Une singulière promenade mathématique

Caspar David Friedrich,
Le Voyageur contemplant une mer de nuages (1818) ©

ÉTIENNE GHYS

TRADUCTION: NICOLAS BACAËR

UNE SINGULIÈRE PROMENADE MATHÉMATIQUE

L'édition originale de ce livre d'Étienne Ghys — *A singular mathematical promenade* — a été publiée par ENS Éditions à Lyon en 2017.

Le texte a été traduit automatiquement avec l'aide du logiciel DeepL puis relu et corrigé par Nicolas Bacaër. Étienne Ghys a ensuite apporté les modifications nécessaires.

Adresses de contact :

Étienne Ghys
CNRS-ENS Lyon, UMPA
46, allée d'Italie
69364 Lyon
France
etienne.ghys@ens-lyon.fr
perso.ens-lyon.fr/ghys

Nicolas Bacaër
Institut de recherche pour le développement
32, avenue Henri Varagnat
93143 Bondy
France
nicolas.bacaer@ird.fr
www.ummisco.ird.fr/perso/bacaer

Licence *Creative Commons* CC0, 2023. Domaine public.
© Étienne Ghys et Cassini, 2023, pour la présente édition uniquement.
ISBN : 978-2-84225-300-4

Pour Martine, qui m'a toujours encouragé

à écrire « un petit livre ».

Sommaire

Gavagaï ! 1

Préface 3

Feuille de route 7

Intersections de polynômes : Maxim Kontsevitch 13

Motifs et permutations : Donald Knuth 19

Permutations séparables 29

Hipparque et Schröder 39

De methodis serierum et fluxionum : la méthode de Newton 47

De methodis serierum et fluxionum : les séries de Newton 55

Un peu d'algèbre formelle 63

Gauss sur les courbes algébriques 73

Démonstration de l'affirmation de Gauss sur les singularités 85

De seriebus divergentibus : Euler, Cauchy et Poincaré 95

Convergence : Cauchy 103

Möbius et sa bande 119

Colliers de Möbius 129

Résolution des singularités 141

La sphère de dimension 3 *et la fibration de Hopf* 151

La cubique cuspidale et le trèfle 165

Victor Puiseux, enfin ! 177

Jack Milnor et sa fibration 185

L'associaèdre d'Hipparque-Schröder-Tamari-Stasheff 199

Jim Stasheff et l'espace des lacets 207

Opérades 219

Opérades singulières 229

Gauss est de retour : courbes dans le plan 237

Diagrammes de cordes analytiques : un algorithme 251

Diagrammes de cordes analytiques : graphes d'entrelacement 265

Gauss et l'enlacement 285

Kontsevitch est de retour : un invariant universel 295

Postface 303

Remerciements 305

Illustrations 307

Gavagaï !

La situation est étrange : je découvre un livre en français alors que je l'ai écrit en anglais et que je suis français. Depuis sa parution il a été traduit en turc, russe, arabe et portugais. Je me reprochais amèrement de ne pas l'avoir traduit en français lorsque Nicolas Bacaër m'a proposé de le traduire avec sa méthode semi-automatique. Il s'agit de commencer par traduire le texte source automatiquement avec l'aide du logiciel DeepL avant une relecture détaillée et une correction ligne à ligne.

Nicolas Bacaër.

Nicolas Bacaër est un grand défenseur du multilinguisme, en particulier en science. Il est convaincu que les logiciels modernes de traduction vont nous aider à atteindre ce but et qu'ils y parviennent d'ailleurs déjà pour l'essentiel. Ce livre confirme son point de vue. Il est remarquable que DeepL puisse travailler sur un texte mathématique, bien souvent abscons et incompréhensible par la majorité de nos concitoyens.

Les mathématiques transcendent-elles la langue utilisée pour les exprimer ? Certains affirment que les mathématiques ne sont qu'un langage, de longues suites de symboles écrits en respectant une certaine syntaxe, et qu'il ne faut pas y chercher de signification absolue. D'autres avancent que la langue n'est qu'un outil pour décrire un Monde Mathématique abstrait et universel qui se trouverait on ne sait pas trop où, quelque part dans un paradis platonicien. D'autres enfin prétendent que les mathématiques ne se réduisent qu'à quelques connexions neuronales, qui sont donc différentes pour chacun d'entre nous et que nous ne partageons que partiellement à travers des mots.

J'aime imaginer que les contenus mathématiques de ces livres anglais, turc, arabe, portugais, russe et français ne sont pas tout à fait les mêmes, précisément parce qu'ils sont écrits dans des langues différentes. J'ai toujours été persuadé que

les mathématiques s'expriment dans une langue et que cette langue fait partie intégrante du contenu mathématique, dans une mystérieuse symbiose.

Le célèbre linguiste Willard Van Orman Quine a écrit un livre majeur qui détruit quelques-uns de nos dogmes. Dans *Le Mot et la Chose*, il démontre qu'une traduction-isomorphisme est impossible car elle n'a pas de sens intrinsèque. Il n'y a pas une vérité unique qui s'exprimerait de manière univoque dans chaque langue. Quine propose une expérience de pensée. Un linguiste visite une peuplade dont il ignore tout de la langue. Tout à coup, il voit un indigène qui s'exclame « Gavagaï ! » et au même moment il voit un lapin qui s'enfuit. « Gavagaï » signifie-t-il « lapin » ? Rien n'est moins sûr car l'indigène peut tout aussi bien évoquer la fuite ou tout autre chose. La thèse de Quine est donc que deux linguistes compétents face aux mêmes situations pourraient tout à fait établir deux dictionnaires incompatibles entre eux mais qui permettraient tout à fait de mener des conversations cohérentes avec ces indigènes. « Gavagaï » ne peut donc pas être traduit et, toujours selon Quine, nos énoncés n'ont pas de signification universelle.

La généralisation de ce genre d'arguments aux mathématiques est périlleuse et probablement trop simpliste. Il n'empêche que lorsque deux mathématiciens prononcent le mot « variété » par exemple, chacun en a son interprétation personnelle probablement assez éloignée de la définition « officielle » qu'on trouve dans les livres sérieux de mathématiques. Les mots « variété », « manifold », « Mannigfaltigkeit », « variedade », etc., ne déclenchent-ils pas de nombreuses images mentales lorsque nous les entendons ou les lisons dans notre langue ? Je laisse mon lecteur se faire une opinion personnelle.

C'est donc avec une grande fierté et gratitude que je voudrais remercier Nicolas Bacaër pour sa traduction et son militantisme pour le multilinguisme ! Je remercie également la délégation générale à la langue française et aux langues de France du ministère de la Culture pour son soutien.

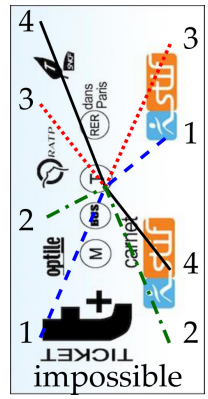
Étienne Ghys

Paris, le 13 avril 2023

MINISTÈRE
DE LA CULTURE
Liberté
Égalité
Fraternité

Préface

En mars 2009, j'assistais à une réunion administrative et le collègue assis à côté de moi s'ennuyait encore plus que moi. Maxim Kontsevitch avait manifestement autre chose en tête. Soudain, il me passa un ticket de métro parisien sur lequel il y avait un gribouillis et un seul mot : « impossible ». C'était le nouveau théorème qu'il voulait partager avec moi ! Il m'a fallu quelques minutes et quelques chuchotements pour deviner l'énoncé du théorème et quelques minutes encore pour en trouver la preuve. Voici l'énoncé.



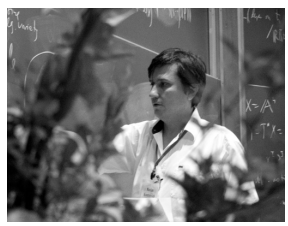
Théorème. *Quatre polynômes* P_1, P_2, P_3 *et* P_4 *d'une variable réelle* x *ne peuvent pas satisfaire les conditions suivantes :*

— $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ *pour tout* $x < 0$ *petit,*

— $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$ *pour tout* $x > 0$ *petit.*

La *position relative* des graphes de quatre polynômes réels est soumise à certaines contraintes. J'étais fasciné : un nouveau résultat élémentaire sur quatre polynômes en 2009 !

Plus tard, j'ai essayé de placer cela dans un contexte plus général, d'étudier la situation lorsque nous avons plus de quatre polynômes, etc. Le résultat a été un voyage agréable, avec de nombreux détours, dans des domaines mathématiques étonnamment différents, à différentes périodes de l'histoire des mathématiques. Comme d'habitude, cela a conduit à des problèmes ouverts que je n'ai pu résoudre que partiellement.



Maxim Kontsevitch. ©

Le but de ce petit livre est d'inviter le lecteur à cette promenade mathématique. Je n'ai pas choisi la manière la plus efficace d'atteindre un objectif spécifique et, en fait, il n'y a pas d'objectif à ce texte. Presque tous les chapitres sont fondamentalement indépendants et vous pouvez en sauter autant que vous le souhaitez. Si vous trouvez une section trop ardue ou trop plate, vous

pouvez facilement la passer. Nous rendons visite à Hipparque, Newton et Gauss, mais aussi à de nombreux mathématiciens contemporains. Nous jouons avec un peu d'algèbre, de topologie, de géométrie, d'analyse complexe, de combinatoire et d'informatique. Une promenade dans le monde des mathématiques.

Cependant, afin d'atteindre un certain objectif et de ne pas transformer cette promenade en une marche complètement aléatoire, je vais présenter un résultat qui sera démontré dans l'un des derniers chapitres. C'est probablement le seul résultat nouveau de ce travail.

Considérons un point p sur une courbe plane $\mathscr{C}$.

Si $\mathscr{C}$ est *lisse*, l'image locale n'est pas si intéressante.

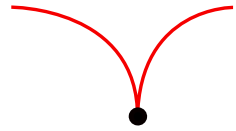
Si $\mathscr{C}$ est *singulière* en p, l'image peut être plus compliquée, comme par exemple un point de rebroussement $x^3 = y^2$. Limitons notre étude aux courbes *algébriques* définies par une équation $F(x, y) = 0$ où F est un polynôme en x et y à coefficients réels. Il s'avère que, dans le voisinage de l'un de ses points, une telle courbe est la réunion d'un nombre fini de morceaux irréductibles, généralement appelés *branches*. La nature de ces branches a fait l'objet de nombreux débats dans le passé, et nous discutons de ce sujet en détail. Le résultat principal est que les branches sont *topologiquement* lisses ! Plus précisément, pour chaque branche, il existe un *homéomorphisme* local du plan qui la transforme en une droite. Chaque branche coupe un petit cercle centré sur p en exactement deux points.

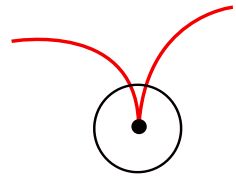
La position relative des nombreuses branches d'une courbe est beaucoup plus subtile. Dans le voisinage d'un point singulier, la topologie est décrite par un nombre pair de points sur un cercle, appariés deux à deux : l'appariement est donné par les branches. On obtient $2n$ points sur un cercle, groupés en n paires, chaque paire ayant une couleur ou une lettre.

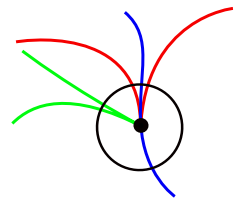
Je peux maintenant énoncer un théorème qui sera plus ou moins notre destination finale, comme un phare indiquant une direction.

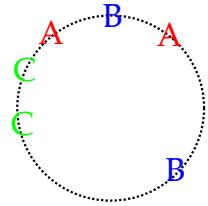
Théorème. *Il n'existe pas de singularité d'une courbe algébrique réelle dans le plan constituée de cinq branches* A, B, C, D *et* E *qui coupent un petit cercle comme dans la figure dans la marge.*

Une courbe lisse.

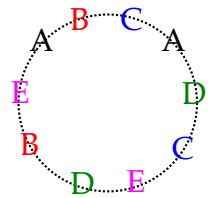

Un point de rebroussement.


Un petit cercle coupe la courbe en deux points.


Une courbe à trois branches.



Le mot cyclique associé ABACCB.



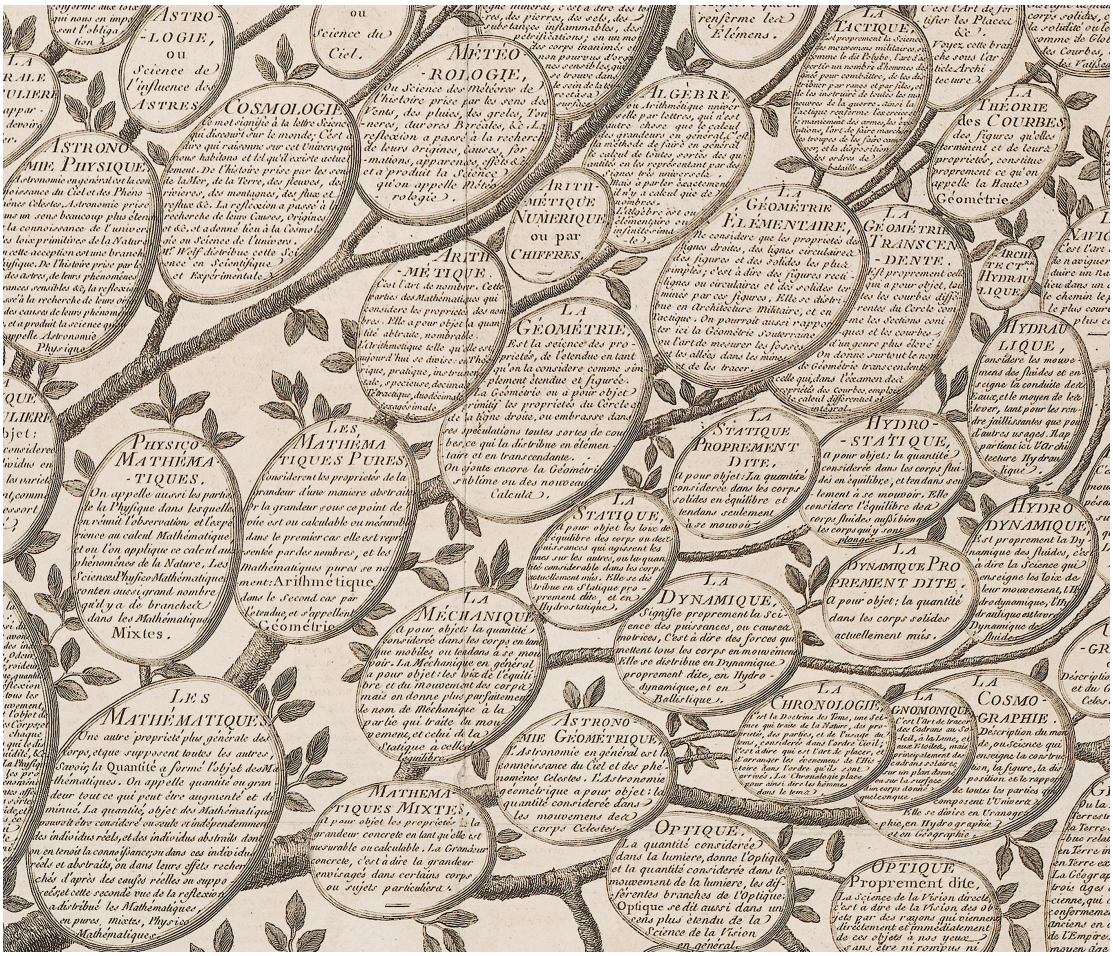
Cinq branches impossibles.

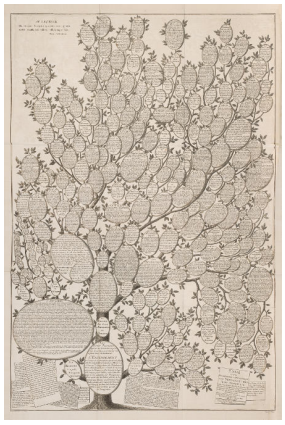
En fait, je vais démontrer un théorème beaucoup plus précis qui donne une description complète de toutes les configurations topologiques possibles des branches d'une courbe analytique.

J'ai écrit ce « petit livre » en pensant à un lecteur spécifique : moi-même, lorsque j'étais étudiant... Pour être très précis, j'ai limité les prérequis à mon propre parcours lorsque j'ai passé l'agrégation, il y a exactement quarante ans ! Je me souviens très bien que j'avais (et j'ai toujours) de grandes difficultés à lire de longs traités mathématiques, pleins de détails techniques, et que je préférais regarder des images. J'ai maintenant appris que la précision et les détails sont souvent nécessaires en mathématiques, mais j'aime toujours autant les promenades. J'ai essayé d'imaginer quelles auraient pu être mes propres réactions face à ce livre, en tant que débutant. Cette « conversation » entre les deux « versions de moi-même » a été intéressante et m'a rappelé la nouvelle *El Otro* de Borges. S'agit-il d'un rêve ? D'une reconstruction du passé ?

Une mise en garde s'impose : il ne s'agit pas d'un manuel avec une structure définition-théorème-démonstration. Vous devez être prêt à vous perdre de temps en temps, comme dans de nombreuses promenades. Je sais que vous me reprocherez l'absence de définitions précises, et vous devrez en effet accepter des définitions à moitié cuites... Bien sûr, les manuels sont nécessaires et je fournis de nombreuses références dans les marges. Je suis convaincu cependant que les idées et les exemples mathématiques précèdent les démonstrations formelles et les définitions. Comme l'a dit d'Alembert : « Allez de l'avant, et la foi vous viendra. » Vous verrez peut-être de temps en temps un beau panorama émerger de la brume, comme celui du frontispice de cet essai, par Caspar David Friedrich (*Der Wanderer über dem Nebelmeer*, 1818) : une représentation du monde mathématique ?

J'espère que certains étudiants motivés d'aujourd'hui apprécieront certains de ces panoramas. Nous pouvons maintenant embarquer pour notre voyage.



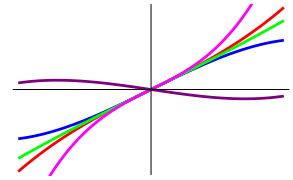


Un détail de l'*Essai d'une distribution généalogique des sciences et des arts principaux* (Chrétien Fréderic Guillaume Roth, 1769). Elle figurait en frontispice de la célèbre Encyclopédie de Diderot et d'Alembert. Les « mathématiques » sont situées dans le coin inférieur gauche et la « théorie des courbes » dans le coin supérieur droit. Le savoir humain est-il organisé comme un arbre ?

Feuille de route

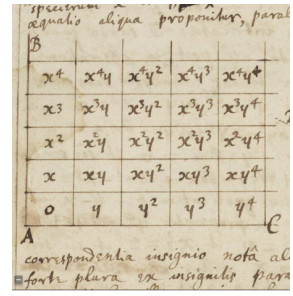
Étant donné que nous ne suivrons certainement pas un itinéraire direct, et que vous devez être prêt à faire quelques détours facultatifs, un aperçu de notre itinéraire pourrait être utile, comme dans la présentation promotionnelle d'un forfait touristique par un voyagiste.

Les quatre premiers chapitres traitent des positions relatives des graphes d'une famille de polynômes réels $P_1, ..., P_n$, dans l'esprit du théorème de Kontsevitch que j'ai mentionné dans la préface. En comparant les valeurs de $P_i(x)$ pour de petites valeurs négatives et de petites valeurs positives de x, on obtient une permutation de $\{1, ..., n\}$ qui décrit l'image locale dans le voisinage de 0. Je donnerai une caractérisation assez précise de ces permutations. Il s'avère qu'elles ont déjà été considérées sous une autre forme par les spécialistes de combinatoire, sous le nom de « permutations séparables ». Nous examinons ensuite les piles « pousse et saute », telles qu'elles ont été présentées par Donald Knuth dans *The Art of Computer Programming*. Nous comptons également le nombre de permutations séparables, et ce sera l'occasion de découvrir que ces nombres ont déjà été considérés par Hipparque, il y a plus de deux millénaires.



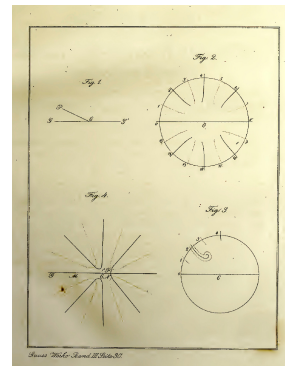
Une permutation définie par 5 polynômes.

Nous essayons ensuite de généraliser le problème des graphes de polynômes aux courbes planes, implicitement définies par une équation polynomiale réelle $F(x, y) = 0$. Ceci nécessite la compréhension de la topologie d'une courbe algébrique (ou analytique) dans le voisinage d'un point singulier. Les premiers résultats importants sont dus à Newton en 1669, dans un article extraordinaire intitulé *Tractatus de methodis serierum et fluxionum*, que nous étudions en deux chapitres. Cet article contient une présentation détaillée de la célèbre méthode de Newton pour trouver des approximations des racines des polynômes. Il



Extrait du *De methodis* de Newton. ©

introduit également l'idée connexe des polygones de Newton. À proprement parler, Newton n'a pas fourni de démonstrations, mais il a compris qu'une courbe analytique consiste localement en un nombre fini de branches, qui sont des « graphes » de séries entières formelles avec des exposants rationnels. Un chapitre supplémentaire, appelé algèbre formelle, explique les résultats de Newton en termes modernes et propose des démonstrations.



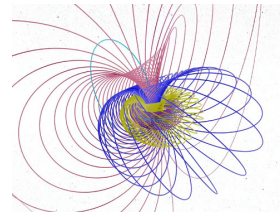
Extrait de la thèse de doctorat de Gauss. ©

Jusqu'à ce point, la discussion sera purement algébrique. Nous passerons ensuite en revue la première démonstration par Gauss du théorème fondamental de l'algèbre dans sa thèse de doctorat en 1799. Elle utilise des arguments de nature topologique qui étaient révolutionnaires à l'époque. Cette démonstration est basée sur l'affirmation non démontrée qu'une courbe algébrique entrant dans un disque doit en sortir. La démonstration de cette affirmation est plus subtile qu'on ne pourrait l'imaginer et deux mathématiciens qui partagent le même nom n'ont pas pu la démontrer au XIXe siècle.

Euler, Cauchy et Poincaré étaient de grands maîtres dans la manipulation des séries. Deux chapitres sont consacrés à leurs découvertes. À la fin du second, en utilisant le « calcul des limites » de Cauchy, nous obtenons enfin la démonstration de la convergence des séries de Newton. Cela nous permet de montrer qu'un petit cercle autour d'une singularité d'une courbe analytique réelle plane coupe la courbe en un nombre pair de points et définit un diagramme de cordes, c'est-à-dire $2n$ points ordonnés cycliquement sur un cercle et groupés par paires.

Un disque éclaté trois fois. ©

Les trois chapitres suivants concernent la topologie des singularités des courbes analytiques planes. Nous expliquons la méthode d'éclatement, une sorte de microscope qui nous permet de regarder profondément dans la singularité. Topologiquement, cela introduit un ruban de Möbius ou des colliers de Möbius si le microscope est utilisé plusieurs fois. L'opération d'éclatement sera un outil puissant dans la résolution des singularités.



Fibres de Hopf. ©

Les images locales pour les courbes planes complexes sont magnifiques et méritent d'être vues. Comme $\mathbb{C}^2$ a une dimension réelle égale à 4, nous coupons la courbe avec de petites sphères de dimension 3 autour de la singularité. De ce point de vue,

même les droites produisent des objets remarquables comme la fibration de Hopf.

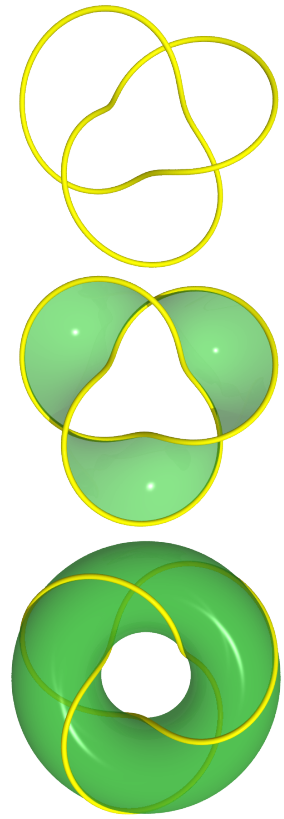
Des singularités plus compliquées, comme par exemple le point de rebroussement $x^3 - y^2 = 0$, sont décrites par des nœuds et des entrelacs. Afin de comprendre le cas général, nous rendons visite à Victor Puiseux, qui a proposé en 1850 une approche complètement nouvelle des séries de Newton. En 1968, Jack Milnor a utilisé ces idées pour donner une image topologique complète, mais toujours sur les nombres complexes.

Nous découvrons d'ailleurs un lien entre les permutations séparables et l'associaèdre. Il s'agit d'une famille de polytopes convexes introduite par Tamari et Stasheff afin de comprendre la signification de « l'associativité à homotopie près ». En utilisant ses polytopes, Jim Stasheff a pu caractériser les espaces ayant le même type d'homotopie que les groupes topologiques. Il s'est avéré que c'était le point de départ de la théorie des opérades, qui joue un rôle fondamental dans la théorie moderne de l'homotopie et la topologie algébrique. Les opérades sont des structures algébriques très générales et parfaitement adaptées à notre situation. Des exemples typiques sont donnés par les arbres, les tresses, les espaces de configuration, etc. Nous verrons que la collection de toutes les singularités, à homéomorphismes près, peut être considérée comme une opérade singulière, ce qui permet de mieux comprendre l'image globale.

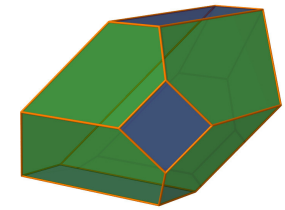
Pour le plaisir, nous examinons une courte note de Gauss sur les lacets dans le plan avec des points doubles ordinaires. Quand on fait le tour du lacet, chaque point double est visité deux fois, ce qui définit un certain diagramme de cordes. Peut-on caractériser ce type de diagramme ?

Nous atteignons finalement notre vague objectif : la caractérisation complète, en deux chapitres, des diagrammes de cordes associés aux singularités des courbes planes analytiques réelles.

Deux chapitres supplémentaires concluent le livre. L'un sur l'approche de Gauss de l'enlacement et un dernier, sans démonstration, sur l'invariant universel de Kontsevitch pour les nœuds. L'objectif principal de ce dernier chapitre est d'encourager le lecteur à poursuivre l'exploration.

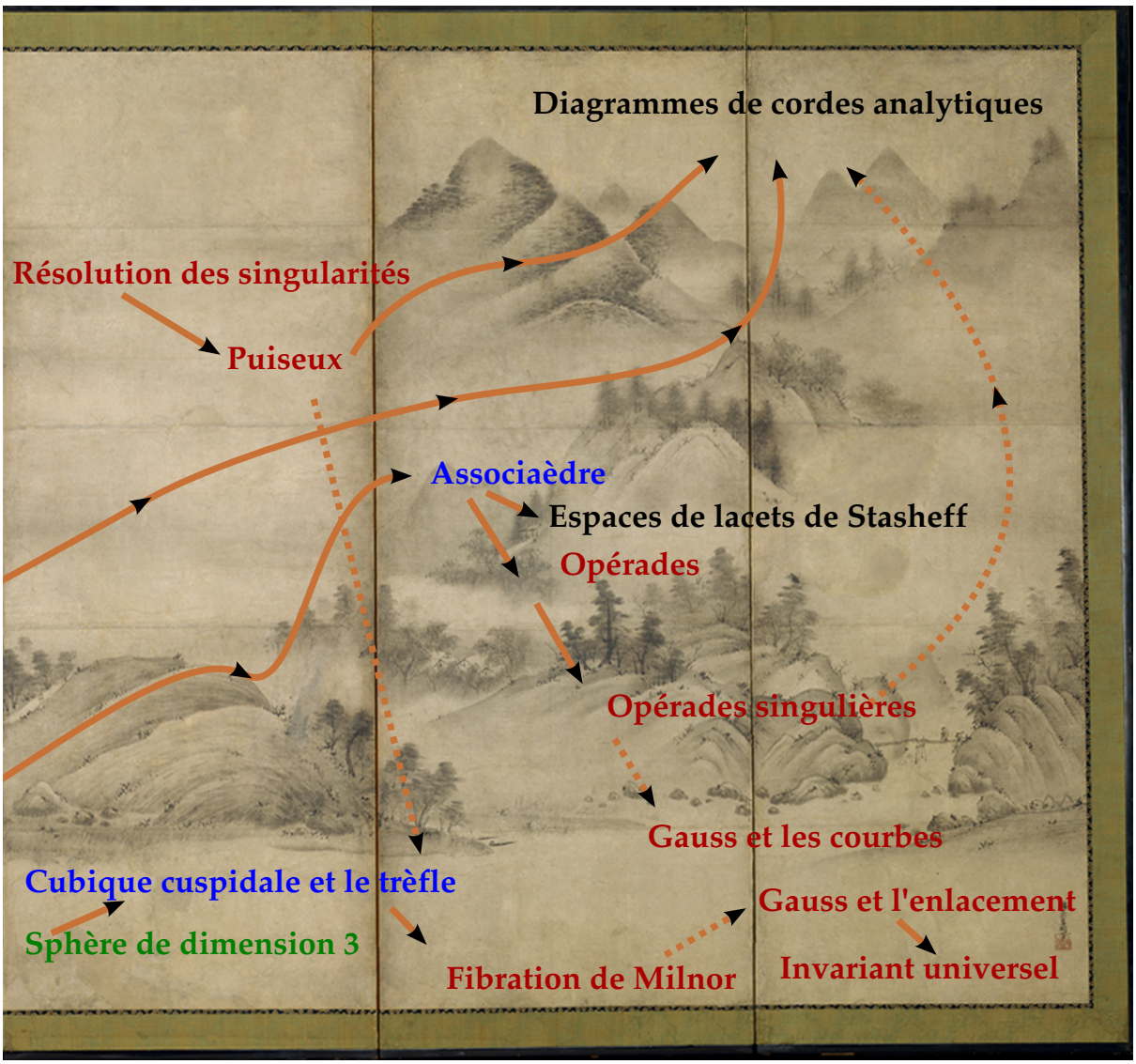


Le nœud de trèfle. ©

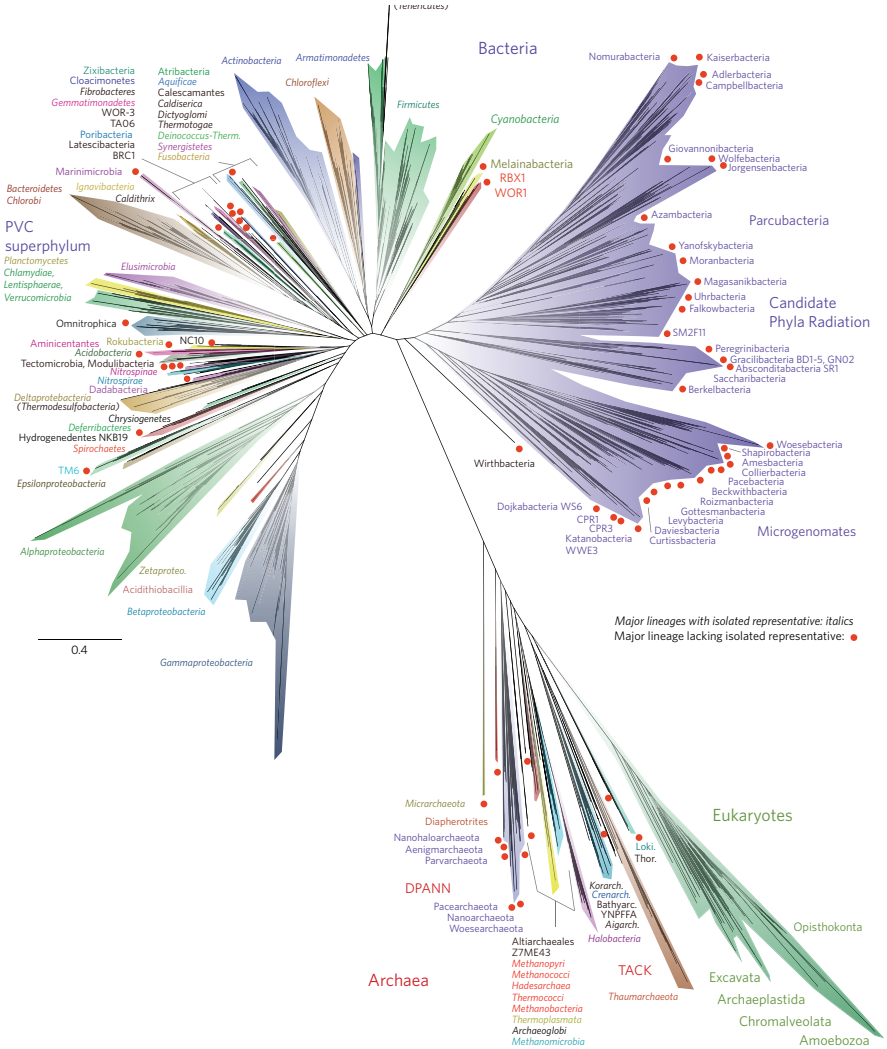


L'associaèdre. ©

Les couleurs (vert, bleu, rouge et noir) donnent une idée très subjective de la difficulté.



Paysage des quatre saisons (*Huit vues des rivières Xiao et Xiang*), par Sōami, début du XVIe siècle. ©

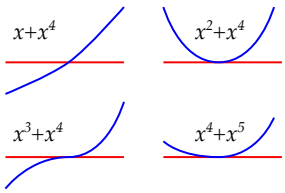


Extrait de « *A new view of the tree of life* », *Nature Microbiology* 1 (2016).
Ces branches peuvent-elles être des graphes de polynômes ?

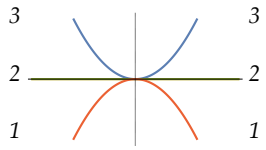
©

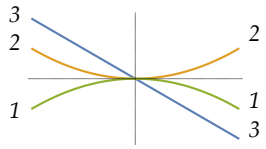
Intersections de polynômes

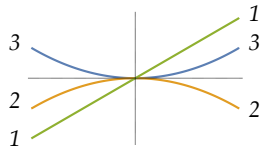
Maxim Kontsevitch

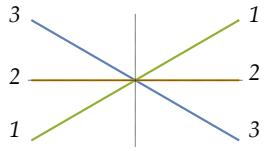


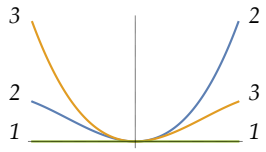
Échanges polynomiaux











Avant de démontrer le théorème de Kontsevitch, je commencerai par une observation beaucoup plus élémentaire. Considérons la position du graphe d'un polynôme réel non nul $P(x)$ par rapport à l'axe des x, dans le voisinage de 0.

Il y a deux possibilités. Soit le graphe de P traverse l'axe des x en 0, soit il reste du même côté. Pour distinguer ces deux cas, j'introduis la définition suivante.

Définition. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ un polynôme (ou une série formelle). La *valuation* $v(P)$ de P (en 0) est le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, la valuation du polynôme nul est ∞.

Il est clair que le graphe de P croise l'axe des x en 0 si et seulement si la valuation $v(P)$ est un entier impair.

Si l'on se donne *deux* polynômes distincts P_1 et P_2, le signe de $P_1(x) - P_2(x)$ change en 0 si et seulement si $v(P_1 - P_2)$ est impair.

Supposons maintenant que nous ayons *trois* polynômes P_1, P_2 et P_3. Considérons les configurations possibles dans le voisinage de l'origine. Les six figures dans la marge montrent que les six permutations de $\{1,2,3\}$ peuvent se produire si nous choisissons convenablement les polynômes.

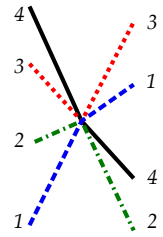
Par exemple :

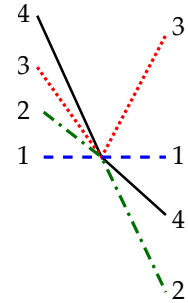
$$\begin{array}{lll}
P_1(x) = -x^2, & P_2(x) = 0, & P_3(x) = x^2, \\
P_1(x) = -x^2, & P_2(x) = x^2, & P_3(x) = -x, \\
P_1(x) = x, & P_2(x) = -x^2, & P_3(x) = x^2, \\
P_1(x) = -x^2 + x^3, & P_2(x) = -x^2 - x^3, & P_3(x) = 0, \\
P_1(x) = x, & P_2(x) = 0, & P_3(x) = -x, \\
P_1(x) = 0, & P_2(x) = x^2 + x^3, & P_3(x) = x^2 - x^3.
\end{array}$$

Le phénomène de Kontsevitch commence donc avec *quatre* polynômes.

Notons que toutes les figures précédentes ont pu suggérer que je supposais $P_i(0) = 0$ mais ce n'est pas nécessaire. Ceci est seulement dû au fait que ce livre traite principalement des propriétés locales, dans le voisinage d'un seul point $(0,0)$.

Les polynômes $x^2P_1(x), \dots, x^2P_n(x)$ sont ordonnés comme $P_1(x), \dots, P_n(x)$ et ils sont tous nuls en $x = 0$.





Nous pouvons maintenant démontrer le théorème du ticket de métro mentionné dans la préface.

Par l'absurde, supposons qu'il existe quatre polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 tels que

— $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ pour tout $x < 0$ petit,

— $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$ pour tout $x > 0$ petit.

En remplaçant P_i par $P_i - P_1$, on peut supposer que $P_1 = 0$.

Puisque P_2 et P_4 changent de signe à l'origine, leurs valuations $v(P_2)$ et $v(P_4)$ sont impaires. Puisque P_3 ne change pas de signe, sa valuation $v(P_3)$ est paire.

De $0 < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ pour $x < 0$ petit, on déduit que $v(P_2) \geqslant v(P_3) \geqslant v(P_4)$. De même, de $|P_4(x)| < |P_2(x)|$ pour $x > 0$ petit, on déduit que $v(P_4) \geqslant v(P_2)$.

Cela obligerait les trois valuations à être égales, mais deux d'entre elles sont impaires et la troisième est paire !

Contradiction. ⊡

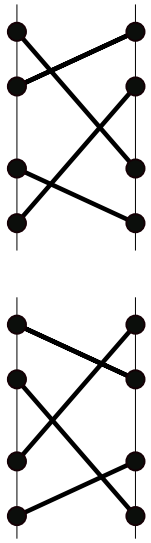
J'utilise le symbole ⊡ à la fin d'une démonstration. Mon lecteur perspicace devinera-t-il pourquoi j'ai mis un · dans un □ ?

Notons que la même démonstration s'applique aux fonctions analytiques réelles mais ne s'applique pas aux fonctions lisses. En effet, mon lecteur trouvera facilement quatre fonctions P_i de classe C^∞ qui se croisent à l'origine selon la permutation « interdite ».

Pourquoi ?

En changeant d'orientation le long de l'axe des x, nous voyons que la permutation inverse est également interdite. À titre d'exercice, je recommande de montrer que les 22 permutations restantes de $\{1,2,3,4\}$ se produisent pour des choix appropriés des P_i ($i = 1,2,3,4$).

Essayons maintenant d'analyser la situation avec un nombre quelconque de polynômes.



Les permutations interdites.

Définition. Soit $n \geqslant 2$ un entier quelconque et π une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$. Nous disons que π est un *échange polynomial* s'il existe n polynômes $P_1,\ldots,P_n$ tels que

— $P_1(x) < P_2(x) < \ldots < P_n(x)$ pour tout $x < 0$ et petit,

— $P_{\pi(1)}(x) < P_{\pi(2)}(x) < \ldots < P_{\pi(n)}(x)$ pour tout $x > 0$ et petit.

Notre objectif est de donner une description assez précise des échanges polynomiaux.

Permutations séparables

Définition. Soit $n \geqslant 2$ un entier quelconque et π une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$. On dit que π est *séparable* si elle ne « contient » pas l'une des deux permutations interdites, c'est-à-dire s'il n'existe pas quatre indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant n$ tels que $\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3)$ ou $\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2)$.

La raison de la terminologie « séparable » apparaîtra clairement dans le chapitre suivant.

En d'autres termes, une permutation est séparable si elle ne contient pas l'une des deux permutations de Kontsevitch sur quatre lettres. Il devrait être clair qu'un échange polynomial est nécessairement séparable. Dans cette section, nous démontrons la réciproque.

Commençons par un lemme qui semble faire partie du « folklore » de la littérature en combinatoire [1].

1. Bose (P.), Buss (J. F.) et Lubiw (A.), Pattern matching for permutations, *Inform. Process. Lett.*, n° 65(5), 1998, p. 277-283.

