -1*, alors* $\mathcal{F}^\perp$ *est nécessairement intégrable.* Ceci nous conduit à une description relativement précise de ces feuilletages.

III.– Groupes d'homéomorphismes du cercle, cohomologie bornée et invariant de Godbillon-Vey.

Les actions de groupes, tout particulièrement sur le cercle ont toujours été au cœur de mes préoccupations. Je viens d'ailleurs de terminer la rédaction d'un article de type "survey" consacré à ce type de problèmes [64].

On sait que la dynamique topologique d'un homéomorphisme du cercle est essentiellement déterminée par son *nombre de rotation* qui est un élément de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Dans [15], j'ai étudié le problème suivant. Est-il possible de définir un invariant topologique, non pas pour un homéomorphisme du cercle mais pour un groupe Γ d'homéomorphismes ? Je construis effectivement un tel invariant qui est un élément du second groupe de cohomologie bornée de Γ à coefficients entiers, cohomologie introduite et étudiée par Gromov. La définition de cette *classe d'*Euler *bornée* n'est pas difficile. L'idée initiale est la suivante : si on considère 3 points x, y, z sur le cercle, on peut poser $ord(x, y, z) = 0$ si deux d'entre eux coïncident, $+1$ si le triplet (x, y, z) est positivement ordonné, c'est-à-dire si x n'est pas dans l'intervalle allant de y vers z, et -1 s'il est négativement ordonné. Cet *ordre cyclique ord* est un cocycle dans le sens où, pour 4 points quelconques x, y, z, t, on a $ord(x, y, z) - ord(x, y, t) + ord(x, z, t) - ord(y, z, t) = 0$. Choisissant un point base x_0 sur le cercle, ceci permet de définir un 2-cocycle o sur le groupe $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation : $o(f, g) = ord(x_0, f(x_0), fg(x_0))$. Ce 2-cocycle est évidemment borné puisqu'il ne prend que les valeurs $0, \pm 1$ et il est d'ailleurs possible de construire un cocycle cohomologue qui ne prend que les valeurs 0 et $+1$. Chaque fois qu'un groupe Γ agit sur le cercle, en préservant l'orientation, on obtient ainsi un élément du second groupe de cohomologie bornée $H_b^2(\Gamma; \mathbf{Z})$ de Γ à coefficients entiers : c'est la classe d'EULER bornée. Je démontre d'abord que *lorsque* Γ *est le groupe* $\mathbf{Z}$*, on a* $H_b^2(\mathbf{Z}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ *et l'invariant ainsi construit est le nombre de rotation de* POINCARÉ. D'autre part, *l'image de cette classe par la flèche évidente à valeurs dans le groupe de cohomologie habituelle* $H^2(\Gamma; \mathbf{Z})$ *est bien sûr la classe d'*EULER *classique du fibré en cercles associé à l'action au dessus du classifiant de* Γ. *Je montre également que deux actions d'un groupe* Γ *sur le cercle sont semi-conjuguées si et seulement si les invariants qui leur sont associés sont égaux dans* $H_b^2(\Gamma; \mathbf{Z})$. Réciproquement, étant donnée une classe de $H_b^2(\Gamma; \mathbf{Z})$ dont un représentant ne prend que les valeurs 0 et $+1$, je montre comment construire une action de Γ dont la classe d'EULER bornée est cette classe. En résumé, cette classe d'EULER bornée rend les mêmes services que le nombre de rotation habituel dans le contexte des actions de groupes.

Le fait que la classe d'EULER soit bornée avait déjà été observé par MINOR et WOOD. Si le groupe fondamental d'une surface orientée S (de genre $g \geq 2$) opère sur le cercle alors le nombre d'EULER eu du $\mathbf{S}^1$- fibré associé vérifie $|eu| \leq |\chi(S)|$. MINOR avait également observé que cette inégalité ne peut pas être améliorée. En effet, la donnée d'une métrique à courbure -1 sur S permet d'identifier le groupe fondamental $\pi_1(S)$ à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et le nombre d'EULER associé à cette action vérifie l'égalité $|eu| = |\chi(S)|$. Je me suis posé très tôt la question réciproque : *si le groupe* $\pi_1(S)$ *agit sur le cercle et si on a l'égalité* $|eu| = |\chi(S)|$*, peut-on conclure que l'action étudiée est conjuguée à l'une des actions fuchsiennes ?* Via le procédé de suspension (et un théorème de THURSTON qui permet de mettre certains feuilletages en position transverse à une fibration en cercles), cette même question peut s'exprimer de la façon suivante : si Γ un réseau cocompact dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ et $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ sans feuilles compactes, est-il conjugué au feuilletage donné par les orbites de l'action de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ que nous avons rencontrée plus haut ? D'une certaine façon, cette question est proche de celle traitée dans mon premier travail dans lequel je classifiais les feuilletages sans feuilles compactes sur les variétés du type $\mathbf{T}_A^3$ qui ont en commun avec $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ d'être des espaces homogènes de groupes de LIE.

Le premier résultat obtenu dans cette direction est un corollaire de mon étude des actions du groupe affine [11]. Je montre que si l'on déforme le feuilletage de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ défini par l'action à gauche de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$, le nouveau feuilletage est encore défini par une action du groupe $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ qui préserve encore une forme de volume. Mon théorème de classification de ces actions permet alors de montrer que ce nouveau feuilletage est en fait différentiablement conjugué à l'action à gauche de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ sur un espace homogène $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})/\Gamma'$ où Γ' est un réseau cocompact proche de Γ. Ce résultat de stabilité, traduit en termes de suspension, peut s'exprimer de la façon suivante. *Soit* Γ *un réseau cocompact dans* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$*, considéré comme sous-groupe de* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{S}^1)$. *Toute déformation de* Γ *dans* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{S}^1)$ *est en fait* C^∞*-conjuguée à une déformation à valeurs dans* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Je dois avouer que la démonstration de ce fait m'a toujours parue mystérieuse : elle fait usage d'un calcul inspiré par ceux effectués par Gelfand-Fuchs dans leur étude de la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs. J'ai longtemps cherché une autre preuve qui soit plus naturelle et surtout qui permette de s'affranchir de l'hypothèse de déformation. Il est important de remarquer qu'un corollaire de la stabilité structurelle des flots d'Anosov est que les sous-groupes $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ sont structurellement stables de sorte que toute déformation de Γ à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est *topologiquement* conjuguée à Γ mais bien sûr cette conjugaison topologique n'est en général que continue. Il est en effet facile de vérifier que si Γ et Γ' sont réseaux cocompacts de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ qui sont conjugués par un difféomorphisme de classe C^1, ils sont en fait conjugués par un élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Je rappelle également que la plupart des réseaux de $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ admettent des déformations non triviales dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ (espace de Teichmüller).

