

POLYGONES DU PLAN ET
POLYEDRES HYPERBOLIQUES

ABSTRACT. We show that the space of convex Euclidean polygons with given angles is naturally a convex polyhedron in some hyperbolic space. This interpretation gives another proof of the existence of Im Hof's hyperbolic Coxeter orthoschemes.

INTRODUCTION

Considérons un polyèdre Π de volume fini dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n limité par un nombre fini de faces formant entre elles des angles dièdres du type π/k (k entier ≥ 2). Un théorème bien connu de H. Poincaré affirme alors que le groupe d'isométries engendré par les réflexions par rapport aux faces de Π est discret et donne un pavage de l'espace hyperbolique. Ce sont des exemples importants de groupes de Coxeter et, pour cette raison, on dit que Π est un *polyèdre de Coxeter*. La classification de ces objets est un problème ouvert mais on sait qu'ils ne peuvent exister qu'en dimension inférieure à 996 et même 29 si Π est supposé compact (voir [Vi] pour un survol de la théorie). On dispose de peu de méthodes générales de construction.

Cependant, si l'on fait des hypothèses sur la combinatoire de Π , des résultats plus précis ont été obtenus. Par exemple, F. Lannér donne en 1950 une liste complète des polyèdres de Coxeter qui sont des simplexes. Dans [IH1] et [IH2], H.-C. Im Hof classe les orthoschèmes, notion initialement introduite par L. Schläfli et généralisée par H. Coxeter (voir le paragraphe 2.4 pour une définition). L'essentiel du travail de H.-C. Im Hof consiste à trouver des contraintes supplémentaires sur la géométrie d'un orthoschème de Coxeter. Il obtient ainsi une liste de 97 possibilités (dont quelques familles infinies en dimension 1, 2 et 3). Pour prouver l'existence de ces 97 polyèdres remarquables, H.-C. Im Hof est amené à calculer la signature des matrices de Gram associées.

Dans le présent travail, nous proposons une méthode élémentaire de construction des orthoschèmes de Im Hof.

W. Thurston étudie dans [Th] l'espace des structures plates à singularités coniques sur la sphère. Ceci lui permet de donner une belle construction géométrique de certains groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique complexe, découverts par E. Picard et R. Le Vavasseur au siècle dernier et étudiés récemment par P. Deligne et G. D. Mostow. Par analogie,

S. Kojima et Y. Yamashita étudient l'espace des pentagones du plan dont les angles sont fixés [K-Y]. Ils montrent que, pour certaines valeurs des angles, cet espace s'identifie naturellement à un polygone du plan hyperbolique à angles droits.

Nous allons considérer l'espace des polygones du plan à angles fixés. Nous verrons que, dans le cas convexe, cet espace est naturellement un polyèdre de l'espace hyperbolique de dimension $n-3$ dont on peut expliciter la combinatoire et la géométrie; il se trouve que l'on obtient des orthoschèmes. Les angles dièdres s'expriment simplement en termes de birapports de droites parallèles aux côtés du polygone initial. Il est alors facile de déterminer dans quels cas les angles dièdres sont du type π/k . On interprète ainsi les 97 orthoschèmes de Im Hof comme 'espaces de modules' de certains polygones du plan; ceci donne une autre preuve de l'existence de ces polyèdres.

Nous remercions S. Kojima pour avoir bien voulu nous communiquer sa prépublication [K-Y].

1. L'ESPACE DES POLYGONES

1.1. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Nous appellerons *polygone centré à n côtés* un n -uplet $P = (u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de \mathbb{R}^2 de somme nulle. Les u_i sont les sommets de P et les différences $u_{i+1} - u_i$ sont les côtés. Dans la suite, les indices seront compris modulo n , c'est-à-dire que nous conviendrons que $u_{n+1} = u_1$. L'ensemble \mathcal{P}_n de ces polygones centrés est un espace vectoriel de dimension $2n - 2$.

L'aire d'un élément $P = (u_1, \dots, u_n)$ de \mathcal{P}_n est définie par:

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(u_i, u_{i+1}).$$

C'est une forme quadratique naturelle sur \mathcal{P}_n .

1.2. Soit $D = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ un n -uplet de droites vectorielles de \mathbb{R}^2 . On suppose que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, les droites Δ_i et Δ_{i+1} sont distinctes. On considère alors le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_D de \mathcal{P}_n formé des polygones de côtés parallèles à $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, i.e. tels que:

$$u_{i+1} - u_i \in \Delta_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

La dimension de \mathcal{P}_D est égale à $n - 2$.

REMARQUE. Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ opère sur \mathbb{R}^2 en préservant l'aire. Il opère donc sur \mathcal{P}_n par isométries de \mathcal{A} . Si $M \in SL(2, \mathbb{R})$ et $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, posons: $M \cdot D = (M(\Delta_1), \dots, M(\Delta_n))$. Les restrictions de \mathcal{A} aux sous-espaces \mathcal{P}_D et

$\mathcal{P}_{M,D}$ sont isométriques. Cette remarque simple permet d'expliquer un phénomène constaté dans [K-Y] où les auteurs étudient l'espace des pentagones à angles fixés. En ces termes d'angles, l'invariance sous l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ est moins évidente et apparaît de manière quelque peu détournée dans [K-Y].