Lemme. *Soit π une permutation séparable de $\{1,2,\ldots,n\}$ (avec $n \geqslant 3$). Il existe alors un intervalle* propre $I = \{k, k+1, \ldots, k+l\}$ *(avec $1 \leqslant k \leqslant k+l \leqslant n$) de longueur $l+1 \geqslant 2$ dont l'image par π est un intervalle.*

Nous pouvons supposer que $\pi(1) < \pi(2)$ car sinon nous

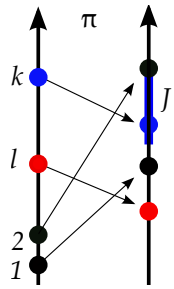
pourrions remplacer π par la permutation « inverse » $\overline{\pi}(k) = n+1-\pi(k)$.

Observons que si π est un échange polynomial, $\overline{\pi}$ l'est aussi (on multiplie tous les polynômes par $-x$). De même, étant donné la définition des permutations séparables, π et $\overline{\pi}$ sont simultanément séparables.

Si $\pi(2) = \pi(1)+1$, nous avons terminé puisque l'image de $\{1,2\}$ est l'intervalle $\{\pi(1),\pi(2)\}$. On suppose donc que $\pi(2) > \pi(1)+1$. Considérons le plus petit entier k tel que $\pi(\{2,\dots,k\})$ contienne l'intervalle J entre $\pi(1)+1$ et $\pi(2)$. Observons que $\pi(k)$ est dans J de sorte que $\pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$.

Si l'image $\pi(\{2,\dots,k\})$ est exactement égale à l'intervalle J, nous avons trouvé un intervalle non trivial dont l'image par π est un intervalle.

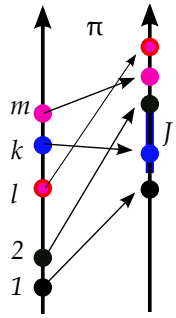
Sinon, choisissons un élément l entre 2 et k dont l'image par π est « hors » de J. On a $\pi(l) < \pi(1)$ ou $\pi(l) > \pi(2)$.



Si $\pi(l) < \pi(1)$, les quatre éléments $1,2,l,k$ satisfont $1 < 2 < l < k$ et $\pi(l) < \pi(1) < \pi(k) < \pi(2)$. Ils sont donc ordonnés comme une « permutation interdite », ce qui est impossible, par définition d'une permutation séparable.

Nous pouvons donc supposer que tous les éléments de $\pi(\{2,\dots,k\})$ sont supérieurs ou égaux à $\pi(1)$.

Nous pouvons également supposer que $\pi(\{2,\dots,k\})$ n'est pas un intervalle, car sinon nous aurions terminé. Il y a donc au moins un « trou » dans $\pi(\{2,\dots,k\})$, qui doit être plus grand que $\pi(2)$. Il existe donc m tel que $k < m$ et l tel que $2 < l < k$ et $\pi(m) < \pi(l)$. Les quatre éléments $2,l,k,m$ sont tels que $2 < l < k < m$ et $\pi(k) < \pi(2) < \pi(m) < \pi(l)$ de sorte qu'ils sont ordonnés comme l'autre « permutation interdite », ce qui est impossible.



Le lemme est démontré. ⊡

Il est facile d'améliorer le lemme :

Lemme. *Soit π une permutation séparable de $\{1,2,\dots,n\}$. Il existe alors deux entiers consécutifs dont les images sont consécutives.*

La démonstration est évidente par récurrence puisque tout intervalle propre dont l'image est un intervalle définit une autre permutation séparable avec une plus petite valeur de n, qui contient donc deux éléments consécutifs avec des images consécutives. ⊡

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de ce chapitre. Le contre-exemple de Kontsevitch est en quelque

sorte le seul.

Théorème. *Une permutation est un échange polynomial si et seulement si elle est séparable.*

Nous avons déjà remarqué que les échanges polynomiaux sont séparables : c'est l'observation de Kontsevitch.

Toujours par récurrence sur n, nous montrons que toute permutation séparable est un échange polynomial. Soit π une permutation séparable de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Nous savons qu'il existe deux entiers consécutifs i et $i+1$ avec des images consécutives $\pi(i)$ et $\pi(i+1)$.

Si $\{i, i+1\}$ et $\{\pi(i), \pi(i+1)\}$ sont « identifiés » en des points uniques, nous produisons une permutation π' sur $n-1$ objets qui est manifestement séparable et donc un échange polynomial par hypothèse de récurrence. Donc il existe $n-1$ polynômes

$$P_1, \ldots, P_{n-1}$$

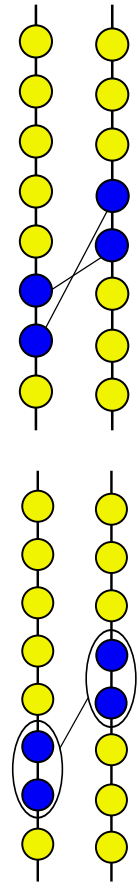
qui se coupent à l'origine selon π'. Il ne reste plus qu'à décomposer le i-ième polynôme P_i pour obtenir n polynômes

$$P_1, \ldots, P_{i-1}, P'_i, P''_i, P_{i+1}, \ldots, P_{n-1}$$

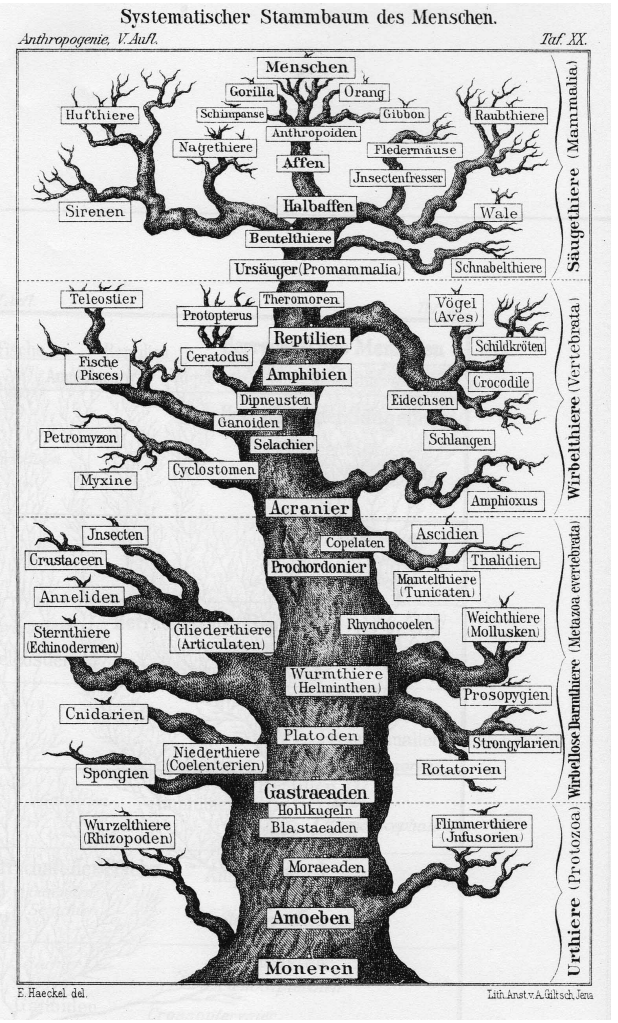
qui se coupent selon π. Il suffit de poser

$$P'_i(x) = P_i(x), \qquad P''_i(x) = P_i(x) + (-x)^N$$

pour une valeur suffisamment grande de N, paire ou impaire, selon que $\pi(i+1) > \pi(i)$ ou $\pi(i+1) < \pi(i)$. ⊡

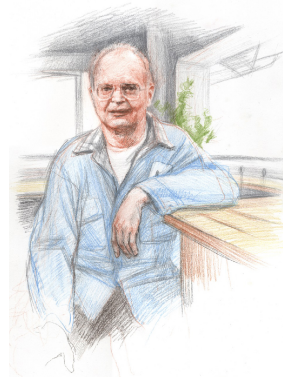


Maintenant que nous avons identifié les échanges polynomiaux, notre prochaine tâche est de comprendre la structure de ces permutations séparables.



L'arbre de la vie d'Ernst Haeckel (1903).
L'homme au sommet de l'arbre de la vie ? ©

Motifs et permutations
Donald Knuth

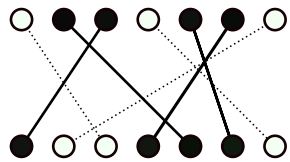


Donald Knuth. ©

Permutations

S'ils ont reçu une formation mathématique comme moi, beaucoup de mes lecteurs ont pu ressentir un certain malaise dans le chapitre précédent. Après tout, les permutations sont généralement définies comme des bijections d'un ensemble vers lui-même et leur raison d'être est qu'elles constituent un groupe. Au lieu de cela, nous avons manipulé les permutations d'une manière étrange lorsque nous avons utilisé l'expression « la permutation π contient l'une des deux permutations interdites de Kontsevitch » pour signifier qu'il y a quatre indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant n$ tels que

$$\pi(i_2) < \pi(i_4) < \pi(i_1) < \pi(i_3) \text{ ou}$$
$$\pi(i_3) < \pi(i_1) < \pi(i_4) < \pi(i_2).$$



Cela ne signifie certainement pas que l'ensemble $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ soit invariant par π. Nous ne prenons pas la restriction à un sous-ensemble invariant.

Nous allons utiliser le mot « permutation » d'un point de vue légèrement différent, plus proche de l'informatique. Cette approche est en grande partie due à Donald Knuth dans son grand livre *The Art of Computer Programming* [2]. L'ouvrage plus récent [3] est une bonne source d'information et montre que ce domaine est actuellement en plein essor.

Considérons un ensemble fini E muni de deux ordres totaux $\ll$ et $\lll$. Ordonnons ses éléments en utilisant le premier ordre

$$x_1 \ll x_2 \ll \ldots \ll x_n.$$

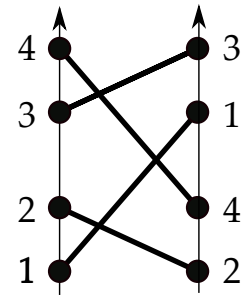
2. Knuth (D. E.), *The Art of Computer Programming, Vol. 1: Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, 1969.

3. Kitaev (S.), *Patterns in Permutations and Words*, Springer, 2011.

Regardons maintenant comment ils sont ordonnés selon $\lll$. Cela définit une permutation π de $\{1,2,\dots,n\}$ telle que

$$x_{\pi(1)} \lll x_{\pi(2)} \lll \dots \lll x_{\pi(n)}.$$

Nous adopterons ce point de vue : une permutation est une comparaison entre deux ordres totaux. Par exemple, l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ peut être muni des ordres $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4$ et $2 \lll 4 \lll 1 \lll 3$; nous noterons $(2,4,1,3)$ la permutation associée.



Attention. Dans cette figure, on a $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4$, $2 \lll 4 \lll 1 \lll 3$ et $(\pi(1),\pi(2),\pi(3),\pi(4)) = (2,4,1,3)$, de sorte que π est en fait l'*inverse* de la permutation que vous voyez en suivant les arêtes, des points de gauche vers les points de droite.

Tout ensemble fini de polynômes réels $\{P_i(x)\}$ peut être ordonné d'au moins deux façons : en comparant les valeurs de $P_i(x)$ pour de petites valeurs négatives ou pour de petites valeurs positives de x. Cela conduit à des échanges polynomiaux. Nous pouvons certainement *restreindre* les ordres à des sous-ensembles, ce qui définit le concept de contenu pour les permutations.

Définition. Soit π la permutation de $\{1,\dots,n\}$ associée à deux ordres totaux $\ll$ et $\lll$ sur un ensemble E à n éléments. Soit $F \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Les restrictions de $\ll$ et $\lll$ à F définissent une permutation $\sigma : \{1,\dots,p\} \to \{1,\dots,p\}$. Nous dirons que σ est *contenue* dans π et nous écrirons $\sigma \preceq \pi$.

Par exemple, toute permutation différente de l'identité contient $(2,1)$.

Notons Σ_n l'ensemble (non considéré comme un groupe) des permutations de $\{1,\dots,n\}$ et Σ_∞ la réunion disjointe des Σ_n, pour $n \geqslant 1$. Cela définit un ordre partiel $\preceq$ sur Σ_∞. La compréhension de cet ordre s'appelle la *reconnaissance de motifs*, car on dit également que *σ est un motif dans π* si $\sigma \preceq \pi$.

Le site web *Database of Permutation Pattern Avoidance* contient un grand nombre d'exemples.

Un sous-ensemble $\mathscr{C} \subset \Sigma_\infty$ est appelé une *classe de permutation* si $\pi \in \mathscr{C}$ et $\sigma \preceq \pi$ implique $\sigma \in \mathscr{C}$. Pour une telle classe de permutations, nous pouvons considérer sa *base* $\mathscr{B}$ constituée des permutations π qui ne sont pas dans $\mathscr{C}$ mais telles que tout $\sigma \preceq \pi$ différent de π est dans $\mathscr{C}$. Ainsi, une permutation π est dans $\mathscr{C}$ si et seulement si elle ne contient pas d'élément de $\mathscr{B}$. Je vais écrire $\mathscr{C} = \mathrm{Ev}(\mathscr{B})$ et dire que $\mathscr{C}$ est constitué de permutations qui *évitent* $\mathscr{B}$.

Essayez de démontrer le théorème d'Erdös-Szekeres : toute permutation $\pi \in \Sigma_n$ avec $n > (p-1)(q-1)$ contient $(1,2,3,\dots,p)$ ou $(q,q-1,\dots,2,1)$.

Par exemple l'ensemble $\mathrm{Ech} \subset \Sigma_\infty$ des échanges polynomiaux est évidemment une classe de permutation. Nous avons vu que sa base consiste en deux éléments : $(2,4,1,3)$ et $(3,1,4,2)$.

$\mathrm{Ev}((1,2,3))$ se compose des permutations qui peuvent être écrites comme la réunion de deux suites décroissantes.

Les questions suivantes sont typiques de la théorie. Étant donné une classe de permutation $\mathscr{C}$:

— peut-on déterminer sa base ? Quand est-elle finie ?

— peut-on compter le nombre d'éléments dans $\mathscr{C} \cap \Sigma_n$? Ou au moins, peut-on estimer ce nombre ?

— peut-on décider algorithmiquement si une permutation donnée π est dans $\mathscr{C}$? Quelle est la complexité d'un tel algorithme ?

Trouvez un exemple de classe de permutation avec une base infinie.

Nous répondrons à toutes ces questions en temps voulu pour la classe des échanges polynomiaux/permutations séparables.

Permutations triables par pile

La théorie des motifs de permutation a été fortement stimulée par un exercice du premier volume de *The Art of Computer Programming*. Donald Knuth a eu l'idée d'attribuer un degré de difficulté aux exercices de son livre. Un « 0 » signifie que le lecteur devrait pouvoir le résoudre instantanément. Un « 10 » demande une minute. Un « 20 » peut nécessiter plusieurs heures, etc. L'échelle est logarithmique et semble même avoir un pôle aux alentours de 50...

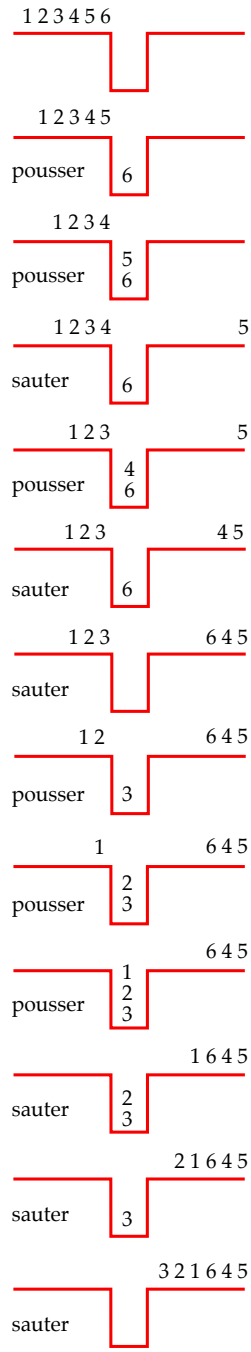
L'exercice dont je veux parler est intitulé [M28]. Le M signifie qu'il s'adresse à des lecteurs enclins aux mathématiques et le 28 est une indication du temps nécessaire pour le résoudre (dans l'échelle logarithmique expliquée précédemment). Aujourd'hui, ce n'est pas si difficile, mais il s'avère que cet exercice a eu une influence durable sur la combinatoire.

The Art of Computer Programming. ©

Décrivons une classe de permutations définie par une *pile*. Imaginons n objets étiquetés $1, 2, \ldots, n$, alignés sur une ligne horizontale, dans l'ordre suivant de gauche à droite : $1 \ll 2 \ll \ldots \ll n$. À droite de n, il y a une *pile*. Il s'agit d'une sorte de puits dans lequel les objets peuvent être empilés les uns sur les autres.

Au départ, la pile est vide. On sélectionne alors l'objet n et on le place dans la pile. Ensuite, deux possibilités s'offrent à nous. Soit nous *poussons* le dernier élément de la ligne au sommet de la pile. Soit nous faisons *sauter* l'élément supérieur de la pile vers la droite.

Regardons la figure dans la marge et l'évolution des objets selon cette suite : pousser, pousser, sauter, pousser, sauter, sauter, pousser, pousser, pousser, sauter, sauter, sauter. À la fin de l'opération, la suite $(1,2,3,4,5,6)$ a été transformée en $(3,2,1,6,4,5)$. Ceci peut être vu soit comme une permutation, soit comme deux ordres : $1 \ll 2 \ll 3 \ll 4 \ll 5 \ll 6$ (à gauche) et $3 \lll 2 \lll 1 \lll 6 \lll 4 \lll 5$ (à droite).



Définition. Une permutation π est *triable par pile* si elle est le résultat d'une suite de « pousser » et « sauter » appliquée à $\{1,2,\ldots,n\}$.

Voici l'exercice 5 du chapitre 11 de Knuth, de niveau [M28] :

Théorème. *Une permutation est triable par pile si et seulement si elle ne contient pas* $(2,3,1)$.

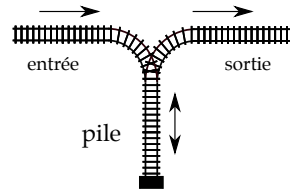
Résolvons cet exercice. Commençons par une permutation, par exemple $(3,2,1,6,4,5)$. Le dernier élément est 5. Si nous voulons trier cette permutation avec une pile, nous n'avons pas le choix : nous devons pousser tous les éléments de la liste $(1,2,3,4,5,6)$ jusqu'à ce que 5 soit disponible au sommet de la pile, afin de pouvoir le sortir et le mettre à sa place, à la fin de la liste de sortie. Ensuite, nous recherchons l'avant-dernier, c'est-à-dire 4, et nous continuons à pousser jusqu'à ce que 4 soit au sommet de la pile, etc. Ainsi, si nous voulons trier une permutation, il n'y a qu'une seule façon de le faire.

Il suffit de comprendre comment le tri peut mal se dérouler. Cela se produira précisément lorsqu'il sera temps de faire sauter un objet a qui est malheureusement déjà sur la pile mais pas sur le dessus, sous un objet $b \ll a$. Si b a déjà été poussé dans la pile, c'est parce que nous avons précédemment sorti un autre objet $c \ll b \ll a$.

Nous avons $a \lll c$ puisque c a déjà été éjecté et que nous essayons de faire sauter a. De même, nous avons $b \lll a$ puisque nous ne voulons pas faire sauter b mais a. Le sous-ensemble $\{c,b,a\}$ dans $\{1,2,\ldots,n\}$ donne donc lieu au contenu $(2,3,1) \preceq \pi$ comme nous devions le montrer. ⊡

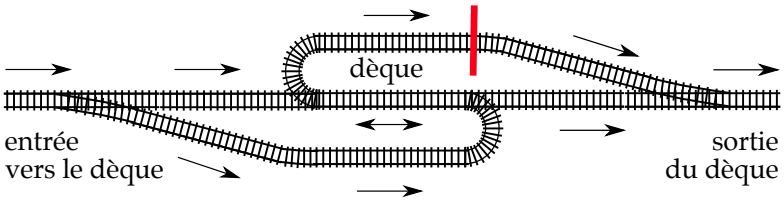
J'encourage vivement le lecteur à faire *tous* les exercices du livre de Knuth.

La voie ferrée dans la marge produit les permutations triables par pile. Un train composé de wagons $(1,2,\ldots,n)$ arrive par la gauche. Les wagons peuvent alors être désassemblés et chacun doit suivre les rails dans la direction indiquée par les flèches. Le train est à nouveau assemblé du côté de la sortie, à droite.



Cette voie ferrée simple produit des permutations triables par pile.

Knuth définit également des *deques* (de l'anglais *deck* et *queue*), appelés en français « dèques », « files d'attente à double extrémité » ou « files doubles ». Ils sont produits par la voie ferrée plus complexe illustrée ci-dessous.



Ceci est un *deck-queue* = un dèque.

Attention ! la difficulté de cette question pourrait être de l'ordre de 60 !

Quelles sont les permutations triables par dèque ?

Si la porte rouge est fermée, nous obtenons un dèque restreint en sortie. Les permutations associées sont exactement celles qui ne contiennent pas $(4,2,3,1)$ et $(4,1,3,2)$. Nous nous rapprochons de la caractérisation des échanges polynomiaux, qui évitent $(2,4,1,3)$ et $(3,1,4,2)$.

Pour en savoir plus sur ce domaine fascinant, je recommande le livre de Kitaev mentionné ci-dessus.

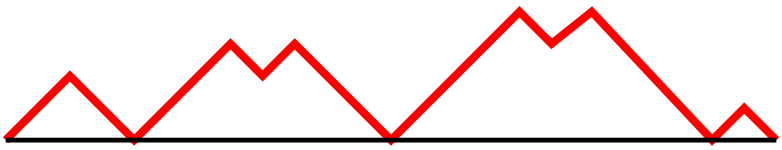
Catalan omniprésent

L'exercice 4 du même chapitre du livre de Knuth est classé [M34]. Il est cependant plus facile à résoudre quand on a déjà résolu l'exercice 5. Le problème est de compter les permutations triables par pile de longueur n. Il s'agit du fameux n-ième *nombre de Catalan* C_n, qui apparaît presque partout en mathématiques. Les premières valeurs sont : 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1 430, 4 862, 16 796, 58 786, 208 012, 742 900, 2 674 440, 9 694 845, 35 357 670... (A000108 dans l'*Encyclopédie en ligne des suites d'entiers*).

Eugène Catalan est né en 1814 à Bruges, qui faisait alors partie de l'Empire napoléonien.

Les permutations triables par pile sont décrites *de manière*

unique par une suite de $2n$ « pousser » et « sauter ». Inversement, une suite de « pousser » et « sauter » définit une permutation à la seule condition que nous ne soyons pas obligés de faire sauter une pile vide. Autrement dit, chaque segment initial de la suite doit contenir au moins autant de « pousser » que de « sauter ». Cela peut également être décrit en examinant l'évolution du nombre d'éléments dans la pile. La pile est vide aux instants 0 et $2n$, et évolue de +1 ou −1 pour chaque « pousser » et chaque « sauter ». C'est ce qu'on appelle un « mot de Dyck » de longueur $2n$. Voici un exemple de mot de Dyck de longueur 24.



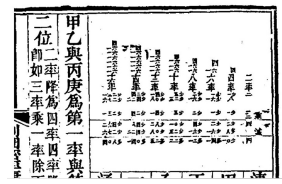
Le nombre de ces mots de Dyck est l'une des nombreuses définitions du n-ième nombre de Catalan. Alternativement, nous pourrions considérer « pousser » comme une parenthèse ouvrante « (» et « sauter » comme une parenthèse fermante «) ». La condition de ne jamais faire sauter une pile vide est maintenant équivalente au fait que la suite de parenthèses est correctement équilibrée. Cela signifie récursivement que chaque « (» ouverte est couplée avec une «) » fermée qui enferment ensemble une suite de parenthèses correctement équilibrée. Par exemple, pour $n = 3$, il existe $C_3 = 5$ suites :

$$(())(), \qquad ()(()), \qquad ((())), \qquad ()()(), \qquad (()()).$$

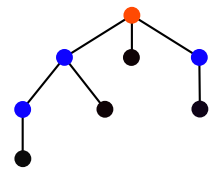
Il existe aussi une interprétation en termes d'*arbres planaires enracinés*. Une image vaut mille mots. Pour une raison étrange, les mathématiciens et les informaticiens ont tendance à dessiner les arbres à l'envers : la racine en haut, les feuilles en bas.

La figure dans la marge est un exemple d'arbre de ce type. Il a une racine, 3 nœuds internes et 4 feuilles. L'arbre est *planaire* car les fils de ses nœuds sont ordonnés de gauche à droite. De manière équivalente, nous dirons qu'un arbre est planaire si ses feuilles ont été totalement ordonnées de sorte que les descendants de n'importe quel nœud définissent un intervalle.

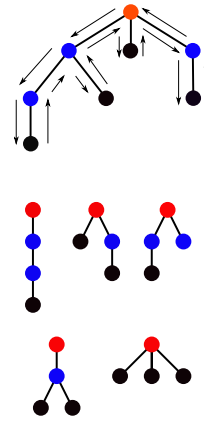
Walther von Dyck (1856-1934) a été « le premier à définir un groupe mathématique, au sens moderne du terme ». C'est du moins ce que l'on peut trouver dans *Wikipédia*. La question est beaucoup plus subtile et bien d'autres noms devraient être cités. Cependant, il a bien été l'un des premiers à manipuler des présentations de groupes avec des générateurs et des relations.



La première apparition des nombres de Catalan dans le livre de Mingantu, *Méthode rapide pour obtenir les divisions exactes d'un cercle*, vers 1730. ©



Un tel arbre définit un mot de Dyck. Il suffit de partir de la racine et de suivre l'arbre vers l'extérieur, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. À chaque étape, nous nous rapprochons de la racine : cela donne la suite de +1 et −1, ou « pousser » et « sauter ». Dans cet exemple, on obtient la suite $+++--+--+-++--$. Un mot de Dyck peut inversement être transformé en un arbre planaire enraciné.



5 arbres planaires enracinés avec 3 arêtes.

En somme, il y a des bijections entre

— les permutations triables par pile de n objets ;

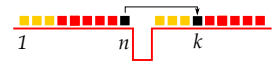
— les mots de Dyck de longueur $2n$;

— les parenthésages équilibrés avec $2n$ parenthèses (n ouvrantes et n fermantes) ;

— les arbres planaires enracinés à n arêtes.

Le cardinal de chacun de ces ensembles est le n-ième nombre de Catalan C_n.

Étant donné une permutation triable par pile, observons le dernier élément n de la liste d'objets (à gauche, en noir dans la figure) et sa position k après le processus de tri. La permutation fait correspondre l'intervalle (rouge) $\{k, \dots, n-1\}$ à $\{k+1, \dots, n\}$ et l'intervalle jaune $\{1, 2, \dots, k-1\}$ à lui-même. Par conséquent, il induit une permutation triable par pile sur ces deux intervalles. Nous obtenons ainsi la relation de récurrence

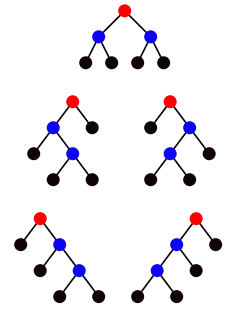


Examinez cette relation de récurrence en termes de mots de Dyck, de parenthésages et d'arbres planaires enracinés.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}.$$

C'est la signature caractéristique de Catalan : on la retrouve dans de nombreux contextes différents.

Par exemple, considérons les arbres planaires enracinés *binaires*. Leur définition dépend des auteurs, mais je les définirai comme des arbres planaires enracinés tels que chaque nœud ou n'a pas de fils ou a deux fils, l'un étant « à gauche » et l'autre « à droite ». Si un tel arbre a n nœuds internes, il a $n+2$ feuilles et $2n+2$ arêtes. Si nous enlevons sa racine, nous obtenons deux arbres planaires enracinés binaires. Inversement, nous pouvons ajouter une racine commune à deux arbres planaires enracinés binaires pour produire un arbre planaire enraciné binaire plus grand. Cela montre, après un moment de réflexion,

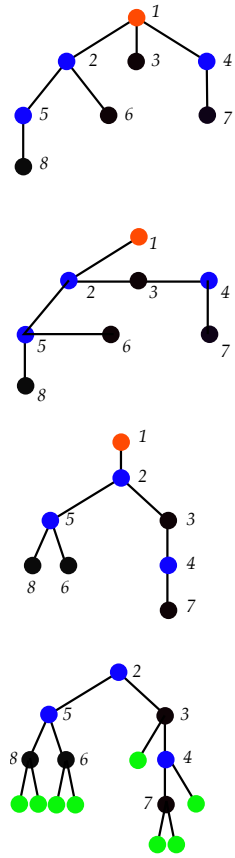


5 arbres planaires enracinés binaires à 4 feuilles.

que le nombre d'arbres planaires enracinés binaires avec $n+1$ feuilles satisfait la relation de récurrence de Catalan. On peut vérifier qu'il existe $1, 1, 2, 5$ arbres planaires enracinés binaires avec $1, 2, 3, 4$ feuilles, et on obtient donc par récurrence que C_n *est aussi le nombre d'arbres planaires enracinés binaires avec* $n+1$ *feuilles*.

Cela suggère qu'il devrait y avoir une certaine correspondance entre les arbres planaires enracinés et les arbres planaires enracinés binaires. C'est effectivement le cas.

Voici une légère variante de ce que l'on appelle la *transformation de Knuth* ou *représentation premier fils-frère suivant*. En partant d'un arbre planaire enraciné T avec n arêtes (première figure), nous construisons un arbre planaire enraciné binaire T_{bin} avec $n+1$ feuilles (dernière figure). Je construis d'abord un arbre auxiliaire T′ (deuxième et troisième figures). L'ensemble des nœuds de T′ est le même que l'ensemble des nœuds de T. La racine est la même. Chaque nœud v de T′ a au plus deux fils. Le premier est le fils le plus âgé de v dans T, s'il existe. Le second est le frère suivant de v dans T, c'est-à-dire l'aîné parmi les frères plus jeunes que v, s'il existe. Ensuite, je transforme T′ en un arbre planaire enraciné binaire T_{bin} de la manière suivante. Tout d'abord, je supprime la racine et l'arête qui en sort. La nouvelle racine de T_{bin} est le fils le plus âgé de la racine de T. Pour chaque nœud de T′, j'ajoute un fils à gauche si ce nœud n'a pas de fils dans T et un fils à droite si ce nœud n'a pas de frère plus jeune. Ainsi, si le nœud est une feuille de T′ (c'est-à-dire qu'il n'a pas de fils et pas de petit frère dans T), j'ajoute deux fils dans T_{bin} (voir les points verts dans la quatrième figure). Vérifier que cela donne une bijection entre les arbres planaires enracinés à n arêtes et les arbres planaires enracinés binaires à $n+1$ feuilles ([M15]).



Comme d'habitude en combinatoire, cette suite C_n est codée par sa *série génératrice* formelle

$$C(t) = \sum_{n \geqslant 0} C_n t^n$$

et la relation de récurrence devient $C(t) = tC^2(t) + 1$. Si l'on se souvient des équations du second degré du lycée, on obtient

$$C(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}.$$

Pourquoi ai-je choisi le signe – devant la racine carrée ?

Il découle de cette formule que le rayon de convergence de $C(t)$ est 1/4. Ainsi, par le théorème de Cauchy-Hadamard, on peut estimer la croissance de C_n :

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log C_n = \log 4.$$

Cette formule peut également être utilisée pour obtenir une expression explicite pour C_n. Il suffit d'utiliser la série du binôme de Newton :

$$\sqrt{1-4t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4t)^n.$$

En comparant les coefficients de t^n,

$$C_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n+1}(-4)^{n+1}.$$

Nous faisons maintenant un peu le ménage :

$$\begin{aligned} C_n &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{(n+1)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-1\right)\dots\left(\tfrac{1}{2}-n\right)(-1)^{n+1}2^{2(n+1)} = \cdots \\ &= \tfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

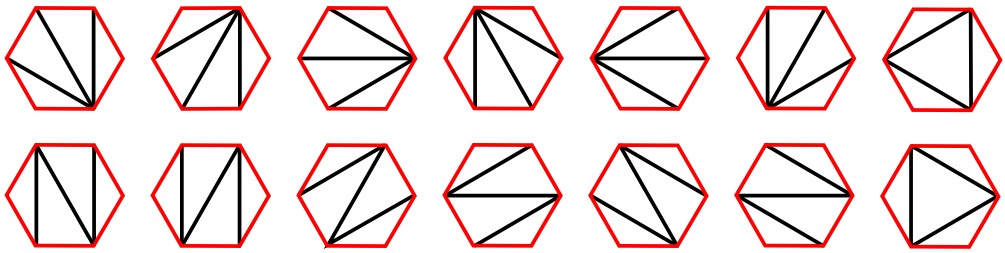
Les seconds « . . . » signifient que vous êtes encouragé à faire le calcul vous-même !

Les bibles dans le domaine des nombres de Catalan sont les livres de Stanley [4], [5]. Le site *Catalan Numbers*, géré par Igor Pak, est une remarquable source d'informations. Le livre de Flajolet et Sedgewick [6] offre une perspective plus large (voir en particulier le chapitre VI sur les arbres).

4. Stanley (R. P.), *Enumerative Combinatorics, Vol. I*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986.

5. Stanley (R. P.), *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015.

6. Sedgewick (R.) et Flajolet (P.), *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, 2e éd., Addison-Wesley, 2013.



Il y a $C_4 = 14$ façons de subdiviser un hexagone en triangles.

Un arbre planaire en Guadeloupe, communément appelé « arbre du voyageur ».

Permutations séparables

Des polynômes aux arbres

L'anneau des polynômes $K[x]$ à coefficients dans un corps K de caractéristique 0 est muni d'une valuation v, donnée par le degré du premier coefficient non nul, et d'une *distance ultramétrique* naturelle, définie en termes de v :

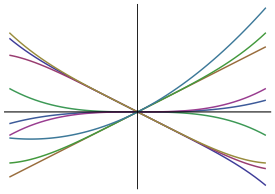
$$\mathrm{dist}(P,Q) = \exp(-v(P-Q)).$$

En clair, deux polynômes sont proches si leurs k premières dérivées en 0 coïncident pour une grande valeur de k. La propriété ultramétrique pour une distance signifie précisément que pour tout $\varepsilon > 0$ la relation

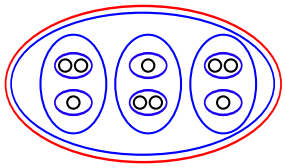
$$\mathrm{dist}(P,Q) < \varepsilon$$

est une relation d'équivalence. Lorsque ε diminue, ces relations d'équivalence deviennent plus fines et leur intersection est triviale.

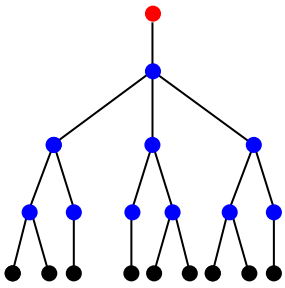
Considérons un ensemble fini E *de polynômes*. Définissons un arbre de la manière suivante. La racine est étiquetée avec l'ensemble E. Les fils de la racine sont étiquetés par les classes d'équivalence de la relation $v(P-Q) \geqslant 1$. Les petits-fils de la racine sont étiquetés par les classes d'équivalence de la relation $v(P-Q) \geqslant 2$. Et en général, la k-ième génération correspond aux classes d'équivalence de la relation $v(P-Q) \geqslant k$. Cet arbre est infini mais les classes d'équivalence se stabilisent en singletons lorsque k est grand. On peut donc procéder à un élagage afin d'obtenir un arbre fini dont les feuilles sont étiquetées par les



9 polynômes dont l'arbre associé est ci-dessous. Pouvez-vous proposer 9 équations ?



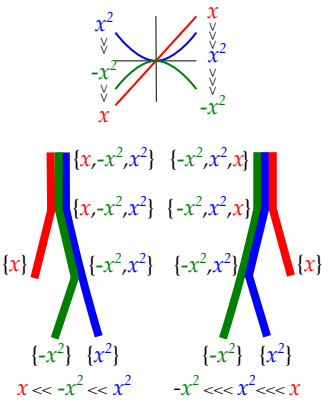
Relations d'équivalence emboîtées.



Arbre associé.

éléments de E. Inversement, la structure de valuation peut être récupérée à partir de l'arbre. Étant donné deux éléments P et Q de E, vus comme des feuilles, nous cherchons dans l'arbre leur ancêtre commun le plus proche. La valuation de P − Q est le *niveau* de cet ancêtre, défini comme la longueur du chemin qui le relie à la racine.

Supposons maintenant que K *soit le corps des nombres réels.* Comme nous l'avons déjà observé, tout ensemble fini de polynômes réels est muni de deux ordres totaux, qui comparent les valeurs pour les petits $x < 0$ et les petits $x > 0$. Tous deux fournissent un ordre sur l'ensemble des feuilles de l'arbre donné par la valuation. Notons que les descendants d'un nœud, c'est-à-dire une classe d'équivalence à un certain niveau, définissent un intervalle dans chacun de ces ordres. *Notre arbre est donc un arbre* planaire *de deux façons*.

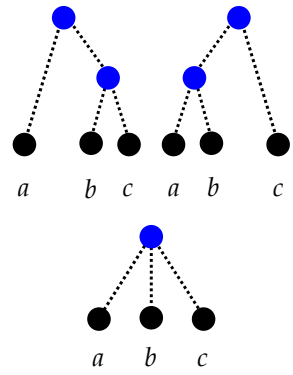


Les deux arbres planaires associés aux polynômes $\{x, -x^2, x^2\}$, en considérant les petites valeurs négatives ($\ll$ à gauche) et les petites valeurs positives ($\lll$ à droite) de x.

Par convention, *choisissons le premier ordre (c'est-à-dire pour les petits $x < 0$) et associons à notre ensemble* E *de polynômes l'arbre planaire correspondant*. La comparaison entre les deux ordres définit une permutation π que nous avons appelée *échange polynomial*.

L'ensemble des feuilles de *tout* arbre planaire enraciné est muni de deux ordres canoniques. Le premier, noté $\ll$, est simplement l'ordre donné par la définition de la planarité. Le second, noté $\lll$, est défini de la manière suivante. Étant donné deux feuilles a et b, on note $a \vee b$ leur ancêtre commun le plus proche. Alors $a \ll b$ et $a \lll b$ sont vrais simultanément si et seulement si le niveau de $a \vee b$ est pair. Il faut vérifier que cela définit bien un ordre $\lll$, autrement dit que $a \lll b \lll c \lll a$ n'est pas possible. On peut supposer que $a \ll b \ll c$ ou $c \ll b \ll a$ et le second cas se réduit au premier par symétrie. Si nous avions $a \lll b \lll c \lll a$, les niveaux de $a \vee b$ et $b \vee c$ devraient être pairs, et le niveau de $c \vee a$ devrait être impair. Les figures en marge montrent que ce n'est pas possible.

Si $P(x) < R(x) < Q(x)$ pour de petits $x > 0$ (ou pour de petits $x < 0$), alors $v(P - Q) \geqslant v(R - Q)$. Donc toutes les classes d'équivalence $v(P - Q) \geqslant k$ sont des intervalles dans les deux ordres : nos arbres sont en effet planaires.



Résumons :

— un ensemble fini de polynômes réels produit un arbre planaire enraciné ;

— un arbre planaire enraciné définit deux ordres dans son

ensemble de feuilles, et donc une permutation des feuilles ;

— la permutation associée à l'arbre planaire qui est associé à un ensemble fini de polynômes est simplement l'échange polynomial correspondant.

Nos arbres contiennent trop d'informations et nous allons élaguer leurs arêtes.

Tout d'abord, si un nœud interne n'a qu'une seule feuille parmi ses descendants, nous pouvons supprimer tous ses descendants sans changer la permutation (chemin vert dans la marge).

Supposons maintenant que deux nœuds internes P et Q soient reliés dans l'arbre par un chemin tel que tous les sommets entre P et Q soient non-ramifiés, c'est-à-dire qu'ils n'aient qu'un seul fils (chemins rouge et bleu). Si le nombre d'arêtes de ce chemin est pair, il suffit de le supprimer et d'identifier les deux extrémités comme un seul nœud. Si le nombre d'arêtes de ce chemin est impair, il suffit de le supprimer et de relier les deux extrémités par une seule arête. On obtient ainsi un nouvel arbre. Au cours de ce processus, les niveaux de certains nœuds ont changé, mais seulement d'un nombre pair. Par conséquent, si nous calculons la valuation dans le nouvel arbre, la parité n'a pas changé et cette parité est la seule information qui compte pour construire l'échange polynomial. Notons que l'arbre élagué a la propriété que tous ses nœuds internes ont au moins deux fils.

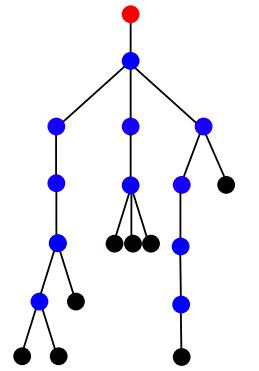
En résumé, étant donné n polynômes, nous avons construit un *arbre planaire enraciné* tel que :

— la racine peut avoir un nombre quelconque de fils ;

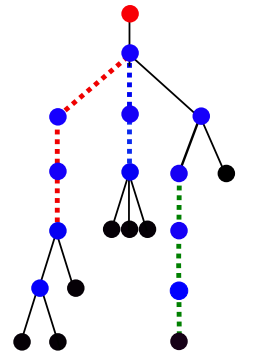
— chaque nœud interne a au moins deux fils ;

— il y a exactement n feuilles, étiquetées par les n polynômes.