Une nouvelle approche de ce phénomène de rigidité est proposée dans [37] mais c'est dans [41] que j'obtiens le résultat de rigidité *global* que j'espérais depuis longtemps : *si on dispose d'une représentation du groupe fondamental d'une surface fermée S dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞ et si on a égalité entre le nombre d'*Euler *associé eu et la caractéristique d'*Euler-Poincaré *$\chi(S)$, alors la représentation est C^∞-conjuguée à une représentation fuchsienne, c'est-à-dire à valeurs dans* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Il n'est pas question que je décrive ici la preuve en détail : elle est parfois technique. Partant de l'hypothèse $eu = \chi(S)$, il faut d'abord établir que la représentation étudiée est *topologiquement* conjuguée à une représentation fuchsienne. C'est dans ce but concret que j'avais introduit l'usage de la cohomologie bornée dans l'étude des groupes d'homéomorphismes du cercle ; la conjugaison topologique cherchée peut effectivement s'en déduire comme l'a montré Matsumoto par la suite. Il s'agit ensuite, et c'est la partie la plus difficile, de montrer que la représentation étudiée est en fait C^∞ conjuguée à une représentation fuchsienne. Il faut montrer que la représentation préserve en fait une structure projective lisse sur le cercle. Même si je ne peux le formuler de manière explicite, ce problème m'a toujours semblé analogue à celui traité par Herman : un difféomorphisme du cercle de classe C^∞ dont le nombre de rotation est irrationnel est topologiquement conjugué à une rotation (d'après le théorème de Denjoy) mais si ce nombre satisfait une condition diophantienne, alors cette conjugaison est en fait C^∞. La situation présente est effectivement analogue : connaissant la structure topologique, nous cherchons une structure rigide invariante par le groupe. L'obstruction à la projectivité est la dérivée schwarzienne de sorte que notre problème peut s'exprimer en termes cohomologiques à valeurs dans certaines différentielles quadratiques ; j'analyse ce problème à travers les partitions de Markov du flot d'Anosov associé. La division entre ce paragraphe, consacré aux groupes d'homéomorphismes, et celui consacré aux flots d'Anosov, est donc un peu artificielle...

Dans [14], je considère à nouveau une représentation du groupe fondamental $\pi_1(S)$ d'une surface compacte orientée dans le groupe des difféomorphismes directs du cercle. J'étudie le rapport entre le nombre d'Euler associé *eu* et la dynamique topologique. *Par exemple, je montre que si l'action est analytique réelle et si une orbite n'est pas dense, alors eu est nul.*

À part les groupes fuchsiens, on connaît peu de sous-groupes du groupe des homéomorphismes du cercle ayant une structure cohomologique intéressante. En collaboration avec Sergiescu, nous étudions dans [25] un groupe de nature différente. Il s'agit du groupe G des homéomorphismes du cercle $\mathbf{S}^1 \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui sont affines par morceaux, dont les pentes sont des puissances de 2, et dont les points de discontinuité de la dérivée sont des rationnels dyadiques. Ce groupe, introduit initialement par Thompson, a des propriétés algébriques remarquables : c'est le premier exemple connu de groupe simple infini de présentation finie. Notre étude de G se fait à travers celle de sa dynamique sur le cercle. Très grossièrement, G se comporte comme un "squelette" du groupe $\mathrm{Diff}(\mathbf{S}^1)$. Nous commençons par montrer que *G est topologiquement conjugué à un groupe de difféomorphismes de classe C^∞ et nous montrons que tout homomorphisme non trivial de G dans* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{S}^1)$ *est semi-conjugué à ce plongement.* Par ailleurs, *nous explicitons la cohomologie entière de G : elle est isomorphe à la cohomologie de l'espace des lacets libres de la sphère* $\mathbf{S}^3$ (le quotient homotopique de l'espace des applications continues de $\mathbf{S}^1$ vers $\mathbf{S}^3$ par l'action de $\mathbf{S}^1$ à la source). Avec des coefficients réels, cette cohomologie est isomorphe à la cohomologie continue de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{S}^1)$, qui est essentiellement la cohomologie de Gelfand-Fuchs du cercle. En termes vagues, tout semble indiquer que G se comporte comme un réseau du "groupe de Lie semi-simple de dimension infinie $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{S}^1)$".

Quels sont les réseaux des groupes de Lie semi-simples qui peuvent agir non trivialement sur le cercle ? Dans [57], je montre que *si Γ est un réseau d'un groupe de* Lie *semi-simple dont le rang réel est au moins deux, tout homomorphisme de Γ à valeurs dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 a une image finie.* Burger et Monod ont également établi un résultat analogue, fondé sur un théorème d'annulation de la cohomologie bornée. J'ignore si la condition de différentiabilité est nécessaire dans ce théorème. Cela pose la question de savoir si ce genre de réseau peut être muni d'une relation d'ordre total invariant par translations à gauche. L'un de mes étudiants, Navas, a maintenant établi qu'un groupe discret infini possédant la propriété (T) de Kazdhan ne peut se plonger dans le groupe des difféomorphismes de classe C^2 du cercle. J'espère que ces questions pourront bientôt trouver leur cadre naturel.

Je signale en passant un petit article sur les prolongements des difféomorphismes du cercle (ou d'une sphère) à la boule [31]. Notons $\mathrm{Homéo}_0(\mathbf{S}^n)$ (*resp.* $\mathrm{Difféo}_0(\mathbf{S}^n)$) la composante neutre du groupe des homéomorphismes (*resp.* difféomorphismes de classe C^1) de la sphère de dimension n et $\mathrm{Homéo}_0(\mathbf{B}^{n+1})$ (*resp.* $\mathrm{Difféo}_0(\mathbf{B}^{n+1})$) la composante neutre du groupe des homéomorphismes (*resp.* difféomorphismes de classe C^1) de la boule de dimension $n+1$. Par restriction au bord, on a des homomorphismes surjectifs $\mathrm{Homéo}_0(\mathbf{B}^{n+1}) \to \mathrm{Homéo}_0(\mathbf{S}^n)$ et $\mathrm{Difféo}_0(\mathbf{B}^{n+1}) \to \mathrm{Difféo}_0(\mathbf{S}^n)$.

La première surjection scinde évidemment : il suffit de considérer le cône d'un homéomorphisme mais évidemment, ce cône présente en général une singularité au centre de la boule. Je montre que la seconde surjection ne scince pas. *Il n'existe pas d'homomorphisme de groupes qui permette de prolonger un difféomorphisme de la sphère isotope à l'identité à l'intérieur de la boule.*

IV.– Actions de groupes.

Je regroupe dans ce paragraphe mes travaux qui concernent les actions de groupes sur les variétés de dimension au moins 2.

En fait, j'ai décrit plus haut l'un de mes premiers travaux concernant les actions du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbf{R})$ sur les variétés de dimension 3. Si ce travail n'apparaît pas ici, c'est parce qu'il a joué un rôle important dans mes travaux antérieurs sur les flots d'Anosov et qu'il était donc nécessaire de le décrire d'abord.