Nous allons déterminer la signature de la restriction de \mathcal{A} à \mathcal{P}_D . Si Δ et Δ' sont deux droites distinctes de \mathbb{R}^2 , nous noterons $\angle(\Delta, \Delta')$ leur angle orienté, élément de $]0, \pi[$. On remarquera que:

$$\angle(\Delta, \Delta') + \angle(\Delta', \Delta) = \pi.$$

PROPOSITION. La signature de la restriction de \mathcal{A} à \mathcal{P}_D est (k_+, k_-) avec:

$$k_+ = k_+(D) = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_i, \Delta_{i+1}) \right] - 1,$$

$$k_- = k_-(D) = \left[\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_{i+1}, \Delta_i) \right] - 1.$$

En particulier, $k_+ + k_- = n - 2$, et cette forme est non dégénérée.

Preuve. Nous procédons par récurrence sur n .

Si $n = 3$, nous devons étudier l'aire sur \mathcal{P}_D qui est alors de dimension 1. Sa signature est $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ suivant que le triangle considéré est direct ou non, c'est-à-dire suivant que $\angle(\Delta_1, \Delta_2) + \angle(\Delta_2, \Delta_3) + \angle(\Delta_3, \Delta_1)$ est égal à 2π ou π . La proposition est donc établie si $n = 3$.

Supposons la formule vérifiée jusqu'à $n - 1$ et supposons par ailleurs que $\Delta_1 \neq \Delta_3$. Soit $D' = (\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4, \dots, \Delta_n)$. Bien sûr, $\mathcal{P}_{D'}$ s'identifie naturellement à un sous-espace de \mathcal{P}_D ; il suffit d'envoyer le $(n - 1)$ -uplet $(u_1, u_2, u_4, \dots, u_n)$ sur le n -uplet $(u_1, u_2, u_2, u_4, \dots, u_n)$ convenablement translaté (par $-u_2/n$) pour qu'il appartienne à \mathcal{P}_D . Par ailleurs, la figure 1 montre comment définir une projection linéaire p de \mathcal{P}_D sur $\mathcal{P}_{D'}$.

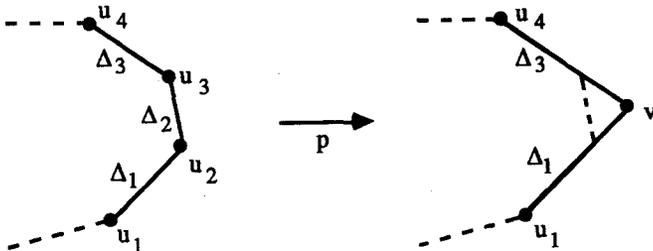


Fig. 1.

Cette projection p envoie $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ sur $(u_1, v, u_4, \dots, u_n)$ convenablement recentré. On a la décomposition orthogonale de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(p(P)) - \frac{1}{2} \det(u_3 - v, u_2 - v).$$

Le terme complémentaire $\frac{1}{2} \det$ est une forme quadratique de rang 1 dont le signe est donné par le cas précédent $n = 3$, c'est-à-dire positif ou négatif suivant que $\angle(\Delta_1, \Delta_2) + \angle(\Delta_2, \Delta_3) + \angle(\Delta_3, \Delta_1)$ est égal à π ou 2π (voir la figure 1). D'après l'hypothèse de récurrence, la signature de la restriction de \mathcal{A} sur \mathcal{P}_D en résulte immédiatement.

On peut bien sûr employer le même argument si $\Delta_i \neq \Delta_{i+2}$ pour un certain indice $i = 1, 2, \dots, n$. Le seul cas qui reste à examiner est celui où n est pair et où D est du type $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_1, \Delta_2)$. Dans ce cas, on peut toujours supposer que Δ_1 et Δ_2 sont les axes de coordonnées x et y de \mathbb{R}^2 (voir la remarque de 1.1). L'espace \mathcal{P}_D est alors identifié à l'espace des n -uplets $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n/2}, y_{n/2})$ de \mathbb{R}^n avec $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$. Dans ces coordonnées, la forme d'aire \mathcal{A} s'écrit:

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - y_{i-1})$$

dont la signature est $(n/2 - 1, n/2 - 1)$ conformément à la proposition.

1.3. Exemples

Soit P un polygone convexe de \mathbb{R}^2 et $D = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ la suite des directions de ses côtés, ordonnée dans le sens direct. Il est clair que:

$$\sum_{i=1}^n \angle(\Delta_i, \Delta_{i+1}) = 2\pi \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_{i+1}, \Delta_i) = (n-2)\pi.$$

Ainsi la signature correspondante est $(1, n-3)$. C'est l'exemple fondamental de cet article.

Dans la figure 2, nous indiquons quelques exemples de signatures (dont le précédent).

2. POLYÈDRE HYPERBOLIQUE ASSOCIÉ À UN POLYGONE CONVEXE

2.1. Nous allons maintenant décrire des cônes convexes dans \mathcal{P}_D . Pour chaque indice i , soit Δ_i l'une des deux demi-droites fermées définies par Δ_i . Il y a ainsi 2^n choix de $\mathbf{D} = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ associés à D . Chacun définit un cône $\mathcal{C}_{\mathbf{D}}$ (éventuellement réduit à $\{0\}$) dans \mathcal{P}_D :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{D}} = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{P}_D / u_{i+1} - u_i \in \Delta_i \text{ pour } i = 1, \dots, n\}.$$

	D	$P \in \mathcal{P}_D$	(k_+, k_-)
a			(1,2)
b			(3,0)
c			(3,3)

Fig. 2.

Ces cônes recouvrent \mathcal{P}_D et leurs intersections correspondent aux polygones dégénérés pour lesquels $u_{i+1} = u_i$.