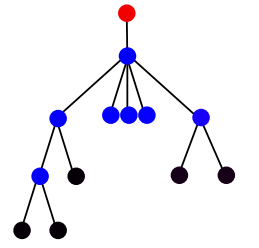
On dira qu'un arbre planaire est *élagué* s'il satisfait à ces propriétés. Il devrait être clair que pour tout arbre élagué, on peut trouver n polynômes tels que l'arbre élagué associé soit celui donné. Nous avons vu que pour tout ensemble fini de polynômes, l'échange polynomial associé peut être lu à partir de l'arbre. En particulier, le nombre d'échanges polynomiaux est inférieur ou égal au nombre d'arbres élagués.



Arbre avant l'élagage.



Suppression des arêtes.



Reconnexion.

D'une permutation à un arbre

Nous allons maintenant montrer que le nombre d'échanges polynomiaux est *égal* au nombre d'arbres élagués. Le problème est de démontrer que *deux arbres élagués différents produisent des permutations différentes*.

Soit T un arbre élagué avec des feuilles $1 \ll 2 \ll \ldots \ll n$, de gauche à droite, et soit π la permutation associée ($n \geqslant 2$).

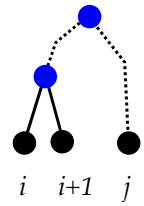
Lemme. *Les images par π de deux entiers consécutifs i et $i+1$ sont consécutives si et seulement si les feuilles correspondantes i et $i+1$ sont « frères », c'est-à-dire ont un parent commun.*

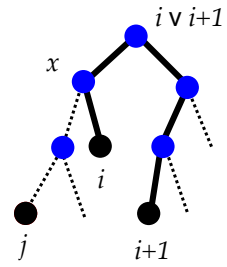
En effet, si i et $i+1$ ont un parent commun, on a $i \vee j = (i+1) \vee j$ pour tout $j \neq i, i+1$. Donc $i \lll j \lll i+1$ et $i+1 \lll j \lll i$ sont impossibles. Autrement dit, i et $i+1$ sont aussi consécutifs pour $\lll$.

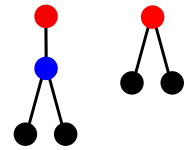
Inversement, supposons que $i \vee (i+1)$ ne soit pas un parent. Alors le chemin qui relie i et $i+1$ dans l'arbre a une longueur d'au moins 3 et contient donc un nœud interne x tel que les niveaux de x et $i \vee (i+1)$ soient différents. Choisissons une feuille j qui est un descendant de x différent de i et $i+1$ (qui existe puisque T est élagué). Donc j est entre i et $i+1$ pour l'ordre $\lll$. ⊡

Ceci donne une autre démonstration que tout échange polynomial contient au moins deux entiers consécutifs avec des images consécutives. Il suffit de considérer un nœud interne de plus haut niveau dans T : il a au moins deux fils qui doivent être des feuilles, et donc des frères.

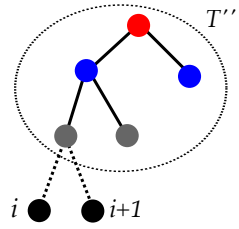
Nous pouvons maintenant démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, qu'il existe au plus un arbre élagué produisant une permutation donnée π. Ceci est bien sûr trivial pour $n = 2$. Si T_1 et T_2 ont n feuilles et définissent la même permutation π, le lemme précédent montre qu'il existe une paire de feuilles consécutives i et $i+1$ qui sont frères, pour T_1 et T_2. Supprimons la feuille $i+1$ de T_1 et T_2, ce qui produit les arbres T_1' et T_2' avec $n-1$ feuilles. Il est clair que T_1' et T_2' définissent la même permutation π' sur $n-1$ feuilles. Nous devons cependant faire attention au fait que T_1' ou T_2' peuvent ne pas être élagués. Cela se produit précisément lorsque i et $i+1$ sont les seuls fils d'un nœud interne de T_1 ou T_2. L'hypothèse

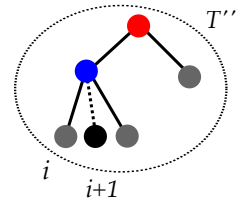






Les 2 arbres élagués à 2 feuilles, qui définissent la transposition et l'identité.





de récurrence montre que les arbres élagués T_1'' et T_2'' sont égaux à un certain T''. Nos arbres T_1 et T_2 sont obtenus à partir de T'' par l'une des deux opérations suivantes : ajouter deux fils à la i-ième feuille de T'', ou ajouter un frère à la i-ième feuille de T''. Par hypothèse, T_1 et T_2 produisent la même permutation de sorte que les parents de i et $i+1$ dans T_1 et T_2 ont des niveaux de même parité. Par conséquent, T_1 et T_2 sont obtenus à partir de T'' en effectuant la même opération. D'où $T_1 = T_2$, comme souhaité. ⊡

Par conséquent, le nombre d'échanges polynomiaux de taille n est égal au nombre d'arbres élagués ayant n feuilles.

D'un arbre élagué à un échange polynomial et à une permutation séparable

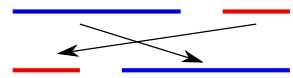
Cela nous amène à la définition originale des *permutations séparables*. Étant donné deux permutations π_1 et π_2 de n_1 et n_2 objets ordonnés, nous pouvons imaginer deux façons de produire une permutation de $n_1 + n_2$ objets. Numérotons les n_1 premiers objets $\{1, 2, \ldots, n_1\}$ et les n_2 suivants $\{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_1+n_2\}$. Notons $\pi_1 \oplus \pi_2$ la permutation définie par

$$\begin{aligned} \pi_1 \oplus \pi_2(k) &= \pi_1(k) && \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n_1, \\ &= n_1 + \pi_2(k - n_1) && \text{si } n_1 + 1 \leqslant k \leqslant n_1 + n_2. \end{aligned}$$

$\pi_1 \oplus \pi_2$.

Définissons alors

$$\begin{aligned} \pi_1 \ominus \pi_2(k) &= \pi_2(k) + n_1 && \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n_2, \\ &= \pi_1(k - n_2) && \text{si } n_2 + 1 \leqslant k \leqslant n_1 + n_2. \end{aligned}$$



$\pi_1 \ominus \pi_2$.

Dans la définition de 1998[7], une permutation est séparable si elle est obtenue à partir de plusieurs copies de la permutation triviale sur un objet par des opérations successives $\oplus$ et $\ominus$. Nous avons en effet une assez bonne compréhension de ces permutations[8].

Théorème. *Soit π une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *π est l'échange polynomial associé à n polynômes distincts $P_1, \ldots, P_n$.*

7. Bose (P.), Buss (J. F.) et Lubiw (A.), Pattern matching for permutations, *Inform. Process. Lett.*, n° 65(5), 1998, p. 277-283.

Notons que si une permutation π est séparable, son inverse $\overline{\pi}(k) = n + 1 - \pi(k)$ l'est aussi.

8. Ghys (É.), Intersecting curves (variation on an observation of Maxim Kontsevich), *Amer. Math. Monthly*, n° 120(3), 2013, p. 232-242.

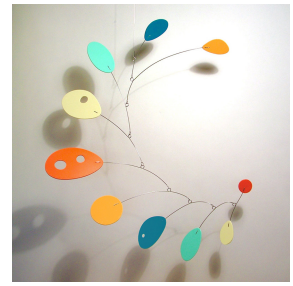
2. *π ne contient pas* $(2,4,1,3)$ *ou* $(3,1,4,2)$.
3. *π est la permutation définie par un arbre élagué.*
4. *π est obtenue à partir de plusieurs copies de la permutation triviale sur un objet par des opérations successives $\oplus$ et $\ominus$.*

Ces permutations ont déjà été définies comme séparables.

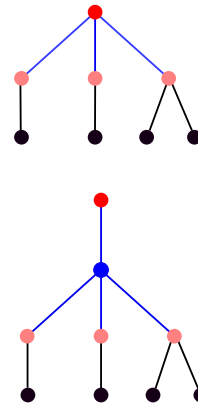
Nous avons déjà tout démontré sauf l'équivalence entre 3 et 4. Démontrons cette équivalence par récurrence.

Soit π décrit par un arbre élagué T. La racine de cet arbre peut avoir un fils unique. Si c'est le cas, les descendants de ce fils unique définissent un autre arbre élagué $\overline{\mathrm{T}}$ dans lequel la nouvelle racine a plusieurs fils. La permutation associée à $\overline{\mathrm{T}}$ est l'inverse de $\overline{\pi}$. Observons que $\pi_1 \ominus \pi_2 = \overline{\overline{\pi_1} \oplus \overline{\pi_2}}$. On peut donc supposer que la racine a plusieurs fils. Ces fils définissent des arbres élagués et des échanges polynomiaux $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ dont la somme $\oplus$ est π. Par récurrence, toutes les permutations $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ sont obtenues à partir de la permutation triviale par les opérations $\oplus$ et $\ominus$, de sorte qu'il en va de même pour π.

La réciproque est tout aussi facile. Nous devons montrer que les sommes $\oplus$ et $\ominus$ de deux permutations associées à des arbres élagués sont également associées à un arbre élagué. Il suffit de joindre les deux racines de deux arbres élagués par un parent commun, ou d'ajouter un grand-parent, selon le signe. ⊡



Un mobile, à la Alexander Calder. Bien sûr, ces mobiles ne sont pas censés être planaires, mais deux de leurs réalisations planaires diffèrent par une permutation séparable de leurs feuilles. ©



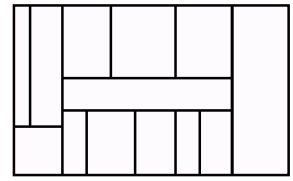
Ajout d'un parent ou d'un grand-parent supplémentaire, pour joindre plusieurs arbres.

Voies ferrées, piles, plans d'étage et permutons

Imaginons un train (mathématique) composé de n wagons. Insérons une plaque tournante mathématique, un de ces dispositifs que l'on voit parfois dans les chemins de fer, qui permet d'effectuer des rotations de 180 degrés. La plaque tournante est mathématique puisqu'elle peut contenir n'importe quel nombre de wagons consécutifs. Nous supposons également qu'une fois qu'un segment de wagons a été inversé, ces wagons sont accrochés de manière permanente : ils ne pourront plus être décrochés à l'avenir. Le train peut passer plusieurs fois sur la plaque tournante. La permutation finale des wagons est séparable, presque par définition.

Une plaque tournante de chemin de fer. ©

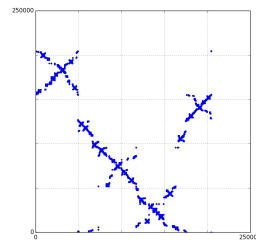
La même idée peut également être exprimée en utilisant des piles avec sauts en série, comme dans le chapitre précédent. Imaginons une suite indéfinie de piles alignées à droite de la suite $1, 2, \ldots, n$. Les règles du jeu de tri sont différentes de celles du cas d'une seule pile. À chaque étape, nous sommes autorisés à pousser un élément de la liste au sommet de la première pile, ou à faire passer le contenu complet d'une pile à la suivante.

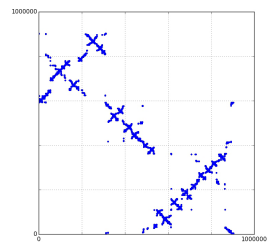


Voici une autre occurrence de permutations séparables. Commençons par un rectangle et décomposons-le en plusieurs *pièces rectangulaires* par des coupes verticales ou horizontales successives. Il s'agit d'un *plan d'étage en tranches*, comme dans la marge. Trouver une bonne définition pour les plans d'étage en tranche équivalents et trouver une bijection avec les permutations séparables. [9]

9. Ackerman (E.), Barequet (G.) et Pinter (R. Y.), A bijection between permutations and floorplans, and its applications, *Discrete Appl. Math.*, n° 154(12), 2006, p. 1674-1684.

Pour conclure ce chapitre je voudrais mentionner une prépublication récente [10] qui décrit le comportement probabiliste des permutations séparables lorsque n tend vers l'infini. Étant donné une permutation π de $\{1, \ldots, n\}$, considérons son graphe : c'est le sous-ensemble $\{(i, \pi(i))\} \subset \{1, \ldots, n\}^2$. Redimensionnons cette image pour la dessiner dans le carré unité $[0,1]^2$. À chaque permutation π, nous associons la mesure de probabilité μ_π dans le carré qui est la somme des n masses de Dirac de poids $1/n$ situées en $(i/n, \pi(i)/n)$. L'espace $\mathrm{Prob}([0,1]^2)$ des mesures de probabilité sur le carré est compact (pour la topologie faible) de sorte que nous pouvons étudier les points d'accumulation des μ_π dans $\mathrm{Prob}([0,1]^2)$. Il est facile de voir que tout point d'accumulation μ est un *permuton* : une mesure de probabilité sur le carré dont les deux lois marginales (ses deux projections sur les axes) sont la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. La prépublication de Bassino et coll. décrit les limites des permutations séparables. Pour chaque n, choisissons une permutation séparable au hasard (uniformément distribuée parmi toutes les permutations séparables). Ceci produit une distribution de probabilité aléatoire sur $\mathrm{Prob}([0,1]^2)$ pour chaque n. Les auteurs démontrent que cette suite de probabilités converge vers une probabilité bien définie dans l'espace $\mathrm{Prob}([0,1]^2)$. Cette limite est une probabilité aléatoire sur l'espace des permutons : le *permuton aléatoire séparable*. Les deux figures dans la marge, extraites de cette prépublication,





10. Bassino (F.), Bouvel (M.), Féray (V.), Gerin (L.) et Pierrot (A.), The Brownian limit of separable permutations, 2016.

montrent des graphes typiques de permutations séparables pour de grandes valeurs de n.

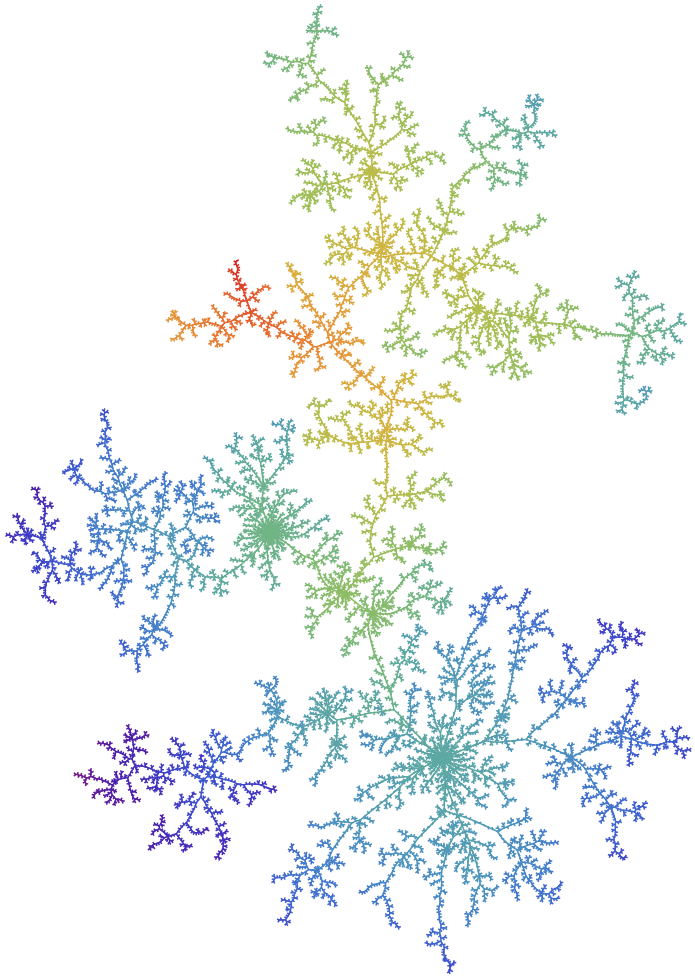
Pour en savoir plus sur la combinatoire des permutations séparables, voir [11] ou [12]. Voici un exercice.

Montrer qu'il existe un algorithme en temps linéaire (en n) qui décide si une permutation donnée de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est séparable ou non .

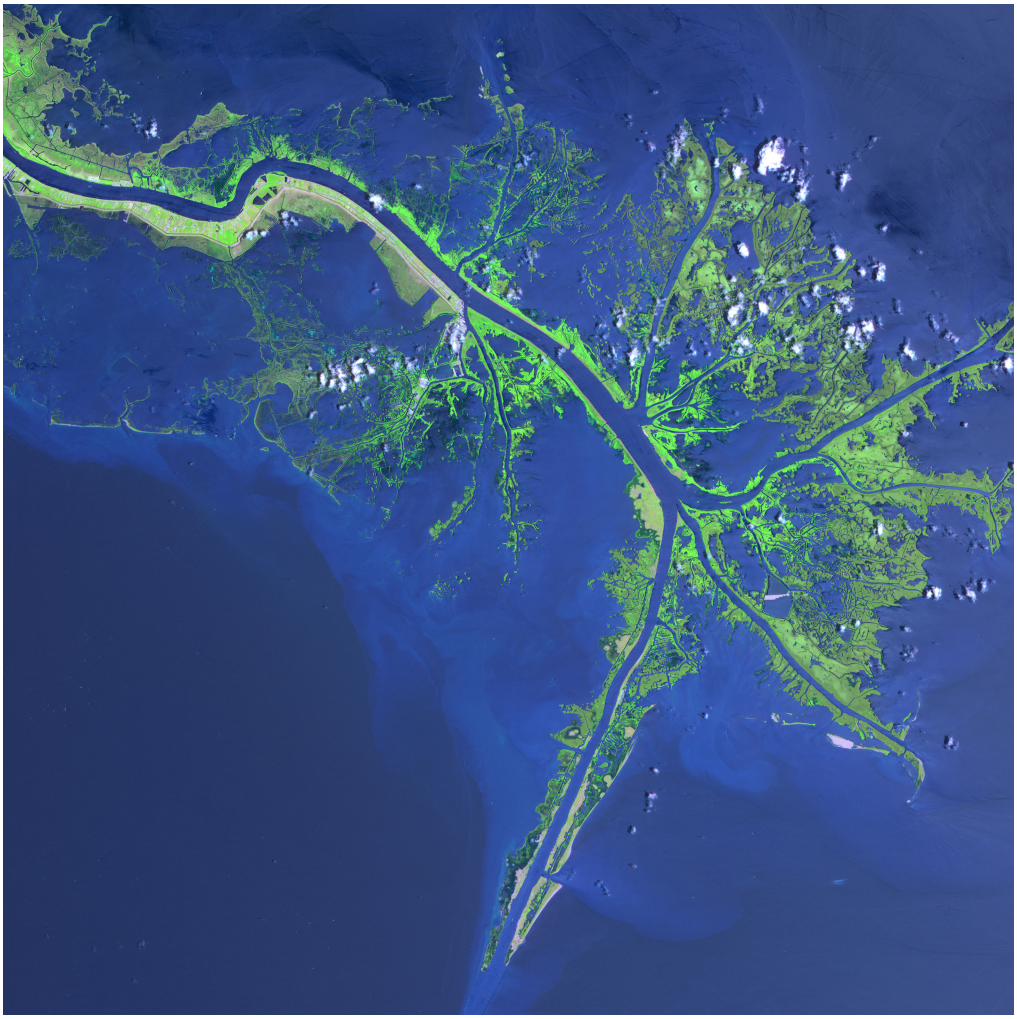
Notons qu'il existe un algorithme évident en temps polynomial : pour chaque quadruplet $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant i_4 \leqslant n$, vérifier si leurs images sont ordonnées comme l'une des deux permutations interdites. Passer d'un temps polynomial à un temps linéaire peut être important puisque $\log n!$ croît plus vite qu'une fonction linéaire en n, mais plus lentement qu'une fonction quadratique, d'après la formule de Stirling. Par conséquent, si nous pouvons trouver un algorithme en temps linéaire, nous démontrons en particulier que le nombre de permutations séparables est petit par rapport à $n!$. Pour vous aider dans cet exercice, relisez la démonstration de la bijection entre les permutations séparables et les arbres élagués.

11. Kitaev (S.), *Patterns in Permutations and Words*, Springer, 2011.

12. Bóna (M.), *Combinatorics of Permutations*, 2e éd., CRC Press, 2012.



Un arbre aléatoire d'Igor Kortchemski. ©



Le delta du fleuve Mississippi. ©

Hipparque et Schröder

Comptons les arbres

Nous allons compter le nombre $a(n)$ d'échanges polynomiaux (ou de permutations séparables) sur n objets.

Soit $b(n)$ le nombre d'arbres élagués avec n feuilles qui sont tels que la racine ait *au moins deux fils* si $n \geqslant 2$ (et n'ait pas de fils si $n = 1$). Pour un pareil arbre, nous pouvons créer une nouvelle racine dont l'unique fils est la racine originale. Donc $a(n) = 2b(n)$ pour tout $n \geqslant 2$. Les premières valeurs de b sont :

— $b(1) = 1$, un petit arbre dont la racine est son unique feuille ;

— $b(2) = 1$, un petit arbre avec deux branches et deux feuilles ;

— $b(3) = 3$.

Il est tentant d'établir une relation de récurrence pour $b(n)$. Commençons par un arbre élagué avec n feuilles tel que la racine ait au moins deux fils. Si l'on supprime la racine et les branches adjacentes, on obtient un certain nombre d'arbres ayant au total n feuilles. Inversement, à partir d'un ensemble ordonné d'au moins deux arbres élagués ayant n feuilles au total, nous pouvons ajouter une nouvelle racine et la relier aux racines précédentes, afin de construire un arbre élagué avec n feuilles. Par conséquent, la relation suivante est vraie :

$$b(n) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} b(i_1) b(i_2) \cdots b(i_k).$$

Les premières valeurs de $a(n)$.

1 : 1
2 : 2
3 : 6
4 : 22
5 : 90
6 : 394
7 : 1 806
8 : 8 558
9 : 41 586
10 : 206 098
11 : 1 037 718
12 : 5 293 446
13 : 27 297 738
14 : 142 078 746
15 : 745 387 038
16 : 3 937 603 038
17 : 20 927 156 706
18 : 111 818 026 018
19 : 600 318 853 926
20 : 3 236 724 317 174
21 : 17 518 619 320 890
22 : 95 149 655 201 962
23 : 518 431 875 418 926
24 : 2 832 923 350 929 742
25 : 15 521 467 648 875 090
26 : 85 249 942 588 971 314
27 : 469 286 147 871 837 366

Nous utilisons maintenant la méthode classique de *séries génératrices*. Définissons la série formelle H par

$$\mathrm{H}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n = t + t^2 + 3\,t^3 + \cdots.$$

Élevons H au carré :

$$\mathrm{H}(t)^2 = t^2 + 2\,t^3 + 7\,t^4 + \cdots.$$

Le coefficient de t^n dans cette nouvelle série est $\sum_{i_1+i_2=n} b(i_1)b(i_2)$, qui est égal au nombre d'arbres élagués avec n feuilles tels que la racine ait exactement deux fils. En utilisant $\mathrm{H}(t)^3$, on compterait le nombre d'arbres dont la racine a trois fils, etc.

La série

$$\mathrm{H}(t)^2 + \mathrm{H}(t)^3 + \cdots$$

compte donc tous les arbres, sauf le seul qui a une seule feuille. Cette somme infinie est donc $\mathrm{H}(t) - t$.

Par conséquent,

$$\mathrm{H}(t) - t = \mathrm{H}(t)^2 + \mathrm{H}(t)^3 + \cdots.$$

En faisant la somme de la série géométrique, on obtient

$$\mathrm{H}(t) - t = \frac{\mathrm{H}(t)^2}{1 - \mathrm{H}(t)}$$

ou

$$2\,\mathrm{H}(t)^2 - (1+t)\mathrm{H}(t) + t = 0,$$

ce qui donne

$$\mathrm{H}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)t^n = \left(1 + t - \sqrt{1 - 6\,t + t^2}\right)/4.$$

En tant que fonction d'une variable complexe, $\left(1 + t - \sqrt{1 - 6\,t + t^2}\right)/4$ est bien définie et holomorphe dans le disque de centre 0 dont le rayon est la plus petite des deux racines de $1 - 6t + t^2 = 0$, à savoir $t = 3 - 2\sqrt{2}$. Le rayon de convergence de $\mathrm{H}(t)$ est donc $3 - 2\sqrt{2}$. En d'autres termes,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log b(n) = \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Ernst Friedrich Wilhelm Karl Schröder (1841-1902) avait de nombreux passe-temps sportifs : le vélo, la randonnée, la natation, le patinage sur glace, l'équitation et le jardinage. Comme on le voyait toujours à vélo dans les rues de Karlsruhe, on l'appelait localement le « professeur bicyclette » (voir *MacTutor History of Mathematics*). ©

Hipparque (vers 190 av. J.-C. - vers 120 av. J.-C.) ©

Le lecteur montrera facilement que lim sup peut être remplacé par lim. Les $a(n)$ sont les *grands nombres de Schröder*, les $b(n)$ les *petits nombres de Schröder*. N'oublions pas que $a(n) = 2b(n)$ pour $n \geqslant 2$.

L'incroyable *Encyclopédie en ligne des suites d'entiers* propose plusieurs pages consacrées à ces deux suites (parmi de nombreuses autres pages) et contient probablement trop d'information ! Par exemple, on y trouve l'estimation asymptotique

$$a(n) \sim \frac{(3+2\sqrt{2})^n}{2n\sqrt{2\pi n}\,\sqrt{3\sqrt{2}-4}\,\left(1-\frac{9\sqrt{2}+24}{32n}+\cdots\right)}.$$

Hipparque et Schröder

Le *principe d'Arnold* affirme que

> Si une notion porte un nom de personne, il ne s'agit pas du nom du découvreur.

Son complément, le *principe de Berry*, affirme que

> Le principe d'Arnold s'applique à lui-même [13].

Cela s'applique en particulier à la découverte des nombres de Schröder. Ernst Schröder était un logicien allemand important, qui expliquait que son objectif était [14]

> « de concevoir la logique comme une discipline de calcul, en particulier pour donner accès au traitement exact des concepts connexes et, à partir de là, en s'émancipant des prétentions routinières de la langue naturelle, retirer également tout sol fertile au « cliché » dans le domaine de la philosophie. Cela devrait préparer le terrain pour une langue universelle scientifique qui, à la différence des efforts linguistiques comme le Volapük [une langue universelle comme l'espéranto, très populaire en Allemagne à l'époque], ressemble plus à une langue des signes qu'à une langue des sons. »

Compte tenu de son point de vue sur la logique, il était tout à fait naturel pour lui de compter le nombre de parenthésages corrects sur un mot de longueur n. C'est l'objet de son article de 1870 [15].

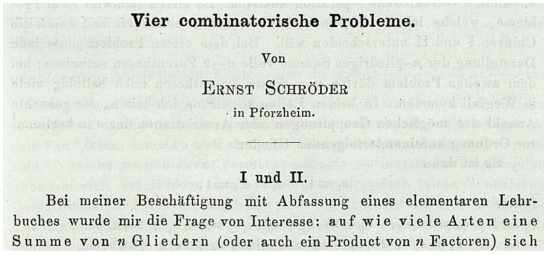
Pour un mot de longueur 2, il y a deux possibilités :

$$ab \quad \text{et} \quad (ab).$$

13. Arnold (V. I.), Sur l'éducation mathématique (trad. J.-M. Kantor), *Gazette des mathématiciens*, n° 78, 1998, p. 19-29.
Dans un autre contexte, on parle aussi de la loi d'éponymie de Stigler. A. N. Whitehead aurait dit : « Tout ce qui est important a déjà été dit par quelqu'un qui ne l'a pas découvert. »

14. Peckhaus (V.), 19th century logic between philosophy and mathematics, *Bull. Symbolic Logic*, n° 5(4), 1999, p. 433-450.

15. Schröder (E.), Vier combinatorische Probleme, *Z. Math. Physik*, n° 15, 1870, p. 361-376.



Vier combinatorische Probleme.

Von

ERNST SCHRÖDER

in Pforzheim.

I und II.

Bei meiner Beschäftigung mit Abfassung eines elementaren Lehrbuches wurde mir die Frage von Interesse: auf wie viele Arten eine Summe von n Gliedern (oder auch ein Product von n Factoren) sich

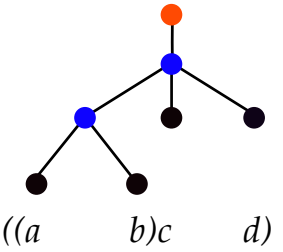
Six possibilités pour un mot de longueur 3 :

$$\begin{array}{ccc} abc & (ab)c & a(bc) \\ (abc) & ((ab)c) & (a(bc)). \end{array}$$

Les règles du jeu sont les suivantes : une seule lettre ne peut pas être placée entre parenthèses, comme (a), et il ne faut pas dupliquer les parenthèses, comme $((ab))$. Le mot complet peut se trouver à l'intérieur d'une seule paire de parenthèses ou non (c'est pourquoi les grands nombres de Schröder sont pairs). Notons qu'une paire de parenthèses peut contenir plus de deux lettres. Il y a 22 possibilités pour un mot de longueur 4.

$abcd$	$(abcd)$
$(ab)cd$	$((ab)cd)$
$a(bc)d$	$(a(bc)d)$
$ab(cd)$	$(ab(cd))$
$(ab)(cd)$	$((ab)(cd))$
$(abc)d$	$((ab)cd)$
$a(bcd)$	$(a(bcd))$
$((ab)c)d$	$(((ab)c)d)$
$(a(bc))d$	$((a(bc))d)$
$a((bc)d)$	$(a((bc)d))$
$a(b(cd))$	$(a(b(cd)))$

Il devrait être clair pour le lecteur que ces 22 expressions ne sont rien d'autre que la liste des 22 arbres élagués avec 4 feuilles. En effet, les mots entre parenthèses peuvent être décrits par des arbres élagués, comme le montre la marge. Schröder comptait simplement les arbres élagués, alias les échanges polynomiaux, alias les permutations séparables. Son article contient la relation de récurrence et la fonction génératrice décrites ci-dessus.



En 1994, David Hough, étudiant de troisième cycle à l'université George Washington aux États-Unis, lisait l'exercice 1.45 dans le livre de Stanley [16] :

> « La citation suivante est tirée des *Œuvres morales* de Plutarque [VIII.IX.732] : « Chrysippe dit que le nombre de propositions « composées qui peuvent être faites à partir de seulement dix « propositions simples dépasse un million. Hipparque, bien sûr, a « réfuté cette affirmation en montrant qu'il y a 103 049 propositions « composées du côté affirmatif et 310 952 du côté négatif. »
> Selon Y. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, p. 245, « il semble impossible de faire quoi que ce soit de ces chiffres ». [Heath note également qu'une variante de 103 049 est 101 049].

16. Stanley (R. P.), *Enumerative Combinatorics, Vol. I*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986.

Peut-on donner un sens à la déclaration de Plutarque ? »

Hough remarqua que 103 049 est le dixième petit nombre de Schröder $b(10)$ et qu'il ne pouvait s'agir d'une coïncidence.

Plutarque était un historien et biographe grec, dont le rôle (dans notre histoire) se limite à la retranscription d'une citation d'Hipparque deux cents ans plus tôt. Il est difficile d'imaginer que ce nombre 103 049 ait pu être mémorisé pendant si longtemps sans avoir été conservé dans un livre en possession de Plutarque.

Plutarque (vers 46-120). ©

Hipparque est probablement l'astronome le plus important de l'Antiquité. Il est connu pour sa découverte de la précession des équinoxes, mais surtout pour l'élaboration d'une description scientifique cohérente du mouvement des planètes. Son successeur Ptolémée, trois siècles plus tard, est célèbre pour le *système géocentrique de Ptolémée* qui est devenu le dogme astronomique jusqu'à ce que Copernic introduise le système héliocentrique bien longtemps après. Ptolémée doit beaucoup à Hipparque et ne reconnaît pas toujours sa dette. Mais cela n'a rien à voir avec notre histoire.

Ainsi, selon Hough, Hipparque, transmis par Plutarque, comptait les parenthésages des mots de longueur 10. Plusieurs articles historiques ont été écrits sur cette découverte des nombres de Schröder par Hipparque [17], [18].

Un article dans *MathPages* [19] fournit une explication un peu plus élaborée en termes de logique stoïcienne, une logique préaristotélicienne enseignée notamment par Chrysippe et critiquée par Hipparque.

Étant donné un certain nombre d'assertions logiques $a_1, a_2, \ldots, a_k$, il y a au moins deux façons de les combiner par conjonction ou disjonction :

— a_1 OU a_2 OU $\cdots$ OU a_n, qui est une fonction n-aire OU$(a_1, \ldots, a_n)$;

— a_1 ET a_2 ET $\cdots$ ET a_n, qui est une fonction n-aire ET$(a_1, \ldots, a_n)$.

Dans la notation booléenne moderne, on utilise + pour le OU et un point ou simplement la concaténation pour le ET. Considérons maintenant un mot de longueur n (par exemple *abcd* pour $n = 4$). Pour chacun des $n - 1$ espaces entre les lettres, choisissons un « + » ou un « . ». Il y a 2^{n-1} possibilités (8 dans notre exemple).

17. Stanley (R. P.), Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough, *Amer. Math. Monthly*, n° 104(4), 1997, p. 344-350.

18. Acerbi (F.), On the shoulders of Hipparchus: a reappraisal of ancient Greek combinatorics, *Arch. Hist. Exact Sci.*, n° 56(6), 2003, p. 465-502.

19. Brown (K.), Hipparchus on compound statements, *MathPages*.

$abcd$	$abc + d$
$ab + cd$	$ab + c + d$
$a + bcd$	$a + bc + d$
$a + b + cd$	$a + b + c + d$

Nous avons l'habitude de donner la priorité à la multiplication sur l'addition, mais si nous voulons spécifier un ordre pour évaluer cette fonction logique, les parenthèses sont nécessaires.

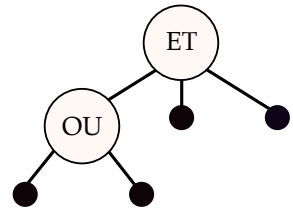
Ceci peut être décrit par un arbre élagué. Le symbole OU est associé à un nœud de niveau impair et le symbole ET à un nœud de niveau pair. Chaque nœud agit en conséquence sur l'ensemble de ses fils, ces derniers étant englobés dans une paire de parenthèses. Si la racine n'a qu'un seul fils, il n'est pas nécessaire de l'étiqueter avec ET puisqu'il agit sur un singleton.

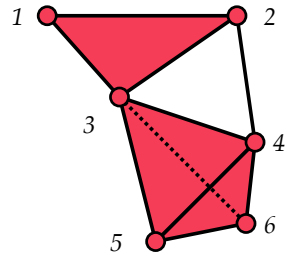
Le lecteur est encouragé à montrer, à titre d'exercice, que deux expressions différentes, c'est-à-dire deux arbres élagués différents, définissent deux fonctions booléennes différentes $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ lorsqu'elles sont évaluées en $a_i = 0$ ou 1 (faux ou vrai). Hipparque avait donc raison : il y a $a(10) = 2 \times 103\,049$ façons de combiner 10 affirmations, en utilisant OU ou ET, dans le sens que nous venons de décrire. On peut se demander pourquoi il a mentionné $b(10)$ et non $a(10)$. Il a peut-être remarqué l'involution naturelle parmi les *propositions composées* donnée par la négation, qui permute essentiellement ET et OU.

Il existe une question ouverte connexe, appelée problème de Dedekind. Il existe 2^{2^n} fonctions booléennes, c'est-à-dire des fonctions de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$. Il est facile de voir que toute fonction booléenne de ce type peut être écrite par une formule qui fait intervenir OU, ET et NON. Les fonctions qui peuvent être décrites par des formules qui n'impliquent pas NON sont appelées *fonctions booléennes monotones* (mais notons que nous n'imposons pas que chaque variable apparaisse une fois dans la formule, comme dans le cas d'Hipparque). *La question du calcul du nombre de fonctions booléennes monotones est ouverte pour* $n > 8$. Ce nombre a également une interprétation topologique intéressante : c'est le nombre de complexes simpliciaux dont les sommets sont $\{1, 2, \ldots, n\}$.

La plupart des mathématiciens, y compris moi-même, ont une idée naïve des mathématiques grecques. Nous pensons qu'elles ne consistent qu'en de la géométrie, dans l'esprit d'Euclide. L'exemple du calcul par Hipparque du dixième nombre de Schröder peut être un indice que les anciens Grecs avaient déve-

$abcd$	$abc + d$
$ab(c + d)$	$a(bc + d)$
$ab + cd$	$a(b + c)d$
$a(b + cd)$	$(ab + c)d$
$ab + c + d$	$a(b + c) + d$
$a(b + c + d)$	$a + bcd$
$(a + b)cd$	$(a + bc)d$
$a + bc + d$	$(a + b)(c + d)$
$(a + b)c + d$	$a + b(c + d)$
$a + (b + c)d$	$a + b + cd$
$(a + b + c)d$	$a + b + c + d$





Un complexe simplicial avec un ensemble de sommets S = {1, . . . , 6}. La fonction qui associe 0 à un sous-ensemble X ⊂ S si X est un simplexe, et 1 sinon, est une fonction booléenne monotone.

loppé une compréhension assez élaborée de la combinatoire : c'est le thème de l'article d'Acerbi cité ci-dessus.

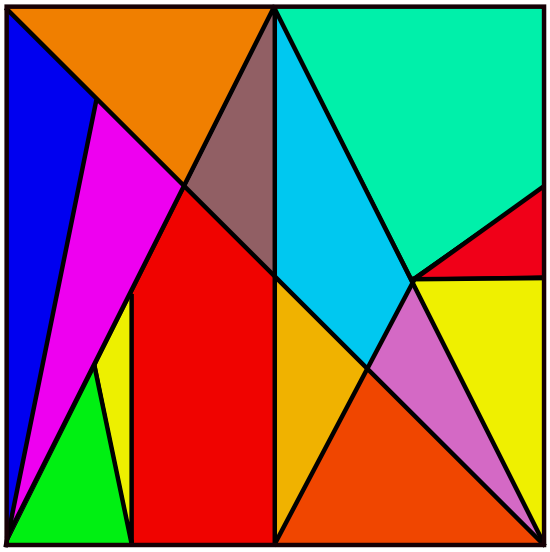
Le livre de Netz [20] offre de nouvelles perspectives sur cette histoire. Le premier chapitre traite de la combinatoire grecque et en particulier du nombre 103 049. Il contient également une description d'une autre énigme combinatoire, trouvée dans le célèbre palimpseste d'Archimède (le lecteur est invité à lire [21] comme un roman policier). Elle est composée de 14 pièces polygonales et s'apparente à un jeu de *tangram*.

Netz « a demandé à un collègue de Stanford, le célèbre spécialiste de combinatoire Persi Diaconis, de l'aider à résoudre ce qu'il pensait être une question simple : combien y a-t-il de façons d'assembler le carré ? [...] Il a fallu à Diaconis quelques mois et une collaboration avec trois collègues pour trouver le nombre de solutions : 17 142. »

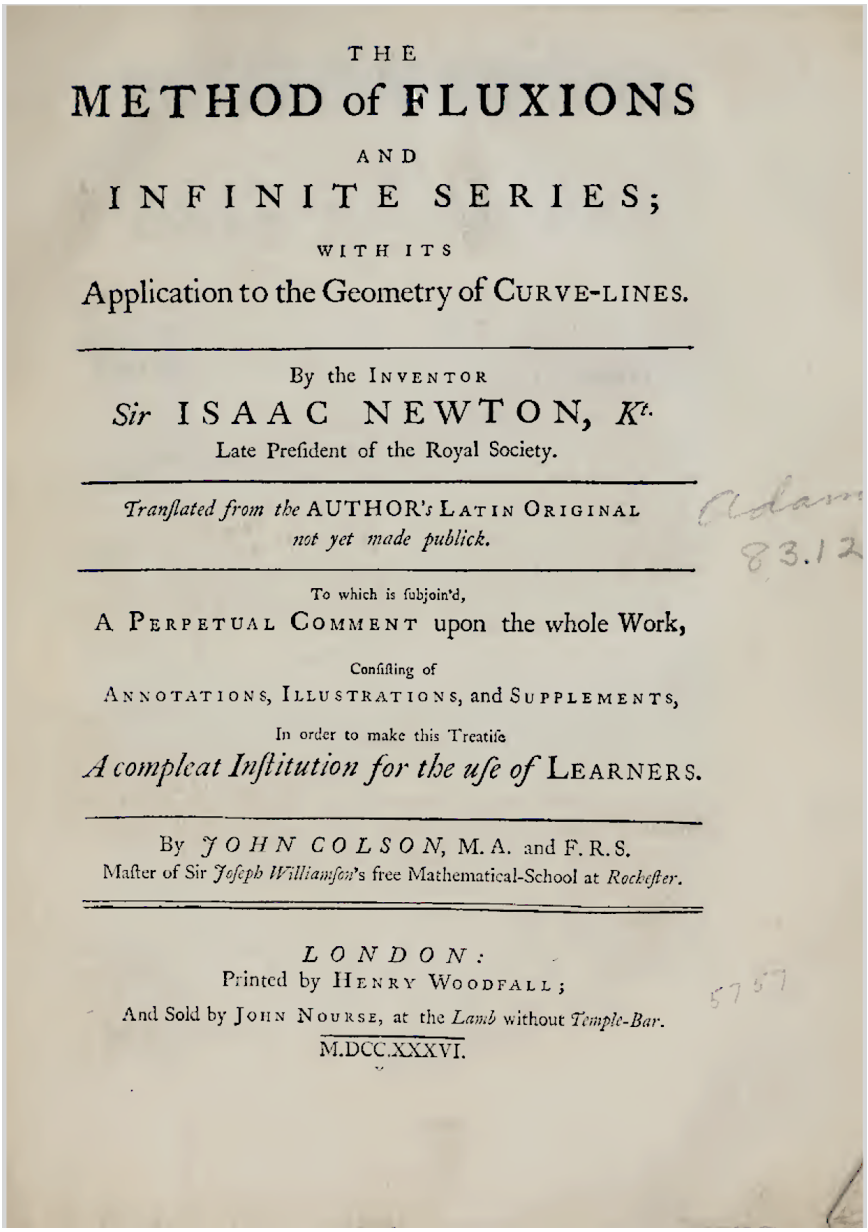
Archimède connaissait-il la réponse ?