L'article [26], en collaboration avec Hector et Moriyama, considère les actions localement libres de codimension 1 des groupes de Lie nilpotents G sur les variétés compactes M. L'idée de base est la suivante. Pour chaque point x de M, considérons le sous-groupe $Stab_0(x) \subset G$ du stabilisateur de x correspondant au noyau de l'holonomie du feuilletage associé. Alors l'application $stab : x \mapsto Stab_0(x)$ est une application continue de M vers l'espace des sous-groupes discrets de G, muni de la topologie de Chabeauty, sur lequel G agit par conjugaison. Évidemment, $stab$ est équivariante et la compacité de M montre que tous les $Stab_0(x)$ doivent être tels que leur orbite par conjugaison est relativement compacte dans l'espace des sous-groupes discrets de G. C'est une sévère contrainte pour un sous-groupe discret, qui peut être analysée très précisément dans le cas des groupes de Lie nilpotents. Ceci mène à une description assez précise de ce genre de dynamique. Voici un exemple de résultat dans ce sens. *Soit G un groupe de* Lie *nilpotent agissant de manière localement libre en codimension* 1 *sur une variété compacte. Si l'action n'a pas d'orbite compacte, alors les orbites du premier groupe dérivé $[G,G]$ sont toutes compactes et définissent une fibration localement triviale de la variété ambiante.* Ainsi, dans ce cas, on est ramené à l'étude de l'action du groupe abélien $G/[G,G]$ sur la base de la fibration. Les actions localement libres de groupes abéliens ont été comprises dans les années 70. Par exemple, la base de cette fibration est nécessairement un tore.

Considérons un groupe Γ, engendré par une partie finie X, agissant par homéomorphismes sur un espace métrique compact E. Nous définissons dans [17] (en collaboration avec Langevin et Walczak) une notion d'*entropie* pour cette action qui généralise directement l'entropie topologique d'un homéomorphisme. La définition n'est qu'une copie de la définition à la Bowen : deux points x, y de K sont appelés (n,ϵ)-séparés s'il existe un élément γ de Γ qui est un produit d'au plus n éléments de X ou de leurs inverses, tel que la distance entre $\gamma(x)$ et $\gamma(y)$ est supérieure à ϵ. On note $N(n,\epsilon)$ le cardinal maximal d'un ensemble dont les éléments sont (n,ϵ)-séparés deux à deux. L'entropie est alors définie comme $\lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \ln N(n,\epsilon)/n$.

L'intérêt de cette notion est que, en se généralisant, elle dévoile tout un ensemble de problèmes nouveaux qui n'avaient pas de sens dans le contexte habituel d'un homéomorphisme, par exemple le lien éventuel avec les classes caractéristiques secondaires. Nous montrons que *l'annulation de l'entropie entraîne l'existence d'une mesure de probabilités invariante par l'action.* Le cas où il s'agit d'une action sur le cercle par difféomorphismes de classe C^2 est particulièrement intéressant. On dit qu'une action sur le cercle possède une *orbite ressort* s'il existe élément γ qui possède un point fixe x, et un intervalle $]x, y[$ formé de points dont l'orbite sous l'action de γ s'accumule sur x, de telle sorte que $]x, y[$ contient un point de l'orbite de x sous l'action de Γ. Nous montrons que *l'entropie d'une action de classe C^2 sur le cercle est non nulle si et seulement si elle possède une orbite ressort.* Ce théorème n'est pas valable pour les actions de classe C^1 et j'aime le comparer au théorème de KATOK selon lequel un difféomorphisme de classe $C^{1+\epsilon}$ d'une surface a une entropie non nulle si et seulement si il contient un "fer à cheval" de SMALE. En fait, fidèles à notre point de vue général, nous développons ce concept d'entropie pour un pseudogroupe (et donc pour un feuilletage) plutôt que pour un groupe. Cela ne pose aucune difficulté majeure. Par exemple, nous montrons que *si l'entropie d'un feuilletage est nulle, son invariant de* GODBILLON-VEY *est également nul.*

Dans [42], je commence l'étude des groupes de difféomorphismes d'une variété compacte qui sont engendrés par des éléments proches de l'identité. Il s'agit essentiellement de généraliser le lemme de Zassenhauss, bien connu pour les groupes de LIE, au contexte des groupes de difféomorphismes. Convenons de dire qu'une action d'un groupe Γ sur une variété est *récurrente* si, pour tout point x de M, il existe une suite $(\gamma_i)_{i\geq 0}$ d'éléments différents de Γ tels que $\gamma_i.x$ converge vers x. Le résultat principal est le suivant : *si un groupe de difféomorphismes analytiques réels d'une variété compacte est engendré par des éléments suffisamment proches de l'identité et contient un sous-groupe libre (non abélien), alors son action sur la variété est nécessairement récurrente.* Cet article aborde aussi *la question de l'existence d'actions de réseaux tels que* $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ *sur les sphères : je montre par exemple qu'un tel groupe n'agit pas analytiquement et fidèlement sur la sphère de dimension 2 dès que* $n > 3$. Ce dernier résultat est une contribution au problème général soulevé par ZIMMER : il est probable qu'un réseau d'un groupe de LIE semi-simple de rang suffisamment élevé ne peut agir fidèlement sur une variété compacte donnée. J'ai signalé plus haut la réponse que j'ai apportée à cette question dans le cas des actions sur le cercle.

Avec le même type de motivation, j'ai étudié avec CAIRNS les actions *locales* de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ ou $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ *au voisinage d'un point fixe* dans $\mathbf{R}^p$ [55] (en fait, nous traitons d'une catégorie beaucoup plus vaste de réseaux). Par exemple, nous montrons que *toute action locale analytique de* $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})$ *($n \geq 3$) au voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^p$ *est analytiquement linéarisable. Nous montrons par des exemples que ceci n'est pas valable dans le cas C^∞.* Ces résultats peuvent évidemment être placés dans le contexte du problème de ZIMMER que nous venons de citer. Les preuves contiennent deux parties. Il faut d'abord linéariser formellement ce type d'actions : on utilise pour cela des théorèmes d'annulation de cohomologie de réseaux, dûs pour l'essentiel à MARGULIS. Dans un deuxième temps, il faut montrer la convergence de cette linéarisation formelle. On utilise pour cela le fait que les valeurs propres des différentielles à l'origine sont des entiers algébriques et les théorèmes puissants de linéarisation de difféomorphismes analytiques, du type SIEGEL-RÜSSMAN.

V.– Classes caractéristiques et dynamique, cohomologie des groupes.

L'introduction de la classe d'EULER bornée dans l'étude dynamique des groupes d'homéomorphismes du cercle m'a conduit naturellement à plusieurs questions de nature plus algébrique relatives à la cohomologie des groupes.