Reprenons l'exemple considéré précédemment d'un polygone convexe (u_1, \dots, u_n) et soit $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ les directions orientées de ses côtés, ordonnées dans le sens direct, i.e. $\Delta_i = \mathbb{R}_+(u_{i+1} - u_i)$. Un n -uplet $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ de ce type sera dit *convexe*. Dans toute cette partie nous supposons D convexe.

PROPOSITION. Soit $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ un n -uplet convexe. La forme d'aire \mathcal{A} est strictement positive sur l'intérieur de \mathcal{C}_D .

Preuve. Si un polygone a les mêmes angles orientés qu'un polygone convexe, dans le même ordre cyclique, il est lui-même convexe. Tous les polygones de \mathcal{C}_D sont donc convexas et, en particulier, d'aire positive (ou nulle lorsqu'ils dégèrent).

2.2. L'intérêt de ces D convexas est le suivant. La signature de \mathcal{A} sur \mathcal{P}_D est $(1, n - 3)$ et \mathcal{C}_D est contenu dans le cône positif de \mathcal{A} . Le projectifié du cône strictement positif de \mathcal{A} est un modèle connu de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n-3} de dimension $n - 3$ (bien qu'on lui préfère en général le cône négatif dans un espace de signature $(n - 3, 1)$). Dans ce modèle de Klein, \mathbb{H}^{n-3} est une partie

de l'espace projectif réel de dimension $n - 3$ et la sphère à l'infini de \mathbb{H}^{n-3} correspond au cône isotrope.

En résumé, le projectifié de l'intersection de \mathcal{C}_D avec le cône strictement positif de \mathcal{A} est un polyèdre Π_D de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n-3} , associé au n -uplet convexe D .

PROPOSITION. *Le polyèdre Π_D est de volume fini (dès que $n \geq 5$). Il est compact si et seulement si les Δ_i sont deux à deux distinctes, i.e. si et seulement si le polygone initial n'a pas de côtés parallèles.*

Preuve. Les points à l'infini de Π_D correspondent aux polygones d'aire nulle, c'est-à-dire aux polygones convexes qui dégèrent en un intervalle. Le nombre de points à l'infini de Π_D est donc égal au nombre de paires d'indices i ayant le même Δ_i ; il est donc fini. Un polyèdre de \mathbb{H}^{n-3} n'ayant qu'un nombre fini de points à l'infini est toujours de volume fini (sauf si $n = 4$) et il est compact s'il n'a pas de point à l'infini.

2.3. *La combinatoire de Π_D dans \mathbb{H}^{n-3}*

Les faces de codimension 1 de Π_D correspondent aux dégénérescences $u_i = u_{i+1}$. Une telle dégénérescence est possible si et seulement si les arêtes Δ_{i-1} et Δ_{i+1} forment un angle strictement inférieur à π . Il s'agit ici d'angles orientés de demi-droites, éléments de $]0, 2\pi[$ (voir la figure 3).

Ces faces de codimension 1 sont donc associées à certains indices i ; on les notera F_i . On remarquera qu'il existe au plus deux indices pour lesquels F_i n'est pas définie (dès que $n \geq 5$). Lorsqu'il y a effectivement deux tels indices, ils sont consécutifs (voir la figure 4).

Les sommets de Π_D correspondent aux dégénérescences de $n - 3$ arêtes pour former un triangle. Trois indices $i_1 < i_2 < i_3$ de $\{1, \dots, n\}$ donnent un tel sommet si les angles $\angle(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_2})$, $\angle(\Delta_{i_2}, \Delta_{i_3})$ et $\angle(\Delta_{i_3}, \Delta_{i_1})$ sont strictement inférieurs à π (voir la figure 5).

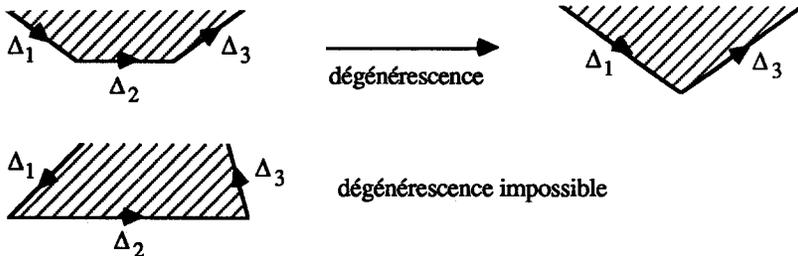


Fig. 3.

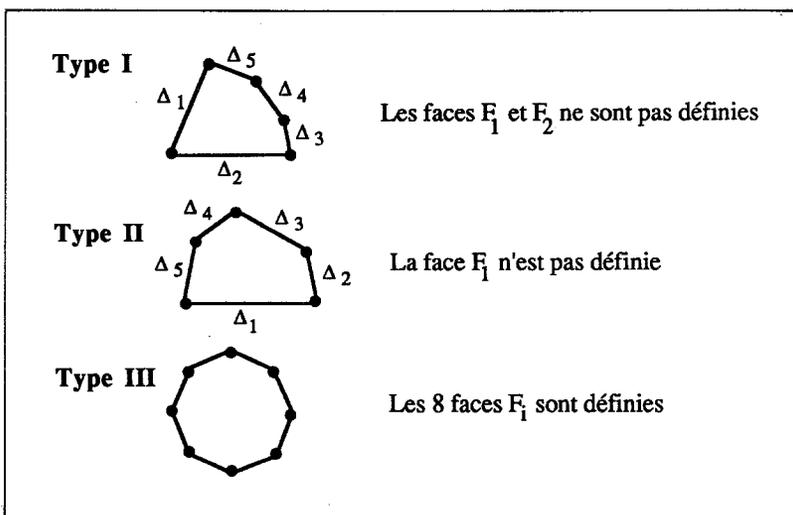


Fig. 4.