20. Netz (R.), *Ludic proof: Greek mathematics and the Alexandrian aesthetic*, Cambridge University Press, 2009.

21. Netz (R.) et Noel (W.), *Le Codex d'Archimède* (trad. C. Delporte), JC Lattès, Paris, 2008.



Le stomachion d'Archimède.



THE

METHOD of FLUXIONS

AND

INFINITE SERIES;

WITH ITS

Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR

Sir ISAAC NEWTON, *Kt.*

Late Preſident of the Royal Society.

Tranſlated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is ſubjoin'd,

A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,

Conſiſting of

ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,

In order to make this Treatiſe

A compleat Inſtitution for the uſe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M. A. and F. R. S.

Maſter of Sir *Joſeph Williamſon*'s free Mathematical-School at *Rocheſter*.

LONDON:

Printed by HENRY WOODFALL;

And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.

M.DCC.XXXVI.

Adam 83.12

5757

©

De methodis serierum et fluxionum
La méthode de Newton

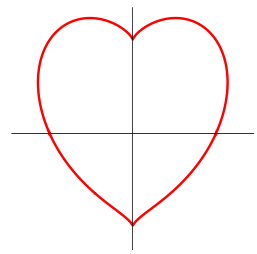
Courbes algébriques

Depuis l'introduction des coordonnées par René Descartes, l'étude des courbes planes, en particulier des *courbes algébriques planes* (définies par une équation polynomiale $P(x,y) = 0$), est devenue un thème central des mathématiques et continue de l'être. Les équations de degré 1 et 2, droites et coniques, étaient bien sûr très familières. Lorsque les mathématiciens du XVIIe siècle se sont penchés sur les courbes de degré supérieur, ils ont découvert une jungle composée de nombreuses formes différentes qu'ils ont tenté d'apprivoiser. Isaac Newton a par exemple écrit un long mémoire sur les courbes de degré 3, les décomposant en un grand nombre d'« espèces ». Voir la discussion dans [22] ou dans [23].

Très vite, il est apparu clairement que les points singuliers jouent un rôle central dans la compréhension de la géométrie de ces courbes. Un point (x_0, y_0) est *singulier* s'il est situé sur la courbe, c'est-à-dire si $P(x_0, y_0) = 0$, et si les dérivées partielles $\partial P/\partial x$ et $\partial P/\partial y$ sont nulles en (x_0, y_0). Dans le voisinage d'un point *régulier*, c'est-à-dire non singulier, un mathématicien moderne n'a aucune difficulté à appliquer le théorème des fonctions implicites : dans des coordonnées lisses appropriées autour d'un pareil point, la courbe est une droite. Les points singuliers peuvent cependant être beaucoup plus compliqués et il a fallu beaucoup de temps pour déchiffrer leur nature.

22. Stillwell (J.), *Mathematics and its History*, 3e éd., Springer, 2010.

23. Rouse Ball (W. W.), On Newton's classification of cubic curves, *Proc. London Math. Soc.*, n^{o} s1-22(1), 1890, p. 104-143.



Une courbe algébrique avec deux points singuliers.

Je vais décrire dans ce chapitre l'une des principales étapes vers cette compréhension, en suivant le livre de Newton *De methodis serierum et fluxionum*. Je ne souhaite pas entrer dans les détails historiques de la rivalité entre Newton et Leibniz concernant l'invention du calcul infinitésimal. Je recommande spécifiquement l'excellente biographie de Newton par Westfall [24].

24. Westfall (R. S.), *Newton: 1642-1727* (trad. M.-A. Lescourret), Flammarion, Paris, 1994.

Voici la description faite par Newton lui-même de son *Annus mirabilis* (voir [25]) :

25. Westfall (R. S.), Newton's marvelous years of discovery and their aftermath: myth versus manuscript, *Isis*, n° 71(256), 1980, p. 109-121.

> « Au début de l'année 1665, j'ai trouvé la méthode des séries approchantes et la règle pour réduire n'importe quelle dignité de n'importe quel binôme en une pareille série. La même année, en mai, j'ai trouvé la méthode des tangentes de Gregory et Slusius et, en novembre, la méthode directe des fluxions. L'année suivante, en janvier, j'ai découvert la théorie des couleurs et, en mai, j'ai découvert la méthode inverse des fluxions. La même année, j'ai commencé à penser que la gravité s'étendait jusqu'à l'orbite de la Lune. Tout cela s'est passé pendant les deux années de peste de 1665-1666. J'étais en effet à cette époque dans la fleur de l'âge pour l'invention et je m'intéressais aux mathématiques et à la philosophie plus que jamais depuis. »

En juillet 1669, sur la base de ses idées de 1665, Newton écrivit *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. En 1671, il écrivit *De methodis serierum et fluxionum* mais ne le publia pas. En 1676, il écrivit deux lettres célèbres à Leibniz, par l'intermédiaire d'Oldenburg : *Espistola prior* et *Epistola posterior*. La traduction anglaise par Colson du *De methodis* parut en 1736, donc 9 ans après la mort de Newton. Buffon fit paraître une traduction française de la traduction anglaise en 1740.

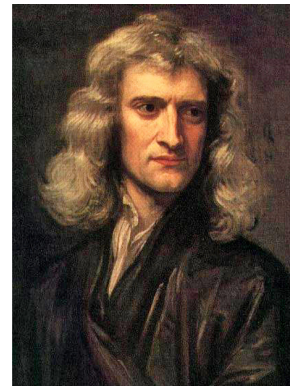
Il semble que Colson n'ait pas accepté de montrer le manuscrit latin à Buffon.

Tous ces articles contiennent une description assez précise des points singuliers des courbes algébriques en termes de ce que l'on appelle aujourd'hui des *séries de Puiseux*, en suivant une fois de plus le principe d'Arnold.

Nous voulons étudier une courbe $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme à *coefficients complexes*. Il faut d'abord comprendre que Newton ne considère pas ceci comme une *courbe*, mais comme une *fonction* : étant donné x, il veut résoudre l'équation $P(x, y) = 0$ et trouver y comme une fonction $y(x)$. Son principal résultat est que c'est effectivement possible, dès lors que l'on

Plus tard, nous étudierons le cas des coefficients réels ainsi que des fonctions P qui sont seulement supposées analytiques.

accepte de considérer $y(x)$ comme une série infinie *en puissances rationnelles* de x. Voici un théorème qui sera précisé plus tard et que Newton a « presque » démontré :



Newton en 1689, par Godfrey Kneller. ©

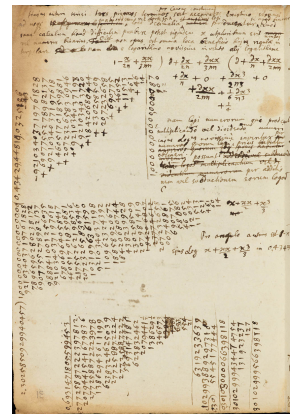
Théorème. *Toute équation polynomiale* $P(x,y) = 0$ *(où* P *n'est pas divisible par x) telle que* $P(0,0) = 0$ *est équivalente, dans le voisinage de* $(0,0)$*, à un nombre fini d'égalités* $y = f_i(x)$ *avec* $i = 1,\dots,n$*, où* f_i *est une* série de Puiseux *de la forme*

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} x^{\frac{k}{m_i}}$$

avec des coefficients complexes $a_{i,k}$ *et des entiers strictement positifs* m_i*.*

En d'autres termes, $\{P = 0\}$ est la réunion d'un nombre fini de *graphes* des séries f_i. Nous sommes dans une position similaire à la question originale de Kontsevitch et il sera naturel de se demander quelle est la nature topologique de ces graphes. Cependant, avant d'étudier cette question, il y a de nombreux détails à régler, car en particulier ces f_i ne sont pas vraiment des *fonctions*. Pensons par exemple au « graphe » de la racine carrée.

Nous allons examiner de près la première partie du *De methodis serierum et fluxionum*. Le frontispice de ce livre important se trouve sur la première page de ce chapitre. Afin de simplifier la tâche de mes lecteurs, je suivrai la traduction française.



Une page du *De methodis*. ©

La méthode de Newton

Commençons par lire Newton.

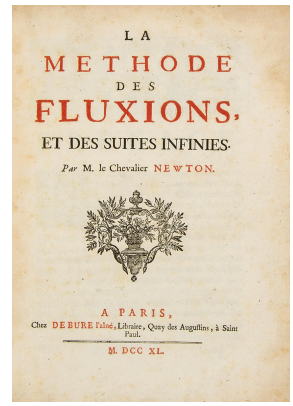
> « La grande conformité qui se trouve dans les opérations avec des espèces de l'algèbre et dans les opérations avec des nombres communs de l'arithmétique — cette ressemblance ou analogie qui serait parfaite si les caractères n'étaient pas différents, les premiers étant généraux et indéfinis et les autres particuliers et définis — devait naturellement nous conduire à en faire usage. Et je ne puis qu'être étonné de ce que personne [...] n'a songé à appliquer à l'algèbre la doctrine des fractions décimales, puisque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes et plus difficiles. »

Explication. Par « nombres communs », Newton veut dire ce que nous appelons aujourd'hui *nombres complexes*. Notons que très

peu de mathématiciens de l'époque considéraient ces nombres comme « communs ». Par « espèce », il entend un polynôme en x, ou une série entière, ou ce que l'on appelle aujourd'hui une *série de Laurent*, ou peut-être une *série de Puiseux*, c'est-à-dire une série en puissances rationnelles de x. Quoi qu'il en soit, dans les termes de Newton, une « espèce » est une sorte de fonction.

> « Mais puisqu'en effet cette doctrine réduite en espèces doit avoir avec l'algèbre la même relation que la doctrine des nombres décimaux se trouve avoir avec l'arithmétique ordinaire il suffit de savoir l'arithmétique et l'algèbre, et d'observer la correspondance qui doit être entre les fractions décimales et les termes algébriques continués à l'infini, pour faire les opérations de l'addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines dans cette nouvelle façon de calcul. »

Explication. Newton observe que les séries peuvent être manipulées de la même manière que les nombres, pour lesquels nous disposons de quatre opérations $(+, -, \times, /)$. Dans la terminologie moderne, il observe que les « nombres communs » et les séries de Laurent sont tous deux des corps.


LA
METHODE
DES
FLUXIONS,
ET DES SUITES INFINIES.
Par M. le Chevalier NEWTON.
A PARIS,
Chez DEBURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.
M. DCC XL.

Page de couverture de la traduction française due à Buffon. ©

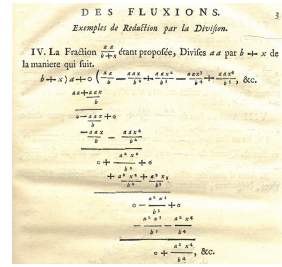
> « Car comme dans les nombres les places à droite diminuent en raison décimale, ou soudécuple, il en est respectivement de même dans les espèces, lorsque les termes sont disposés en progression uniforme continuée à l'infini, suivant l'ordre des dimensions d'un numérateur ou dénominateur quelconque. »

Explication. Toujours dans une terminologie moderne anachronique, Newton nous parle de la topologie de ces deux corps. Deux nombres réels sont proches si leurs développements décimaux concordent jusqu'à un rang élevé et, de façon analogue, deux polynômes en x, ou deux séries, sont proches dans le voisinage de 0 si la valuation de leur différence est grande.

Nous pouvons à ce stade deviner la stratégie de Newton. Il va nous enseigner une façon de résoudre les équations polynomiales $P(y) = 0$, où P est un polynôme à coefficients dans un corps quelconque, qui pourrait être composé soit de « nombres communs », soit « d'espèces ». Ceci s'applique donc aux équations de la forme $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme en deux variables vu comme un polynôme $P(x)(y)$ en une variable y avec des coefficients dans le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(x)$ ou le

corps $\mathbb{C}((x))$ des séries de Laurent.

Dans une présentation très pédagogique, Newton donne plusieurs exemples qui montrent l'analogie entre les espèces et les nombres communs. Il montre d'abord comment développer $a^2/(b-x)$ en série de x. Tout comme nous expliquerions à l'école primaire qu'en divisant 1 par 0,9 = 1 – 0,1, on obtient 1,111 111 … C'est facile et cela a dû être facile aussi pour ses lecteurs.


DES FLUXIONS. 3

Exemples de Reduction par la Diviſion.

IV. La Fraction $\frac{aa}{b-x}$ étant propoſée, Diviſez aa par $b+x$ de la maniere qui ſuit.

$b+x)\,aa+0\,(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{bb}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5}$, &c.

$aa+aax$

$0-aax+0$

$-aax-\frac{aax^2}{b}$

$0+\frac{aax^2}{b}+0$

$+\frac{aax^2}{b}+\frac{aax^3}{bb}$

$0-\frac{aax^3}{bb}+0$

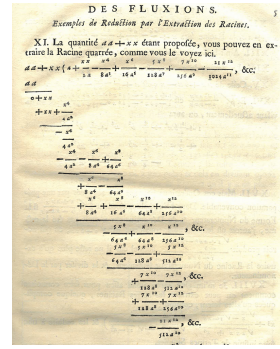
$-\frac{aax^3}{bb}-\frac{aax^4}{b^3}$

$0+\frac{aax^4}{b^3}$, &c.

©

Il explique ensuite la signification des exposants rationnels, ce qui devait également être familier à la plupart de ses lecteurs. Il peut alors présenter sa célèbre formule du binôme, avec l'exemple de la racine carrée de a^2+x^2, en tant que série infinie de la variable x :

$$\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}\ \&c.$$


DES FLUXIONS. 5

Exemples de Reduction par l'Extraction des Racines.

XI. La quantité $aa+xx$ étant propoſée, vous pouvez en extraire la Racine quarrée, comme vous le voyez ici.

$aa+xx\,(a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}$, &c.

aa

$0+xx$

$+xx+\frac{x^4}{4aa}$

$-\frac{x^4}{4aa}-\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$

$+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}+\frac{x^{10}}{128a^8}$

$-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{5x^{10}}{128a^8}-\frac{5x^{12}}{256a^{10}}$, &c.

$+\frac{7x^{10}}{128a^8}-\frac{7x^{12}}{256a^{10}}$, &c.

$-\frac{21x^{12}}{512a^{10}}$, &c.

©

De la Reduction des Equations Affectées.

XIX. Il faut que nous entrions dans un détail un peu plus grand, pour expliquer comment on doit reduire les Racines de ces Equations à des ſuites infinies ; car ce que les Géometres nous ont donné ſur les Equations en Nombres, eſt extrêmement embaraſſé, & chargé d'Opérations ſuperfluës ; de ſorte qu'on ne peut prendre ſur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Eſpeces. Je ferai donc voir d'abord comment ſe doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & enſuite j'appliquerai la Methode aux Eſpeces.

©

Nous arrivons maintenant à la partie qui nous intéresse le plus. Il souhaite résoudre ce qu'il appelle des « équations affectées » qui sont des équations polynomiales dont les coefficients sont des espèces, c'est-à-dire des équations $P(x,y) = P(x)(y) = 0$. Toujours de manière très pédagogique, il déclare qu'il commencera par résoudre des équations « ordinaires » en nombres communs de la forme $P(y) = 0$, où P est un polynôme dans $\mathbb{C}[y]$.

Il s'agit de la célèbre méthode de Newton, qui est l'un des outils les plus fondamentaux de l'analyse.

Regardons la façon dont il présente les calculs. Son exemple est l'équation cubique

$$y^3 \quad 2y \quad 5 \quad 0.$$

Il constate par tâtonnement qu'il existe une racine qui n'est pas très différente de 2. Il cherche donc y sous la forme y 2 p avec un petit p. En substituant dans l'équation originale, il trouve

$$p^3 \quad 6p^2 \quad 10p \quad 1 \quad 0.$$

Il peut alors « rejeter p^3 $6p^2$ à cause de sa petitesse » pour obtenir

$$10p \quad 1 \quad 0,$$

de sorte que p est proche de 1~10. Il peut alors poser p 0,1 q et substituer dans l'équation pour obtenir

$$q^3 \quad 6,3q^2 \quad 11,23q \quad 0,061 \quad 0$$

et « puisque 11,23q 0,061 0 est proche de la vérité », il sait que q est proche de 0,061~11,23 0,005 4.

qui contient trois monômes puisque la règle touche trois étoiles. Il y a six solutions

$$u = \pm 1\,, \qquad \pm\sqrt{2}\,, \qquad \pm\sqrt{-3}.$$

Newton semble ignorer les deux dernières solutions imaginaires. Il se peut qu'il ne s'intéresse qu'aux solutions réelles, mais même si c'est le cas, c'est une erreur, comme nous le verrons plus loin dans cette section. Il choisit donc la première solution. Il peut écrire $y = \sqrt{x} + p$, comme dans sa méthode avec des « nombres communs ». Il suffit alors de « continuer le processus à loisir ».

Cependant, sans explication, il abandonne soudainement son premier exemple et passe à d'autres exemples numériques pour lesquels il « expose la pratique de sa résolution ».

Je vais montrer comment poursuivre le premier exemple de Newton. Par souci de simplicité, je modifie légèrement sa présentation.

Au lieu d'améliorer la première solution approximative $y \approx \sqrt{x}$ en ajoutant une inconnue p, posons

$$x = {x_1}^2\,, \qquad y = x_1(1 + y_1).$$

Nous remplaçons ces valeurs dans l'équation d'origine et simplifions par ${x_1}^6$:

$$\begin{aligned} &-5\,x_1 + {x_1}^2 + {x_1}^4 - 8\,y_1 - 25\,x_1\,y_1 + 4\,{x_1}^4\,y_1 + 8\,{y_1}^2 \\ &- 50\,x_1\,{y_1}^2 + 6\,{x_1}^4\,{y_1}^2 + 20\,{y_1}^3 - 50\,x_1\,{y_1}^3 + 4\,{x_1}^4\,{y_1}^3 \\ &+ 15\,{y_1}^4 - 25\,x_1\,{y_1}^4 + {x_1}^4\,{y_1}^4 + 6\,{y_1}^5 - 5\,x_1\,{y_1}^5 + {y_1}^6 = 0. \end{aligned}$$

Dans cette nouvelle équation, les coefficients de x_1 et y_1 ne sont pas nuls. La règle de Newton passe donc maintenant par $(0,1)$ et $(1,0)$. C'est une autre façon de dire que la nouvelle équation n'est pas singulière à l'origine. Les termes dominants sont donc linéaires, $-5\,x_1 - 8\,y_1$, ce qui donne $y_1 \approx -\frac{5}{8}\,x_1$. En poursuivant le processus, nous posons

$$x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = -\tfrac{5}{8}\,x_2(1 + y_2)$$

et ainsi de suite, nous trouverions un développement de y comme produit de $\sqrt{x}$ et d'une série en puissances entières

Le 24 octobre 1676, Newton envoie une lettre à Leibniz, où il « décrit » sa contribution au *calcul infinitésimal*. À la fin de la lettre, il écrit : « Les problèmes inverses des tangentes sont à notre portée, et d'autres plus difficiles que ceux-là, et pour les résoudre j'ai utilisé une double méthode dont une partie est plus nette, et l'autre plus générale. Pour l'instant, j'ai cru bon de les enregistrer toutes deux en lettres transcodées... », et il dissimule ensuite sa méthode sous forme d'anagramme :

5*accd*10*e f f h*11*i*4*l*3*m*9*n*6*oqq*
*r*8*s*11*t*9*y*3*x* : 11*ab*3*cdd*10*eg*1
0*ill*4*m*7*n*6*o*3*p*3*q*6*r*5*s*11*t*8*vx*, 3*a*
*c*4*egh*5*i*4*l*4*m*5*n*8*oq*4*r*3*s*6*t*4*v*,
aaddcecceiijmmnnooprrrss
ssttuu.

Pauvre Leibniz ! Il a dû se battre pour trouver le sens de l'anagramme.

Pauvre lecteur ! Même si je lui donne la solution, il devra traduire du latin dans sa propre langue, et il comprendra alors que le contenu n'est pas si clair !

« *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus : altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis, as eruendos terminos assumptae seriei.* »

de x. Avec l'aide de Mathematica, mon ordinateur trouve

$$\begin{aligned} y(x) = {} & x^{1/2} - 5\times 2^{-3}\, x + 79\times 2^{-5}\, x^{3/2} - 14\,185\times 2^{-10}\, x^2 \\ & + 3\,118\,083\times 2^{-15}\, x^{5/2} - 189\,696\,965\times 2^{-18}\, x^3 \\ & + 24\,625\,187\,405\times 2^{-22}\, x^{7/2} - 1\,670\,815\,928\,565\times 2^{-25}\, x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Pour l'autre solution $u = \sqrt{2}$, le même ordinateur affirme que

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \sqrt{2}\, x^{1/2} + 2\, x - 13\times\sqrt{2}\times 2^{-2}\times 5^{-1}\, x^{3/2} + 382\times 5^{-2}\, x^2 \\ & - 267\,229\times\sqrt{2}\times 2^{-5}\times 5^{-3}\, x^{5/2} + 903\,813\times 2^{-1}\times 5^{-4}\, x^3 \\ & - 1\,661\,176\,381\times\sqrt{2}\times 2^{-7}\times 5^{-5}\, x^{7/2} + 777\,992\,628\times 5^{-6}\, x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Un dernier commentaire sur la motivation de Newton. Puisqu'il a « démontré » que toute « fonction » $y(x)$ définie par une relation implicite $P(x, y) = 0$ peut être développée sous forme de séries de puissances de x (au prix de l'utilisation d'exposants rationnels) et puisqu'il connaît bien sûr très bien la dérivée et la primitive de toute puissance x^α, il peut utiliser sa technique pour calculer les dérivées et les primitives de n'importe quelle série. En d'autres termes, il est capable de calculer la dérivée et la primitive de « n'importe quelle » fonction. Le reste du *De methodis serierum et fluxionum* est consacré à de nombreuses applications de cette méthode.

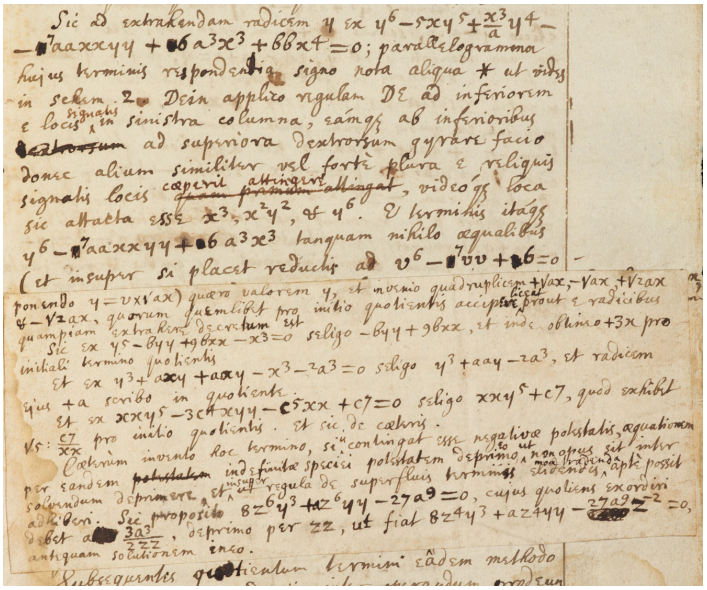
Une erreur de Newton ?

Il est étonnant que Newton ait oublié une racine de l'équation

$$u^6 - 7\,u^2 + 6 = 0.$$

On pourrait croire qu'il pensait que les racines imaginaires $\pm\sqrt{-3}$ conduiraient à des solutions imaginaires pour $y(x)$. Mais ce n'est pas le cas et je pense qu'il s'agit bien d'une erreur. Découvrir en 2016 une erreur dans un article important écrit par Newton vers 1669 est une expérience intéressante. En regardant le manuscrit d'origine, nous voyons que Newton a dû corriger une erreur et coller un morceau de papier au-dessus de la page d'origine. Je soupçonne que la bibliothèque du *Trinity College* n'accepterait

Newton au moment précis de l'erreur ? (Hommage à Gotlib). ©



Une erreur ? ©

pas de décoller le précieux manuscrit pour voir ce qu'il contient. Il faudrait utiliser les rayons X.

En fait, il pourrait y avoir une autre interprétation. Dans son commentaire de l'*Epistola posterior*, Turnbull [27] (note 68, page 159) mentionne une autre « erreur » : selon lui, le « toit » du signe de la racine carrée n'est pas assez long et Newton a écrit par erreur $\sqrt{2}\,x$ au lieu de $\sqrt{2x}$. Il commente ensuite que « Newton rejette les cas imaginaires donnés par $v^2 + 3 = 0$ ». Il est en effet possible que Newton ait fait une erreur avec $\sqrt{2}\,x$ qui l'a conduit à penser que $\sqrt{-3}\,x$ était imaginaire, puis à le rejeter. S'il avait écrit $\sqrt{-3x}$, il aurait vu que cette solution n'est pas imaginaire du tout lorsque $x < 0$. Nous ne le saurons jamais.

27. Newton (I.), *The Correspondence of Isaac Newton, Vol. II: 1676–1687*, Cambridge University Press, 1960.

En effet, $\pm\sqrt{-3}$ est imaginaire mais la fonction approchée $y \approx \pm\sqrt{-3}\,\sqrt{x}$ est réelle si x est un *nombre réel négatif* de sorte qu'elle n'aurait pas dû être rejetée.

Pour la racine réelle $u = 1$, nous posons

$$x = {x_1}^2 \quad , \quad y = x_1(1 + y_1).$$

Pour la racine imaginaire $\sqrt{-3}$, nous posons

$$x = -{x_1}^2 \quad , \quad y = \sqrt{3}\,x_1(1 + y_1)$$

et nous continuons comme précédemment. Nous obtenons finalement une troisième solution *réelle* :

$$y(x) = -3^{1/2}(-x)^{1/2} - 9\times 2^{-3}(-x) - 721\times 2^{-6}\times 5^{-1}\times 3^{-1/2}(-x)^{3/2} - 36\,543\times 2^{-10}\times 5^{-2}(-x)^2$$
$$- 27\,986\,569\times 2^{-15}\times 3^{-3/2}\times 5^{-3}(-x)^{5/2} - 96\,025\,589\times 2^{-18}\times 5^{-4}(-x)^3$$
$$+ 169\,264\,391\,911\times 2^{-22}\times 3^{-5/2}\times 5^{-5}(-x)^{7/2} + 1\,398\,151\,100\,829\times 2^{-25}\times 5^{-6}(-x)^4 + \cdots$$

On peut se demander pourquoi nous avons trouvé trois solutions et pas six puisque l'équation $u^6 - 7u^2 + 6 = 0$ a effectivement six solutions. C'est tout simplement parce que les racines opposées donnent lieu à la même solution. N'oublions pas que Newton considère $\sqrt{x}$ comme une fonction à 2 valeurs, de sorte que pour lui $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ sont « la même chose ». Je reconnais que l'écriture $\sqrt{x} = -\sqrt{x}$ peut conduire à des contradictions, mais pas sous la plume de Newton. Il est sage d'enseigner à nos étudiants que $\sqrt{x}$ est la racine positive pour x réel et positif, et de choisir une détermination principale pour $x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Dans la terminologie moderne, les deux courbes paramétrées (t^2, t) et $(t^2, -t)$ sont les mêmes courbes avec des paramétrages différents.

Tombeau de Newton dans l'abbaye de Westminster.

Ce que Newton n'a pas démontré

La définition de la « convergence » n'était pas à la disposition de Newton. Ses calculs numériques suggèrent cependant que ses séries sont effectivement convergentes et il utilise même le terme *convergent*. Pour être honnête, on pourrait dire qu'il montre seulement que ses séries donnent des *développements asymptotiques*. En pratique, une série $a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \cdots$, où $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ sont des exposants rationnels, est *asymptotique* à une fonction $f(x)$ si, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f(x) - \sum_{i=1}^{k} a_i x^{\alpha_i} = o(x^{\alpha_k}).$$

Cela n'implique pas que $f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^{\alpha_i}$ converge vers f, mais c'est souvent aussi utile et parfois même plus utile qu'une convergence habituelle.

Un autre aspect qu'il n'aborde pas concerne la nature des exposants rationnels qui apparaissent dans ses séries. À chaque

Main droite sur ses quatre livres principaux.

Main gauche pointant vers deux anges qui montrent… la série binomiale.

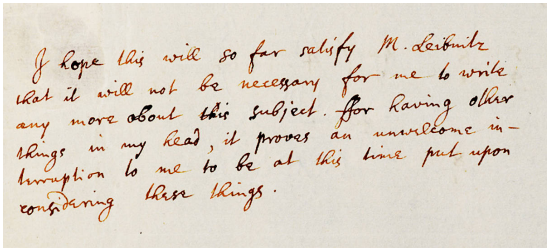
étape, un nouveau nombre rationnel apparaît et il n'est pas évident que cette suite d'exposants converge vers l'infini. Le fait que tous les dénominateurs soient *bornés* est encore moins clair. Cependant, Newton observe que sa méthode n'est pas limitée aux équations polynomiales $P(x,y) = 0$ mais fonctionne parfaitement pour les *aequationes numero terminorum infinitas* de la forme $\sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} x^i y^j = 0$ (avec $a_{00} = 0$), qui font intervenir ce que l'on appelle aujourd'hui des *fonctions analytiques*.

Pour conclure, examinons la courbe originale de Newton :

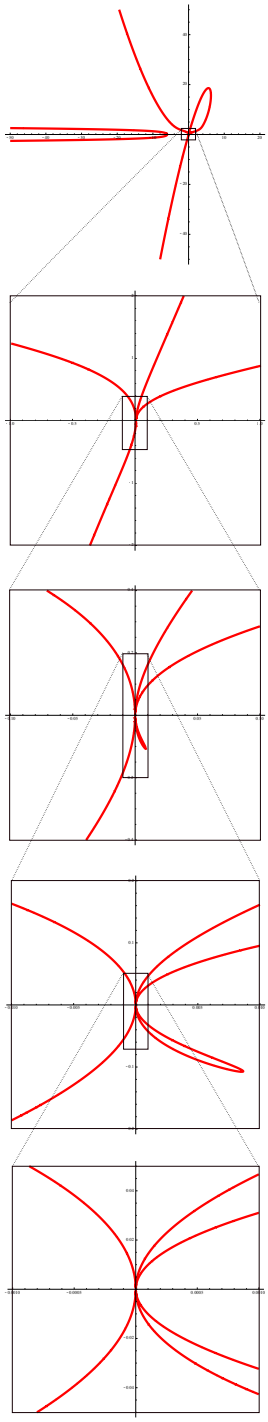
$$P(x,y) = y^6 - 5\,x\,y^5 + x^3\,y^4 - 7\,x^2\,y^2 + 6\,x^3 + x^4 = 0.$$

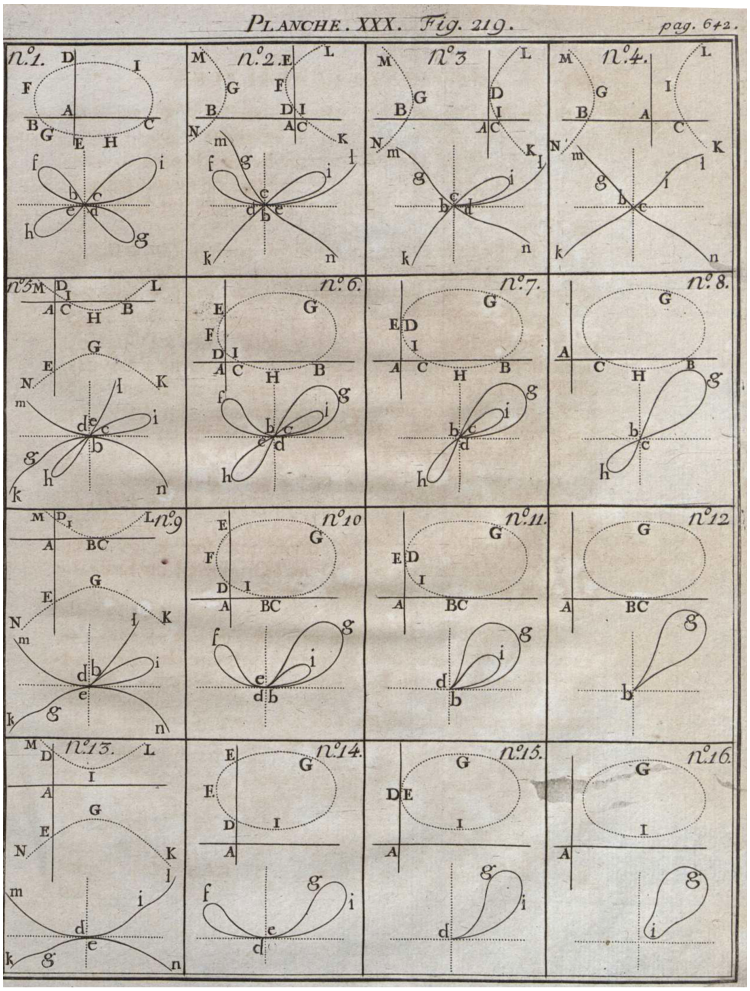
Si je demande à mon ordinateur de tracer cette courbe dans une boîte de $[-50;+20] \times [-50;+50]$, j'obtiens le premier graphique dans la marge. Cela peut paraître surprenant puisque nous ne voyons que deux branches dans le voisinage de l'origine. Faisons un gros plan sur la boîte plus petite $[-1;1] \times [-2;2]$ (2e graphique). Nous pouvons deviner une autre branche. Sur $[-0{,}1\,;\,0{,}1] \times [-0{,}4\,;\,0{,}4]$ (3e graphique), celle-ci est plus facilement visible. La situation locale est tout à fait claire dans $[-0{,}01\,;\,0{,}01] \times [-0{,}2\,;\,0{,}2]$ (4e graphique). Enfin, dans $[-0{,}001\,;\,0{,}001] \times [-0{,}05\,;\,0{,}05]$, nous voyons trois branches asymptotiques à $\pm\sqrt{x}$, $\pm\sqrt{2x}$ et $\pm\sqrt{-3x}$, comme l'avait prédit Newton (sauf qu'il a oublié la troisième pour $x < 0$).

Le polynôme $P(x,y)$ est irréductible : il ne se sépare pas non trivialement en produit de deux polynômes. Cependant, en tant que série de puissances convergentes en x et y, il se décompose au voisinage de l'origine en un produit de trois facteurs qui correspondent aux trois branches.


I hope this will so far satisfy M. Leibnitz that it will not be necessary for me to write any more about this subject. For having other things in my head, it proves an unwelcome interruption to me to be at this time put upon considering these things.

Lorsque Newton a demandé à Oldenbourg de transmettre son *Epistola posterior* à Leibniz, il a ajouté ce *post-scriptum*. Oui, il avait en effet d'autres choses en tête.





Une planche du livre de Cramer sur les courbes. ©

Un peu d'algèbre formelle

L'algèbre présentée dans ce chapitre sera « formelle » puisque nous allons considérer des séries formelles.

Trouver une solution

Permettez-moi de répéter les raisonnements de Newton en les exprimant dans une terminologie algébrique plus moderne. Attribuer tout cela à Newton demande une imagination et une extrapolation infinies. Je soulignerai toutefois une contribution importante de Cramer. Une bonne partie de ce qui suit est attribuée d'habitude à Puiseux, mais cela nécessiterait au moins autant d'extrapolation. Je décrirai la contribution de Puiseux en temps voulu.

Il existe d'excellents livres sur ce sujet. Je recommande notamment Walker [28], Brieskorn et Knörrer [29], Wall [30] et Casas-Alvero [31].

Soit K un *corps algébriquement clos de caractéristique nulle*. Le principal exemple que j'ai à l'esprit est bien sûr le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Quelques notations :

— $\mathrm{K}[x]$ est l'anneau des *polynômes* en x avec des coefficients dans K ;

— $\mathrm{K}(x)$ est le corps des *fonctions rationnelles* en x à coefficients dans K : c'est le corps des fractions de $\mathrm{K}[x]$;

— $\mathrm{K}[\![x]\!]$ est l'anneau des *séries formelles* en x : des expressions de la forme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$ où les a_i sont dans K, sans aucune référence à des questions de convergence ;

28. Walker (R. J.), *Algebraic Curves*, Springer, 1978.

29. Brieskorn (E.) et Knörrer (H.), *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Bâle, 1986.

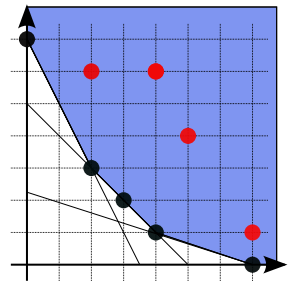
30. Wall (C. T. C.), *Singular Points of Plane Curves*, Cambridge University Press, 2004.

31. Casas-Alvero (E.), *Singularities of Plane Curves*, Cambridge University Press, 2000.

— de la même façon, en deux variables, on définit $K[x,y]$ (polynômes), $K(x,y)$ (fonctions rationnelles) et $K[\![x,y]\!]$ (séries formelles).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Newton sous une forme précise.

Théorème (Newton-Cramer)**.** *Soit* $F(x,y)$ *une série formelle dans* $K[\![x,y]\!]$ *qui s'annule à l'origine et qui n'est pas divisible par* x*. Il existe alors un entier* $m \geqslant 1$ *et une série formelle* $f(t) \in K[\![t]\!]$ *qui s'annule en* 0 *et telle que* $F(t^m, f(t))$ *s'annule identiquement. En d'autres termes, l'équation* $F(x,y) = 0$ *a au moins une « solution » de la forme* $y = f(x^{1/m})$*.*



Un polygone de Newton. Les termes de la série avec a_{ij} non nul sont représentés par des points. Il y a trois droites de support. Notons que je ne suis pas l'idée étrange de Newton d'écrire les i sur l'axe vertical. Pour le bénéfice du lecteur, je suis la tradition et utilise x et y pour les axes horizontaux et verticaux.

Nous avons déjà vu la structure générale de la démonstration.