Le travail [20] (en collaboration avec BARGE) est une étude géométrique du second groupe de cohomologie d'un groupe abstrait. On sait que la "formule de HOPF" permet d'interpréter le second groupe d'homologie $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ en termes de surfaces. Topologiquement, pour chaque classe c de $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$, il existe une surface compacte orientée S et un homomorphisme de $\pi_1(S)$ vers Γ qui envoie la classe fondamentale de S sur c. Il est naturel d'appeler *genre de* c, le genre minimal d'une telle surface S. Nous montrons que *si* Γ *est un groupe polycyclique, le genre des classes de* $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ *est uniformément borné.* À l'opposé, ce genre n'est pas borné pour le groupe $\pi_1(S)$ dès que le genre de S est au moins 2. Nous renforçons cette affirmation en montrant que *le second groupe de cohomologie bornée de S est de dimension infinie car il contient l'espace des formes différentielles de degré 2 sur la surface.* Un corollaire géométrique (assez indirect) me plaît beaucoup : il permet de caractériser les métriques à courbure constante. Considérons une métrique à courbure strictement négative sur une surface compacte S. Le revêtement universel de S peut se compactifier par l'adjonction d'un "cercle à l'infini" et trois points distincts de ce cercle définissent un triangle idéal dont l'aire est finie (et uniformément bornée). Nous montrons que *si tous les triangles idéaux du revêtement universel ont la même aire, alors la courbure de la surface est constante.*

L'article [40], en collaboration avec BARGE, dépasse le cadre strict du cercle et des surfaces : on étudie l'action du groupe symplectique $Sp(2n, \mathbf{R})$ sur la grassmannienne des lagrangiens de $\mathbf{R}^{2n}$. Le groupe fondamental de cette grassmannienne est infini cyclique et ceci permet de définir une extension centrale de $Sp(2n, \mathbf{R})$ par $\mathbf{Z}$, qui est également l'extension centrale universelle. La classe de cohomologie de degré 2 associée à cette extension est la *classe de* MASLOV. L'observation de départ est que cette classe est en fait bornée, et qu'elle engendre la cohomologie bornée de degré 2 du groupe symplectique. Cette simple observation permet de relier entre eux un certain nombre d'objets topologiques : signature des fibrés au dessus des surfaces, fonction η de DEDEKIND et nombre de rotation symplectique. On retrouve ainsi de manière extrêmement naturelle un certain nombre de résultats de ATIYAH.

Du point de vue dynamique, cet article permet d'éclairer la définition d'un invariant défini par Ruelle. On considère par exemple la boule unité B dans $\mathbf{R}^{2n}$ munie de la structure symplectique habituelle et un difféomorphisme symplectique de B qui est l'identité sur le bord. Partant d'un lagrangien dans $\mathbf{R}^{2n}$, on considère ses images par la différentielle des itérés du difféomorphisme. En étudiant la "rotation asymptotique" de ces lagrangiens, on définit un invariant des difféomorphismes symplectiques, qui coïncide avec l'invariant introduit par Ruelle et dont nous décrivons un certain nombre de propriétés dynamiques.

La théorie des classes caractéristiques secondaires associe à chaque feuilletage un certain nombre de classes de cohomologie dont le prototype est l'*invariant de* Godbillon-Vey. Si l'on raisonne au niveau du groupe des difféomorphismes du cercle, on peut considérer cet invariant comme une classe de cohomologie de degré 2 de ce groupe (à coefficients $\mathbf{R}$). L'exposé au séminaire Bourbaki [27] fait le point sur cette direction de recherches qui me semble fructueuse. Les travaux récents suggèrent que ces classes pourraient avoir un rapport avec le comportement ergodique ou dynamique du feuilletage. L'invariant de Godbillon-Vey est-il un invariant topologique ? L'article [21] traite de cette question mais soulève plus de problèmes qu'il n'en résout... La nullité de l'entropie entraîne-t-elle celle des classes caractéristiques ?

La définition initiale de l'invariant de Godbillon-Vey nécessite deux dérivées. Un théorème de Tsuboi permet d'affirmer qu'il est impossible d'étendre la définition aux feuilletages de classe C^1 car l'espace classifiant correspondant est contractile. La différence entre les classe C^1 et C^2 est bien connue des dynamiciens et il est important d'analyser plus précisément le "domaine de définition raisonnable" de cet invariant. La régularité de Denjoy, (le logarithme de la dérivée est à variation bornée), est une solution possible mais *dans ce contexte étendu, je montre que l'invariant de* Godbillon-Vey *n'est pas invariant par conjugaison topologique.* Pour exhiber un tel exemple, je considère une surface compacte orientée S munie d'une métrique à courbure -1, de sorte que le groupe fondamental $\pi_1(S)$ agit (projectivement) sur le cercle à l'infini du disque de Poincaré. Je montre que *cette action fuchsienne de $\pi_1(S)$ est topologiquement conjuguée à une action affine par morceaux.* Il est important de remarquer d'une part que ces groupes fuchsiens sont les premiers exemples pour lesquels l'invariant de Godbillon-Vey est non nul et, d'autre part, qu'un homéomorphisme affine par morceaux est dans la classe de Denjoy, de dérivée seconde nulle presque partout, de sorte qu'un groupe d'homéomorphismes affines par morceaux possède un invariant nul.

Raby a montré que l'invariant de Godbillon-Vey des feuilletages de classe C^2 est invariant par conjugaison de classe C^1, même si, je le rappelle, l'invariant ne peut pas être défini en classe C^1. Dans le but de comprendre cet énoncé quelque peu mystérieux, j'ai étudié, avec Tsuboi les conjugaisons de classe C^1 entre les feuilletages de codimension 1 et de classe C^2 et nous montrons que ce type de conjugaison n'existe presque jamais (ce qui explique le résultat de Raby !). Précisément, nous montrons que *si un difféomorphisme de classe C^1 conjugue deux feuilletages d'holonomie non triviale, de codimension 1, et de classe C^r $(r \geq 2)$ sur une variété compacte, alors ce difféomorphisme est en fait (transversalement) de classe C^r, tout au moins sur l'ouvert des feuilles non compactes* [23]. Nous obtenons des résultats analogues pour d'autres types de systèmes dynamiques de dimension 1.