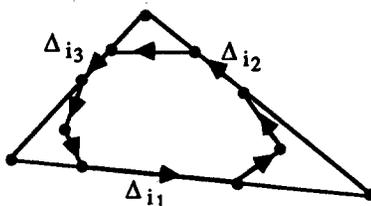


Fig. 5.

Plus généralement, nous dirons qu'un ensemble d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k}$ est compatible si les angles successifs $\angle(\Delta_{i_1}, \Delta_{i_2}), \dots, \angle(\Delta_{i_{n-k}}, \Delta_{i_1})$ sont tous strictement inférieurs à π . Il est clair que les faces de codimension k de Π_D correspondent aux ensembles compatibles à $n - k$ éléments et que les relations d'incidence entre faces se traduisent par des relations d'inclusion entre les ensembles compatibles.

Voici une propriété combinatoire générale de ces polyèdres Π_D .

PROPOSITION. *Le 'link' d'une face de Π_D (de codimension non nulle quelconque) est un simplexe.*

Preuve. Considérons une face F de Π_D associée à un ensemble d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k}$. Le 'link' de cette face est combinatoirement isomorphe à l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ contenant $\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$ (toutes évidemment compatibles). C'est donc un simplexe.

REMARQUE. Dans chaque cas particulier, il n'est pas difficile d'expliciter la combinatoire de Π_D . Par exemple, dans le type I de la figure 4, i.e. lorsque les faces F_1 et F_2 ne sont pas définies, les parties compatibles sont bien sûr toutes les parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ contenant $\{1, 2\}$. Alors Π_D est un simplexe. On pourrait d'ailleurs vérifier que c'est le seul cas où Π_D est un simplexe.

2.4. Géométrie de Π_D

Rappelons que nous avons noté F_i la face de codimension 1 de Π_D correspondant à la dégénérescence du i -ème côté. Cette face peut ne pas être définie pour un ou deux indices (dès que $n \geq 5$) qui sont alors consécutifs dans l'ordre cyclique.

PROPOSITION. Si deux indices i et j ne sont pas consécutifs et si les faces F_i et F_j sont définies, alors elles se coupent orthogonalement.

Preuve. Sous l'hypothèse de la proposition, il existe deux formes linéaires indépendantes x et y sur \mathcal{P}_D telles que:

- (i) $x = 0$ est l'équation (homogène) de F_i ,
 $y = 0$ est l'équation de F_j .
- (ii) l'aire \mathcal{A} s'écrit comme une somme orthogonale $-x^2 - y^2 + q$. Voir la figure 6.

L'orthogonalité de F_i et F_j est donc claire.

On associe d'ordinaire un graphe \mathcal{G} à un polyèdre Π de l'espace hyperbolique de la façon suivante. Les sommets de \mathcal{G} sont les faces de codimension 1 de Π et une arête joint deux faces si celles-ci ne sont pas orthogonales. Nous dirons que Π est un *orthoschème* si le graphe \mathcal{G} est cyclique ou linéaire, c'est-à-dire si une face de Π ne coupe non orthogonalement qu'au plus deux faces de Π . Cette définition n'est pas exactement celle que l'on rencontre dans [IH1] et [IH2]; nous nous en contenterons cependant car notre but principal est de construire des polyèdres de Coxeter. Nous constatons simplement que les polyèdres Π_D sont des orthoschèmes.

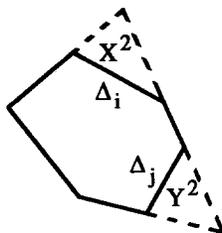


Fig. 6.

Continuons l'analyse des angles dièdres.

PROPOSITION. Les faces F_i et F_{i+1} sont définies et se coupent si et seulement si l'angle $\angle(\Delta_{i-1}, \Delta_{i+2})$ est strictement inférieur à π . L'angle dièdre correspondant θ est aigu et il est donné par la formule:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -[\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2}]$$

où le crochet désigne le birapport de quatre droites vectorielles de \mathbb{R}^2 .

REMARQUE. Dans tous les cas, le birapport $\rho = [\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2}]$ de quatre éléments consécutifs de D a une interprétation géométrique. Supposons la face F_i définie.

- (i) Si $\rho < 0$, la face F_{i+1} est définie et coupe F_i ; l'angle dièdre est donné par la proposition.
- (ii) Si $\rho = 0$, les deux faces F_i et F_{i+1} sont définies et sont tangentes à l'infini de \mathbb{H}^{n-3} .
- (iii) Si $0 < \rho < 1$, les deux faces F_i et F_{i+1} sont définies et ne se coupent pas; la distance hyperbolique d qui les sépare est donnée par la formule $\operatorname{th}^2 d = \rho$.
- (iv) Si $\rho \geq 1$, F_{i+1} n'est pas définie.

Preuve. Nous savons déjà que F_i et F_{i+1} se coupent si et seulement si l'angle $\angle(\Delta_{i-1}, \Delta_{i+2})$ est strictement inférieur à π . Considérons la figure 7.

Soit P' le polygone $(u_1, \dots, u_{i-1}, w, u_{i+3}, \dots, u_n)$ convenablement recentré. On a la décomposition orthogonale:

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P') - X^2 - Y^2$$

où Y^2 et X^2 sont les aires des triangles u_{i+1}, v, u_{i+2} et u_i, w, v respectivement.