J'écrirai $F_0(x_0,y_0)$ au lieu de $F(x,y)$ puisque je décrirai une construction itérative impliquant des x_k et y_k. Soit $F_0(x_0,y_0) = \sum_{i,j} a_{ij}\, {x_0}^i\, {y_0}^j$ (avec $a_{00} = 0$) une série formelle. Pour chaque (i,j) tel que $a_{ij} \neq 0$, considérons le quart de plan $x \geqslant i$, $y \geqslant j$. Le polygone de Newton est l'enveloppe convexe de la réunion de ces quarts de plan. La figure en marge montre le polygone pour

$$\begin{aligned} F_0 = {} & {y_0}^7 - {x_0}^2\,{y_0}^3 + {x_0}^2\,{y_0}^6 + {x_0}^3\,{y_0}^2 \\ & + {x_0}^4\,y_0 + {x_0}^4\,{y_0}^6 + {x_0}^5\,{y_0}^4 + {x_0}^7 + {x_0}^7\,y_0. \end{aligned}$$

On peut toujours supposer que F_0 n'est pas divisible par y_0 ou par x_0 puisque nous pourrions diviser par un monôme y_0^j ou x_0^i sans changer le problème. En d'autres termes, chacun des axes coupe le polygone de Newton. Le bord de ce polygone, loin de l'axe, consiste en un nombre fini de segments, inclus dans des *droites de support* dont les équations sont de la forme $\alpha i + \beta j = \gamma$, où α et β sont des entiers strictement positifs que l'on peut supposer premiers entre eux. Choisissons une de ces droites $\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0$ et considérons le nombre fini de coefficients a_{ij} tels que (i,j) soient sur cette droite. Ceci définit un « *polynôme dominant* »

$$F_{\mathrm{dom}}(x_0,y_0) = \sum_{\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0} a_{ij}\, {x_0}^i\, {y_0}^j.$$

Exemple : choisissons la droite de support

$$2i + j = 7,$$

de sorte que $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,1,7)$. $F_{\mathrm{dom}}(x_0,y_0) = {y_0}^7 - {x_0}^2\,{y_0}^3$ et le polynôme p est

$$p(u) = u^7 - u^3.$$

Cherchons une solution approchée de notre équation $F_0(x_0,y_0) = 0$ de la forme

$$x_0 = t^{\alpha_0}, \qquad y_0 = u\,t^{\beta_0}.$$

Choisissons $u_0 = 1$ pour que la solution approchée soit

$$x_0 = t^2, \quad y_0 = t.$$

Par « approchée », je veux dire qu'elle est solution de la partie dominante de notre équation

$$F_{\mathrm{dom}}(t^{\alpha_0}, u\,t^{\beta_0}) = 0.$$

On obtient une équation polynomiale en u :

$$p(u) = \sum_{\alpha_0 i + \beta_0 j = \gamma_0} a_{ij}\,u^j = 0.$$

Puisque K est algébriquement clos, il existe au moins une solution non nulle u_0. Nous revenons ensuite à l'équation originale $F_0(x_0, y_0) = 0$ et remplaçons ${x_1}^{\alpha_0}$ à la place de x_0 et $u_0\,{x_1}^{\beta_0}(1 + y_1)$ à la place de y_0. Cela produit une nouvelle série formelle en (x_1, y_1) qui, par construction, est divisible par ${x_1}^{\gamma_0}$. En divisant par ${x_1}^{\gamma_0}$, on obtient une autre équation équivalente $F_1(x_1, y_1) = 0\ldots$ et le processus peut continuer « à loisir » (selon l'expression de Newton), ce qui produit une suite d'équations $F_k(x_k, y_k)$ $(k \geqslant 1)$ et d'entiers α_k, β_k et γ_k.

Une propriété importante manque et n'a pas été discutée par Newton. Nous devons montrer qu'après un nombre fini de pas, les coefficients α_k sont toujours égaux à 1, ce qui signifie que les pentes de toutes les droites de support sont des inverses d'entiers et pas seulement des nombres rationnels. Ceci est important car chaque étape implique l'introduction d'une racine $x_{k+1} = {x_k}^{1/\alpha_k}$ et nous aurions des problèmes si nous devions le faire un nombre infini de fois.

Cette question est analysée en détail au chapitre VII de l'excellent ouvrage de Cramer intitulé *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*[32] et publié en 1750. L'auteur attribue tout le mérite à Newton mais explique :

> « La vraye Méthode des Séries est fondée sur le Parallélogramme de Mr. Newton, invention excellente, mais dont l'Auteur n'a pas donné la Démonstration, dont il semble même n'avoir pas senti tout le prix. »

Définition. Si F est une série formelle sur $K[\![x, y]\!]$ non divisible par x, la *multiplicité*, notée mult(F), est la valuation de $F(0, y)$ comme série en y. C'est aussi la plus petite hauteur d'un point du polygone de Newton de F sur l'axe vertical.

Première étape. Dans F_0, remplaçons

$$x_0 \to {x_1}^2, \quad y_0 \to x_1(1 + y_1)$$

et divisons par ${x_1}^7$. On obtient

$$\begin{aligned} F_1(x_1, y_1) &= x_1 + 4y_1 + 2{x_1}^2 + 2x_1y_1 + 18{y_1}^2 + \\ &6{x_1}^2y_1 + x_1{y_1}^2 + 34{y_1}^3 + \\ &10{x_1}^2{y_1}^2 + 35{y_1}^4 + \\ &+10{x_1}^2{y_1}^3 + 21{y_1}^5 + \\ &+5{x_1}^2{y_1}^4 + 7{y_1}^6 + 3{x_1}^7 + \\ &{x_1}^2{y_1}^5 + {y_1}^7 + {x_1}^8 + \\ &10{x_1}^7y_1 + {x_1}^8y_1 + 21{x_1}^7{y_1}^2 + \\ &24{x_1}^7{y_1}^3 + 16{x_1}^7{y_1}^4 + \\ &6{x_1}^7{y_1}^5 + +{x_1}^7{y_1}^6, \end{aligned}$$

qui a un terme linéaire non trivial en y_1 de sorte que y_1 peut être développé en série de puissances de x_1.

32. Cramer (G.), *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Frères Cramer et C. Philibert, Genève, 1750.

Gabriel Cramer (1704-1752). Son livre sur les courbes contient, outre une analyse sérieuse des séries de Newton, une théorie des équations linéaires à n inconnues (la fameuse règle de Cramer) et les éléments de la théorie de l'élimination. J'aime bien le titre de l'annexe 1 : « De l'évanouissement des inconnues », ce qui semble plus séduisant que l'« élimination ».

©

Notons que, par convexité, toute droite de support coupe l'axe des j sous mult(F). En particulier, le degré du polynôme $p(u)$ est au plus mult(F).

Lemme. $\mathrm{mult}(\mathrm{F}_1) \leqslant \mathrm{mult}(\mathrm{F})$.

Par définition,

$$\mathrm{F}_1(x_1, y_1) = {x_1}^{-\gamma} \sum_{i,j} a_{ij} {x_1}^{\alpha_0 i + \beta_0 j} {u_0}^j (1+y_1)^j.$$

Pour obtenir $\mathrm{mult}(\mathrm{F}_1)$, nous posons $x_1 = 0$ et regardons la valuation de $p(u_0(1+y_1))$ comme polynôme en y_1 :

$$\mathrm{mult}(\mathrm{F}_1) \leqslant \deg(p) \leqslant \mathrm{mult}(\mathrm{F}). \qquad \boxdot$$

Ainsi, avec l'algorithme de Newton, la suite de multiplicités $\mathrm{mult}(\mathrm{F}_k)$ est décroissante. Cette inégalité est stricte sauf si F_0 a une forme très particulière que nous allons maintenant analyser.

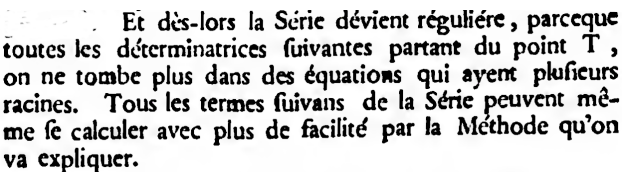
On a égalité si et seulement si $p(u_0(1+y_1))$ contient un seul monôme de degré mult(F). Ceci implique en particulier que le degré de p soit égal à mult(F).

Dit autrement, la racine $y_1 = 0$ de $p(u_0(1+y_1)) = 0$ devrait être multiple d'ordre mult(F). Ceci signifie que p est de la forme

$$p(u) = \mathrm{C}(u - u_0)^{\mathrm{mult}(\mathrm{F})}.$$

Ce polynôme a des coefficients non nuls de chaque degré de 0 à mult(F). Donc le segment du bord du polygone de Newton que nous avons choisi contient des points pour chaque valeur de j de $j = 0$ à $j = \mathrm{mult}(\mathrm{F})$. Ceci implique que le polygone de Newton n'a qu'un seul côté (autre que les axes) et que $\alpha_0 = 1$.

Résumons



Et dès-lors la Série dévient réguliére, parceque toutes les déterminatrices ſuivantes partant du point T, on ne tombe plus dans des équations qui ayent pluſieurs racines. Tous les termes ſuivans de la Série peuvent même ſe calculer avec plus de facilité par la Méthode qu'on va expliquer.

Extrait de la démonstration de Cramer (page 200).

Durant l'algorithme, les multiplicités $\mathrm{mult}(\mathrm{F}_k)$ sont décroissantes et doivent donc être constantes après un certain temps. À ce

stade, tous les polygones de Newton ont $\alpha_k = 1$ (et ont de plus la structure spéciale qui vient d'être décrite). On a

$$x_0 = {x_1}^{\alpha_0} = {x_2}^{\alpha_0\alpha_1} = \ldots = {x_k}^{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{k-1}} = \ldots$$

et

$$y_0 = u_0\,{x_1}^{\beta_1}(1+y_1) = u_0\,{x_1}^{\beta_1}(1+u_1\,{x_2}^{\beta_2}(1+y_2)) = \ldots$$

Puisque les α_k valent 1 pour les grandes valeurs de k, on peut définir m comme le produit de tous les α_k et appeler t la valeur de x_k pour k grand. On a $x_0 = t^m$ et plus généralement, chaque x_k est une puissance de t avec un exposant entier strictement positif.

La formule de récurrence

$$y_k = u_k\,{x_{k+1}}^{\beta_{k+1}}(1+y_{k+1})$$

définit une suite de polynômes $y_k(t)$ en la variable t. Cette suite « converge » vers une série limite $f(t)$ dans $\mathrm{K}[\![t]\!]$. Cela signifie que la valuation de $f(t) - y_k(t)$ tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini.

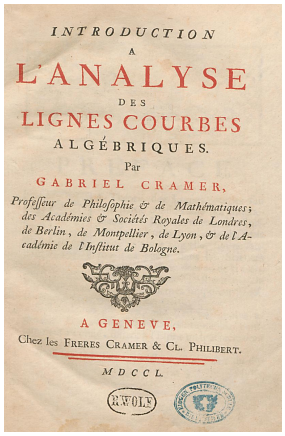
Pour être complet, il faut vérifier qu'il s'agit bien d'une solution de notre problème, c'est-à-dire que $\mathrm{F}(t^m, f(t))$ s'annule bien identiquement. J'encourage le lecteur à le faire. Après tout, l'algorithme n'avait qu'un seul but : trouver une solution.

C'est la démonstration du théorème de Newton : toute équation de la forme $\mathrm{F}(x,y) = 0$ a une solution, dans un sens bien défini. ⊡

Clôture algébrique

Il est temps de donner une définition précise des séries à exposants rationnels. Notons $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$ le corps des *séries formelles de Laurent*, c'est-à-dire des expressions formelles de la forme $\sum_{i\geqslant i_0}^{\infty} a_i x^i$ (où i_0 peut être un entier négatif). C'est le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{K}[\![x]\!]$.

Plus généralement, si m est un entier strictement positif, on désigne par $\mathrm{K}[\![x^{1/m}]\!][x^{-1/m}]$ le corps des séries formelles de Laurent en la variable $x^{1/m}$: des expressions formelles de la

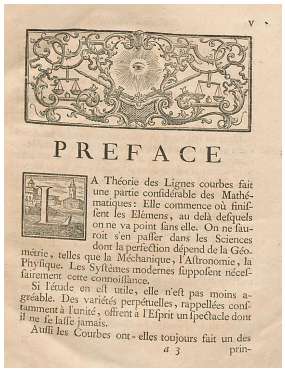

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.
Par
GABRIEL CRAMER,
Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.
A GENEVE,
Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.
M D C C L.

©

Considérons la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_2$ du corps $\mathbb{F}_2$ à 2 éléments. Essayer l'algorithme sur le polynôme $\mathrm{F} = y^2 + x^2y + x^2$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_2$ et montrer que l'on obtient la solution

$$y = x\left(1 + x^{\frac{1}{2}} + \cdots + x^{1-2^{-k}} + \cdots\right).$$

Il ne s'agit pas d'une série de Puiseux puisque les exposants $1 - 2^{-k}$ n'ont pas de dénominateur commun et ne tendent même pas vers l'infini. Que s'est-il passé ?


PREFACE
A Théorie des Lignes courbes fait une partie considérable des Mathématiques: Elle commence où finissent les Elemens, au delà desquels on ne va point sans elle. On ne sauroit s'en passer dans les Sciences dont la perfection dépend de la Géométrie, telles que la Mechanique, l'Astronomie, la Physique. Les Systêmes modernes suppolent nécessairement cette connoissance.
Si l'étude en eſt utile, elle n'eſt pas moins agréable. Des variétés perpétuelles, rappellées constamment à l'unité, offrent à l'Eſprit un Spectacle dont il ne ſe laſſe jamais.
Auſſi les Courbes ont-elles toujours fait un des
a 3 prin-

« Un spectacle dont on ne se lasse jamais ».

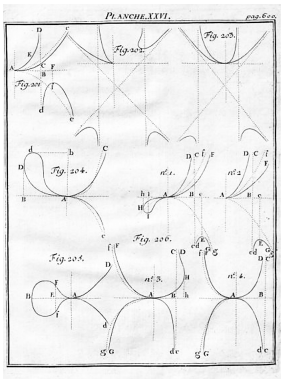
forme $\sum_{i\geqslant i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$ (où i_0 peut être un entier négatif). Le sous-corps constitué des séries pour lesquelles $a_i = 0$ chaque fois que i n'est pas divisible par m est canoniquement isomorphe à $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$ de sorte que l'on voit $\mathrm{K}[\![x^{1/m}]\!][x^{-1/m}]$ comme une extension du corps $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$. Le groupe de Galois de cette extension est facile à décrire : il est constitué des racines m-ièmes de l'unité. L'action d'une telle racine ω sur

$$\sum_{i\geqslant i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$$

produit

$$\sum_{i\geqslant i_0}^{\infty} \omega^i a_i x^{i/m}.$$

C'est une extension de Galois : les éléments de $\mathrm{K}[\![x^{1/m}]\!][x^{-1/m}]$ qui sont invariants sous l'action du groupe de Galois sont dans $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$.



De la même manière, si m_1 divise m_2, le corps $\mathrm{K}[\![x^{1/m_1}]\!][x^{-1/m_1}]$ est un sous-corps de $\mathrm{K}[\![x^{1/m_2}]\!][x^{-1/m_2}]$. La limite inductive de toutes ces extensions de $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$ est notée $\mathrm{K}[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$.

C'est le *corps des séries de Puiseux* : des séries à exposants rationnels avec un dénominateur commun. En termes simples, une série de Puiseux est une expression formelle de la forme $\sum_{i\geqslant i_0}^{\infty} a_i x^{i/m}$ pour un entier strictement positif m. Les séries de Puiseux avec $i_0 \geqslant 0$ constituent un anneau, noté $\mathrm{K}[\![x^\star]\!]$.

©

Théorème (Newton-Cramer)**.** *Le corps des séries de Puiseux* $\mathrm{K}[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$ *est algébriquement clos. C'est la clôture algébrique du corps des séries de Laurent* $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$.

Ce théorème n'est rien d'autre qu'une reformulation du théorème principal de ce chapitre.

Le fait que $\mathrm{K}[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$ soit une extension algébrique de $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$ est clair. En effet, toute série de Puiseux est dans un certain $\mathrm{K}[\![x^{1/m}]\!][x^{-1/m}]$. Elle est donc algébrique sur $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$.

Considérons une équation polynomiale (non constante) à coefficients dans $\mathrm{K}[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$ de la variable y. En posant $\overline{x} = x^{1/m}$ pour un m hautement divisible et en multipliant tous les coefficients par une puissance élevée de $\overline{x}$, on peut supposer que les

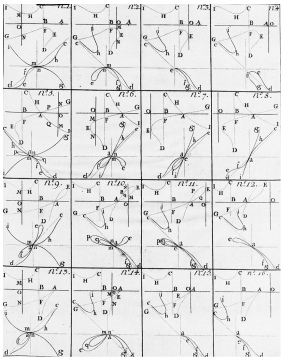
coefficients de notre polynôme sont dans $K[\![\overline{x}]\!]$. Notre équation est donc de la forme $F(\overline{x}, y) = 0$, où F est une série formelle. On sait qu'une telle équation a une solution qui est une série en $\overline{x}^{1/\overline{m}}$ pour un certain $\overline{m}$, qui est en particulier dans $K[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$. Donc pour tout polynôme non constant à coefficients dans $K[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$, on trouve une racine dans $K[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$. ⊡

Trouver toutes les solutions

Si l'on pense à $F(x, y) = 0$ comme une équation où l'inconnue est une série $y(x) \in K[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$, on peut essayer, comme on le ferait avec une équation polynomiale usuelle, de factoriser F comme produit de facteurs linéaires dans la clôture algébrique

$$F = A(x, y)(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x)),$$

où $A(0, 0) \neq 0$ et les n solutions $f_i(x)$ sont dans $K[\![x^\star]\!][x^{\star-1}]$. Ce serait facile si F était un polynôme en la variable y, mais c'est seulement une série formelle. Il n'est pas même clair que notre équation ait un nombre fini de solutions.



En fait, Newton avait raison et nos équations sont effectivement très proches d'équations polynomiales « standard », comme je l'explique maintenant.

Commençons avec des observations élémentaires.

Lemme. *Supposons qu'une série formelle $y = f(x) \in K[\![x]\!]$ soit une solution de l'équation $F(x, y) = 0$ où $F \in K[\![x, y]\!]$. Alors F est divisible par $y - f(x)$ dans $K[\![x, y]\!]$.*

C'est évident si $f(x) = 0$. La transformation formelle $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ induit un automorphisme de $K[\![x, y]\!]$ qui envoie y vers $y - f(x)$. ⊡

Lemme. *Pour tout $f \in K[\![x^\star]\!]$, définissons*

$$\overline{f}(x, y) = (y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_m(x)),$$

où $f_1, \ldots, f_m$ sont les conjugués de Galois de f. Alors $\overline{f}(x, y)$ est dans $K[\![x, y]\!]$.

C'est clair puisque $\overline{f}(x,y)$ est un polynôme en y dont les coefficients sont invariants par le groupe de Galois. Remarquons que ce polynôme est le polynôme minimal de l'élément f dans $\mathrm{K}[\![x^\star]\!][x^{\star -1}]$ comme extension algébrique de $\mathrm{K}[\![x]\!][x^{-1}]$. ⊡

Lemme. *Supposons qu'une série formelle de Puiseux $y = f(x) \in \mathrm{K}[\![x^\star]\!]$ soit une solution de l'équation $\mathrm{F}(x,y) = 0$, où $\mathrm{F} \in \mathrm{K}[\![x,y]\!]$. Alors la série associée $\overline{f}(x,y) \in \mathrm{K}[\![x,y]\!]$ divise $\mathrm{F}(x,y)$ dans l'anneau $\mathrm{K}[\![x,y]\!]$.*

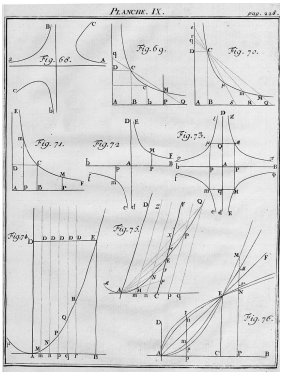
Puisque f est une solution et que l'équation est invariante par le groupe de Galois, tous les conjugués sont aussi des solutions. On montre ensuite, en utilisant le premier lemme m fois que F est divisible par $\overline{f}(x,y)$ dans $\mathrm{K}[\![x^{1/m},y]\!]$. Mais le quotient $\mathrm{F}/\overline{f}$ est invariant par le groupe de Galois de sorte qu'il est en fait dans $\mathrm{K}[\![x,y]\!]$. ⊡

On peut maintenant démontrer le *théorème de préparation de Weierstrass* pour les séries formelles.

Théorème. *Soit $\mathrm{F}(x,y) \in \mathrm{K}[\![x,y]\!]$. Supposons que* F *ne soit pas divisible par x. Alors* F *s'écrit comme un produit $\mathrm{A}(x,y)\mathrm{P}(x,y)$, où* A *et* P *sont dans $\mathrm{K}[\![x,y]\!]$ et*

— *$\mathrm{A}(0,0) \neq 0$ de sorte que* A *est un élément inversible ;*

— *$\mathrm{P}(x,y)$ est un polynôme en y.*



©

La démonstration se fait par récurrence sur la multiplicité mult(F). Remarquons que la valuation d'un produit est la somme des valuations et que $\mathrm{mult}(\mathrm{F}) = 0$ signifie précisément que $\mathrm{F}(0,0) \neq 0$. Si $\mathrm{mult}(\mathrm{F}) \geqslant 1$, on sait que F a au moins une solution en $y = f(x) \in \mathrm{K}[\![x^\star]\!]$ et que F est divisible par $\overline{f}(x,y) \in \mathrm{K}[\![x,y]\!]$. Le quotient a une multiplicité moindre. ⊡

On peut maintenant récolter et énoncer deux corollaires qui résultent facilement du théorème précédent. Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas classique d'anneaux polynomiaux sur des corps.

Théorème. *Tout élément non nul* F *de $\mathrm{K}[\![x,y]\!]$ peut être décomposé en*

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}(x,y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x)),$$

où $\mathrm{A} \in \mathrm{K}[\![x,y]\!]$ est tel que $\mathrm{A}(0,0) \neq 0$, les n solutions $f_i(x)$ sont dans $\mathrm{K}[\![x^\star]\!]$ et $r \geqslant 0$.

Théorème. *L'anneau* $\mathrm{K}[\![x,y]\!]$ *est un anneau factoriel.*

Les facteurs irréductibles sont les $\overline{f_i} \in \mathrm{K}[\![x,y]\!]$.

On conclut ce chapitre avec deux exercices.

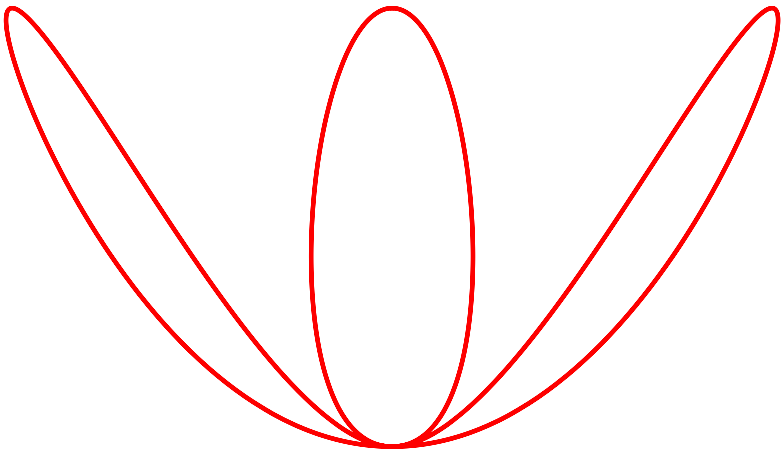
Exercice. L'algorithme de Newton produit des solutions $y(x)$. À chaque étape, on doit choisir une des droites de support sur le bord du polygone et une racine de l'équation polynomiale correspondante. Montrer que cet algorithme produit *toutes les solutions* $f_i(x)$ de $\mathrm{F}(x,y) = 0$.

Exercice. Supposons que l'on suive l'algorithme de Newton en utilisant certains choix de segments, qui conduisent à une solution $y = f(x)$. Le processus produit une suite de séries formelles $\mathrm{F}_k(x_k, y_k)$. On a montré que les multiplicités $\mathrm{mult}(\mathrm{F}_k)$ de F_k finissent par être constantes. Montrer que la « multiplicité finale » est simplement la multiplicité de la racine, c'est-à-dire le nombre de facteurs égaux à $(y - f(x))$ dans la décomposition de F ci-dessus comme produit $\mathrm{A}(x,y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x)) \cdots (y - f_n(x))$.

Assez d'algèbre pour le moment.

« Il est fâcheux que Mr. Newton se soit contenté d'étaler ses découvertes sans y joindre de démonstrations et qu'il ait préféré le plaisir de se faire admirer à celui d'instruire. »

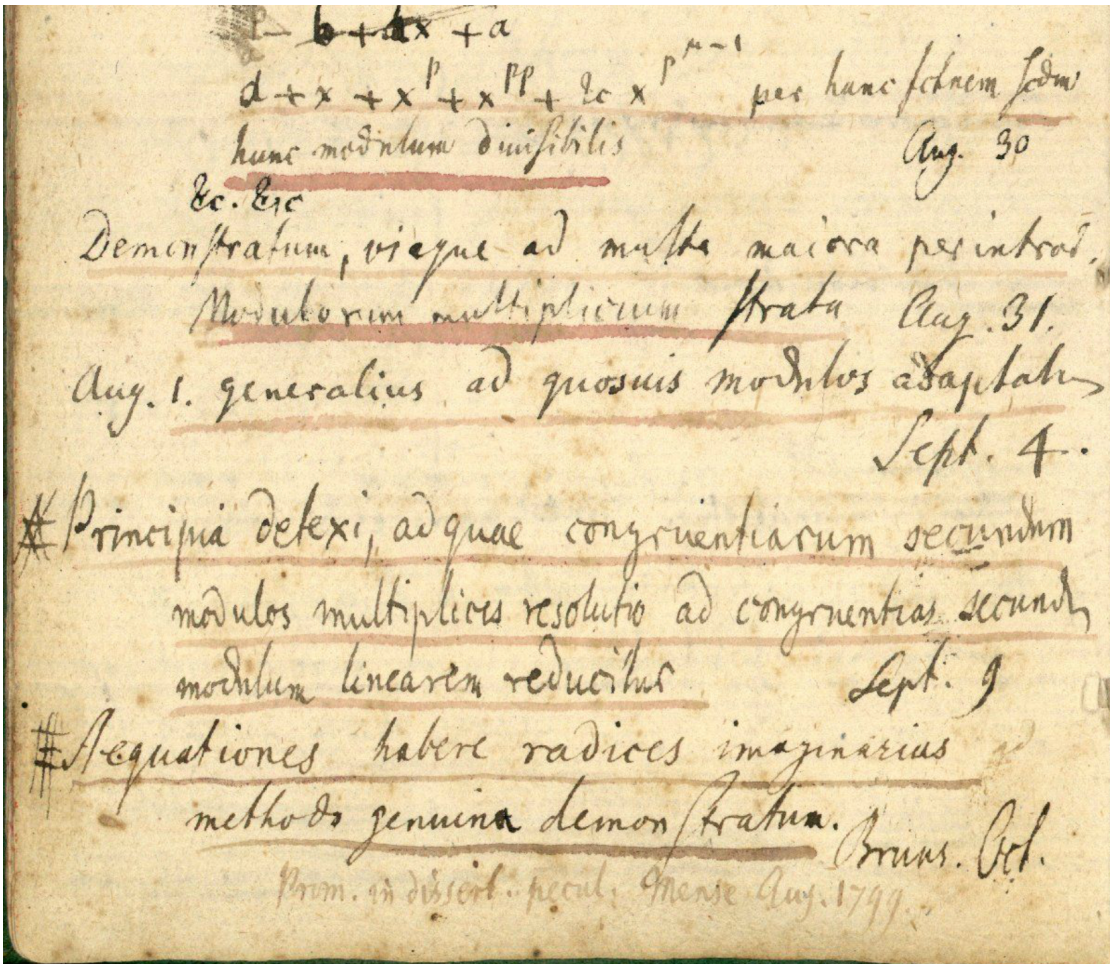
Extrait de la préface de Cramer.



Ceci est l'une des courbes sextiques étudiées par Cramer, dont l'équation est

$$y^6 - \left(y - x^2\right)\left(y - 4\,x^2\right)^2 = 0.$$

Le point singulier a 3 branches. Pouvez-vous dessiner ces branches ?



À partir de 1796 c'est-à-dire de ses 19 ans, Gauss a consigné ses découvertes mathématiques dans son célèbre *Tagebuch* : une liste impressionnante de résultats. Voir les commentaires de Klein [33] et [34] pour une traduction en français. Cette page concerne les mois d'août à octobre 1797. Le dernier point, *Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum*, annonce sa démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Sous cette ligne, avec une encre différente, un ajout ultérieur mentionne que c'était le thème de sa thèse : « *Prom[ulgatum] in dissert[atione] pecul[iari] mense Aug. 1799* » ©

33. Klein (F.), Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796–1814, *Math. Ann.*, n° 57(1), 1903, p. 1-34.

34. Eymard (P.) et Lafon (J. P.), Le journal mathématique de Gauss : traduction française annotée, *Rev. Hist. Sci. Appl.*, n° 9(1), 1956, p. 21-51.

Curuam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse : Gauss sur les courbes algébriques

Un timbre commémorant le plan complexe de Gauss. ©

Le théorème fondamental de l'algèbre

Carl Friedrich Gauss avait 22 ans lorsqu'il a soutenu sa thèse en 1799. C'est un travail remarquable[35] qui contient ce qui peut éventuellement être considéré comme la première « démonstration » du théorème fondamental de l'algèbre.

Tout polynôme non constant à coefficients complexes a au moins une racine.

Dans une terminologie légèrement différente, et sans utiliser les mots « complexe » ou « imaginaire », qui étaient suspects à l'époque, il a démontré que tout polynôme réel est un produit de facteurs de degré 1 ou 2. Dans une autre langue, le titre de son doctorat est

> « DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM VNIVS VARIABILIS IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADVS RESOLVI POSSE. »

Il ne s'agit pas d'une démonstration selon les normes actuelles, mais je vais présenter une légère variation sur le même thème qui est parfaitement acceptable pour les mathématiciens du xxie siècle. Ce n'était pas la première tentative de démonstration.

35. Gauß (C. F.), *Werke, Band III*, Réimpression de l'original de 1866, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973.

Gauss a obtenu son diplôme à l'université de Helmstedt. Son conseiller officiel était Johann Friedrich Pfaff, qui a lu attentivement la thèse. Cependant, ce doctorat était *in absentia* : il n'y a pas eu de présentation orale. Le manuscrit mentionne que le résultat principal a été obtenu en octobre 1797. Une traduction anglaise de la thèse, par Ernest Fandreyer, est disponible en ligne. Une traduction française se trouve dans le livre de Dhombres et Alvarez cité un peu plus loin.

Parmi les prédécesseurs de Gauss, on peut citer d'Alembert, Euler et Lagrange. Aucune de ces « démonstrations » antérieures n'était solide, même à l'époque, mais je vais aussi essayer de reconstruire la démonstration de d'Alembert puisqu'il a utilisé le polygone de Newton.

La première moitié de la thèse de Gauss est une critique de ses prédécesseurs. Il explique soigneusement pourquoi les démonstrations de d'Alembert, Euler et Lagrange sont erronées. Il est difficile d'imaginer une situation similaire aujourd'hui, celle d'un très jeune homme soutenant son doctorat et commençant par une destruction systématique de grands maîtres respectés, décédés seulement quinze ans plus tôt ou même encore en vie comme dans le cas de Lagrange. Puis, dans une seconde partie, Gauss donne sa démonstration. Belle démonstration, certes, mais pas totalement exempte de « faits non démontrés ». À un moment crucial, qui sera décrit plus loin, il a besoin d'une description assez précise de la structure locale d'une courbe algébrique réelle. Il affirme alors sans preuve :

> « Mais selon les mathématiques supérieures, toute courbe algébrique (ou les parties individuelles d'une telle courbe algébrique si elle est éventuellement constituée de plusieurs parties) soit se retourne sur elle-même, soit s'étend à l'infini. Par conséquent, une branche de toute courbe algébrique qui entre dans un espace limité doit nécessairement sortir de cet espace quelque part. »

Les « faits non démontrés » de Gauss n'ont rien à voir avec les « faits alternatifs » de Trump : après tout, ils sont vrais.

« Iam ex geometria sublimori constat, quamuis curuam algebraicam, (siue singulas cuiusuis curuae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redientem aut vtrimque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curuae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere. »

En d'autres termes, Gauss affirme qu'une courbe algébrique ne peut pas simplement s'arrêter en un point. La « démonstration » est donnée dans une note de bas de page. C'est un exemple typique de démonstration par intimidation :

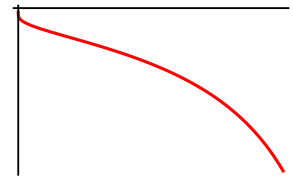
> « Il semble avoir été démontré avec suffisamment de certitude qu'une courbe algébrique ne peut ni être interrompue soudainement n'importe où (comme cela se produit par exemple avec la courbe transcendante dont l'équation est $y = 1/\log x$) ni se perdre, pour ainsi dire, en un point donné après un nombre infini de spires (comme la spirale logarithmique). À ma connaissance, personne n'a émis de doutes à ce sujet. Cependant, si quelqu'un l'exige, je m'engage à donner une démonstration qui n'est sujette à aucun doute à une autre occasion. »

« Satis bene certe demonstratum esse videtur, curuam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (vti e. g. euenit in curua transscendente, cuius aequatio $y = 1/\log x$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (vt spiralis logarithmica), quantumque scio nemo dubium contra rem mouit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam. »

« Personne n'a émis de doutes et il le démontrera à une autre occasion » ☺! En fait, il n'a jamais démontré cette affirmation,

même s'il a publié plus tard trois autres démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre, comme s'il n'était pas lui-même convaincu. Quel jeune homme arrogant (et brillant) !

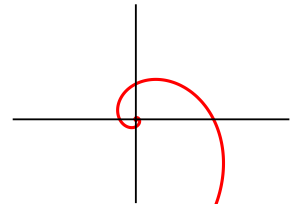
Gauss donne deux exemples de courbes. Le premier est le graphique de $1/\log(x)$ et le second est la spirale logarithmique ($r = \exp(\theta)$ en coordonnées polaires). Toutes deux peuvent être définies par une équation $F(x, y) = 0$ et toutes deux ont une sorte de *point d'arrêt*. Si nous dessinons un petit disque autour de ce point, la courbe entre dans ce disque mais n'en sort pas. L'affirmation (correcte) de Gauss est que cela est dû à la nature transcendante de ces courbes et que cela ne se produit pas pour les courbes algébriques pour lesquelles $P(x, y)$ est un polynôme.



La courbe $x \exp(-1/y) = 1$ (c'est-à-dire $y = 1/\log x$) a une « impasse » en $(0, 0)$.

Reconstruction de la démonstration de Gauss

Mon intention n'est certainement pas d'analyser cette démonstration d'un point de vue historique. Il y aurait beaucoup à dire sur les concepts de continuité et de courbe, les arguments topologiques et surtout l'utilisation géométrique des nombres complexes comme points dans un plan. Je recommande les livres de Dhombres et Alvarez [36] et de Van der Waerden [37]. Je me contenterai de mentionner un point de vue lucide exprimé par Gauss plus de vingt ans avant Abel et Galois. Dans ce qui suit, ce qu'il appelle une *équation pure* est une équation de la forme $x^n = a$.



La spirale logarithmique d'équation $y - x \log \tan(x^2 + y^2) = 0$ ($\rho = \exp(-\theta)$ en coordonnées polaires) a un nombre infini de spires lorsqu'elle converge vers l'origine.

> « Après tant de travail de la part de si grands mathématiciens, il reste très peu d'espoir d'arriver un jour à une solution générale des équations algébriques. Il semble de plus en plus probable qu'une telle solution soit totalement impossible et contradictoire. Cela ne doit nullement être considéré comme un paradoxe, car ce que l'on appelle communément la solution d'une équation n'est en fait rien d'autre que sa réduction à des équations pures. Car la solution des équations pures n'est pas enseignée ici, mais présupposée ; et si l'on exprime les racines d'une équation $x^m = H$ par $\sqrt[m]{H}$, on ne l'a nullement résolue, et l'on n'a pas fait plus que si l'on avait imaginé un symbole quelconque pour désigner la racine d'une équation $x^h + Ax^{h-1} + \text{etc.} = 0$ et que l'on ait placé la racine égale à ce symbole. »

Mon modeste objectif est de proposer une reconstruction

36. Dhombres (J.) et Alvarez (C.), *Une histoire de l'invention mathématique : les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*, Hermann, Paris, 2013.

37. Van der Waerden (B. L.), *A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer, 1985.

moderne de la démonstration, en montrant pourquoi Gauss avait besoin de comprendre la nature locale des courbes algébriques. Soit $P(z)$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes. L'idée principale est de considérer $z = x + iy$ comme un point du plan et $P(x+iy)$ comme $p(x,y) + iq(x,y)$, ce qui définit deux polynômes réels en (x,y). Démontrer l'existence d'une racine complexe de P revient à montrer que les deux courbes algébriques $p(x,y) = 0$ et $q(x,y) = 0$ ont une intersection non vide. Nous allons analyser le comportement qualitatif de ces deux courbes au voisinage de l'infini.

Notons que l'idée « simple » de considérer un polynôme comme une application d'un plan dans un autre plan était une idée nouvelle en 1797.

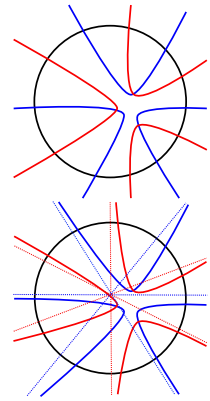
Lorsque le module de z est grand, $P(z)$ et z^n sont équivalents : on considère en première approximation les courbes

$$\Re(x+iy)^n = 0\,, \qquad \Im(x+iy)^n = 0.$$

Ces équations définissent des rayons

$$\arg z = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (0 \leqslant k \leqslant 2n-1), \quad \arg z = \frac{2k\pi}{2n} \quad (0 \leqslant k \leqslant 2n-1),$$

qui se coupent à l'origine. Ces $2n$ droites coupent chaque cercle $|z| = R$ en $4n$ points. La première affirmation de Gauss est :



Lemme. *Lorsque* R *est suffisamment grand, chacune des deux courbes algébriques* $p(x,y) = 0$ *et* $q(x,y) = 0$ *coupe le cercle* $|z| = R$ *en* $2n$ *points proches des précédents.*

Les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{R^n}P(R\exp(i\theta))$ sont des polynômes trigonométriques de degré n en la variable θ qui sont proches de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. Par conséquent, chacune s'annule au plus $2n$ fois et elles s'annulent $2n$ fois par le théorème des valeurs intermédiaires. Les détails élémentaires sont laissés au lecteur. La démonstration de Gauss sur ce point est parfaite. ⊡

Voici maintenant la partie topologique de la démonstration.

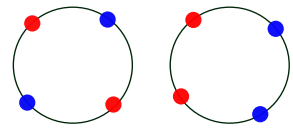
Supposons d'abord que les courbes algébriques $p(x,y) = 0$ et $q(x,y) = 0$, que nous appellerons les courbes bleue et rouge, soient lisses. À l'intérieur du disque $|z| \leqslant R$, elles consistent en un nombre fini d'arcs, chacun difféomorphe à $[0,1]$, et un certain nombre de lacets difféomorphes à un cercle. Ceci découle de la classification des variétés compactes à une dimension (voir par exemple [38] ou [39]). Il y a $4n$ points sur un cercle, bleus et rouges,

38. Milnor (J. W.), *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

39. Guillemin (V.) et Pollack (A.), *Differential topology*, American Mathematical Society, 2010.

avec des couleurs alternées. Nous dirons que deux points (de la même couleur) sont *appariés* s'ils sont des points limites de l'un de ces arcs bleus ou rouges, *à l'intérieur du disque*. Notre ensemble de $4n$ points est donc constitué de $2n$ paires.

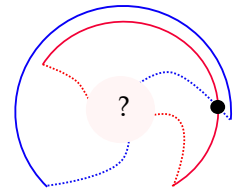
Considérons quatre points distincts sur le cercle, dont deux sont coloriés en rouge et les deux autres en bleu. Du point de vue topologique, il y a deux possibilités. Ils peuvent être *entrelacés* ou *non entrelacés*. En faisant le tour du cercle, nous lisons des couleurs alternées, comme « bleu, rouge, bleu, rouge » dans le cas entrelacé, et « bleu, bleu, rouge, rouge » dans le cas non entrelacé. Le lemme topologique crucial, qui est intuitif, est le suivant :



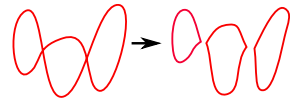
Entrelacés et non entrelacés.

Lemme. *Soient b_0, b_1, r_0 et r_1 quatre points du cercle tels que $\{b_0, b_1\}$ et $\{r_0, r_1\}$ soient entrelacés. Soit b (resp. r) un arc lisse dans le disque qui relie b_0 et b_1 (resp. r_0 et r_1). Alors b et r se coupent non trivialement.*

Cela découle de l'un des tout premiers théorèmes de topologie algébrique (qui n'était donc pas formellement à la disposition de Gauss). *Deux courbes fermées du plan qui se coupent transversalement ont un nombre pair de points d'intersection* (voir par exemple le livre de Milnor). S'il pouvait exister des arcs *disjoints* qui relient les points bleu et rouge *à l'intérieur du disque*, nous pourrions construire deux lacets dans le plan qui se coupent en exactement un point (voir la figure dans la marge). ⊡



Le fait que *deux courbes fermées transverses dans le plan se coupent en un nombre pair de points* est plus ou moins équivalent au théorème de Jordan : « *le complémentaire d'une courbe fermée simple dans le plan a exactement deux composantes connexes.* » En effet, si c_1 et c_2 sont fermées et transverses, on peut d'abord modifier légèrement c_1, sans changer son intersection avec c_2, de telle sorte que c_1 devienne une immersion avec des auto-intersections transverses. Puis on modifie c_1 comme dans la figure ci-dessous, toujours sans changer l'intersection avec c_2, afin de les remplacer par une réunion disjointe de courbes fermées *simples*. Maintenant, par le théorème de Jordan, chaque fois que c_2 entre dans une composante connexe du complémentaire de c_1 (modifiée), elle doit en sortir, de sorte qu'il y a effectivement un nombre pair d'intersections. Essayez de démontrer le théorème de Jordan à partir de la parité d'intersection.