Dans le même esprit que l'invariant de GODBILLON-VEY qui mesure une sorte de "torsion" d'un feuilletage, ARNOLD a introduit un invariant associé à un flot qui préserve le volume sur une variété de dimension 3 qui est une sphère d'homologie. Ce nombre mesure l'enlacement moyen et asymptotique de deux orbites. ARNOLD montre comment calculer ce nombre par un calcul explicite de formes différentielles qui rappelle beaucoup le calcul de GODBILLON et VEY. ARNOLD a posé également la question de l'invariance topologique de ce nombre. Dans [54], avec GAMBAUDO, nous répondons partiellement à cette question : nous montrons que c'est effectivement le cas pour une suspension d'un difféomorphisme du disque. Nous faisons également le lien entre l'invariant d'ARNOLD et un invariant introduit par CALABI pour un difféomorphisme du disque. Enfin, nous montrons l'invariance topologique de l'invariant de RUELLE qui mesure la vitesse asymptotique de rotation de la différentielle d'un flot sur une variété de dimension 3. La même preuve s'applique en dimension supérieure à l'invariant de RUELLE que nous avons décrit plus haut pour les difféomorphismes symplectiques.

L'invariant d'ARNOLD rend compte de la manière dont *deux* orbites d'un champ de vecteurs s'enlacent. Dans [62], avec GAMBAUDO, nous essayons d'analyser le comportement asymptotique d'une orbite individuelle. On considère un morceau d'orbite du flot étudié que l'on referme avec un arc court, par exemple une géodésique. On produit ainsi un nœud dont on peut évaluer la signature. Considérant des morceaux de plus en plus longs, nous pouvons définir une *signature asymptotique* du flot. Nous établissons un lien étroit entre ce nouvel invariant et l'invariant d'ARNOLD. Nous avons choisi d'utiliser la signature car elle est assez "stable" : si l'on modifie un nœud en faisant traverser deux brins (une seule fois), la signature change d'au plus 2, et ceci est la clé qui permet d'établir que la signature asymptotique est indépendante de la façon dont on referme le morceau d'orbite pour créer un nœud. Un article en cours de préparation, de nature beaucoup plus algébrique, fait le lien entre ces invariants asymptotiques sur les groupes des tresses et leurs liens avec la classe de MASLOV, via les représentations classiques de BURAU.

VI.– Dynamique holomorphe.

Les travaux de SULLIVAN ont montré l'étroite analogie entre les groupes kleinéens et les fractions rationnelles en une variable complexe. Le contexte général est celui des feuilletages transversalement holomorphes de codimension 1 complexe. Par ailleurs, la théorie des feuilletages de classe C^2 de codimension 1 réelle est maintenant bien développée. Existe-t-il une théorie analogue pour les pseudogroupes holomorphes ? Voici quelques exemples de questions. Quelle peut être la nature d'une mesure invariante pour un pseudogroupe holomorphe ? Le théorème de SACKSTEDER peut-il se généraliser ? Existe-t-il une "théorie des niveaux" holomorphe ? Toutes ces questions sont encore largement ouvertes. La géométrie et la dynamique complexes m'ont toujours intéressé et ont pris une part de plus en plus importante dans mes préoccupations mathématiques : elles sont aujourd'hui devenues prépondérantes.

Le travail [32] propose une étude dans le cas particulier des feuilletages transversalement affines complexes. Il s'agit d'étudier le cas qui paraît *a priori* le plus simple pour lequel le pseudogroupe d'holonomie est constitué d'applications affines du type $z \mapsto az + b$. Même si une telle hypothèse peut paraître très restrictive, son étude est bien délicate et beaucoup de problèmes élémentaires sont encore ouverts. *Je montre en particulier que pour un tel feuilletage, une mesure transverse invariante ergodique ne peut être que du type "masse de* DIRAC*" ou une forme de volume transverse, dans le cas où le feuilletage est riemannien.* Comme application, *je décris complètement les "tissus feuilletés en dimension 3", c'est-à-dire les familles à un paramètre de feuilletages de codimension 1 "tournant" autour d'un axe de dimension 1.*

Ce travail sur les tissus est complété dans [45], en collaboration avec BRUNELLA, où l'on étudie les flots transversalement holomorphes sur les variétés de dimension 3 qui sont transverses à un feuilletage de codimension 1. De même qu'il avait été possible de décrire les feuilletages totalement géodésiques, ceci permet d'obtenir *une liste complète des feuilletages de codimension 1 sur les variétés riemanniennes compactes de dimension 3 dont toutes les feuilles sont ombilicales.* En effet, un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 est ombilical si et seulement si le feuilletage orthogonal $\mathcal{F}^{\perp}$ est transversalement conforme. Plus récemment, BRUNELLA a obtenu une classification des flots sur les variétés de dimension 3 qui sont transversalement holomorphes mais son étude ne permettait pas de décrire le cas où la variété possède une homologie non triviale. *Dans [50], j'ai pu combler cette lacune et terminer la classification des flots transversalement holomorphes* en utilisant des techniques provenant de la géométrie des surfaces complexes (en particulier la classification de ENRIQUES-KODAIRA).

Dans [48], en collaboration avec VERJOVSKY, nous étudions l'analogue complexe de mon travail initial sur le groupe affine [11], c'est-à-dire que nous étudions les actions holomorphes localement libres du groupe $z \mapsto az + b$ sur les variétés complexes de dimension 3. La situation est plus délicate car un fibré en droites est un objet plus délicat en géométrie complexe qu'en géométrie réelle... Nous obtenons cependant une description complète sous l'hypothèse que l'action étudiée préserve le volume. On retrouve les analogues holomorphes des objets déjà rencontrés : les $\mathbf{T}^3_A$ complexes sont maintenant des fibrés en tores complexes et les matrices A deviennent les multiplications complexes des variétés abéliennes. De même, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ est remplacé par $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$, groupe d'isométries de l'espace hyperbolique de dimension 3.

Dans [51], j'étudie les feuilletages holomorphes de codimension 1 sur les variétés holomorphes compactes qui sont des espaces homogènes. Je commence par montrer qu'*un feuilletage holomorphe de codimension 1 sur un tore complexe est linéaire ou bien s'obtient à partir d'un feuilletage linéaire par un procédé de "tourbillonnement"* que je nomme ainsi par analogie avec la construction introduite par Reeb dans le domaine réel. Ceci répond à une question posée par Cerveau. Le cas d'un espace homogène général est traité par une analyse détaillée de la position du feuilletage par rapport à la fibration de Tits, qui permet de réduire l'étude des espaces homogènes quelconques à celle des espaces de drapeaux et à celle des espaces du type G/Γ où G est un groupe de Lie complexe et Γ est un sous-groupe discret. Sur ces variétés homogènes, je parviens à obtenir des théorèmes de structure assez précis (que j'aimerais pouvoir généraliser aux variétés quelconques). Je montre en particulier que *ce type de feuilletages ne possède pas de minimal exceptionnel.*

Un vieux théorème de Reeb affirme que la réunion des feuilles fermées d'un feuilletage de codimension réelle 1 est un ensemble fermé. Si le feuilletage est analytique réel, il n'a qu'un nombre fini de feuilles compactes sauf si toutes le sont. Dans le cas algébrique, Jouanolou avait établi un énoncé analogue. L'article [58] étend ce résultat au cadre complexe le plus général : *un feuilletage holomorphe de codimension* 1 *(éventuellement singulier) sur une variété complexe compacte n'a qu'un nombre fini de feuilles fermées à moins que toutes les feuilles ne soient fermées, auquel cas le feuilletage possède une intégrale première méromorphe.*