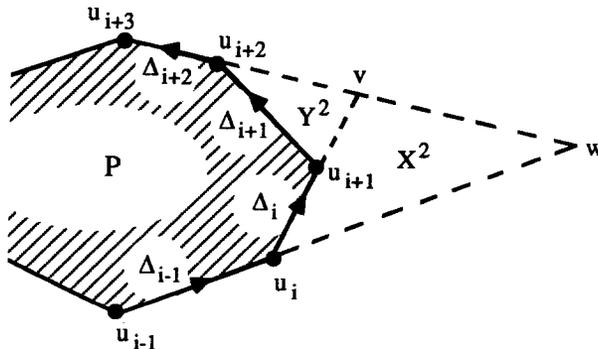


Fig. 7.

Le signe des formes linéaires X et Y est choisi de telle façon que le cône \mathcal{C}_D soit dans les demi-espaces $X \geq 0$ et $Y \geq 0$. Avec ces conventions:

- (i) La face F_{i+1} a pour équation homogène $Y = 0$,
- (ii) La face F_i a pour équation homogène $Y = \lambda X$ où λ^2 est le rapport des aires des triangles u_i, v, u_{i+2} et u_i, w, v dans la figure 8.

Ce rapport λ^2 est aussi le rapport entre les longueurs des segments vw et vu_{i+2} ; c'est aussi l'opposé du birapport $[\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2}]$. Nous avons ici choisi la définition du birapport de façon que $[0, 1, \infty, \rho] = \rho$, c'est-à-dire que nous posons:

$$[a, b, c, d] = \frac{d - a}{c - a} \frac{b - c}{d - c}$$

où a, b, c, d appartiennent à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Ainsi, au voisinage de l'intersection de F_i et F_{i+1} , le polyèdre Π_D a pour équation homogène $0 \leq Y \leq \lambda X$. L'angle dièdre θ est donc bien aigu et donné par la formule de la proposition.

REMARQUE. On peut généraliser la proposition en décrivant la structure métrique du 'link' d'une face de Π_D . Soit P un élément de l'intérieur de \mathcal{C}_D . On peut visualiser une face F de codimension k de Π_D par un polygone P' à $n - k$ côtés 'circonscrit à P' ' (voir la figure 9).

Le complémentaire de P dans P' est une réunion de polygones (non convexes dès qu'ils ont plus de trois côtés), du type de l'exemple (b) de la figure 2, c'est-à-dire menant à une forme quadratique définie positive. Pour chacun d'eux, le projectifié du cône correspondant est un simplexe sphérique. Le 'link' de F est alors isométrique au projectifié du produit de ces cônes.

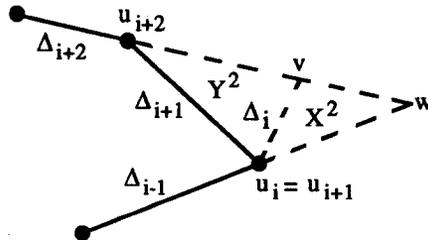


Fig. 8.

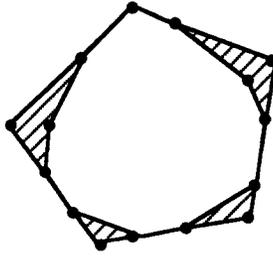


Fig. 9.

3. PAVAGES HYPERBOLIQUES

3.1. Considérons un polyèdre de Coxeter Π dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n-3} . Le diagramme de Coxeter de Π est un graphe qui précise celui que nous avons introduit en 2.4. Il est défini comme suit:

- (i) les sommets sont les faces de Π (de codimension 1)
- (ii) on joint deux faces:
 - par une arête étiquetée k si elles se coupent avec un angle dièdre π/k , $k \geq 3$,
 - par une arête étiquetée ∞ si elles sont tangentes à l'infini,
 - par une arête en pointillés si elles ne se coupent pas dans \mathbb{H}^{n-3} ; dans ce cas l'arête est souvent étiquetée par la distance entre les faces.

Ce graphe caractérise Π à isométrie près (voir [Vi]).

Examinons maintenant sous quelles conditions nos exemples Π_D sont des polyèdres de Coxeter. L'étude de la combinatoire (2.3) nous a montré que les diagrammes correspondants sont linéaires ou cycliques. Les birapports qui vont intervenir sont les $-\text{tg}^2 \pi/k$ ($k \geq 3$) dont voici les valeurs significatives:

k	3	4	5	6	...
$-\text{tg}^2 \pi/k$	-3	-1	$2\sqrt{5}-5$	$-\frac{1}{3}$...

Ainsi, le polyèdre Π_D est de Coxeter si et seulement si les birapports de quatre droites consécutives (dans l'ordre cyclique) de $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ sont soit positifs ou nuls, soit dans la liste $\{-\text{tg}^2 \pi/k; k \geq 3\}$.

Notre méthode permet donc de vérifier simplement l'existence des orthoschémes de Im Hof.

On trouvera dans la table I la liste des n -uplets de pentes de droites

TABLE I
Les orthoschémes de H.-C. Im Hof

Les orthoschémes sont regroupés suivant leur dimension $n - 3$ et leur type:

- type I: deux faces consécutives ne sont pas définies; l'orthoschéme est un simplexe et son diagramme de Coxeter est linéaire.
- type II: une face n'est pas définie; le diagramme est linéaire.
- type III: toutes les faces sont définies; le diagramme est un cycle.

Pour chaque exemple, on a indiqué:

- entre parenthèses, une liste de pentes de droites déterminant le polyèdre.
- en italique, le diagramme de Coxeter. Pour économiser l'espace, nous nous sommes contentés d'écrire la suite des étiquettes du graphe (cyclique pour le type III).