Lemme. *Supposons que $2k$ personnes s'assoient autour d'une table et se serrent la main deux par deux, sans croiser les bras ! Alors au moins deux voisins se serrent la main.*

Pour $k = 2$, c'est le lemme précédent. Considérons deux personnes qui se serrent la main. Elles décomposent le bord de la table en deux intervalles. Si l'un d'eux est vide, nous avons terminé. Sinon, on procède par récurrence. ⊡

En supposant toujours que les deux courbes $p(x, y) = 0$ et $q(x, y) = 0$, bleue et rouge, soient lisses, on démontre le théorème fondamental de l'algèbre à la manière de Gauss. Par l'absurde, supposons que les arcs bleu et rouge ne se croisent pas. Par le lemme précédent, deux voisins sur le cercle sont appariés. C'est

impossible puisque des points consécutifs n'ont pas la même couleur. ⊡

Démontrer que le nombre de « paires non croisées » d'un nombre pair de points sur un cercle est un nombre de Catalan.

Maintenant, nous comprenons la difficulté pour laquelle « personne n'a émis de doutes ». S'il y avait une courbe algébrique avec un cul-de-sac, un arc pourrait pénétrer *à l'intérieur du disque* et s'y arrêter sans sortir et cela serait fatal pour la démonstration.

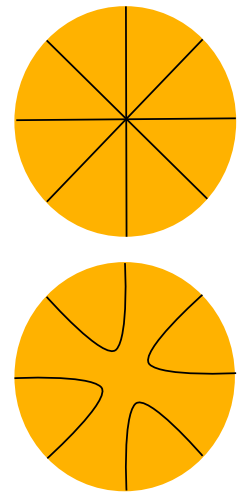
Précisons l'affirmation de Gauss.

Théorème. *Soit* (x_0, y_0) *un point sur une courbe algébrique réelle* $\mathscr{C}$ *définie par* $\mathrm{F}(x,y) = 0$ *où* F *est un polynôme réel dans* $\mathbb{R}[x,y]$. *Il existe alors un homéomorphisme d'un petit disque centré en* (x_0, y_0) *qui envoie* $\mathscr{C}$ *vers la réunion d'un* nombre pair *de rayons distincts.*

Cette affirmation est bien vraie et « je m'engage à en donner une démonstration qui ne souffre aucun doute à une autre occasion ».

Vous devrez attendre le prochain chapitre !

En supposant que cela soit vrai, il est facile de terminer la démonstration. Si les courbes bleue et rouge $p(x,y) = 0$ et $q(x,y) = 0$ sont singulières et disjointes, il suffit de les modifier légèrement, comme en marge, localement dans de petits voisinages disjoints de tous les points singuliers, en reliant les rayons deux à deux, de sorte qu'ils deviennent des *arcs non singuliers disjoints*. Nous avons vu que cela n'est pas possible. ⊡



Commentaires sur cette démonstration

Steve Smale a présenté cette démonstration dans un article traitant des versions effectives du théorème fondamental de l'algèbre [40]. Il a mis l'accent sur l'affirmation non démontrée de Gauss :

> « Mais pour l'instant, je souhaite souligner l'immense lacune que contenait la démonstration de Gauss. C'est un point subtil, même aujourd'hui, qu'une courbe algébrique plane réelle ne peut pas entrer dans un disque sans en sortir. »

Il commente également le débat sans fin sur la question de savoir qui a donné la « première » démonstration acceptable.

> « On peut peut-être mieux comprendre la situation historique du point de vue d'Imre Lakatos [41]. Lakatos, dans la tradition de Hegel d'une part et de Popper d'autre part, considère les

40. Smale (S.), The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, nº 4(1), 1981, p. 1-36.

41. Lakatos (I.), *Preuves et réfutations* (trad. É. Zahar et N. Balacheff), Hermann, Paris, 1984.

mathématiques comme un développement qui se déroule comme une série de « preuves et réfutations. »

Il existe de nombreuses façons de « réparer » la preuve et de combler « l'immense lacune ». Tout d'abord, je dois mentionner le long article détaillé d'Ostroswki, daté de 1920, entièrement consacré à la preuve de l'affirmation de Gauss [42]. Les courbes $p(x,y) = 0$ et $q(x,y) = 0$ utilisées par Gauss sont bien des courbes algébriques, mais ce sont des courbes algébriques très particulières. Dans la terminologie moderne, ces polynômes sont les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe $P(z)$ et sont donc des polynômes *harmoniques*. La démonstration détaillée d'Ostrowski traite en fait des polynômes harmoniques, ce qui est suffisant pour notre problème. Avec des notions élémentaires d'analyse complexe, il est en effet facile de compléter les détails, comme je le montre maintenant.

Considérons $P(z) = P(x+iy) = p(x,y) + iq(x,y)$ comme une application de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ vers une autre copie de lui-même. La différentielle de cette application P en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ peut être vue soit comme une matrice réelle 2×2, soit comme le nombre complexe $P'(z_0)$. Par conséquent, les points critiques sont simplement les zéros de la dérivée P', qui sont en nombre fini. Les courbes bleue et rouge sont les images inverses des deux axes. Analysons l'image inverse par P d'une certaine droite.

En cas d'urgence, le livre [43] peut être utile pour comprendre ces figures.

Dans le voisinage d'un point z_0, on a

$$P(z) - P(z_0) = c_k(z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots + c_n(z-z_0)^n$$

pour un certain $k \geqslant 1$ (la valuation de $P(z) - P(z_0)$ en z_0). D'où

$$P(z) - P(z_0) = \left((z-z_0)\sqrt[k]{c_k}\sqrt[k]{1 + \frac{c_{k+1}}{c_k}(z-z_0) + \cdots}\right)^k = \phi(z)^k.$$

Ici, $\sqrt[k]{c_k}$ est un choix quelconque de la racine k-ième et la deuxième racine k-ième est une série convergente d'après le théorème du binôme de Newton. La différentielle en z_0 de ϕ n'est pas nulle, de sorte que ϕ est un difféomorphisme local. En bref, $P(z)$ est la composition locale d'un difféomorphisme et de l'application

42. Ostrowski (A.), Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, 1920 Beiheft, p. 50-58.

43. Needham (T.), *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 1997.

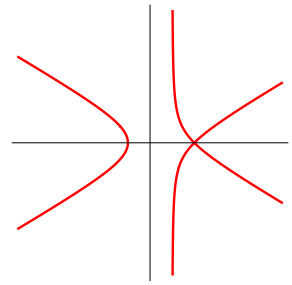


Image inverse de l'axe vertical par $2z^3 - 3z^2 + 1 + i$. Les points critiques sont $z = 0$ et $z = 1$ et les valeurs critiques sont $1 + i$ et i : une d'entre elles se trouve sur l'axe vertical.

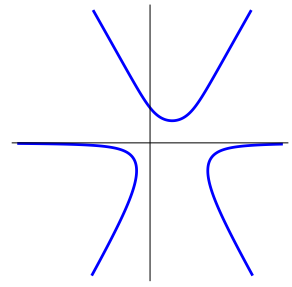


Image inverse de l'axe horizontal par $2z^3 - 3z^2 + 1 + i$. Il n'y a pas de valeur critique sur cet axe.

$z \mapsto P(z_0) + (z - z_0)^k$. Il est donc évident que l'image inverse par P d'une courbe lisse qui passe par $P(z_0)$ est la réunion de k courbes lisses qui passent par z_0. En particulier, il y a localement $2k$ demi-droites, ce qui démontre l'affirmation de Gauss dans le cas particulier dont il avait besoin. Ce cas particulier est en effet très particulier puisque ces k courbes lisses font des angles égaux. ⊡

Mais n'oublions pas que nous n'avons pas encore démontré l'affirmation de Gauss dans toute sa généralité.

Il existe une autre façon de combler « l'immense lacune » de Gauss. En tournant l'axe d'un angle θ, on peut remplacer $P(z)$ par $\exp(i\theta)P(z)$. La courbe $p(x,y) = 0$ (resp. $q(x,y) = 0$) est singulière si et seulement si l'une des valeurs critiques de P est sur l'axe réel (resp. imaginaire). Il suffit donc d'effectuer une rotation par un angle θ approprié pour éviter cela, de sorte que Gauss aurait tout aussi bien pu commencer en supposant que les courbes bleues et rouges sont lisses. Cet argument facile n'était pas facile en 1797.

Aujourd'hui, il existe de nombreuses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre. Je recommande l'article d'Eisermann [44] pour une vue d'ensemble lucide. Cette démonstration de Gauss n'est certainement pas la plus directe ni la plus simple. Son nettoyage nécessite quelques arguments topologiques subtils, mais en chemin, nous sommes largement récompensés, car nous comprenons beaucoup mieux les polynômes complexes en tant qu'applications.

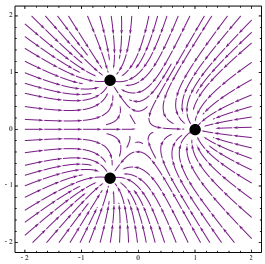
Voici ma démonstration préférée, dans l'esprit de la preuve topologique de Gauss, qui se trouve dans l'article de Smale mentionné ci-dessus. Pour moi, c'est la plus simple [45]. Choisissons un point z_0 de telle sorte que le segment γ reliant 0 à $P(z_0)$ ne contienne pas l'une des très nombreuses valeurs critiques de P. Ceci est possible si 0 n'est pas une valeur critique mais, si c'est le cas, 0 est une valeur et P a une racine. Regardons l'image inverse de γ par P. Il s'agit d'une variété lisse et compacte de dimension 1, avec un bord. Le point z_0 est un point sur le bord d'une composante. L'autre point sur le bord de cette composante est clairement une racine de P. Voilà ! ⊡

44. Eisermann (M.), The fundamental theorem of algebra made effective: an elementary real-algebraic proof via Sturm chains, *Amer. Math. Monthly*, nº 119(9), 2012, p. 715-752.

Qu'est-ce que j'entends par « la plus simple » ? Probablement pas la plus courte, car cette démonstration contient de nombreux faits implicites qui devraient être démontrés. La simplicité est un concept subtil et très personnel en mathématiques. Dans ce cas particulier, je dirais que c'est simple parce que je pense que je ne pourrais pas l'oublier.

45. Ghys (É.), *Inner simplicity vs. outer simplicity*, dans Kossak (R.) et Ording (P.), *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts Conferences*, Springer, 2017.

Cette démonstration simple donne en fait beaucoup plus. Loin des valeurs critiques, nous pouvons considérer l'image réciproque du champ de vecteurs radial $-x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$ par la différentielle de P. On obtient un champ de vecteurs dans le plan, en dehors des points critiques. Les trajectoires de ce champ de vecteurs sont précisément les images inverses des lignes radiales. Ainsi, en partant d'un point et en résolvant cette équation différentielle, on devrait arriver aux racines de P. Une façon d'approcher les solutions d'une équation différentielle ordinaire est d'utiliser la méthode d'Euler standard. Il s'avère que le schéma itératif d'Euler coïncide avec la méthode de Newton. Newton, Gauss et Euler ensemble !



Portrait de phase du champ de vecteurs $-P(z)/P'(z)$ pour $P(z) = z^3 - 1$. Les trajectoires sont envoyées par P sur des lignes radiales.

Une démonstration due à d'Alembert

Je vais décrire également une démonstration due à d'Alembert [46] pour deux raisons. La première est que le théorème fondamental de l'algèbre est souvent appelé en France « théorème de d'Alembert » ☺. La seconde est que ceci est étroitement lié aux polygones de Newton que nous avons analysés plus tôt. Voir [47] et [48] pour plus d'informations sur cette démonstration. D'Alembert ne mentionne pas Newton. Comment un Français pourrait-il reconnaître la contribution d'un Anglais ?

Voici une version simplifiée de sa « démonstration ». Supposons que nous voulions résoudre

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Posons $z = y/\varepsilon$. Nous obtenons une équation strictement équivalente :

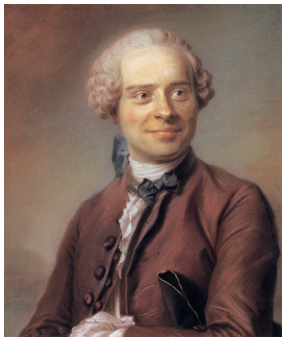
$$y^n + a_{n-1}\varepsilon y^{n-1} + \cdots + \varepsilon^n a_0 = 0.$$

Bien sûr, $y = 0$ est une solution pour $\varepsilon = 0$ et nous voulons une solution pour $\varepsilon \neq 0$. Considérons l'équation ci-dessus comme une équation de la forme $F(\varepsilon, y) = 0$. D'après Newton et Cramer, il existe des solutions non triviales $y(\varepsilon)$, au moins pour de petites valeurs de ε, qui s'expriment comme des séries de Puiseux en ε. Nous avons donc trouvé une racine à notre équation. ⊡

46. D'Alembert (J.), Recherches sur le calcul intégral, *Hist. Acad. Royale Berlin*, 1748, p. 182-224.

47. Baltus (C.), D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra, *Historia Math.*, nº 31(4), 2004, p. 414-428.

48. Gilain (C.), Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral, *Arch. Hist. Exact Sci.*, nº 42(2), 1991, p. 91-136.



Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783). ©

Le « donc » précédent fait l'objet de nombreuses discussions. L'une des principales difficultés est que ni Newton, ni Cramer, ni d'Alembert n'ont démontré la convergence de la série. Pire encore, l'algorithme de Newton qui construit la série de Puiseux utilise le théorème fondamental de l'algèbre. Un cercle vicieux.

Étonnamment, d'Alembert a également publié une version de cette démonstration dans un mémoire traitant de *la cause des vents* [49].

49. D'Alembert (J.), *Réflexions sur la cause générale des vents*, David l'aîné, Paris, 1747.

Pour conclure ce chapitre, voici un exercice, suggéré par mon ancien étudiant Victor Kleptsyn. Regardons les images inverses de l'axe réel (disons en rouge) et de l'axe imaginaire (en bleu) par un polynôme complexe $P(z)$. Cela produit un graphe dans un grand disque. Chaque arête est colorée en bleu ou en rouge. Les points singuliers du graphe bleu (resp. rouge) sont des points critiques de P qui sont envoyés sur l'axe réel (resp. imaginaire) : ils présentent un nombre pair d'arêtes bleues (resp. rouges) sortant d'un sommet. Généralement, un tel point singulier n'existe pas. La figure locale autour de l'intersection des deux graphes a été décrite ci-dessus : $4k$ arêtes sortant du sommet, alternant cycliquement bleu et rouge. Ces intersections existent par le théorème fondamental de l'algèbre. Sur les grands cercles, nous avons une alternance entre le rouge et le bleu.

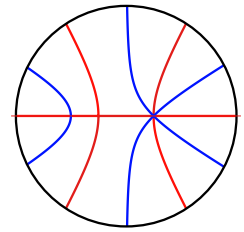
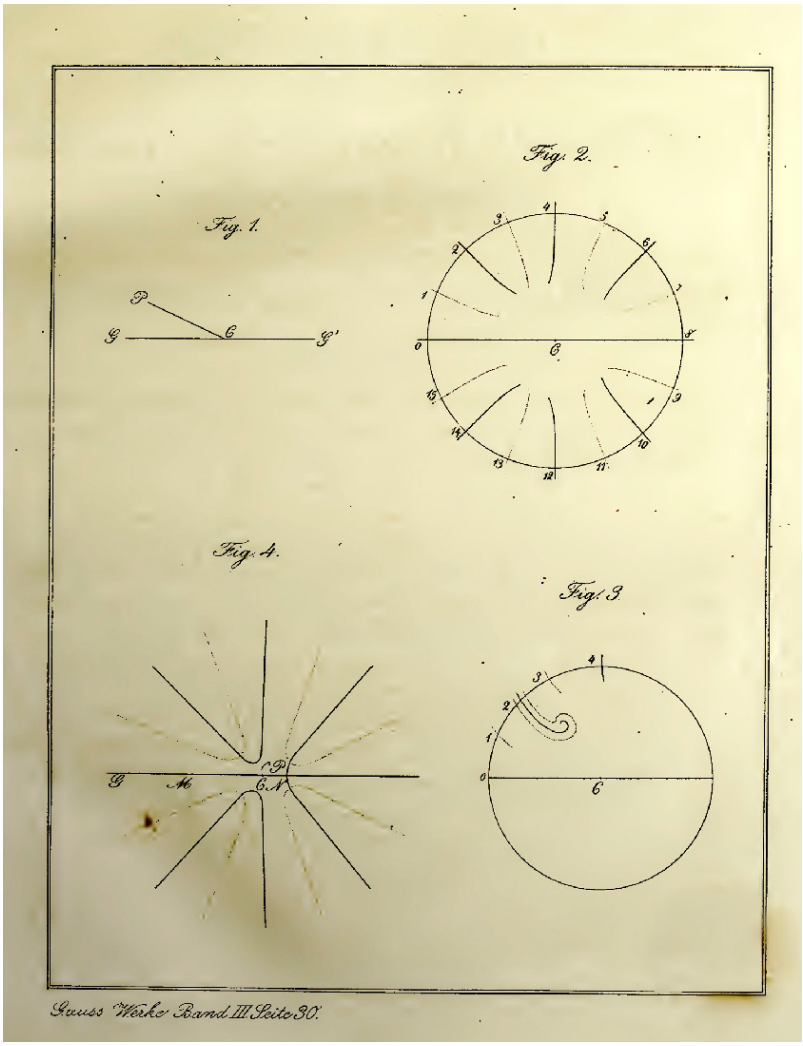


Image inverse des axes réel et imaginaire par $z^3 - 3z + 2$. Il existe deux valeurs critiques : 0 et 4.

La question porte sur l'inverse. Supposons que nous ayons un graphe coloré dans un disque qui présente toutes les caractéristiques qualitatives précédentes. Sous quelles conditions existe-t-il un polynôme $P(z)$ tel que le graphe coloré associé soit homéomorphe au graphe donné, par un homéomorphisme du disque ?

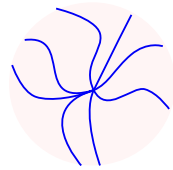


Ceci est la seule figure de la thèse de Gauss. ©

Joseph Alfred Serret
(1819-1885). ©

Démonstration de l'affirmation de Gauss sur les singularités des courbes algébriques : deux articles de deux Serret

Il est temps de démontrer l'affirmation de Gauss : « Le voisinage d'un point d'une courbe algébrique réelle plane est homéomorphe à un nombre *pair* de rayons dans un disque. »



Allure locale d'une courbe algébrique.

Démonstrations insuffisantes

Joseph Alfred Serret (1819-1885) ne doit pas être confondu avec Paul Joseph Serret (1827-1898).

Joseph Alfred a eu une carrière brillante. Il signait ses livres « membre de l'Institut et du Bureau des longitudes, professeur au Collège de France et à la faculté des sciences de Paris ». En 1849, il a publié un très influent *Cours d'algèbre supérieure* en deux volumes contenant l'un des premiers exposés systématiques de la théorie de Galois. Il est également à l'origine du repère de Serret-Frenet pour les courbes dans l'espace de dimension 3.

Le jeune Paul Joseph a eu une carrière beaucoup plus modeste. Il signait ses livres « docteur ès sciences, membre de la Société philomatique ». Il enseignait au collège Sainte-Barbe à Paris. Je n'ai pas trouvé son portrait.

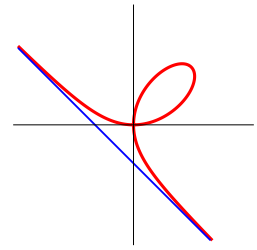
En 1847, Joseph Alfred a écrit un article [50] dans lequel il « démontre » une affirmation de Newton :

50. Serret (J. A.), Théorème sur les courbes algébriques asymptotiques, *Nouvelles annales de mathématiques, Journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale*, n° 6, 1847, p. 217-218.

D'après Joseph Alfred, « ce théorème est dû à Newton, et est énoncé, si je ne me trompe, dans son *Enumeratio Linearum tertio ordains*. »

> « Si une droite est asymptotique à une branche d'une courbe algébrique, alors elle est également asymptotique à une autre branche. »

Notons que ce que Newton appelle ici une *branche* est la moitié de ce que nous appelons une branche. Un exemple simple est le folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3xy$. Son asymptote est approchée par la courbe lorsque x tend vers $+\infty$ *et* $-\infty$. Cela correspond à *deux* branches dans la terminologie de Newton et à une branche à l'infini dans la nôtre.



L'asymptote du folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

La démonstration de Joseph Alfred Serret est la suivante. Soit $F(x,y) = 0$ l'équation de la courbe dans un système de coordonnées de sorte que $y = 0$ soit l'asymptote. Changeons x en $1/x$. Cela produit une deuxième courbe algébrique $F_1(x,y) = 0$. Si la courbe originale avait une seule branche asymptotique pour $y = 0$, alors la courbe algébrique $F_1(x,y) = 0$ aurait un « point d'arrêt » en $(0,0)$, c'est-à-dire une *impasse*, ce qui est impossible. Joseph Alfred prend étonnamment pour acquis qu'un tel point d'arrêt soit impossible. Il est clair qu'il ne s'agit pas d'une démonstration au sens où on l'entend.

« ce qui ne peut arriver pour une courbe algébrique ».

Ironiquement, il critique Euler pour son manque de rigueur. Il cite en effet à la fin de son court article l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (volume II, chapitre VII, section 174) :

> ***Quam ob rem*** *Linea curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter se oppositos…*

« Pour cette raison, la courbe a deux branches à l'infini qui seront opposées l'une à l'autre… »

La dernière phrase de l'article de Joseph Alfred est : « Ce *quam ob rem* avait besoin d'une démonstration ». Croyait-il vraiment qu'Euler ou Newton n'auraient pas pu penser au changement de variable $x \mapsto 1/x$?

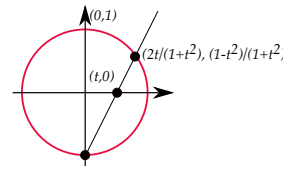
Dix-huit ans plus tard, Paul Joseph a écrit un autre court article[51] dans la même revue, qui critique l'article précédent de son homonyme et prestigieux collègue. Il commence par affirmer que la contribution de Joseph Alfred est une réduction du problème des asymptotes au problème des points d'arrêt des courbes algébriques, mais que cela était « *a priori* évident ». Or — Paul Joseph insiste — la question principale reste ouverte : il faut encore démontrer qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt. Il propose finalement la démonstration suivante.

51. Serret (P. J.), Note sur les courbes algébriques, *Nouvelles annales de mathématiques, Journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale*, n° 4, 1865, p. 311-313.

Soit $(0,0)$ un point sur une courbe algébrique $F(x,y) = 0$.

Coupons la courbe par un petit cercle centré sur l'origine $x^2 + y^2 = r^2$. Nous utilisons le paramétrage bien connu

$$x = \frac{2rt}{1+t^2}, \qquad y = \frac{(1-t^2)r}{1+t^2}.$$



Par substitution dans $F(x,y) = 0$ et multiplication par $(1+t^2)^d$ où d est le degré de F , on obtient une équation $\phi_{2d}(t) = 0$, où ϕ_{2d} est un polynôme de degré $2d$. Maintenant, si le point $(0,0)$ se trouvait être un point d'arrêt, la courbe couperait un petit cercle en un seul point, de sorte qu'une équation en t de degré pair $2d$ aurait une seule racine, « ce qui serait absurde ».

Par degré de F, j'entends le maximum de $i + j$ lorsque $x^i y^j$ varie parmi les monômes à coefficient non trivial. Nous vérifierons plus tard que Paul Joseph avait raison et que le degré est bien exactement $2d$ et pas seulement $\leqslant 2d$.

Incroyable ! Comment Paul Joseph a-t-il pu ignorer que t^2 est de degré deux et a une seule racine ? Cette racine est double mais c'est exactement notre problème. Nous pourrions imaginer une courbe algébrique allant jusqu'à un certain point et revenant en suivant le même chemin.

Il y a quelque chose à démontrer.

Deux faits importants en algèbre commutative

Je rassemble ici deux théorèmes de base sur les polynômes qui nous permettront de corriger la démonstration de Paul Joseph. Voir par exemple [52], [53] ou [54] pour en savoir plus sur l'algèbre. Tous les anneaux seront supposés commutatifs. Quelques définitions utiles se trouvent dans la marge.

52. Lang (S.), *Algèbre* (trad. C. Grammatikas), Dunod, Paris, 2020.

53. Artin (M.), *Algebra*, Prentice Hall, 1991.

54. Bourbaki (N.), *Algèbre commutative. Chapitres 1–7*, Masson, Paris, 1985.

Théorème. *Soit $\mathscr{A}$ un anneau factoriel. Alors l'anneau de polynômes $\mathscr{A}[x]$ est aussi un anneau factoriel.*

On dit qu'un polynôme dans $\mathscr{A}[x]$ est *primitif* si ses coefficients sont premiers entre eux. Le point clé est le lemme dit de Gauss :

Gauss l'a démontré dans l'article 42 de ses *Disquisitiones Arithmeticae* en 1801, trois ans après son doctorat.

Lemme. *Le produit de deux polynômes primitifs dans $\mathscr{A}[x]$ est primitif.*

La démonstration (moderne) est facile, mais quelque peu indirecte. Si p est premier dans $\mathscr{A}$, l'anneau $\mathscr{A}/p$ est un anneau intègre. Si $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont deux polynômes dont le produit

n'est pas primitif, alors tous les coefficients de P_1P_2 sont divisibles par un nombre premier p. On peut réduire tous les coefficients modulo p et obtenir l'égalité suivante dans $(\mathscr{A}/p)[x]$:

$$\overline{P}_1(x)\overline{P}_2(x) = 0.$$

Puisque l'anneau des polynômes sur un anneau intègre est un anneau intègre, on conclut que $\overline{P}_1(x)$ ou $\overline{P}_2(x)$ est nul dans $(\mathscr{A}/p)[x]$. ⊡

Définissons le *contenu* cont(P) d'un polynôme $P(x) \in \mathscr{A}[x]$ comme le plus grand diviseur commun de ses coefficients. Il est clair que tout polynôme $P(x)$ peut être écrit comme le produit $\mathrm{cont}(P)\tilde{P}(x)$ où $\tilde{P}(x)$ est primitif. Le lemme de Gauss signifie simplement que le contenu d'un produit est le produit des contenus.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. Nous allons montrer que les éléments premiers de $\mathscr{A}[x]$ sont :

1. Les éléments premiers de $\mathscr{A}$, vus comme des polynômes constants.
2. Les polynômes primitifs dans $\mathscr{A}[x]$ qui sont premiers lorsqu'ils sont considérés comme des polynômes sur le corps des fractions $\mathrm{Frac}(\mathscr{A})$ de $\mathscr{A}$.

L'anneau des polynômes sur un corps est euclidien. Ceci s'applique à $\mathrm{Frac}(\mathscr{A})[x]$ de sorte que tout élément $P(x)$ de $\mathscr{A}[x]$ peut être écrit comme un produit de polynômes premiers dans $\mathrm{Frac}(\mathscr{A})[x]$. En chassant les dénominateurs, on peut écrire P comme un produit d'éléments de type 1/ et 2/ :

$$P(x) = u \cdot r_1 \cdots r_k \cdot P_1(x) \cdots P_l(x).$$

Ici, u est une unité dans $\mathscr{A}$, les r_i sont des éléments premiers dans $\mathscr{A}$ et les P_i sont primitifs et irréductibles dans $\mathrm{Frac}(\mathscr{A})[x]$. D'après Gauss, le produit $r_1 \cdots r_k$ est le contenu de P et est donc défini de manière unique par P.

Puisque $\mathscr{A}$ est un anneau factoriel, les r_i sont définis de façon unique par P (aux unités et à permutation près).

Puisque $\mathrm{Frac}(\mathscr{A})[x]$ est aussi un anneau factoriel, les facteurs $P_i[x]$ sont aussi définis de façon unique à permutation et unités

Un *anneau intègre* est un anneau dans lequel le produit de deux éléments non nuls est non nul.
Une *unité* dans un anneau est un élément qui admet un inverse.
Deux éléments a et b d'un anneau sont dits *associés* et l'on note $a \equiv b$ s'il existe une unité u telle que $b = ua$.

Un *élément premier* p dans un anneau intègre $\mathscr{A}$ est un élément tel que l'anneau quotient $\mathscr{A}/p$ soit un anneau intègre.
Un élément a dans un anneau intègre est *irréductible* s'il n'est pas le produit de deux éléments qui ne sont pas des unités. Les éléments premiers sont irréductibles. La réciproque n'est pas vraie en général.
Un *anneau factoriel* est un anneau dans lequel chaque élément est un produit d'éléments premiers, unique à l'ordre et aux unités près. Les anneaux euclidiens et principaux, par exemple l'anneau des polynômes sur un corps, sont des anneaux factoriels. Dans ce cas, les concepts d'éléments premiers et d'irréductibilité coïncident et les plus grands diviseurs communs sont bien définis.

près, *dans* Frac($\mathscr{A}$)[x]. Or l'égalité $Q(x) = aP(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont primitifs dans $\mathscr{A}[x]$ et a est dans Frac($\mathscr{A}$), implique que a soit une unité dans $\mathscr{A}$. ⊡

Le corollaire immédiat est que *pour tout corps* K, *les anneaux polynomiaux* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *sont des anneaux factoriels*. Dans ce cas particulier, le théorème signifie que tout polynôme non constant dans $K[x_1, \ldots, x_n]$ peut être écrit comme un produit de facteurs irréductibles, d'une manière unique, à permutation et multiplication par des facteurs constants (dans K) près.

Le second résultat algébrique concerne le *résultant*. Soit $P_1(x)$ et $P_2(x)$ deux polynômes dans l'anneau des polynômes $\mathscr{A}[x]$ sur un anneau intègre $\mathscr{A}$, de degrés $d_1, d_2 \geqslant 1$. Notons $\mathscr{A}_d[x]$ le $\mathscr{A}$-module des polynômes de degrés au plus d, isomorphe à $\mathscr{A}^{d+1}$. Considérons l'application

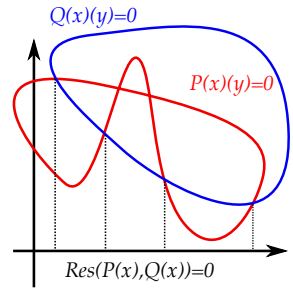
$$\Phi : (A_1, A_2) \in \mathscr{A}_{d_2-1}[x] \times \mathscr{A}[x]_{d_1-1} \mapsto A_1P_1 - A_2P_2 \in \mathscr{A}_{d_1+d_2-1}[x].$$

Ceci peut être vu comme une application linéaire de $\mathscr{A}^{d_1+d_2}$ dans lui-même. Son déterminant est appelé le *résultant* de P_1 et P_2 et noté $\mathrm{Res}(P_1, P_2)$. Cet élément de $\mathscr{A}$ est une expression polynomiale universelle, avec des coefficients dans $\mathbb{Z}$, en les coefficients de P_1 et P_2.

Théorème. *Supposons que $\mathscr{A}$ soit un anneau factoriel. Le résultant* $\mathrm{Res}(P_1, P_2)$ *est égal à zéro si et seulement si* P_1 *et* P_2 *ont un diviseur commun non trivial dans* $\mathscr{A}[x]$.

En effet, si $P_1 = QQ_1$ et $P_2 = QQ_2$, l'élément (Q_2, Q_1) est dans le noyau de Φ de sorte que le résultant est nul.

Inversement, si le résultant est nul, le noyau de Φ n'est pas trivial de sorte qu'il existe des éléments non triviaux A_1 et A_2 dans $\mathscr{A}_{d_1-1}[x]$ et $\mathscr{A}_{d_2-1}[x]$ tels que $A_1P_1 = A_2P_2$. La conclusion découle du fait que $\mathscr{A}[x]$ est un anneau factoriel : si P_1 et P_2 étaient premiers entre eux, P_1 diviserait A_2, ce qui est impossible puisque le degré de A_2 est inférieur au degré de P_1. ⊡



La projection de l'intersection de deux courbes $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ sur l'axe des x est donnée par les zéros du résultant.

Démonstration de l'affirmation de Gauss

Nous pouvons maintenant démontrer que le voisinage d'un point sur une courbe algébrique réelle consiste en un nombre

pair d'*arcs qui ne se coupent qu'à l'origine*.

Soit $F(x,y) = 0$ l'équation de notre courbe algébrique réelle qui passe par l'origine $(0,0)$. Écrivons F comme un produit de facteurs irréductibles :

$$F(x,y) = F_1(x,y)\cdots F_n(x,y).$$

Les polynômes F_i et F_j sont non associés lorsque $F_i \not\equiv F_j$ pour $i \neq j$: il n'y a pas de constante c telle que $F_j = cF_i$.

Sans changer le lieu où F s'annule dans le voisinage de $(0,0)$, on peut supprimer certains facteurs et supposer que tous les F_i sont nuls en $(0,0)$ et sont des facteurs irréductibles non associés.

Le lieu où F s'annule dans le voisinage de $(0,0)$ est la réunion des lieux où les F_i s'annulent.

Afin de démontrer l'affirmation de Gauss, nous démontrons deux lemmes.

Lemme (1). *Soit* $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ *un polynôme irréductible et* $Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ *un polynôme quelconque. Supposons que les courbes* $P(x,y) = 0$ *et* $Q(x,y) = 0$ *aient un nombre infini de points d'intersection dans un petit voisinage de l'origine. Alors* P *divise* Q *dans* $\mathbb{R}[x,y]$. *En particulier, si* P *et* Q *sont tous deux irréductibles et non associés, alors les deux courbes correspondantes ne peuvent se croiser qu'en des points isolés.*

Lemme (2). *Si* $P(x,y)$ *est irréductible, le lieu où il s'annule dans le voisinage de l'origine est constitué d'un nombre pair d'arcs qui convergent vers* $(0,0)$.

Commençons par le premier lemme. Si $P(x,y) = 0$ contient une infinité de points sur le même axe vertical $x = x_0$, le polynôme $P(x,y)$ doit être divisible par $(x - x_0)$ et comme nous supposons qu'il est irréductible et qu'il est nul à l'origine, cela implique que $P(x,y)$ soit un multiple de x (avec une constante), dans quel cas le lemme est évident. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $P(x,y) = 0$ coupe toute droite verticale en un nombre fini de points.

Si $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$, les deux polynômes $P(x_0,y)$ et $Q(x_0,y)$, vus comme éléments de $\mathbb{R}[y]$, ont une racine commune y_0 et donc leur résultant est nul comme élément de $\mathbb{R}$.

Supposons que les courbes $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = 0$ aient un nombre infini de points d'intersection dans un petit voisinage

de l'origine. Regardons le résultant de P et $Q \in \mathbb{R}[x][y]$ comme un élément de $\mathbb{R}[x]$. Ce résultant est nul pour une infinité de valeurs x_0 et est donc identiquement nul. Nous avons vu que cela implique que P et Q aient un facteur commun dans $\mathbb{R}[x,y]$. Comme P est irréductible, cela montre que P divise Q. ⊡

Nous démontrons maintenant le second lemme en suivant l'idée de Paul Joseph. Posons

$$F(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j.$$

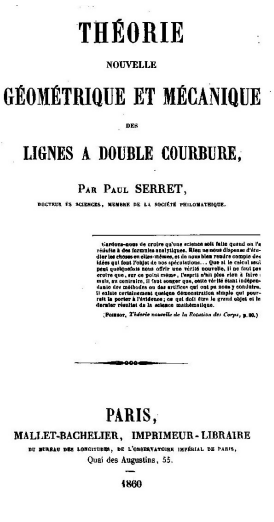
Observons que lorsque $F(x,y) = x$, le lemme est évident.

Soit d le degré de F (qui est par définition la valeur maximale de $i+j$ pour laquelle $a_{ij} \neq 0$). Remarquons que F étant irréductible, il n'est pas divisible par x (sauf s'il s'agit d'un multiple de x) de sorte que l'un des coefficients a_{0j} n'est pas 0. En fixant r, on obtient un paramétrage par t du cercle de rayon r sans $(0,-r)$:

$$x = r\frac{2t}{1+t^2}, \qquad y = r\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Substituons dans $F(x,y)$ et multiplions le résultat par $(1+t^2)^d$:

$$\phi_{2d,r}(t) = \sum_{i,j} a_{ij} r^{i+j} (2t)^i \left(1-t^2\right)^j \left(1+t^2\right)^{d-i-j}.$$


THÉORIE
NOUVELLE
GÉOMÉTRIQUE ET MÉCANIQUE
DES
LIGNES A DOUBLE COURBURE,
PAR PAUL SERRET,
DOCTEUR ÈS SCIENCES, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE.
PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,
Quai des Augustins, 55.
1860

Il s'agit d'un polynôme en t dont le monôme le plus élevé est

$$\left(\sum_j (-1)^j a_{0j} r^j\right) t^{2d}$$

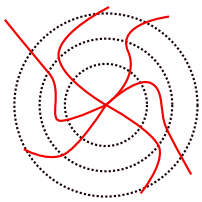
qui n'est certainement pas nul pour les petits $r \neq 0$. Paul Joseph a donc raison et le degré de $\phi_{2d,r}(t)$ est égal à $2d$.

Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que les racines de $\phi_{2d,r}(t) = 0$ sont simples pour les petits $r \neq 0$, de sorte qu'il y a un nombre pair de racines. En une racine double t_0, le polynôme $\phi_{2d,r}(t)$ et sa dérivée sont nuls simultanément. Cela signifie géométriquement que la tangente au cercle en ce point est aussi tangente à la courbe $F(x,y) = 0$. Autrement dit, les points doubles que nous voulons exclure correspondent à l'intersection de $F(x,y) = 0$ et de la courbe $y\partial F/\partial x - x\partial F/\partial y = 0$. Puisque nous supposons que F est irréductible, le premier lemme implique que ces deux courbes se coupent en un nombre

©

fini de points, à moins que F ne divise $y\partial F/\partial x - x\partial F/\partial y$. Pour une raison de degré, cela ne peut se produire que si $y\partial F/\partial x - x\partial F/\partial y$ est un multiple de F, ce qui signifie à son tour que F est constant sur les cercles. Ceci implique que F est un polynôme en $x^2 + y^2$ et comme il est nul à l'origine, il doit être divisible par $x^2 + y^2$. C'est donc un multiple constant de $x^2 + y^2$, dont le lieu des zéros se réduit à l'origine. ⊡

La démonstration de l'affirmation de Gauss est pratiquement terminée. La restriction de F à chaque cercle $x^2 + y^2 = r^2$ pour un petit r non nul a un nombre pair de zéros qui sont simples. En utilisant le théorème des fonctions implicites dans cette situation très élémentaire, nous concluons que ces zéros définissent un nombre pair de courbes disjointes qui convergent vers l'origine. Ceci ne dit rien sur les directions limites de ces courbes : elles peuvent *a priori* converger vers l'origine sans avoir de tangente limite. ⊡



Nous verrons que toute branche d'une courbe algébrique possède une tangente en tout point.

Carl Friedrich Gauss et Paul Joseph Serret avaient raison.

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL,

PAR J.-A. SERRET,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

TROISIÈME ÉDITION.

TOME PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

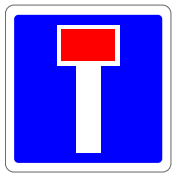
Quai des Augustins, 55.

1886

(Tous droits réservés.)

Une planche tirée d'un livre de J. Lamouroux, daté de 1821, qui représente *Sclerhelia hirtella*. Ce livre se trouvait dans la bibliothèque du *Beagle*, qui fut également la cabine de Darwin pendant cinq ans. *Ramis sparsis divergentibus !* ©

De seriebus divergentibus : Euler, Cauchy et Poincaré



Impasse. Ce chapitre est totalement indépendant du reste du livre. ©

Les seriebus divergentibus d'Euler

Newton n'a pas limité l'utilisation des séries aux équations de la forme $F(x, y) = 0$. Il les a également utilisées de manière systématique pour résoudre des équations différentielles. Son approche était essentiellement pratique. Il recherche une solution sous la forme d'une série formelle et calcule par récurrence un grand nombre de termes de la série afin d'obtenir une certaine « précision ». Il n'y avait pas de compréhension systématique du concept de convergence, mais dans tous les cas qu'il a traités, les séries étaient effectivement convergentes.

Plus tard, Euler est devenu le grand maître des séries. Les mathématiciens de nos jours pensent souvent qu'Euler était négligent avec les séries et qu'il manipulait des séries qui n'avaient aucun sens. Par exemple, sa formule [55]

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \cdots = -\frac{1}{8}$$

est choquante pour les étudiants de premier cycle, qui ont appris très tôt la définition d'une série convergente et refusent de considérer ces horreurs. Ce n'est pas le cas ! Euler sait ce qu'il fait. Il discute de différentes procédures pour attribuer une somme à une série, même si elle est divergente, et tente de comparer ces procédures. Ses séries ne sont pas les plus générales : elles sont implicitement définies par une sorte d'algorithme, pour utiliser

Leonhard Euler (1707-1783) ©

55. Euler (L.) , Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques, *Mém. Acad. Sci. Berlin*, n° 17, 1768, p. 83-106. Voir les Archives Euler pour des commentaires.

un anachronisme. Il est convaincu que les séries divergentes représentent quelque chose d'intrinsèquement lié à la nature de la série. Son article *De seriebus divergentibus*[56] est un pur joyau et je le recommande à tout mathématicien.