L'article [50] concerne les difféomorphismes et les flots d'Anosov holomorphes sur les variétés compactes complexes de dimension 2 et 3. Le fait essentiel est que dans cette situation les feuilletages stable et instable sont nécessairement holomorphes et on peut donc appliquer les méthodes que j'ai décrites plus haut dans l'étude des systèmes d'Anosov. On obtient une analyse très complète de ces dynamiques. Par exemple, *un difféomorphisme d'*Anosov *holomorphe sur une surface complexe compacte est holomorphiquement conjugué à un automorphisme holomorphe d'un tore complexe.* J'ignore si un résultat analogue pourrait être valable en dimension supérieure. L'étude de la dynamique des difféomorphismes holomorphes des variétés compactes complexes (par exemple algébriques) n'en est qu'à ses débuts et semble très prometteuse, comme l'indique par exemple le cas très riche des surfaces K3.

L'article [63] a connu diverses versions préliminaires. Sa version finale, en collaboration avec Gomez-Mont et Saludes, donne des théorèmes de structure satisfaisants pour la dynamique topologique d'un feuilletage transversalement holomorphe de codimension 1. Pour l'essentiel, nous décomposons la variété en la réunion d'un fermé (appelé *ensemble de* Julia) et de son complémentaire (l'*ensemble de* Fatou). La structure de l'ensemble de Fatou est décrite de manière extrêmement précise. Une partie de l'ensemble de Fatou est en fait un feuilletage riemannien (dont la dynamique est très bien comprise) et une autre est constituée de l'ouvert des feuilles errantes (on dit qu'une feuille est errante s'il existe un disque transverse qui la rencontre et qui est tel que deux points distincts de ce disque sont dans des feuilles différentes). Nous montrons que *chaque composante de l'espace des feuilles* *errantes est une surface de* Riemann *séparée de type fini, c'est-à-dire une surface compacte privée d'un nombre fini de points.* Ce résultat apparaît donc comme analogue au théorème de finitude d'Ahlfors pour les groupes kleinéens ou au "non wandering theorem" de Sullivan pour la dynamique d'une fraction rationnelle dans son ensemble de Fatou. Quant à la dynamique du feuilletage dans l'ensemble de Julia, elle est moins bien comprise d'un point de vue topologique mais sa structure ergodique est plus claire : cet ensemble de Julia est la réunion disjointe d'un nombre fini de composantes ergodiques (pour la mesure de Lebesgue et d'une composante récurrente. Là encore, on notera l'analogie avec la propriété bien connue de l'ensemble de Julia habituel d'une fraction rationnelle. Il faut remarquer que ce type de théorème est *a priori* établi pour un feuilletage non singulier mais il est facile d'en tirer des conséquences pour les feuilletages singuliers. Par exemple, étant donnée une équation différentielle polynomiale dans $\mathbf{C}^2$, on construit un feuilletage holomorphe singulier sur le plan projectif complexe $\mathbf{CP}^2$ dont les singularités sont génériquement dans le "domaine de Poincaré". En ôtant un petit voisinage des points singuliers et en considérant le double de la variété à bord ainsi obtenue, on construit une variété compacte munie d'un feuilletage transversalement holomorphe *non singulier*, qui est donc redevable des méthodes de cet article. Évidemment, ce type d'exemples est notre motivation principale. Clairement, cet article suscite autant de questions qu'il n'en résout mais il me semble qu'il ouvre une voie nouvelle pour une compréhension générale qui pourrait peut-être approcher de la précision atteinte dans le cas des groupes kleinéens. L'histoire des équations différentielles polynomiales dans le domaine complexe est très ancienne mais on ne connaît pas grand chose sur les dynamiques topologiques possibles...

Le travail [56], en collaboration avec Rebelo, traite de champs de vecteurs holomorphes complets sur les surfaces complexes. Nous étudions la situation dans le cas où le champ possède une singularité isolée où le premier jet s'annule. Il est étonnant qu'avec une hypothèse si faible, on puisse caractériser la surface ambiante et décrire le champ à biholomorphisme près : les singularités d'un champ complet sont très particulières et ceci est très différent du cas réel. Ce travail s'avère assez proche des idées autour de la *propriété de* Painlevé : les solutions d'une équation différentielle dans le domaine complexe ont tendance à se ramifier et ce phénomène peut se produire dans un voisinage arbitrairement petit d'un point singulier. Seuls de très rares germes de champs de vecteurs ont la "propriété de Painlevé" et ne ramifient pas et ceci limite considérablement les singularités possibles sur les surfaces compactes (car un champ de vecteurs sur une variété compacte est complet...) Voici un exemple de résultat : *Soit X un champ de vecteurs holomorphe sur une surface complexe compacte M. Si X possède une singularité isolée où le premier jet, alors M est la surface F_n de Hirzebruch, $n \geq 0$. De plus, à automorphisme de F_n près, le champ X est unique et donné en coordonnées locales autour de la singularité par* $x^2\partial/\partial x \, - \, y(nx-(n+1)y)\partial/\partial y$.

L'article [49] traite d'une question de géométrie complexe qui avait été laissée en suspens par RAGHUNATHAN et qui n'est pas une question de dynamique, même si elle m'a été suggérée par mon étude des flots d'ANOSOV holomorphes. Considérons un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ tel que le quotient $M = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\Gamma$ soit compact. Bien que le groupe Γ soit rigide dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ d'après le théorème de MOSTOW, il se peut que la variété complexe M possède des déformations non triviales. Je montre que c'est effectivement possible et j'explicite concrètement l'espace de KURANISHI de M. Par exemple, *M est rigide si et seulement si le premier nombre de* BETTI *de M est nul.*

Je signale encore deux articles consacrés aux systèmes dynamiques holomorphes. Dans l'article [10] (en collaboration avec GOLDBERG et SULLIVAN), nous étudions la dynamique de l'exponentielle complexe. Nous montrons en particulier que celle-ci est récurrente, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ensemble de mesure de LEBESGUE non nulle qui coupe chaque orbite (positive et négative) en un point au plus. Par la suite, LYUBICH a montré que l'application exponentielle n'est *pas* ergodique pour la mesure de LEBESGUE.

La note [4] est une contribution au problème de l'existence d'un point critique sur le bord d'un disque de SIEGEL ; elle a servi de base à HERMAN pour son étude complète du problème.

VII.– Structure topologique et conforme des feuilles.