On posera: $\rho_k = -\text{tg}^2 \pi/k$.

Dimension 1: Type I

$(0, 1, \infty, \rho) \dots$ avec $0 < \rho < 1$ *

Dimension 2: Type I

$(0, 1, \infty, \rho_p, \frac{1-\rho_p\rho_q}{1-\rho_q}) p-q$ avec $3 \leq p, q \leq \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ *

Dimension 2: Type II

$(0, 1, \infty, \rho_p, \rho) \dots -p \dots$ avec $3 \leq p \leq \infty, 1 < \rho < \infty$

Dimension 2: Type III

$(0, 1, \infty, \rho, \sigma) \dots - \dots - \dots - \dots - \dots$ avec $0 < \rho < 1 < \sigma < \infty$

Dimension 3: Type I

$(3/\sqrt{5}, \sqrt{5}+1, -1, 0, 1, 2)$	$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, \infty)$	5-3-4
$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, -1-\sqrt{5})$	$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, -2)$	5-3-6
$(0, 1, \infty, -3, -1, 1)$	$(0, 1, \infty, -3, -2, 1)$	3-3-6
$(0, 1, \infty, -3, 0, 1)$	$(0, 1, \infty, -1, 0, 1)$	4-4-4
$(0, 1, \infty, -1, -\frac{1}{3}, 1)$	$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, 1)$	6-3-6

Dimension 3: Type II

$$(0, 1, \infty, \rho_p, \frac{1-\rho_p\rho_q}{1-\rho_q}, \frac{\rho_p+\rho_r-1-\rho_p\rho_q\rho_r}{\rho_q(1-\rho_q)}, p-q-r-\dots \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$$

$$(0, 1, \infty, 0, \frac{1}{1-\rho_q}, \frac{\rho_r-1}{\rho_q(1-\rho_q)}) \infty-q-r-\infty \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$$

Dimension 3: Type III

$$(0, 1, \infty, \rho_p, \frac{1-\rho_p\rho_q}{1-\rho_q}, \frac{\rho_p+\rho_r-1-\rho_p\rho_q\rho_r}{\rho_q(1-\rho_q)}, p-q-r-\dots-\dots-\dots \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$$

$$(0, 1, \infty, 0, \frac{1}{1-\rho_q}, \frac{\rho_r-1}{\rho_q(1-\rho_q)}) \infty-q-r-\infty-\dots-\dots-\dots \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$$

$$(0, 1, \infty, \rho_r, 1-\rho_p, \infty) r-\dots-\infty-\dots-\dots-p-\infty-\dots \text{ avec } 3 \leq p, r < \infty$$

$$(0, 1, \infty, \rho_r, 1, \infty) r-\infty-\infty-\dots-\dots-\infty-\infty-\dots \text{ avec } 3 \leq r < \infty$$

$$(0, 1, \infty, \rho_p, \frac{\sqrt{\Delta+1+\rho_p-\rho_q-\rho_r}}{2(1-\rho_q)}, \frac{\sqrt{\Delta+1-\rho_p-\rho_q-\rho_r}}{-2\rho_q}, p-\dots-q-\dots-r-\dots-\dots \text{ avec } 3 \leq p, q, r < \infty$$

$$\Delta = (1-\rho_p-\rho_q-\rho_r)^2 - 4\rho_p\rho_q\rho_r$$

*

Dimension 4: Type I

$$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$$

$$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, -\sqrt{5})$$

Dimension 4: Type II

$$(3/\sqrt{5}, \sqrt{5}+1, -1, 0, 1, 2, 3)$$

$$(0, 1, \infty, -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$(\sqrt{2}, -1, 0, 1, 2, \infty, -2)$$

$$5-3-3-4$$

$$3-4-3-4$$

$$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, \infty)$$

$$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 1)$$

$$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, \infty, -3)$$

$$(0, 1, \infty, -1, 0, \frac{1}{3}, 1)$$

$$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, (\sqrt{5}+3)/6)$$

$$5-3-4-3-\dots$$

$$4-4-3-4-\infty$$

$$6-3-3-4-\infty$$

$$6-3-3-5-\infty$$

* 8-3-4-3-8 *

TABLE I
Les orthoschémes de H.-C. Im Hof

Les orthoschémes sont regroupés suivant leur dimension $n - 3$ et leur type:
 - type I: deux faces consécutives ne sont pas définies; l'orthoschéme est un simplexe et son diagramme de Coxeter est linéaire.
 - type II: une face n'est pas définie; le diagramme est linéaire.
 - type III: toutes les faces sont définies; le diagramme est un cycle.
 Pour chaque exemple, on a indiqué:
 - entre parenthèses, une liste de pentes de droites déterminant le polyèdre.
 - en italique, le diagramme de Coxeter. Pour économiser l'espace, nous nous sommes contentés d'écrire la suite des étiquettes du graphe (cyclique pour le type III).

On posera: $\rho_k = -\lg^2 \pi/k$.