L'un de ses exemples est célèbre :

$$S = 1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots.$$

En utilisant cinq méthodes de sommation différentes, Euler obtient des valeurs qui semblent indiquer que S devrait être proche de 0,596 347 362 123 7. L'une des méthodes les plus convaincantes utilise le fait que la série formelle

$$\widehat{f}(x) = x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - \cdots$$

est une solution de l'équation différentielle *linéaire*

$$x^2y' + y = x.$$

Il s'agit d'une équation très élémentaire pour laquelle on trouve une solution explicite qui est égale à 0 pour $x = 0$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

D'une certaine manière, on pourrait dire que $f(x)$ représente la valeur de la série formelle $\widehat{f}(x)$. La valeur numérique trouvée par Euler 0,596 347 362 123 est la valeur $f(1)$.

Tapons simplement ce qui suit sur notre ordinateur

$$\mathrm{N}[\mathrm{Exp}[1] * \mathrm{Integrate}[\mathrm{Exp}[-1/t]/t, t, 0, 1], 100]$$

et obtenons immédiatement

0,596 347 362 323 194 074 341 078 499 369 279 376 074 177 860 152 548 781 573 484 910 482

pas tout à fait en accord avec le résultat numérique d'Euler.

Puis vint la période de disgrâce des séries divergentes.

Le nouveau maître fut Augustin Cauchy qui définit clairement le concept de *convergence* et que l'on associe généralement à la rigueur mathématique. Ce n'est pas complètement faux, mais c'est sans doute une simplification exagérée. D'une part, la

56. Euler (L.), De seriebus divergentibus, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, nº 5, 1760, p. 205-237. Voir les Archives Euler pour des traductions et des commentaires.

Attention ! Je ne voudrais certainement pas donner à mon jeune lecteur le sentiment erroné que toute série divergente a une somme bien définie. Certaines séries divergentes sont en effet sommables selon différentes méthodes et produisent des sommes *différentes*. Un exemple simple est celui de $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

rigueur existait avant Cauchy, d'autre part, Cauchy n'a pas rejeté les séries divergentes [57]. Malheureusement, aujourd'hui encore, de nombreux étudiants sont convaincus que les séries divergentes viennent du diable...

En 1821, dans la préface de son *Cours d'analyse*, Cauchy a écrit qu'il avait été *contraint* d'abandonner les séries divergentes !

> « J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures. Par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme... »

Dans une lettre célèbre adressée à Holmboe (reproduite dans le volume II de ses œuvres complètes), Abel écrit en 1826 :

> « Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. »

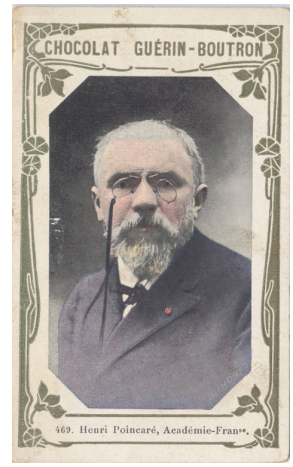
57. Cauchy (A.), Sur un emploi légitime des séries divergentes, *C. R. Acad. Sci.*, nº XVII, 1843, p. 18-25.

Poincaré

Le grand maître suivant a été Poincaré, qui a clairement compris que les séries divergentes sont non seulement utiles mais aussi nécessaires pour résoudre les questions naturelles de la mécanique céleste. Je m'abstiendrai de présenter ces aspects dynamiques, même s'ils sont fascinants et liés aux activités de recherche actuelles.

Permettez-moi de citer le deuxième volume des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.

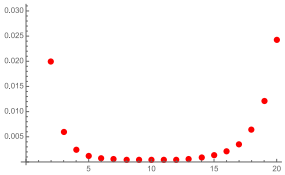
> « Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général $\frac{1000^n}{n!}$ et $\frac{n!}{1000^n}$. Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement,



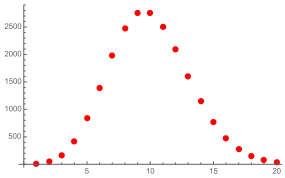
Henri Poincaré (1854-1912). Combien de mathématiciens ont été si célèbres de leur vivant que leur photo a été imprimée sur des tablettes de chocolat ?

> [...] mais ils regarderont la seconde comme divergente [...]. Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, [...] et la seconde comme convergente [...] Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques ; la seconde, dans les applications numériques. »

L'exemple de Poincaré est parfait : regardez les valeurs de $\frac{n!}{1000^n}x^n$ et $\frac{1000^n}{n!}x^n$ pour $x = 100$ et 0,01 respectivement, et pour $n = 1, ..., 20$.



$\frac{n!}{10^n}$ pour $n = 1, ..., 20$.



$\frac{10^n}{n!}$ pour $n = 1, ..., 20$.

Le nœud-selle et l'équation d'Euler

Prenons un exemple très simple qui montre qu'il n'y a pas de choix : pour comprendre les équations différentielles ordinaires, même avec des coefficients polynomiaux, nous devons nous intéresser aux séries divergentes. Considérons le système simple suivant :

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad \frac{dy}{dt} = -y + x.$$

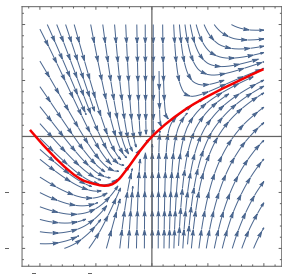
On l'appelle *nœud-selle* parce qu'il ressemble à une selle lorsque $x > 0$ et à un nœud lorsque $x < 0$. Cette situation peut sembler très dégénérée mais elle apparaît en *codimension* 1 : à l'origine, la partie linéaire du champ de vecteurs a une valeur propre qui est nulle. Par conséquent, des nœuds-selles similaires devraient apparaître dans les familles génériques à un paramètre de champs de vecteurs dans le plan.

La figure dans la marge montre le portrait de phase de ce champ de vecteurs. On voit clairement une courbe lisse invariante qui passe par l'origine (et différente de l'axe des y). C'est ce que l'on appelle la *variété centrale*.

Si l'on considère cette courbe comme un graphe $y(x)$, on obtient immédiatement l'équation d'Euler $x^2\frac{dy}{dx} + y = x$. L'équation de la variété centrale est donc la fonction C^∞ définie par

$$y = f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

et nous devons comprendre comment cette fonction est liée à la série formelle divergente $\widehat{f}$.



Portrait de phase du nœud-selle.

Fonction d'Euler, phénomène de Stokes, etc.

Je suis la présentation de Hardy [58].

Changeons de variable et posons $t = x/(1+xw)$, de sorte que

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-w)\frac{x}{1+xw}\,\mathrm{d}w.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \exp(-w)\left(x - x^2w + x^3w^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^nw^{n-1}\right)\mathrm{d}w \\ &\quad + (-1)^n x^{n+1}\int_0^\infty \frac{\exp(-w)w^n}{1+xw}\,\mathrm{d}w \\ &= x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^n + \mathrm{R}_n(x). \end{aligned}$$

Le terme R_n est facile à majorer. Si $x, w > 0$, on a $1+xw > 1$ et

$$\left|f(x) - (x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^n)\right| \leqslant n!\,x^{n+1}.$$

En d'autres termes, *la série formelle $\widehat{f}$ est asymptotique à la fonction f qui est C^∞.*

En fait, on peut dire beaucoup plus. Supposons maintenant que x soit un nombre complexe qui ne soit pas un nombre réel négatif. La formule qui définit f a alors du sens, de sorte que f *est une fonction holomorphe dans* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Supposons maintenant que x appartienne à un secteur où son argument est dans $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$ pour un $\delta > 0$. Dans ce secteur, $|1+xw|$ est minoré (w est toujours un nombre réel positif) de sorte que nous obtenons une inégalité

$$\left|f(x) - (x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^n)\right| \leqslant \mathrm{C}(\delta)\,n!\,|x|^{n+1}$$

pour x dans ce secteur. Autrement dit, *la série formelle $\widehat{f}$ est asymptotique à la fonction holomorphe f dans tout secteur ne contenant pas la droite réelle négative.*

On peut en dire encore plus. Poursuivons avec la présentation par Hardy des manipulations d'Euler :

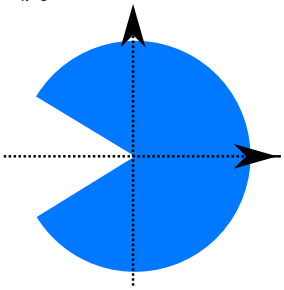
$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x \frac{\exp(-\frac{1}{t})}{t}\,\mathrm{d}t = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{\exp(-u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\exp\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{li}\left(\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right), \end{aligned}$$

58. Hardy (G. H.), *Divergent Series*, Réimpression de l'édition révisée de 1963, Jacques Gabay, Sceaux, 1992.

Attention : changements de variables dangereux ! ©

« Les jeunes devraient démontrer des théorèmes, les vieux devraient écrire des livres. » (Hardy, 1877-1947). ©

Rappelons qu'une série $\sum_k a_k x^k$ est *asymptotique* à une fonction $f(x)$ si pour tout n, on a $f(x) - \sum_{k=1}^n a_k x^k = o(x^n)$.



Pacman.

où li est le *logarithme intégral* défini pour $0 < v < 1$ par

$$\mathrm{li}(v) = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\log v} = -\int_{\log \frac{1}{v}}^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Remarquons que $\mathrm{li}(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$ est aussi défini pour $x > 1$ comme intégrale impropre :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\log x}.$$

Elle est célèbre en théorie des nombres car elle donne une estimation très précise du nombre $\pi(x)$ de nombres premiers $\leqslant x$ lorsque x tend vers l'infini. En particulier,

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| = o\left(\frac{x}{(\log x)^{\mathrm{N}}}\right)$$

pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$.

Puisque ce chapitre traite des séries divergentes, il serait bon de mentionner le développement asymptotique divergent $\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\log x)^k}\right)$, que vous devez être en mesure de démontrer vous-même, en intégrant par parties.

Or

$$\begin{aligned}
-\mathrm{li}(\exp(-y)) &= \int_y^\infty \frac{\exp(-u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^\infty \frac{\exp(-u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{1-\exp(-u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&\quad - \int_1^y \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_0^y \frac{1-\exp(-u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\gamma - \log y + y - \frac{1}{2\times 2!}y^2 + \frac{1}{3\times 3!}y^3 - \cdots,
\end{aligned}$$

où γ est … la constante d'Euler. Donc

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\log x + \mathrm{S}\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec

$$\mathrm{S}(y) = -\exp(y)\left(\gamma - y + \frac{1}{2\times 2!}y^2 - \frac{1}{3\times 3!}y^3 + \cdots\right).$$

Remarquons que $\mathrm{S}(y)$ est une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe et uniforme dans tout le plan complexe. On obtient ainsi un prolongement holomorphe de f sur le revêtement universel de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. En faisant un tour autour de l'origine, la fonction change de $2\mathrm{i}\pi\exp(\frac{1}{x})$.

Résumons les propriétés de f :

— *il s'agit d'une fonction holomorphe multivaluée définie dans le plan entier ou plus précisément d'une fonction holomorphe sur la surface de Riemann du logarithme ;*

— *dans tout secteur d'angle $< 2\pi$, la fonction f est asymptotique à la série formelle $\widehat{f}(x) = x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - \cdots$;*

— *la monodromie, c'est-à-dire la variation de la valeur de $f(x)$ lorsque x tourne autour de l'origine, est $2\mathrm{i}\pi\exp(\frac{1}{x})$, qui est plate dans tout secteur d'angle $< 2\pi$. Cela signifie que deux déterminations monovaluées quelconques de f dans un secteur ont le même développement asymptotique $\widehat{f}$.*

Une « fonction holomorphe sur la surface de Riemann du logarithme » est une façon ancienne de parler de $\phi(\log z)$ où ϕ est une fonction holomorphe définie sur le plan complexe. Cette fonction est multivaluée puisque $\log z$ est définie « à $2\mathrm{i}\pi$ près ».

La divergence de la série formelle $\widehat{f}$ correspond à la propriété « multivalué à une fonction plate près » de la fonction f. Ce n'est

pas la première fois qu'un phénomène dans le domaine réel est expliqué par un autre dans le domaine complexe. C'est ce qu'on appelle le *phénomène de Stokes* (découvert le 19 mars 1857 à 3 heures du matin).

Bien sûr, l'exemple d'Euler n'est qu'un exemple. Le fait remarquable est que cet exemple est significatif et qu'on a développé une belle théorie. Les équations différentielles analytiques ou même algébriques peuvent avoir des solutions qui sont des séries divergentes, mais on peut donner une signification parfaitement bien définie à leur somme en tant que fonctions holomorphes *multivaluées*.

Je m'abstiens de poursuivre dans cette direction, car notre promenade n'irait pas là où j'ai l'intention d'aller. Même dans les promenades, il est bon de naviguer vers un certain cap.

Pour une description fascinante de l'évolution historique de la théorie, je recommande vivement [59]. Pour une description plus systématique, à un niveau accessible, ces notes de cours [60] seront utiles.

L'article [61] est une présentation moderne des séries divergentes publiée à l'occasion du 300e anniversaire de la naissance de Leonhard Euler.

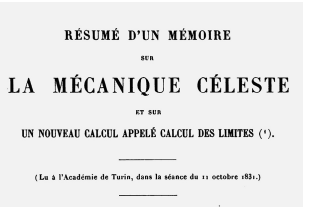
59. Ramis (J.-P.), Poincaré et les développements asymptotiques (première partie), *Gaz. Math.*, nº 133, 2012, p. 33-72; et Ramis (J.-P.), Les développements asymptotiques après Poincaré : continuité et divergences, *Gaz. Math.*, nº 134, 2012, p. 17-36.

60. Loday-Richaud (M.), *Divergent series and differential equations*, Partie d'un livre, 2014, hal-01011050.

61. Varadarajan (V. S.), Euler and his work on infinite series, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, nº 44(4), 2007, p. 515-539.

Augustin Cauchy
(1789-1857). ©

Convergence
Le calcul des limites de Cauchy



RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE
SUR
LA MÉCANIQUE CÉLESTE
ET SUR
UN NOUVEAU CALCUL APPELÉ CALCUL DES LIMITES (1).

(Lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 11 octobre 1831.)

Je démontre maintenant le théorème dit de Puiseux qui donne un paramétrage local d'une courbe algébrique complexe dans un voisinage d'un point singulier en termes de séries *convergentes*. Nous ne suivrons pas l'approche originale de Puiseux. Je préfère utiliser une méthode introduite par Cauchy sous le nom de *calcul des limites* [62].

62. Cauchy (A.), *Œuvres complètes*, vol. XII, Gauthier-Villars, Paris, 1882.

Le mot *limite* doit être compris comme une *borne*. La terminologie actuelle est « méthode des majorantes ».

Le théorème des fonctions implicites

Je commence par une preuve *à la Cauchy* du théorème classique des fonctions implicites. Il s'agissait de la démonstration standard dans les anciens manuels, mais elle est souvent ignorée aujourd'hui et remplacée par des méthodes plus puissantes basées sur des théorèmes de point fixe. Elle présente néanmoins quelques avantages : elle est très élémentaire et presque entièrement combinatoire. Je recommande ce livre [63] pour une approche historique intéressante.

63. Krantz (S. G.) et Parks (H. R.), *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkhäuser, 2002.

Désignons par K un corps de caractéristique 0, muni d'une norme, qui est une application $x \in \mathrm{K} \mapsto |x| \in \mathbb{R}_+$ telle que $|xy| = |x||y|$ et $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. Supposons que $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que K muni de $|\cdot|$ soit complet : les suites de Cauchy convergent.

Je suppose en outre que la norme n'est pas la norme triviale pour laquelle $|x| = 1$ pour tous les éléments x non nuls.

Je pense essentiellement au cas de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ mais il y a beaucoup d'autres exemples (les corps p-adiques en particulier).

Désignons par $\mathrm{K}\{x\}$ l'anneau des séries

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 0} u_k x^k,$$

où les u_k sont dans K et satisfont une inégalité de la forme

$$|u_k| \leqslant \mathrm{C} r^k$$

pour des $\mathrm{C}, r > 0$. Puisque K est complet, cela correspond à des séries absolument convergentes dans un certain voisinage de 0 (germes de *fonctions analytiques* pour $\mathbb{C}, \mathbb{R}$). Pour simplifier, nous dirons que les éléments de $\mathrm{K}\{x\}$ sont des *séries convergentes*.

Courbes de niveau d'une fonction lisse $\mathrm{F}(x,y)$.

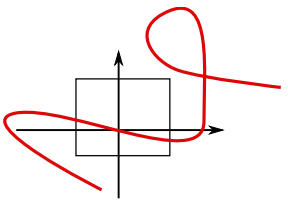
De même, on désigne par $\mathrm{K}\{x,y\}$ l'anneau des séries

$$\mathrm{F}(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} x^i y^j$$

qui sont *convergentes*, c'est-à-dire pour lesquelles les a_{ij} sont dans K et tels qu'il existe $\mathrm{C}, r > 0$ de sorte que pour tout i, j :

$$|a_{ij}| \leqslant \mathrm{C} r^{i+j}.$$

Théorème (théorème des fonctions implicites)**.** *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{K}\{x,y\}$ *tel que* $\mathrm{F}(0,0) = 0$ *et* $\partial\mathrm{F}/\partial y(0,0) \neq 0$. *Il existe alors une série convergente* $f(x) \in \mathrm{K}\{x\}$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $\mathrm{F}(x, f(x)) = 0$. *Les solutions* (x,y) *de l'équation* $\mathrm{F}(x,y) = 0$ *dans le voisinage de* $(0,0)$ *dans* K^2 *sont précisément les paires* $(x, f(x))$.



La démonstration est la suivante. Si nous substituons une série formelle $y = \sum_{k\geqslant 1} u_k x^k$ dans la série formelle $\sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} x^i y^j$ (avec $a_{00} = 0$), le résultat est une série formelle $\sum_{l\geqslant 1} v_l x^l$ dont les coefficients dépendent des u_k et des a_{ij}. Calculons les premiers termes de

$$\sum_{i,j} a_{ij} x^i \left(\sum_{k\geqslant 1} u_k x^k\right)^j = \sum_{l\geqslant 1} v_l x^l.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{10} + a_{01}u_1 \\
v_2 &= a_{20} + a_{11}u_1 + a_{02}\,{u_1}^2 + a_{01}u_2 \\
v_3 &= a_{30} + a_{21}u_1 + a_{12}\,{u_1}^2 + a_{03}{u_1}^3 + a_{11}u_2 + 2\,a_{02}u_1u_2 + a_{01}u_3 \\
v_4 &= a_{40} + a_{31}u_1 + a_{13}\,{u_1}^3 + a_{04}\,{u_1}^4 + a_{21}u_2 + 2\,a_{12}u_1u_2 + 3\,a_{03}\,{u_1}^2u_2 \\
&\qquad + a_{02}\,{u_2}^2 + a_{11}u_3 + 2\,a_{02}u_1u_3 + a_{01}u_4,
\end{aligned}$$

etc.

Même si cela est compliqué, nous pouvons démontrer immédiatement par récurrence que v_l s'écrit sous la forme

$$v_l = \mathrm{G}_l\left((a_{ij})_{i+j\leqslant l}, (u_k)_{k\leqslant l-1}\right) + a_{01}u_l\,,$$

où G_l est une expression polynomiale à coefficients entiers positifs qui fait intervenir a_{ij} pour $i+j\leqslant l$ et u_k pour $k\leqslant l-1$.

Notre problème est de montrer qu'étant donné une série *convergente* F, il existe un unique $f(x)$ *convergent* tel que $\mathrm{F}(x, f(x)) = 0$. En d'autres termes, on nous donne les a_{ij} tels que $|a_{ij}|\leqslant \mathrm{C}r^{i+j}$ et nous voulons montrer que les équations $v_l = 0$ avec les inconnues u_l ont une unique solution convergente.

Exercice. Lisez attentivement cette démonstration et obtenez une version précise du théorème des fonctions implicites. Supposons que F soit convergent dans un bi-disque $\{|x|<\alpha\,;|y|<\beta\}$ et que $|\mathrm{F}(x,y)|<\mathrm{M}$ dans ce bi-disque. Quelle est la valeur maximale de $\rho(\alpha,\beta,\mathrm{M},|a_{01}|)>0$ telle que l'on puisse garantir que f est convergent sur le disque ouvert de rayon ρ ?

Par hypothèse, $a_{01}\neq 0$, de sorte qu'en multipliant F par $-1/a_{01}$, on peut supposer $a_{01} = -1$. De la même manière, en changeant x et y par des multiples, on peut supposer que $\mathrm{C} = 1$ et $r = 1$. En d'autres termes, nous supposons que $|a_{ij}|\leqslant 1$ pour tout $i,j\geqslant 0$.

Puisque G_l ne dépend que des u_k pour $k\leqslant l-1$ (et des a_{ij}), les formules précédentes définissent par récurrence une unique série u_l (qui dépend des a_{ij}) :

$$\begin{aligned}
&u_1 = a_{10}\\
&u_2 = a_{20} + a_{11}u_1 + a_{02}\,{u_1}^2 = a_{20} + a_{11}a_{10} + a_{02}\,{a_{10}}^2\\
&\dots\\
&u_l = \mathrm{G}_l\left((a_{ij})_{i+j\leqslant l}, (u_k)_{k\leqslant l-1}\right).
\end{aligned}$$

Notre tâche est de montrer que cette série $\sum_l u_l x^l$ est convergente.

C'est là qu'intervient l'idée simple et magnifique de Cauchy (voir [64] pour plus de détails). Nous allons vérifier le théorème dans *un* exemple particulier, puis montrer que le cas général s'ensuit immédiatement. Pour cet exemple, choisissons $\overline{\mathrm{F}}$ tel que $\overline{a}_{01} = -1$ et tous les autres $\overline{a}_{ij} = 1$:

64. Bottazzini (U.) et Gray (J.), *Hidden Harmony: Geometric Fantasies*, Springer, 2013.

$$\overline{\mathrm{F}}(x,y) = -y + x + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + \cdots.$$

Soit $\overline{u}_l$ la suite correspondante associée à ce choix de $\overline{\mathrm{F}}$, définie par

$$\overline{u}_l = \mathrm{G}_l\left((1), (\overline{u}_k)_{k\leqslant l-1}\right) \quad (k = 1,2,\dots).$$

Remarquons que G_l ne fait pas intervenir $\overline{a}_{01}$ qui est le seul $\overline{a}_{ij}$ qui n'est pas égal à 1.

Il est facile de résoudre $\overline{\mathrm{F}}(x,y) = 0$ puisque l'équation

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - 2y = 0$$

équivaut à $y = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1-9x}{1-x}}\right)$. Dans le voisinage de 0, il faut choisir le signe $-$ et il existe une solution analytique unique

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{1-9x}{1-x}}\right) \\ &= \overline{u}_1 x + \overline{u}_2 x^2 + \cdots \\ &= x + 3x^2 + 13x^3 + 71x^4 + 441x^5 + 2\,955x^6 + \cdots. \end{aligned}$$

Les coefficients $\overline{u}_k$ satisfont évidemment une inégalité $\overline{u}_k \leqslant c\rho^k$ (avec $\rho < 9$) puisque f est analytique dans un voisinage de 0.

Étudions maintenant le cas d'un F *général*, pour lequel nous avons supposé $|a_{ij}| \leqslant 1$. Puisque les polynômes G_l ont des *coefficients entiers positifs*, il s'ensuit par récurrence que $|u_l| \leqslant \overline{u}_l$:

$$\begin{aligned} |u_{l+1}| &= \left|G_l\left((a_{ij})_{i+j\leqslant l+1}, (u_k)_{k\leqslant l}\right)\right| \\ &\leqslant |G_l((1), (|u_k|)_{k\leqslant l})| \\ &\leqslant |G_l((1), (\overline{u}_k)_{k\leqslant l})| \\ &\leqslant \overline{u}_{l+1}. \end{aligned}$$

En particulier, $|u_k| \leqslant c\rho^k$ et la série $f(x) = \sum_k u_k x^k$ est convergente.

La démonstration du théorème est presque terminée. Nous avons trouvé une solution convergente $y = f(x)$ et il nous reste à montrer que *toutes* les solutions de $F(x,y) = 0$ dans le voisinage de l'origine sont de la forme $(x, f(x))$.

Dans l'anneau $K\{x,y\}$, il est clair qu'un élément $F(x,y)$ est divisible par y si et seulement s'il s'annule lorsque 0 est substitué à y. La transformation $(x,y) \mapsto (x, y - f(x))$ induit un automorphisme de $K\{x,y\}$ qui fait correspondre y à $(y - f(x))$. On sait que $y = f(x)$ est une solution de $F(x,y) = 0$, de sorte que la remarque précédente implique que F soit divisible par $y - f(x)$ dans $K\{x,y\}$. Le quotient est non nul en $(0,0)$ puisque

$$F(x,y) = -y + a_{10}x + \cdots \quad \text{et} \quad f(x) = a_{10}x + \cdots.$$

Par conséquent, $F(x,y) = U(x,y)(y - f(x))$, où $U \in K\{x,y\}$ est tel que $U(0,0) \neq 0$. En particulier, dans le voisinage de $(0,0)$, l'équation $F(x,y) = 0$ est bien équivalente à $y = f(x)$. Le théorème des fonctions implicites est démontré. ⊡

Pour une bonne description du *calcul des limites*, je recommande le livre de Hille[65].

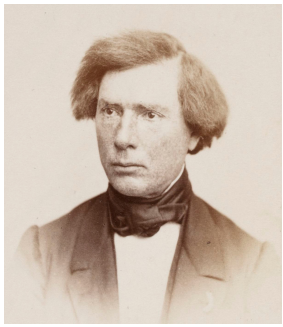
Lorsque $K = \mathbb{C}$, c'est-à-dire lorsque F est une fonction holomorphe définie dans un certain voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, Cauchy donne une formule intégrale pour la fonction implicite :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{y\frac{\partial F}{\partial y}}{F(x,y)}\,dy$$

où C est un petit cercle autour de l'origine. Démontrez-la !

65. Hille (E.), *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Dover, 1997.

Le théorème de Puiseux



Victor Puiseux (1820-1883). ©

Rappelons que nous avons déjà résolu des équations implicites de la forme $F(x,y) = 0$ lorsque F est une série *formelle* non triviale dans $K[\![x,y]\!]$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

Nous avons montré avec l'aide de Newton et de Cramer que tout élément non nul $F(x,y)$ dans $K[\![x,y]\!]$ peut être décomposé en un produit

$$F(x,y) = A(x,y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x)),$$

où $A(0,0) \neq 0$ et les n solutions $f_i(x)$ sont des *séries de Puiseux* formelles dans $K[\![x^\star]\!]$.

Notre but est maintenant de montrer que si $F(x,y)$ est une série convergente, les $f_i(x)$ le sont aussi.

La complétion de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques en est un bon exemple.

Nous supposons que K *est un corps algébriquement clos muni d'une norme complète.*

Puisque tout élément $f(x)$ dans $K[\![x^\star]\!]$ est dans un anneau $K[\![x^{1/m}]\!]$ pour un certain $m \geqslant 1$, c'est-à-dire une série en la variable $x^{1/m}$, il n'y a pas de difficulté à définir des séries de Puiseux convergentes. On désigne par $K\{x^\star\}$ et $K\{x^\star, y^\star\}$ les anneaux des séries de Puiseux convergentes en une et deux variables.

J'espère que mon lecteur a deviné la définition de l'anneau des séries de Puiseux convergentes en deux variables : il suffit de considérer les séries convergentes en (x,y) et de remplacer formellement x et y par $x^{1/m}$ et $y^{1/m}$ pour un certain $m \geqslant 1$.

Même si les séries dans $K\{x^\star\}$ sont convergentes par définition, nous devons être prudents : il ne s'agit pas de fonctions réelles définies dans le voisinage de 0. Ce sont des fonctions multivaluées de x.

Théorème (« théorème de Puiseux »)**.** *Tout élément non nul* F *dans* $K\{x,y\}$ *peut être décomposé en*

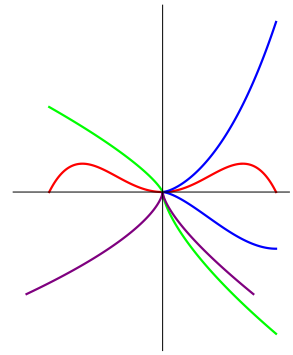
$$F = A(x,y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x)),$$

où $A(0,0) \neq 0$ *et les n solutions* $f_i(x)$ *sont des* séries de Puiseux convergentes *dans* $K\{x^\star\}$.

La démonstration peut sembler un peu lourde, mais le lecteur doit garder à l'esprit que ce théorème n'est qu'une légère généralisation du théorème des fonctions implicites.

Rappelons les faits suivants :

1. Si une série formelle de Puiseux $y = f(x)$ est une racine de $F(x,y) = 0$, elle s'obtient en appliquant l'algorithme de Newton et en choisissant un côté du polygone de Newton à chaque étape.
2. À chaque étape de l'algorithme, nous définissons $x_k = {x_{k+1}}^{\alpha_k}$ et $y_k = u_k\, {x_k}^{\beta_k}(1 + y_{k+1})$ avec des entiers strictement positifs α_k et β_k, et nous remplaçons $F_k(x_k, y_k)$ par $F_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) = {x_{k+1}}^{-\gamma_k} F_k(x_k, y_k)$ (avec un entier strictement positif γ_k). Par conséquent, la série $f(x)$ peut aussi être décrite par la série $y_k(x_k)$ ($k \geqslant 1$). Il est clair qu'il est équivalent de démontrer la convergence de $f(x)$ ou de n'importe laquelle des séries $y_k(x_k)$.
3. Après un certain nombre d'étapes, les multiplicités de $F_k(x_k, y_k)$, c'est-à-dire les valuations de $F_k(0, y_k)$, restent égales à une « multiplicité ultime » mult $\geqslant 1$ (théorème de Cramer).
4. Cette « constante ultime » mult associée à une racine $y = f(x)$ de $F(x,y) = 0$ est aussi la multiplicité de la racine, c'est-à-dire le nombre de facteurs égaux à $(y - f(x))$ qui apparaissent dans la décomposition de F.



Une singularité avec quatre branches de Puiseux.

Nous pouvons terminer la démonstration du théorème de Puiseux. Soit F une série convergente dans $K\{x,y\}$ et soit

$$F(x,y) = A(x,y)x^r(y - f_1(x))(y - f_2(x))\cdots(y - f_n(x))$$

sa décomposition en un produit de séries de Puiseux (*a priori* formelles). Choisissons N tel que tous les $f_i(x)$ appartiennent à $K[\![x^{1/N}]\!]$ et posons $\overline{x} = x^{1/N}$ de sorte que F puisse également être considéré comme un élément de $K\{\overline{x}, y\}$ et tous les f_i comme des éléments de $K[\![\overline{x}]\!]$.

On est ramené au cas de F dans $K\{x,y\}$ tel que tous les $f_i(x)$ soient des séries formelles dans $K[\![x]\!]$ et nous devons démontrer que ces f_i sont effectivement des séries convergentes, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à $K\{x\}$.

Si la « multiplicité ultime » mult d'une racine $y = f(x)$ est égale à 1, le chemin suivi par l'algorithme de Newton et menant à la solution $f(x)$ conduira finalement à un $F_k(x_k, y_k)$ de multiplicité 1. Le théorème des fonctions implicites appliqué au F_k convergent montre que la solution $f(x)$ est aussi convergente.

Si un polynôme a une racine multiple, cette racine est aussi une racine de sa dérivée. Dans notre contexte, cela signifie que si $f(x)$ est une série formelle dans $K[\![x]\!]$ qui est une solution de $F(x,y) = 0$ avec une multiplicité mult $\geqslant 2$, alors la même série est une solution de $\partial F/\partial y(x,y) = 0$ avec une multiplicité plus petite. Bien sûr, si $F(x,y)$ est convergente, ses dérivées partielles par rapport à y le sont aussi. Une simple récurrence termine la démonstration. ⊡

Corollaires

Nous avons fait le plus gros du travail. Il est temps de passer au dessert. Tout d'abord, nous obtenons les mêmes corollaires que pour les séries formelles, avec les mêmes démonstrations. *Nous continuons à supposer que* K *est algébriquement clos, de caractéristique* 0 *et muni d'une norme complète.*

Théorème (théorème de préparation de Weierstrass)**.** *Soit* $F(x,y)$ *une série convergente dans l'anneau* $K\{x,y\}$ *qui n'est pas divisible par* x*. Alors* F *peut s'écrire comme un produit* $A(x,y)P(x,y)$ *où* A *et* P *sont dans* $K\{x,y\}$ *et*

— $A(0,0) \neq 0$*, de sorte que* A *est un élément inversible ;*

— $P(x,y)$ *est un polynôme en* y*.* ⊡

Théorème. *L'anneau* $K\{x,y\}$ *est un anneau factoriel.* ⊡

Une formulation très utile du théorème de Puiseux est donnée en termes de paramétrisation.

Théorème (paramétrisation de Puiseux)**.** *Soit* $F(x,y)$ *une série convergente non nulle dans l'anneau* $K\{x,y\}$*, qui est nulle à l'origine et qui n'est pas divisible par* x*. Alors il existe*

— *des entiers* $m_i \geqslant 1$*,*

— *des ensembles ouverts* $U_i \subset K$ *contenant* 0 *(pour la topologie définie par la norme),*

— *des séries* $g_i \in K\{x\}$ *qui convergent dans* U_i*,*

tels que l'intersection de la courbe $F(x,y) = 0$ *avec un petit voisinage de* $(0,0) \in K^2$ *soit la réunion des images des applications*

$$\phi_i : t \in U_i \mapsto (t^{m_i}, g_i(t)) \in K^2.$$

De plus, ces applications ϕ_i sont injectives et leurs images ne se coupent qu'à l'origine.

Observons d'abord que l'ensemble des racines $f_1(x), \dots, f_n(x) \in \mathrm{K}\{x^\star\}$ de notre équation $\mathrm{F}(x, y) = 0$ est invariant par le groupe de Galois. Pour chaque racine $f_i(x)$, soit m_i le plus petit entier tel que $f_i(x) \in \mathrm{K}\{x^{1/m_i}\}$. En particulier, $f_i(x)$ a m_i conjugués de Galois distincts. En réordonnant, on peut supposer que $f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)$ sont les m_1 conjugués de f_1. Aucun de ces $f_i(x)$ $(i = 1, \dots, m_1)$ n'est une « fonction » de x au sens habituel. Cependant, le choix d'une racine m_1-ième de x définit une valeur spécifique pour chacun des $f_i(x)$ $(i = 1, \dots, m_1)$. Changer la racine de x permute simplement les valeurs de $f_i(x)$ $(i = 1, \dots, m_1)$. Autrement dit, il existe un $g_1(t) \in \mathrm{K}\{t\}$ convergent tel que les m_1 valeurs de $f_1(x)$ soient les m_1 valeurs de $g_1(\sqrt[n]{x})$ pour les m_1 choix possibles de $\sqrt[n]{x}$. Tous ces points sont paramétrés dans un certain voisinage de 0 par

$$\phi_1 : t \in \mathrm{U} \mapsto (t^{m_1}, g_1(t)) \in \mathrm{K}^2.$$

Ceci définit un nombre fini de ϕ_i comme dans le théorème, un pour chaque orbite du groupe de Galois sur l'ensemble des racines. Les images des ϕ_i couvrent le lieu des zéros de F (toujours dans un voisinage de l'origine).

Il reste à montrer que les ϕ_i sont injectives et que leurs images ne se coupent qu'à l'origine.

Les zéros d'une fonction analytique sont isolés. Le lemme suivant dit simplement qu'il en est de même dans $\mathrm{K}\{x\}$ pour un K général. Je laisse la démonstration en exercice au lecteur.

Lemme. *Soit h une série convergente de $\mathrm{K}\{x\}$. S'il existe une suite $(x_k)_{k\geqslant 0} \in \mathrm{K} \smallsetminus \{0\}$ convergeant vers 0 telle que $h(x_k) = 0$, alors $h = 0$.* ⊡

Supposons maintenant que ϕ_1, par exemple, ne soit pas injective dans le voisinage de 0. Cela impliquerait qu'il existe une racine m_1-ième de l'unité ω_1 telle que les solutions de $g_1(\omega_1 t) = g_1(t)$ s'accumulent en 0. D'après le lemme, $g_1(\omega_1 t)$ et $g_1(t)$ seraient identiquement égaux et cela contredirait le fait que m_1 est le plus petit entier tel que $f_1(x) \in \mathrm{K}\{x^{1/m_1}\}$.

Le même argument montre que l'intersection des images de

$$\phi_1 : t \in \mathrm{U} \mapsto (t^{m_1}, g_1(t)) \in \mathrm{K}^2, \qquad \phi_2 : t \in \mathrm{U}_2 \mapsto (t^{m_2}, g_2(t)) \in \mathrm{K}^2$$

est non triviale (c'est-à-dire qu'elle s'accumule à l'origine) si et seulement si $m_1 = m_2 = m$ et il existe une racine m-ième de l'unité ω telle que $g_2(t) = g_1(\omega t)$ identiquement. Dans ce cas, les deux images coïncident effectivement dans le voisinage de l'origine. ⊡

Les images des ϕ_i sont généralement appelées les *branches* de la courbe $\mathrm{F}(x,y) = 0$. Le paramétrage de type Puiseux d'une branche est unique à l'action de Galois près.

En particulier, un voisinage de l'origine dans $\{\mathrm{F}(x,y) = 0\}$ est homéomorphe à la réunion d'un nombre fini de boules dans K qui se coupent en un seul point. Notons qu'une « boule » est un intervalle dans $\mathbb{R}$, un disque dans $\mathbb{C}$ et un ensemble de Cantor pour les nombres p-adiques.

Nombres réels

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le corps K était algébriquement clos. Étudions le cas des nombres réels qui, après tout, est à l'origine de notre promenade. Soit $\mathrm{F}(x,y) \in \mathbb{R}\{x,y\}$ une série convergente non nulle, qui s'annule à l'origine. Considérons son ensemble de zéros $\{(x,y) \mid \mathrm{F}(x,y) = 0\}$ soit comme une courbe complexe dans $\mathbb{C}^2$, soit comme une courbe réelle dans $\mathbb{R}^2$, dans le voisinage de $(0,0)$. Nous nous intéressons ici principalement à la description de la courbe réelle.

Pour un $\mathrm{F}(x,y) \in \mathbb{R}\{x,y\}$, il peut arriver que la partie réelle de son ensemble de zéros soit réduite à l'origine. L'exemple le plus évident est $x^2 + y^2 = 0$. Sur les nombres complexes, cette courbe consiste en deux branches imaginaires $y = \mathrm{i}x$ et $y = -\mathrm{i}x$, qui ne se coupent qu'en $(0,0)$. Bien entendu, comme nous ne nous intéressons qu'à la partie réelle de l'ensemble de zéros de F, nous éliminons simplement tous les facteurs irréductibles de F dont l'ensemble de zéros se réduit à l'origine (sur les nombres réels).

Sur les nombres complexes, cet ensemble de zéros est la réunion de quelques branches paramétrées par

$$\phi_i : t \in \mathrm{U}_i \mapsto (t^{m_i}, g_i(t)) \in \mathbb{C}^2.$$

Puisque $\mathrm{F}(x,y)$ a des coefficients réels, son ensemble de zéros dans $\mathbb{C}^2$ est globalement invariant sous la conjugaison complexe. Comme les branches sont disjointes à partir de l'origine, un point réel différent de l'origine doit appartenir à une branche qui coïncide avec son conjugué. Le conjugué complexe de l'image de ϕ_i est l'image de

$$\overline{\phi_i} : t \in \mathrm{U}_i \mapsto \left(t^{m_i}, \overline{g_i\left(\bar{t}\right)}\right) \in \mathbb{C}^2.$$

Par conséquent, les branches contenant des points réels différents de l'origine sont telles que

$$\overline{g_i\left(\overline{t}\right)} = g_i(\omega t)$$

pour une racine m_i-ième de l'unité ω. En écrivant

$$g_i(t) = \sum_{k\geqslant 1} a_k t^k,$$

cette condition signifie que $\overline{a_k} = a_k\omega^k$. Soit μ l'une des deux racines carrées de ω et posons $t = \mu s$. Alors

$$t^{m_i} = \mu^{m_i} s^{m_i} = \pm s^{m_i}$$

et

$$g_i(t) = \sum_{k\geqslant 1} a_k t^k = \sum_{k\geqslant 1} a_k \mu^k s^k = \sum_{k\geqslant 1} b_k s^k.$$

Or les coefficients b_k sont réels puisque

$$\overline{b_k} = \overline{a_k}\,\overline{\mu}^k = a_k\omega^k\mu^{-k} = a_k\mu^k = b_k.$$

Résumons cette discussion.