Dans [12] et [47], je me pose deux questions complémentaires. La première est la suivante : si L est une variété non compacte, existe-t-il une variété compacte munie d'un feuilletage de codimension 1 dont l'une des feuilles est difféomorphe à L ? En dimension 2, CANTWELL et CONLON ont montré que la réponse est toujours positive. Si la dimension de L est supérieure à 3, je montre que la réponse est en général négative. L'idée est extrêmement simple: la compacité de la variété ambiante force une certaine récurrence dans la topologie d'une feuille.

À l'inverse, dans [47], je montre qu'*il existe six surfaces non compactes telles que tout feuilletage de dimension 2 d'une variété compacte possède une feuille compacte ou une infinité non dénombrable de feuilles difféomorphes à l'une de ces six surfaces.* Là encore, il s'agit d'exploiter l'idée que la topologie doit être en quelque sorte récurrente. Par exemple, il n'est pas difficile de s'assurer que les six surfaces en question sont les seules qui admettent un groupe agissant de manière propre et cocompacte. Pour mettre ce type d'idée en œuvre, j'ai eu l'idée d'utiliser le concept de mesure harmonique, introduit par Garnett, qui permet une étude ergodique de l'espace de chemins continus tracés sur les feuilles. Autrement dit, les diverses mesures de WIENER sur les diverses feuilles peuvent être associées pour produire un système dynamique préservant une mesure finie et pour lequel on peut appliquer les méthodes classiques de théorie ergodique. Le théorème peut alors se comparer à une version ergodique du théorème classique en combinatoire des groupes qui affirme qu'un groupe infini de type fini ne peut avoir qu'un, deux ou un ensemble de CANTOR de bouts.

Comme application de son théorème de l'indice feuilleté, Connes a démontré le théorème suivant pour les feuilletages admettant une mesure transverse invariante : s'il n'existe pas de feuilles sphériques, la courbure moyenne des feuilles est négative ou nulle. Dans [19], je généralise ce résultat aux feuilletages quelconques, sans mesure transverse invariante. La moyenne est alors prise au sens d'une mesure harmonique quelconque, c'est-à-dire invariante par le noyau de la chaleur le long des feuilles. Pour y parvenir, il faut étudier le problème de l'uniformisation feuilletée. Un feuilletage de dimension 2 étant donné, chacune de ses feuilles peut être uniformisée, c'est-à-dire munie d'une métrique conforme à courbure constante, mais ce procédé est-il continu dans la variété ? Ce problème est maintenant bien compris dans le cas où les feuilles sont hyperboliques mais le cas où les feuilles sont paraboliques est beaucoup plus délicat : c'est le but de [53]. J'y montre en particulier qu'*il est parfois impossible d'uniformiser un tel feuilletage mais qu'il est toujours possible de trouver des métriques dont la forme de courbure est arbitrairement petite.*

À l'occasion de conférences "État de la recherche, SMF" j'ai eu l'occasion de faire le point sur ce genre de questions dans le contexte un peu plus général des laminations. Ces objets sont analogues aux feuilletages et ne s'en distinguent que par le fait que l'espace ambiant est un espace métrisable compact. Une *lamination par surfaces de* Riemann est ainsi un espace compact M recouvert par des *ouverts de cartes* homéomorphes à des produits $T_i \times \mathbf{D}$ où T_i est un espace localement compact et $\mathbf{D}$ est le disque unité dans $\mathbf{C}$ de telle sorte que les changements de cartes soient de la forme $(t, z) \mapsto (f(t), h(z, t))$ avec $h(z, t)$ continu en t et holomorphe en z. Si les T_i sont des points, on retrouve la notion de surface de Riemann classique et, si les T_i sont des variétés, celle de feuilletage par surfaces de Riemann. Cette généralisation des feuilletages n'est pas gratuite : on rencontre ce type d'objets dans un grand nombre de situations d'origine dynamique, par exemple construits par des procédés de limite projective de fractions rationnelles $\mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$. Il me semble que ces objets méritent une étude détaillée, au même titre que les surfaces de Riemann. Par exemple, j'établis *l'existence de fonctions méromorphes sur les laminations par surfaces de* Riemann *dans de nombreux cas.* L'une des motivations est bien sûr la question de l'existence de minimal exceptionnel pour les feuilletages polynomiaux de $\mathbf{CP}^2$: si une feuille d'un tel feuilletage ne s'accumulait pas sur les points singuliers, son adhérence serait une lamination au sens précédent et on aurait donc une lamination par surfaces de Riemann plongée holomorphiquement dans $\mathbf{CP}^2$. J'ignore toujours s'il existe de tels plongements d'une lamination non réduite à une surface de Riemann classique (*i.e.* autre qu'une courbe algébrique).

BIBLIOGRAPHIE

[1] avec V. Sergiescu. Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology* **19** (1980), no. 2, 179–197. (81k:57022).

[2] avec Y. Carrière. Feuilletages totalement géodésiques. *An. Acad. Brasil. Ciênc.* **53** (1981), no. 3, 427–432. (83m:57019).

[3] Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un. *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), no. 4, 543–572. (85f:57015).

[4] Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **298** (1984), no. 16, 385–388. (86a:58081).

[5] Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles. *Ergodic Theory Dynamical Systems* **4** (1984), no. 1, 67–80 (86b:58098).

[6] Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **34** (1984), no. 4, 203–223 (86c:57025).

[7] Un feuilletage analytique dont la cohomologie basique est de dimension infinie. *Pub. IRMA Lille* (1985).

[8] Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **47** (1985), no. 2, 173–182 (87d:57021).

[9] avec Y. Carrière. Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **300** (1985), no. 19, 677–680 (87e:28033).

[10] avec L. Goldberg et D. Sullivan. On the measurable dynamics of $z \mapsto e^z$. *Ergodic Theory Dynamical Systems* **5** (1985), no. 3, 329–335 (87e:58117).

[11] Actions localement libres du groupe affine. *Invent. Math.* **82** (1985), no. 3, 479–526 (87f:58084).

[12] Une variété qui n'est pas une feuille. *Topology* **24** (1985), no. 1, 67–73 (87j:57014).

[13] avec G. Cairns. Totally geodesic foliations on 4-manifolds. *J. Differential Geom.* **23** (1986), no. 3, 241–254 (87m:53043).

[14] Classe d'Euler et minimal exceptionnel. *Topology* **26** (1987), no. 1, 93–105 (88b:57032).

[15] Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), 81–106, *Contemp. Math.* **58** III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987 (88m:58024).

[16] avec R. Langevin et P. Walczak. Entropie mesurée et partitions de l'unité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), no. 6, 251–254 (88a:28024).

[17] avec R. Langevin et P. Walczak. Entropie géométrique des feuilletages. *Acta Math.* **160** (1988), no. 1-2, 105–142 (89a:57034).

[18] Riemannian foliations, examples and open problems, appendice au livre de P. Molino : Riemannian foliations. Progress in Mathematics, 73. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1988 (89b:53054).