Dimension 4: Type III

$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, \infty, (3\sqrt{5}-5)/5)$	5-3-4-.....-.....-3-	$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, -1-\sqrt{5}, -3/\sqrt{5})$	5-3-5-3-.....-.....-
$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, -2, (3\sqrt{3}-5)/5)$	5-3-6-.....-.....-∞-3-	$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, \infty, -1)$	5-3-4-4-.....-.....-∞-
$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, -2, -1)$	5-3-6-3-.....-∞-∞-∞-	$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, \frac{3}{2})$	3-6-3-.....-∞-∞-3-
$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, 3)$	3-6-3-.....-∞-∞-4-	$(0, 1, \infty, -3, -1, 1, 3)$	3-4-4-3-.....-∞-.....-
$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, \infty)$	3-6-3-6-∞-∞-∞-∞-	$(0, 1, \infty, -1, 0, 1, 2)$	4-4-4-3-∞-∞-∞-.....-
$(0, 1, \infty, -1, 0, \frac{3}{2}, \infty)$	4-4-3-6-∞-∞-.....-∞-	$(0, 1, \infty, -1, 0, 1, \infty)$	4-4-4-4-∞-∞-∞-∞-
$(0, 1, \infty, -1, \frac{1}{2}, 2, \infty)$	4-6-4-4-6-4-∞-∞-	$(0, 1, \infty, 0, 1, 2, -1)$	∞-∞-4-6-3-6-4-
$(0, 1, \infty, 0, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2})$	∞-6-3-3-6-∞-∞-.....-		

Dimension 5: Type I

$(0, 1, \infty, -3, -2, -\frac{1}{3}, -1, 1)$	3-3-3-4-3	$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1)$	3-3-4-3-3
$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 0, 1)$	3-4-3-3-4		

Dimension 5: Type II

$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$	5-3-3-3-3-3-.....	$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \infty)$	5-3-3-3-3-4-.....
$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, \infty, -2)$	5-3-3-4-3-.....	$(0, 1, \infty, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$	4-4-3-3-4-4
$(0, 1, \infty, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	4-4-3-3-3-6	$(0, 1, \infty, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1)$	4-3-4-3-3-∞
$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	6-3-3-3-3-3-6	$(0, 1, \infty, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$	6-3-3-4-3-6

Dimension 5: Type III

$(\sqrt{5}, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 1 - \sqrt{5})$	$5-3-3-3-5-\dots-\dots-$	$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 1, 5)$	$3-4-3-4-3-\dots-\infty-\dots-$
$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, \frac{2}{3})$	$3-6-3-3-3-6-3-\dots-$	$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, 3, 9)$	$3-6-3-4-3-6-3-\dots-$
$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, \infty, -3)$	$3-6-3-6-3-6-3-6-$	$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, \frac{2}{3}, -3)$	$3-6-3-3-6-3-6-6-$
$(0, 1, \infty, -3, -1, 1, 3, -3)$	$3-6-4-4-6-3-4-4-$	$(0, 1, \infty, -3, 0, 1, \infty, -1)$	$3-6-4-4-4-3-6-$
$(0, 1, \infty, -1, 0, \frac{1}{3}, 1, 3)$	$4-4-3-4-3-6-\dots-$	$(0, 1, \infty, -1, 0, 1, 2, 3)$	$4-4-4-3-6-3-\dots-$
$(0, 1, \infty, -1, 0, 1, 2, \infty)$	$4-4-4-3-4-4-4-\dots-$	$(0, 1, \infty, -1, 0, 1, \infty, -1)$	$4-4-4-4-4-4-4-4-$
$(0, 1, \infty, 0, 2, \infty, -2, -1)$	$\infty-\dots-\infty-4-3-4-3-4-$		

Dimension 6: Type II

$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$3-4-3-3-3-3-\infty^*$	$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1)$	$3-4-3-3-3-4-\infty$
---	------------------------	---	----------------------

Dimension 6: Type III

$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2)$	$3-3-4-3-3-3-\infty-\dots-$	$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, \infty, -\frac{1}{3})$	$3-3-4-3-4-\dots-\infty-6-3-$
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, \infty)$	$3-3-4-3-3-4-\infty-\infty-\dots-$	$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, -2, -1)$	$3-3-4-3-\infty-\infty-3-4-$
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, \infty, -1)$	$3-3-4-3-4-\infty-\infty-4-4-$	$(0, 1, \infty, -3, 1, 3, \infty, -1)$	$3-4-4-3-4-4-3-4-4-$

Dimension 7: Type II

$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$3-4-3-3-3-3-6$	$(0, 1, \infty, -3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$	$3-4-3-3-3-3-4-4$
--	-----------------	--	-------------------

Dimension 7: Type III

$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$	$3-3-4-3-3-3-6-3-\dots^*$	$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, -3, -1, -\frac{1}{3})$	$3-3-4-3-6-\infty-6-3-4-3-$
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, \infty, -3)$	$3-3-4-3-3-4-3-6-3-6-$	$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, -1)$	$3-3-4-3-3-4-6-3-6-3-$
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \infty)$	$3-3-4-3-3-3-4-4-4-\infty-$	$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, \infty, -2, -1)$	$3-3-4-3-4-4-4-3-4-4-$
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, \infty, -1)$	$3-3-4-3-3-4-4-4-4-4-$		

Dimension 8: Type III

$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, \infty, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	$3-3-4-3-4-\infty-4-3-3-$	*	
---	---------------------------	---	--

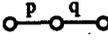
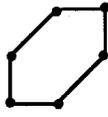
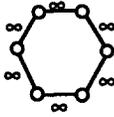
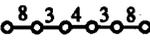
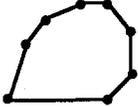
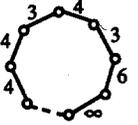
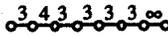
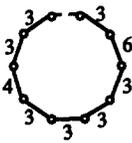
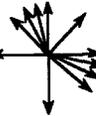
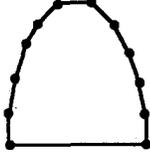
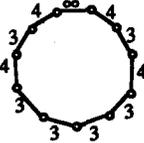
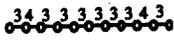
Dimension 9: Type II