[19] Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional foliations. *J. Funct. Anal.* **77** (1988), no. 1, 51–59 (89d:57040).

[20] avec J. Barge. Surfaces et cohomologie bornée. *Invent. Math.* **92** (1988), no. 3, 509–526 (89e:55015).

[21] Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 59–76 (89e:57023).

[22] Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **20** (1987), no. 2, 251–270 (89h:58153).

[23] avec T. Tsuboi. Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **38** (1988), no. 1, 215–244 (89i:58119).

[24] Codimension one Anosov flows and suspensions. Dynamical systems, Valparaiso 1986, 59–72, *Lecture Notes in Math.* **1331** Springer, Berlin-New York, 1988 (90a:58141).

[25] avec V. Sergiescu. Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), no. 2, 185–239 (90c:57035).

[26] avec G. Hector et Y. Moriyama. On codimension one nilfoliations and a theorem of Malcev. *Topology* **28** (1989), no. 2, 197–210 (90g:57024).

[27] L'invariant de Godbillon-Vey. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89. *Astérisque* No. **177-178** (1989), Exp. No. 706, 155–181 (91h:57015).

[28] Des systèmes dynamiques vers les feuilletages. Article de vulgarisation, *Images des Mathématiques* **2** édité par le CNRS 1989.

[29] Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988. Edited by É. Ghys and P. de la Harpe. Progress in Mathematics, 83. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. xii+285 pp. ISBN: 0-8176-3508-4 (92f:53050).

[29'] Giperbolicheskie gruppy po Mikhailu Gromovu. (en russe) traduction russe du précédent. "Mir", Moscow, 1992. 271 pp. ISBN: 5-03-002562-6 53C23 (94m:53060).

[30] Les groupes hyperboliques. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90. *Astérisque* No. **189-190** (1990), Exp. No. 722, 203–238 (92f:57004).

[31] Prolongements des difféomorphismes de la sphère. *Enseign. Math.* (2) **37** (1991), no. 1-2, 45–59 (92f:58022).

[32] Flots transversalement affines et tissus feuilletés. Analyse globale et physique mathématique (Lyon, 1989). *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* No. **46** (1991), 123–150 (92i:57026).

[33] Group theory from a geometrical viewpoint. Proceedings of the workshop held in Trieste, March 26–April 6, 1990. Edited by É. Ghys, A. Haefliger and A. Verjovsky. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991. viii+733 pp. ISBN: 981-02-0442-6 20-06 (00B25 57-06) (93a:20001).

[34] Le cercle à l'infini des surfaces à courbure négative. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 501–509, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991 (93f:58188).

[35] Infinite groups as geometric objects (after Gromov), en collaboration avec P. de la Harpe. Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989), 299–314, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[36] avec J. Barge. Cocycles bornés et actions de groupes sur les arbres réels. Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 617–621, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991 (93f:20033).

[37] Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **42** (1992), no. 1-2, 209–247 (93j:58111).

[38] avec C. Bavard. Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. *Geom. Dedicata* **43** (1992), no. 2, 207–224 (93k:52009).

[39] Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92. *Astérisque* No. **206** (1992), Exp. No. 747, 3, 93–136 (94e:58101).

[40] avec J. Barge. Cocycles d'Euler et de Maslov. *Math. Ann.* **294** (1992), no. 2, 235–265 (95b:55021).

[41] Rigidité différentiable des groupes fuchsiens. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **78** (1993), 163–185 (1994) (95d:57009).

[42] Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **24** (1993), no. 2, 137–178 (95f:58017).

[43] Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique (d'après Krystyna Kuperberg). Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. *Astérisque* No. **227** (1995), Exp. No. 785, 5, 283–307 (95k:57032).

[44] Holomorphic Anosov systems. *Invent. Math.* **119** (1995), no. 3, 585–614 (95k:58116).

[45] avec M. Brunella. Umbilical foliations and transversely holomorphic flows. *J. Differential Geom.* **41** (1995), no. 1, 1–19 (95k:53039).

[46] Variations autour du théorème de récurrence de Poincaré, *Journal des élèves de l'ENS Lyon*, volume **1**, 1994.

[47] Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.* (2) **141** (1995), no. 2, 387–422 (96b:57032).

[48] avec A. Verjovsky. Locally free holomorphic actions of the complex Affine group. Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), 201–217, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994 (96j:32039).

[49] Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. *J. Reine Angew. Math.* **468** (1995), 113–138 (96m:32017).

[49'] Some examples of deformations of complex manifolds. Singularities of holomorphic vector fields and related topics (Kyoto, 1993). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 878 (1994), 108–112 (96d:32019).

[50] On transversely holomorphic flows. II. *Invent. Math.* **126** (1996), no. 2, 281–286 (97j:58122).

[51] Feuilletages holomorphes de codimension un sur les espaces homogènes complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) **5** (1996), no. 3, 493–519. (98d:32037).

[52] Systèmes dynamiques : à la recherche d'orbites périodiques *Bulletin APMEP*, **404** (juin 1996) 363-390.

[53] Sur l'uniformisation des laminations paraboliques. Integrable systems and foliations/Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995), 73–91, *Progr. Math.*, **145**, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1997.

[54] avec J.-M. Gambaudo. Enlacements asymptotiques. *Topology* **36** (1997), no. **6**, 1355–1379. (98f:57050).

[55] avec G. Cairns. The local linearization problem for smooth SL(n)-actions. *Enseign. Math.* (2) **43** (1997), no. 1-2, 133–171 (98i:57067).

[56] avec J. Rebelo. Singularités des flots holomorphes, II. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **47** (1997), no. 4, 1117–1174 (99a:32059). 50 (2000), no. 3, 1019–1020

[57] Actions de réseaux sur le cercle, *Invent. Math.* 137 (1999), no. 1, 199–231.

[58] À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **49**(2000) 175–180 (2001i:32048).

[59] avec D. Cerveau, N. Sibony et J.-C. Yoccoz. Dynamique et géométrie complexes. Panoramas et Synthèses , **8**. Soci'eté Mathématique de France, Paris (1999).

[60] Les systèmes dynamiques holomorphes. *Panor. Synthèses*, **8**, 1–10, Soc. Math. France, Paris, 1999. (extrait de [59])

[61] Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Synthèses*, **8**, 49–95, Soc. Math. France, Paris, 1999. (extrait de [59])

[62] avec J.-M. Gambaudo. Signature asymptotique d'un champ de vecteurs en dimension 3. *Duke Math. J.* **106** (2001), no. 1, 41–79.

[63] avec X. Gomez-Mont et J. Saludes. Fatou and Julia components for transversely holomorphic foliations. À paraître dans *L'Enseignement Mathématique.*

[64] Groups acting on the circle. À paraître dans *L'Enseignement Mathématique* (2001).

Septembre 2001

ENS Lyon
U.M.R. 5669 du CNRS

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 FRANCE