$(0, \infty, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \infty)$	$3-4-3-3-3-3-3-3-4-3-$	*	
--	------------------------	---	--

Dimension 9: Type III

$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \infty)$	$3-3-4-3-3-3-3-4-3-3-\infty-$		
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \infty, -1)$	$3-3-4-3-3-3-3-4-3-3-4-4-$		
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \infty, -2, -1)$	$3-3-4-3-3-3-4-3-3-3-4-4-$		
$(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, \infty, -3, -2, -1)$	$3-3-4-3-3-4-3-3-4-3-3-4-$		

TABLE II
Quelques exemples

D	$P \in \mathcal{C}_D$	Diagramme	Remarques
 $(0,1,\infty,\rho)$			dimension 1 compact (type I)
 $(0,1,\infty,\rho_p, \frac{1-\rho_p\rho_a}{1-\rho_a})$			dimension 2 compact groupe du triangle $(2, p, q)$ (type I)
 $(0,1,\infty,0,1,\infty,)$			dimension 3 non compact (type III)
 $(\sqrt{2},-1,0,1,2,\infty,-2)$			dimension 4 compact (type II)
 $(0,1,\infty,-1,0,1/3,1,3)$			dimension 5 non compact (type III)
 $(0,1,-,-3,-1,-1/3,0,1/5,1/3)$			dimension 6 non compact (type II)
 $(0,1,\infty,-3,-2,-1,0,1,2,3)$			dimension 7 non compact (type III)
 $(0,1,\infty,-3,-2,-1,0,\infty,-1,1/2,-1/3)$			dimension 8 non compact (type III)
 $(0,\infty,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\infty)$			dimension 9 non compact (type II)

correspondant aux 97 cas de [IH1-2]. Quelques uns de ces exemples (signalés par*) ont été détaillés dans la table II. Pour faciliter la lecture de ces tables, voici trois birapports remarquables:

$$\begin{aligned}
 [x - 1, x, x + 1, x + 2] &= -3 = -\operatorname{tg}^2 \pi/3 & (x \in \mathbb{R}) \\
 [x - 1, x, x + 1, \infty] &= -1 = -\operatorname{tg}^2 \pi/4 & (x \in \mathbb{R}) \\
 [\sqrt{5}, -2, -1, 0] &= 2\sqrt{5} - 5 = -\operatorname{tg}^2 \pi/5.
 \end{aligned}$$

Par exemple, considérons la suite des 10 droites de pentes $(0, 1, \infty, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$ qui définit un polyèdre de dimension 7. On voit immédiatement que les birapports de 4 droites consécutives sont: $-3, -3, -1, -3, -3, -3, -3, -\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}$. Les neuf premiers donnent des angles dièdres $\pi/3, \pi/3, \pi/4, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/6, \pi/3$ et le dernier, étant positif, correspond à deux faces qui ne se coupent pas.

3.2. Polyèdres sphériques et euclidiens

Par la même méthode, on construit des polyèdres euclidiens ou sphériques. En effet, nous avons déjà rencontré dans la partie 1 des exemples de suites $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ pour lesquels l'aire est définie positive sur l'espace des configurations \mathcal{P}_D (voir figure 2(b)). Le cône \mathcal{C}_D (dès qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$) coupe alors la sphère unité de \mathcal{P}_D sur un polyèdre sphérique dont les angles dièdres sont encore donnés par la formule du birapport.

En procédant comme plus haut, on obtient une construction simple de tous les polyèdres réguliers. La table III contient la liste des n -uplets de pentes qui conviennent. Les simplexes sphériques associés sont les domaines fondamentaux des groupes (finis) d'isométries des polyèdres euclidiens réguliers $(A_n, B_n, F_4, H_3, H_4, G_2, I_2(m))$ avec les notations habituelles).

Dans le même esprit, on pourrait aussi obtenir une description de certains groupes de Coxeter euclidiens.

TABLE III

$(0, -1, -2, -3, \dots, -n-1)$	$A_n \quad (n \geq 2)$
$(0, -1, -2, -3, \dots, -n, \infty)$	$B_n \quad (n \geq 2)$
$(0, -1, -2, -3, \infty, 1)$	F_4
$(0, -1, -2, -3, \sqrt{5}-1)$	H_3
$(0, -1, -2, -3, -4, \sqrt{5}-2)$	H_4
$(0, -1, -2, -2\rho_m/(1+\rho_m)) \rho_m = -\operatorname{tg}^2 \pi/m \text{ et } m \geq 5$	$G_2 \text{ et } I_2(m) \quad m = 5 \text{ ou } m \geq 7$

BIBLIOGRAPHIE

- [IH1] Im Hof, H.-C., 'A class of hyperbolic Coxeter groups', *Expo. Math.* **3** (1985), 179–186.
[IH2] Im Hof, H.-C., 'Napier cycles and hyperbolic Coxeter groups', *Bull. Soc. Math. Belgique* **42** (1990).
[K–Y] Kojima, S. et Yamashita, Y., 'Shapes of stars', Preprint, Tokyo Institute of Technology, 1990.
[Th] Thurston, W., 'Shapes of polyhedra', Preprint, Princeton, 1987.
[Vi] Vinberg, E., 'Hyperbolic reflection groups', *Russian Math. Surveys* **40**, 1 (1985), 31–75.

Adresse des auteurs:

Christophe Bavard et Etienne Ghys,
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées,
CNRS-ENS Lyon No. C0128,
46, Allée d'Italie,
F-69364 Lyon Cedex 07,
France.

(Received, June 25, 1991; revised version, March 18, 1992)