Théorème. *Soit* $\mathrm{F}(x,y) \in \mathbb{R}\{x,y\}$ *une série convergente non nulle à coefficients réels, qui s'annule à l'origine et n'est pas divisible par* x. *Supposons que l'ensemble des zéros de* F *dans le voisinage de* $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *ne soit pas réduit à l'origine. Alors cet ensemble de zéros est la réunion d'un nombre fini de courbes de la forme*

$$\phi_i : t \in]-\varepsilon_i, +\varepsilon_i[\mapsto (\pm t^{m_i}, g_i(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

où g_i *est une série convergente à coefficients réels. Les* ϕ_i *sont injectives et leurs images ne se coupent qu'à l'origine.* ⊡

Il est facile de voir que ces courbes ϕ_i sont transverses à de petits cercles centrés sur l'origine. En effet, les points tangents correspondent à l'annulation de

$$\frac{d}{dt}\left(t^{2m_i} + g_i(t)^2\right) = 2\,m_i t^{m_i-1} + 2\,g_i(t)g_i'(t)\,,$$

dont les zéros sont isolés. Notons que cette expression ne peut pas être identiquement 0 sinon la courbe serait un cercle.

Nous avons démontré plus que l'affirmation de Gauss : une courbe analytique réelle est constituée localement d'un nombre fini de branches avec les propriétés suivantes :

— chaque branche est homéomorphe à $]-\varepsilon,+\varepsilon[$ et transverse à de petits cercles centrés sur l'origine, et coupe ces cercles en exactement deux points (un pour $t>0$ et un pour $t<0$) ;

— deux branches différentes ne se croisent qu'à l'origine ;

— le long d'une branche, y/x converge lorsque t tend vers 0 vers une limite dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Cela signifie que chaque branche a une tangente bien définie à l'origine.

En particulier, une courbe algébrique ne peut pas atteindre l'origine sous la forme d'une spirale infinie.

Notons que si $(0,0)$ est un point isolé dans l'ensemble des zéros de $F(x,y)\in\mathbb{R}\{x,y\}$, chaque branche complexe ne coupe son conjugué complexe qu'à l'origine. Dans ce cas, il doit y avoir un nombre pair de branches, conjuguées deux à deux, et la multiplicité de F est paire. Voici un corollaire simple, analogue au fait que tout polynôme réel de degré impair a une racine réelle.

Soit $F(x,y)$ *une série convergente non nulle à coefficients réels, qui s'annule à l'origine, qui n'est pas divisible par* x *et qui est de multiplicité impaire. Alors la courbe réelle* $F(x,y)=0$ *n'est pas réduite à l'origine. Pour de petites valeurs réelles de* x*, il existe au moins une solution réelle de* $F(x,y)=0$.

Ce simple fait a été transformé en outil puissant par Poincaré qui l'a utilisé dans de nombreuses situations, par exemple pour démontrer l'existence d'orbites périodiques dans le problème à 3 corps (voir [66] page 70). C'est sa *méthode de continuité*.

66. Poincaré (H.), *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Tome I*, Réimpression de l'original de 1892, Albert Blanchard, Paris, 1987.

Diagrammes de cordes

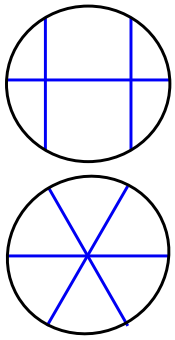
La topologie locale d'une courbe analytique dans le voisinage d'un point singulier suggère la définition suivante, qui sera importante dans la suite de ce livre.

Définition. 1. Un *diagramme de cordes* est un ensemble de $2n$ points sur un cercle muni d'une certaine involution sans points fixes, en d'autres termes, une collection de $2n$ points appariés deux à deux.

2. Deux diagrammes de cordes sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme du cercle qui préserve l'orientation, transforme le premier en le second et qui commute avec

l'involution. En d'autres termes, nous considérons un mot cyclique sur $2n$ lettres où chaque lettre apparaît exactement deux fois. Nous pouvons également dessiner des cordes qui relient les paires. Selon le contexte, on parle alors de *mot de Gauss*, de *correspondance* ou d'*appariement*. J'ai dû faire un choix et j'ai opté pour *diagramme de cordes*.

3. Le diagramme de cordes associé à une courbe analytique en un point (singulier) est le diagramme de cordes obtenu en intersectant la courbe avec un petit cercle autour du point, où les paires de points correspondent à des branches. Un tel diagramme de cordes est dit *analytique*.



Deux diagrammes avec trois cordes.

Nous aimerions comprendre les diagrammes de cordes analytiques et la topologie des courbes analytiques réelles.

Soyez patients ! Nous y arriverons.

Une controverse sur la forme des becs d'oiseaux ?

En 1751, Euler a écrit un article très intéressant (en français) sur la forme des courbes analytiques. Dans l'introduction, il mentionne que

> « Même la géométrie n'est pas exemte [*sic*] de controverses, & des contradictions apparentes, quoi qu'on soutienne souvent le contraire. »

Dois-je donner des exemples de controverses modernes ?

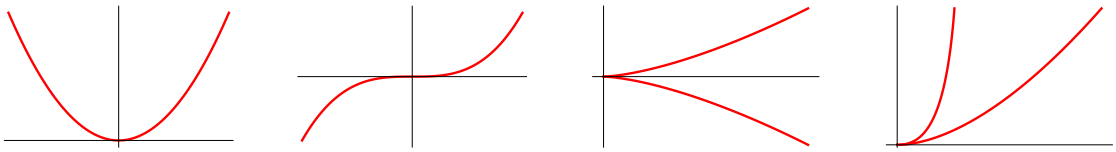
La controverse qu'Euler voulait élucider concerne la forme des points de rebroussement[67]. Il y avait un désaccord entre le marquis de L'Hôpital et Guà de Malves. Euler a joué le rôle de juge et a brillamment dissipé les contradictions apparentes.

Jusqu'à présent, notre discussion n'a porté que sur la *topologie* des branches dans le voisinage d'un point singulier. Nous n'avons pas dit grand-chose sur leur *géométrie*, mais seulement mentionné qu'une branche a une tangente au point singulier.

Le livre de L'Hôpital s'intitule *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* et a été publié en 1696. Il s'agit du premier manuel de calcul différentiel. Il contient une classification des branches singulières des courbes analytiques en quatre catégories.

67. Euler (L.), Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hôpital, *Mém. Acad. Sci. Berlin*, nº 5, 1751, p. 203-221. Voir les Archives Euler pour des commentaires.

J'exprime cela dans une terminologie moderne. Choisissons les coordonnées de façon à ce que la tangente soit $y = 0$. Localement, notre branche est la réunion de deux *demi-branches* qui sont les graphes de deux fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$, définies sur de petits intervalles de la forme $]-\varepsilon, 0]$ ou $[0, \varepsilon[$. Ces fonctions sont lisses loin de l'origine.

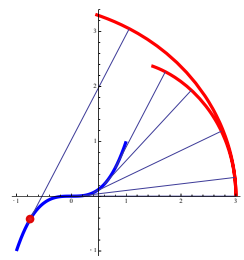


Les quatre cas sont :

1. h_1 est défini sur $]-\varepsilon, 0]$ et h_2 sur $[0, \varepsilon[$ et leurs dérivées secondes ont le même signe. Dans ce cas, la courbe est convexe (ou concave) et se trouve d'un côté de sa tangente.
2. Un *point d'inflexion*. Même chose que précédemment, sauf que les dérivées secondes ont des signes différents.
3. Un *point de rebroussement* standard. Ici, h_1 et h_2 sont définis du même côté de l'origine et leurs dérivées secondes sont de signes opposés. Les deux demi-branches ont donc des convexités opposées.
4. Un *point de rebroussement en bec d'oiseau* dont les dérivées secondes ont le même signe sur les deux demi-branches.

Il est très facile de trouver des exemples des trois premières catégories. En ce qui concerne la quatrième catégorie, L'Hôpital a donné l'exemple suivant. Enroulons un fil sur une courbe avec un point d'inflexion et attachons-le à un autre point de la courbe. Quand on le déroulera, en le tenant bien tendu, le point final décrira une courbe (appelée *développante*) qui présentera pareil bec d'oiseau. J'ai simplement choisi $y = x^3$ comme courbe avec inflexion et j'ai demandé à mon ordinateur de tracer la courbe de L'Hôpital. Le résultat est dans la marge. En effet, le bout du fil décrit une courbe rouge qui présente un bec d'oiseau lorsque le fil est tangent au point d'inflexion, comme il le prétendait. Les demi-branches ont la même concavité. Ceci est « mécaniquement » évident pour L'Hôpital.

La frontière entre la géométrie et la topologie n'est pas claire. Je dirais que la topologie traite des propriétés invariantes sous les homéomorphismes et les invariants géométriques sous des groupes plus petits, comme par exemple les isométries euclidiennes, les automorphismes projectifs ou simplement les difféomorphismes. Par exemple, je considérerais l'existence d'une tangente à une courbe comme une propriété géométrique.



La longueur du fil plus la longueur curviligne le long de la courbe est constante.

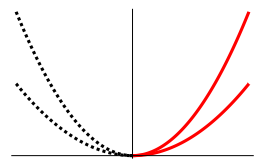
En 1740, Guà de Malves a publié un livre étonnant[68] dont le but était d'éviter les techniques de Newton et de n'utiliser que celles de Descartes. Il convient de rappeler la controverse entre les Anglais et les Français au cours du XVIIIe siècle autour de Descartes et de Newton. Pour illustrer cette guerre franco-anglaise, je recommande la *Lettre philosophique sur Descartes et Newton* de Voltaire :

> « Un Français qui arrive à Londres trouve les choses bien changées en Philosophie comme dans tout le reste. Il a laissé le monde plein, il le trouve vide ; à Paris on voit l'univers composé de tourbillons de matière subtile ; à Londres on ne voit rien de cela ; chez nous, c'est la pression de la Lune qui cause le flux de la mer, chez les Anglais, c'est la mer qui gravite vers la lune ; de façon que quand vous croyez que la lune devrait nous donner marée haute, ces Messieurs croient qu'on doit avoir marée basse, ce qui malheureusement ne peut se vérifier, car il aurait fallu pour s'en éclaircir examiner la lune et les marées au premier instant de la création. »

68. Gua de Malves (J.-P.), *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul Différentiel, les Proprietés, ou affectations principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Briasson, Paris, 1740.

Quoi qu'il en soit, le livre de Guà porte sur un débat toujours d'actualité : la géométrie algébrique doit-elle utiliser les outils transcendants de la géométrie différentielle ? Parmi les « théorèmes » de ce livre, on trouve l'affirmation que L'Hôpital a tort et que les becs d'oiseaux n'existent pas.

Guà connaît l'exemple de L'Hôpital, mais il le critique de la manière suivante. Supposons que l'on considère deux paraboles $y = x^2$ et $y = 2x^2$ mais seulement pour $x \geqslant 0$. On obtient deux demi-paraboles convexes dont la réunion ressemble à un bec d'oiseau. Par conséquent, selon Guà, l'exemple de L'Hôpital pour un bec d'oiseau est artificiel : la courbe analytique complète contient deux branches lisses, comme dans l'exemple des paraboles, et il manque une moitié de la courbe dans la construction mécanique qui utilise le fil. Convaincu ? Guà continue et « démontre » que les becs d'oiseaux sont impossibles pour une courbe analytique.

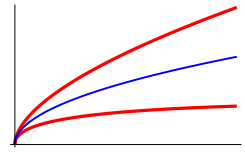


La « démonstration » se fait plus ou moins de la manière suivante. Une branche est de la forme $y = ax^{p/q} + o(x^{p/q})$ pour une paire d'entiers premiers entre eux p et q avec $p > q$ si $y = 0$ est la tangente en 0. S'il y a un bec, q doit être pair car sinon y serait défini pour tout x, positif ou négatif. La concavité est

donnée par le signe de la dérivée seconde, qui est de l'ordre de $a\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-1\right)x^{\frac{p-2q}{q}}$. Comme $p-2q$ est impair et q pair, les deux déterminations de cette dérivée seconde ont des signes différents et les deux demi-branches ont des convexités opposées : ce n'est pas un bec d'oiseau.

C'est alors qu'intervient le grand Euler. Son article est très clair et incontestable. Au départ, il était convaincu par l'argumentation de Guà, mais il a découvert une erreur en 1744. Dans une rubrique intitulée « Euler a-t-il démontré la règle de Cramer ? », Rob Bradley mentionne une lettre entre Euler et Cramer relative à ce sujet. Euler, Guà et L'Hôpital utilisent librement les séries de Puiseux et ne soulèvent aucun doute quant à leur convergence. Ce qui est remarquable dans l'article d'Euler, c'est la description du rôle des nombres *complexes* pour comprendre les courbes algébriques *réelles* (en 1751). Voici l'un des exemples d'Euler :

$$y = x^{1/2} \pm x^{3/4}.$$



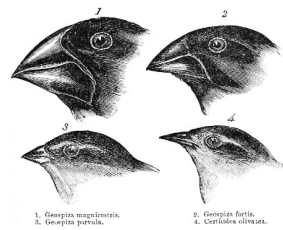
Le tracé dans la marge ressemble bien à un bec d'aigle. Comment savoir que ces deux graphiques, avec des signes ±, appartiennent à la même branche et ne peuvent pas être complétés comme dans notre exemple avec deux paraboles ? Euler donne un argument convaincant en utilisant les nombres complexes. J'encourage vivement mon lecteur à trouver l'erreur dans la « démonstration » de Guà. En éliminant les radicaux, Euler trouve

$$y^4 - 2xy^2 + x^2 - x^3 - 4yx^2 = 0.$$

Vous devriez dessiner le polygone de Newton et vérifier qu'il y a bien une seule branche à l'origine.

Aujourd'hui, les becs d'oiseaux ne sont plus mentionnés dans les livres de mathématiques. Ces points sont désormais appelés *points de rebroussement de seconde espèce*, d'une manière plus neutre. On voit encore parfois le nom *courbe ramphoïde*, du grec « rampho » associé aux becs crochus des oiseaux de proie.

Pour conclure ce chapitre, je n'ai qu'un seul conseil à donner : arrêtez de lire ce livre et lisez les articles d'Euler. Tout de suite !



Les formes des becs des pinsons des îles Galápagos ont joué un rôle important dans la théorie de l'évolution de Darwin. ©

Un ruban de Möbius dans le hall principal de l'IMPA, où la première version de ce livre a été écrite.

Möbius et sa bande

C'est le titre d'un livre [69] consacré aux mathématiques allemandes au XIXe siècle. Dans ce chapitre, nous discutons de la topologie associée au processus de *désingularisation* des courbes analytiques, ce qui conduit à de magnifiques colliers faits de rubans de Möbius.

August Ferdinand Möbius (1825-1884). ©

69. Fauvel (J.), Wilson (R.) et Flood (R.), *Moebius and his Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany*, Oxford University Press, 1993.

Coordonnées polaires

Observons l'application familière d'un cylindre vers le plan :

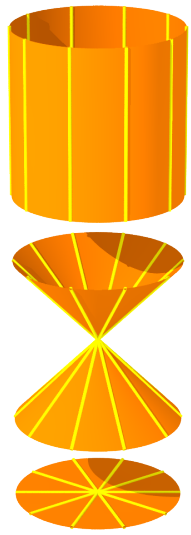
$$\Phi : (\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

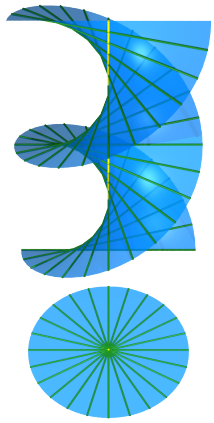
Elle possède les propriétés suivantes :

1. Φ restreint à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un difféomorphisme sur le plan perforé $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$.
2. Φ « écrase » le cercle $\{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ à l'origine.
3. L'image inverse par Φ d'un point différent de l'origine contient précisément deux points, de la forme (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$.

La propriété 3 n'est pas très pratique pour un système de coordonnées et c'est la principale raison pour laquelle Φ sera légèrement modifié dans un instant. On restreint parfois Φ à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ mais cela introduit un bord artificiel.

La propriété 2 est intéressante dans le contexte de la *désingularisation*. Dans un petit voisinage de l'origine, Φ^{-1} se comporte comme un microscope : de minuscules cercles $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, de périmètre $2\pi\varepsilon$, sont transformés par Φ^{-1} en deux grands cercles $\{\pm\varepsilon\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, de périmètre 2π.

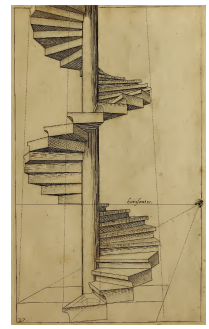




Comme premier exemple naïf, considérons une droite D qui passe par l'origine. Son image inverse $\Phi^{-1}(D)$ consiste en deux « droites » $\theta = \alpha$ et $\theta = \alpha + \pi$ plus le cercle $\{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Par conséquent, si deux droites distinctes D_1 et D_2 se coupent à l'origine, leurs images inverses deviennent en quelque sorte disjointes. L'opération Φ^{-1} a supprimé le point d'intersection. Le « en quelque sorte » est dû au fait que $\Phi^{-1}(D)$ contient $\Phi^{-1}(0,0)$ de sorte que les images inverses de deux droites qui se coupent ne peuvent pas être disjointes.

Une meilleure procédure est la suivante. Étant donné un sous-ensemble X du plan, je note $\widehat{\Phi^{-1}}(X)$ la fermeture dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de $\Phi^{-1}(X \setminus \{(0,0)\})$. Avec cette définition, $\widehat{\Phi^{-1}}(D_1)$ et $\widehat{\Phi^{-1}}(D_2)$ sont effectivement disjoints. Je dirai que $\widehat{\Phi^{-1}}$ est la *transformée stricte*.

Pour visualiser Φ, regardons la surface S plongée dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et définie par $x \sin\theta = y \cos\theta$. Ceci est analogue à un escalier à double spirale. La figure dans la marge représente un escalier simple dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[$. Notons que S est une surface *lisse*. Notre application Φ correspond à la projection sur le plan horizontal $\mathbb{R}^2$ et $\Phi^{-1}(0,0)$ est la verticale $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}$.

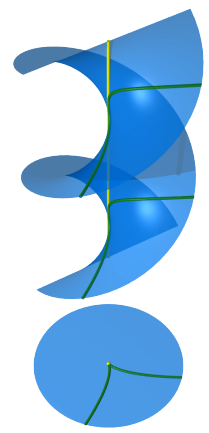


La planche 27 d'*Instruction en la science de perspective*, de H. Hondius (1625). ©

Comme deuxième exemple simple, considérons la courbe plane $x^3 = y^2$ qui a un point de rebroussement à l'origine. Sa transformée stricte a pour équation $\rho = \sin^2\theta / \cos^3\theta$ (avec deux composantes, comme il se doit) et n'est plus singulière. Elle est maintenant lisse et tangente au cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}$.

L'idée générale est que la transformée stricte d'une courbe est « moins singulière » que la courbe originale à l'origine. En répétant l'opération un certain nombre de fois, on espère que la courbe singulière sera transformée en une courbe lisse.

Avant de continuer, nous devons résoudre le problème des préimages par Φ qui contiennent deux points. En itérant le processus n fois, on obtient 2^n points et c'est très difficile à gérer.



Le ruban de Möbius

Remarquons que l'involution qui envoie (ρ, θ) vers $(-\rho, \theta + \pi)$ n'a pas de point fixe. Une façon simple de se débarrasser des ©

doubles images de Φ est d'identifier les points (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le quotient correspondant est une surface lisse. L'involution inverse l'orientation puisque son déterminant jacobien est -1. La surface quotient n'est pas orientable : c'est le fameux *ruban de Möbius*[70].

La même chose pourrait être exprimée de la manière suivante. L'ensemble des droites qui passent par l'origine est un cercle, qui peut être paramétré

— soit par la *pente* t qui est un élément de la droite projective réelle $\mathrm{P}^1_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

— soit par l'angle θ, maintenant *défini modulo* π.

Soit $\mathscr{M}$ l'espace des paires (p, D) où p est un point du plan et D une droite passant par l'origine *et par* p. Il peut être vu soit comme

$$\mathscr{M} = \left\{((x,y),t) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \mid y = tx\right\}$$

ou comme

$$\mathscr{M} = \left\{((x,y),\theta)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \mid x \sin\theta = y \cos\theta\right\}.$$

La première présentation a l'avantage d'avoir une équation très simple et l'inconvénient de ne pas montrer immédiatement que $\mathscr{M}$ est une surface lisse au voisinage de $t = \infty$. Cependant, en remplaçant t par $t' = 1/t$, l'équation devient $x = t'y$ et l'inconvénient disparaît. La seconde présentation montre que $\mathscr{M}$ est bien le quotient de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par l'involution mentionnée ci-dessus.

Remarquons que $x = y = 0$ définit un cercle E plongé dans $\mathscr{M}$: on l'appelle le *diviseur exceptionnel*.

Définissons l'application

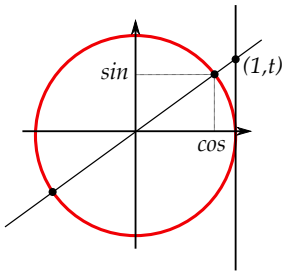
$$\Psi : ((x,y),t) \in \mathscr{M} \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Elle possède exactement les propriétés souhaitées :

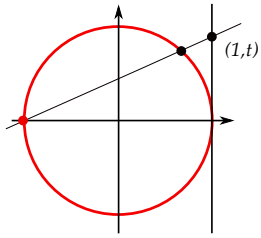
1. Ψ restreinte au complémentaire du diviseur exceptionnel est un difféomorphisme sur le complémentaire de l'origine dans le plan.
2. Ψ « écrase » le diviseur exceptionnel à l'origine.

70. Popescu-Pampu (P.), La bande que tout le monde connaît, *Images des mathématiques*, 2010.

Dans son mémoire de 1895, *Analysis Situs*, Henri Poincaré ne mentionne pas le ruban de Möbius mais « la surface unilatère que tout le monde connaît ».



Le cercle des angles modulo π est une droite projective réelle.



Le cercle des angles modulo 2π est également une droite projective réelle.

Le terme *diviseur* provient de la géométrie algébrique et prête à confusion car le diviseur exceptionnel est un cercle plongé dans $\mathscr{M}$ qui ne divise pas la surface en deux composantes, contrairement à l'âme d'une couronne.

Pour cette raison, nous dirons que $\mathscr{M}$ a été obtenu à partir du plan par *éclatement* de l'origine. Inversement, Ψ est une *contraction*.

Comme nous voulons travailler localement, il est généralement utile de se restreindre à la surface compacte avec bord

$$\overline{\mathscr{M}} = \left\{((x,y),\theta))|x^2+y^2 \leqslant 1\right\} \subset \mathscr{M}.$$

Il est clair que $\overline{\mathscr{M}}$ est obtenu à partir de $[-1,+1]\times[0,\pi]$ après avoir collé $(t,0)$ et $(-t,\pi)$. C'est le ruban de Möbius bien connu : un rectangle dont les deux côtés opposés sont identifiés après une torsion.

Il devrait être clair que le bord de $\overline{\mathscr{M}}$ est connexe puisqu'il est appliqué homéomorphiquement sur le bord d'un disque par Ψ.

Il devrait être tout aussi clair que le complémentaire du diviseur exceptionnel dans $\overline{\mathscr{M}}$ est connexe. C'est une façon compliquée de dire que si l'on découpe le ruban le long du cercle central, le résultat est une authentique couronne. En effet, le complémentaire de E est homéomorphe à un disque ponctué.

Enfin, l'image inverse d'un cercle, disons $x^2+y^2 = 1/2$, est un cercle plongé dans $\overline{\mathscr{M}}$ qui le déconnecte en deux parties. La première est une couronne non tordue envoyée vers $x^2+y^2 \geqslant 1/2$ par Ψ. L'autre est un ruban de Möbius plus petit envoyé vers $x^2+y^2 \leqslant 1/2$ par Ψ.

Le terme *exceptionnel* provient également de la géométrie algébrique. Il est plus difficile à expliquer. Deux courbes *complexes* transverses dans une surface *complexe* ont un nombre d'intersection strictement positif. L'éclatement d'un point dans une surface *complexe* produit un diviseur exceptionnel qui est maintenant une droite projective *complexe*. Pour calculer son nombre d'auto-intersection, nous devons utiliser des déformations non holomorphes. Cette auto-intersection s'avère être égale à -1, ce qui était considéré comme surprenant et exceptionnel par les géomètres algébristes du passé.

Quelques images

Le ruban de Möbius est sans aucun doute l'un des rares objets mathématiques à être célèbre en dehors du monde mathématique. Dans la science-fiction, l'art, la philosophie, etc.

Juste pour le plaisir, voici quelques phrases du célèbre psychanalyste Jacques Lacan[71] dans son séminaire *L'Étourdit* en 1972 :

> « Le non-enseignable, je l'ai fait mathème de l'assurer de la fixion de l'opinion vraie, fixion écrite avec un x mais non sans ressource d'équivoque. Ainsi un objet aussi facile à fabriquer que la bande de Möbius en tant qu'elle s'imagine, met à portée de toutes mains

Le site en ligne *Impact Earth* vous permet « d'éclater » notre planète à n'importe quel point. ©

71. Lacan (J.), *L'Étourdit*, Seuil, Paris, 1973.

Je ne suis pas en mesure de traduire cela en français compréhensible.

> ce qui est inimaginable dès que son dire à s'oublier, fait le dit s'endurer. D'où a procédé ma fixion de ce point doxa que je n'ai pas dit, je ne le sais pas et ne peux donc — pas plus que FREUD — en rendre compte de ce que j'enseigne, sinon à suivre ses effets dans le discours analytique, effet de sa mathématisation qui ne vient pas d'une machine, mais qui s'avère tenir du machin une fois qu'il l'a produite. »

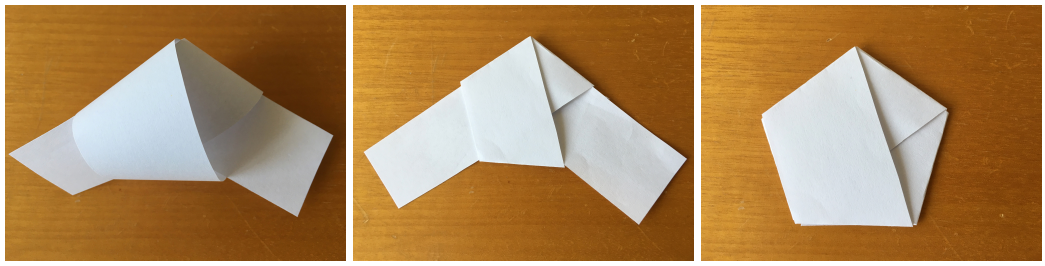
« Regarder » est plus approprié que « lire » dans ce cas.

Pour des commentaires intéressants (et sérieux) sur le ruban de Möbius, je conseille vivement au lecteur de *regarder* le livre de J. Scott Carter[72]. Le ruban est nommé d'après Möbius, qui l'a publié en 1865, mais il n'était comme d'habitude pas le premier. Listing avait décrit le même objet en 1862.

72. Carter (J. S.), *How Surfaces Intersect in Space: An Introduction to Topology*, World Scientific, 1993.

Je pourrais facilement produire un livre rempli de rubans de Möbius, de différentes formes, couleurs, etc. Je n'en présente ici qu'un petit échantillon.

Faisons un nœud simple avec une bande de papier et serrons-le. Nous obtenons quelque chose comme dans la figure ci-dessous. Lorsque nous fermons notre pentagone régulier, nous obtenons un ruban de Möbius.



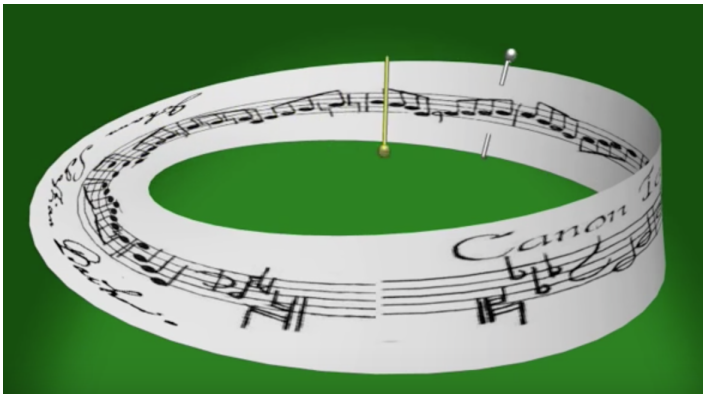
Le chapitre IV du magnifique *Topological Picturebook*[73] est consacré à l'impossible *tribarre*.

73. Francis (G. K.), *A Topological Picturebook*, Springer, 2006.

Considérons un disque ou l'intérieur d'une ellipse dans le plan. Son extérieur a la topologie d'une couronne. Imaginons maintenant cette ellipse dans le *plan projectif réel*, où il faut ajouter la droite à l'infini, qui est topologiquement un cercle : un point pour chaque direction. Chaque droite du plan projectif coupe l'infini en exactement un point. Montrer que cela implique que le complément d'un disque dans le plan projectif est un ruban de Möbius.

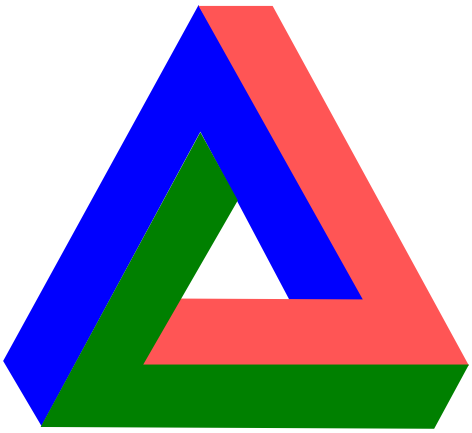
Ne pas confondre le plan projectif réel, obtenu à partir du plan $\mathbb{R}^2$ en ajoutant une droite projective réelle (c'est-à-dire un cercle) à l'infini, avec la droite projective complexe, obtenue à partir de $\mathbb{C}$ en ajoutant un point à l'infini.

Ceci est une bande dessinée à la Möbius, par Étienne Lécroart. On peut lire l'histoire et revenir au début la tête en bas et l'histoire recommence ! ©

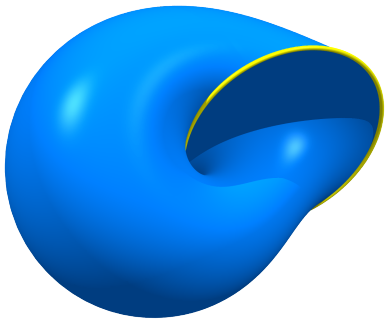


Ceci est un hommage de Jos Leys à J. S. Bach, *Le canon à l'écrevisse de Bach* (1747) sur un ruban de Möbius. ©

Cela peut sembler déroutant. Est-il possible de le réaliser de manière à ce qu'il soit composé de trois *trapèzes plans* comme en apparence sur la figure ? Si les trois morceaux sont tordus, cet objet décrit un ruban de Möbius dans l'espace. Son bord est un cercle, comme il se doit, mais ce cercle est *noué* dans l'espace : c'est un nœud trèfle. Ceci est différent de l'image habituelle dans laquelle le bord n'est pas noué.



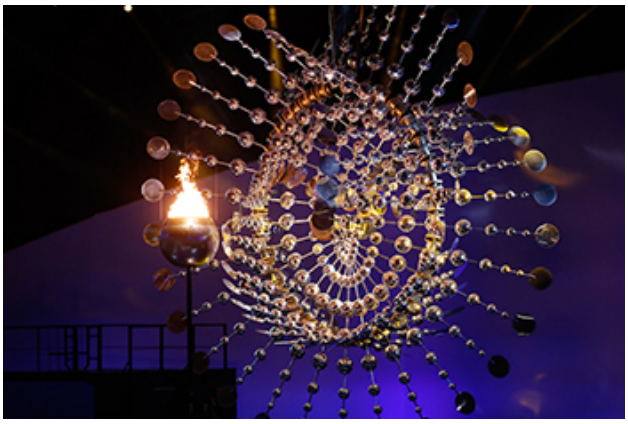
Un *objet impossible*. ©

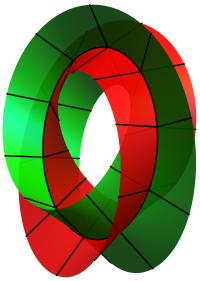


En partant du ruban de Möbius habituel et en le déformant jusqu'à ce que le bord devienne un cercle, on obtient *l'escargot de Möbius*. ©

Avez-vous remarqué que le symbole du recyclage est un ruban de Möbius ? ©

Observons attentivement la vasque des Jeux olympiques de Rio de 2016. C'est un grand cercle avec de nombreuses charnières rotatives.

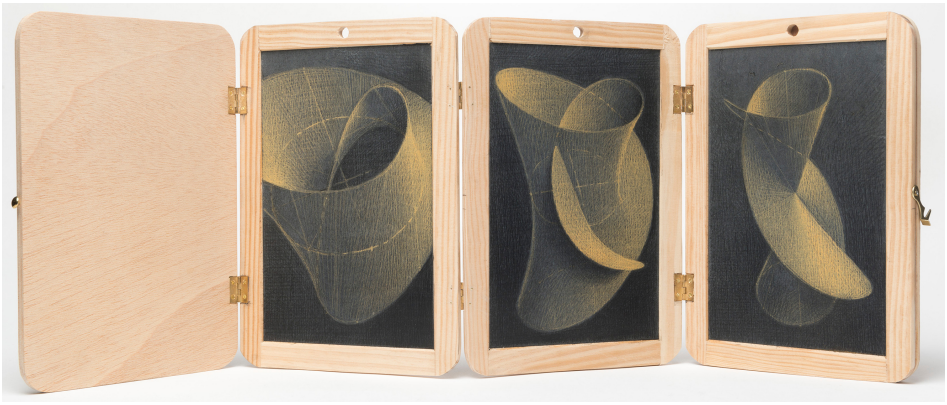




Une sculpture cinétique d'Anthony Howe. ©

Chaque charnière porte quatre bras. C'est donc la réunion de plusieurs segments. Vérifiez que ceci représente deux rubans de Möbius qui se croisent le long de leur âme commune, comme dans la marge.

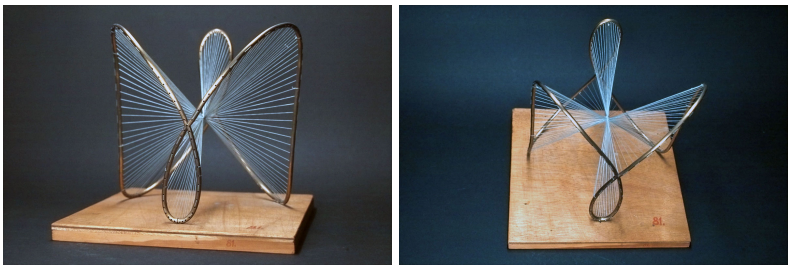
Les dessins suivants montrent la réduction du diviseur exceptionnel en un ruban de Möbius.



Réduction du « Möbius », crayons de couleur sur ardoises, bois et métal, par Sylvie Pic. ©

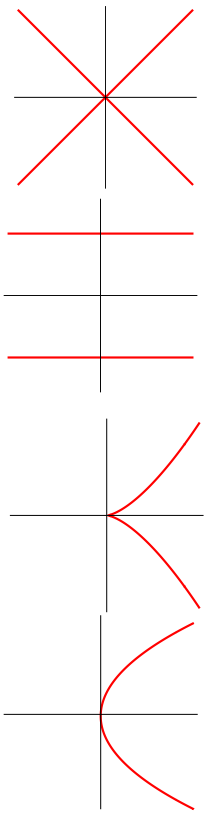
L'image finale est un cône sur un lacet immergé dans la sphère avec deux points doubles. Un cône sur un cercle est un disque,

comme on pouvait s'y attendre pour une contraction. En découpant le cône avec un plan, on trouve un folium de Descartes, de sorte que l'équation du cône pourrait être $x^3 + y^3 - 3xyz = 0$, comme dans les modèles filaires suivants.



Un cône d'ordre 3. ©

Test de notre microscope



Testons l'efficacité de notre microscope Ψ^{-1}. Si $X \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble quelconque, sa *transformée stricte* est la fermeture de $\Psi^{-1}(X \setminus \{(0,0)\})$ dans $\mathscr{M}$. Essayons d'abord avec deux droites sécantes $x^2 - y^2 = 0$. Posons donc $y/x = t$, ce qui avec $y = \pm x$ donne $tx = \pm x$. Puisque nous calculons la transformée stricte, nous travaillons en dehors de l'origine et obtenons $t = \pm 1$. Remarquons que $t = \infty$ n'est pas dans la transformée stricte, comme on le voit facilement avec $t' = 1/t$. Or la fermeture de $t = \pm 1$ dans $\mathscr{M}$ consiste en deux courbes disjointes. La transformée stricte de deux courbes lisses qui se coupent transversalement à l'origine produit donc des *courbes lisses disjointes*.

Qu'en est-il du point de rebroussement $y^2 - x^3 = 0$? On obtient $t^2x^2 - x^3 = 0$, que l'on peut simplifier par x^2 de sorte que $x = t^2$. Par conséquent, dans les coordonnées (x,t) de $\mathscr{M}$, la transformée stricte est une parabole lisse tangente au diviseur exceptionnel ($x = 0$).

Considérons maintenant $y^2 - x^5 = 0$. La transformée stricte, $t^2 = x^3$, est un point de rebroussement. Il est clair qu'un seul éclatement ne suffit pas et qu'il faut recommencer. De la même manière que l'algorithme de Newton ne se termine pas toujours au premier pas.

Max Bill, *Unité tripartite*, 1948-1949, sculpture, MAC/USP, à São Paulo au Brésil. Le terme « tripartite » est-il lié au fait qu'il s'agit de la somme connexe de trois plans projectifs moins un disque ? ©

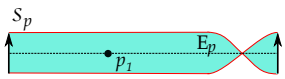
Colliers de Möbius

Éclatement multiple

Pour éclater un point sur une surface, il faut supprimer un disque autour de ce point, éclater ce disque et coller le bord du ruban de Möbius au bord du complémentaire du disque.

Nous avons vu comment éclater un point dans le plan. La construction peut être généralisée. Étant donné un point p sur une *surface lisse* S, on éclate S en p, ce qui produit une autre surface lisse S_p et un éclatement $\Psi_p : S_p \to S$ comme précédemment. L'image inverse de p est le diviseur exceptionnel E_p : ses éléments sont les droites tangentes en p et il s'identifie à la droite projective $P^1(T_p(S))$ construite à partir du plan tangent $T_p(S)$ de S en p. En dehors du diviseur exceptionnel, Ψ_p est un difféomorphisme sur $S \setminus \{p\}$.

Itérons le processus. Choisissons un point p_1 dans le diviseur exceptionnel $E_p = \Psi_p^{-1}(p)$ et éclatons S_p en p_1. Le résultat est une surface lisse S_{p,p_1} et une contraction Ψ_{p_1} de S_{p,p_1} vers S_p avec un diviseur exceptionnel $E_{p_1} \subset S_{p,p_1}$. L'image inverse $(\Psi_p \circ \Psi_{p_1})^{-1}(p)$ consiste en la réunion de E_{p_1} et de la transformée stricte de E_p par Ψ_{p_1}. Cette réunion est appelée le diviseur exceptionnel de la composée $\Psi_p \circ \Psi_{p_1} : S_{p,p_1} \to S$. En dehors de ce diviseur, l'application $\Psi_p \circ \Psi_{p_1}$ est un difféomorphisme sur $S \setminus \{p\}$.



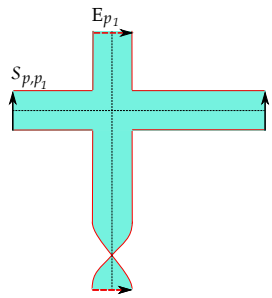
Dans ces figures, il faut coller les flèches qui se correspondent. Il s'agit d'un ruban de Möbius.

Choisissons un point p_2 dans $(\Psi_p \circ \Psi_{p_1})^{-1}(p)$ et continuons le processus un nombre fini de fois, « à loisir ».

Le résultat final est :

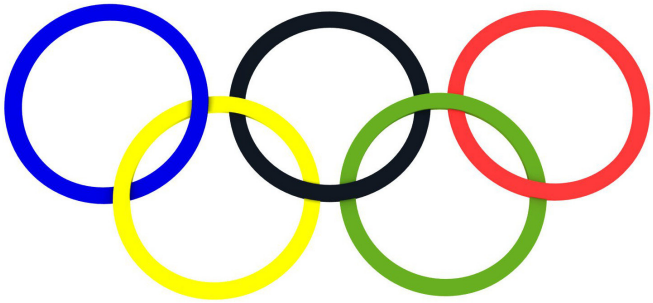
— une surface lisse $\overline{S}$,

— une application lisse $\overline{\Psi} : \overline{S} \to S$, qui envoie difféomorphiquement $\overline{\Psi}^{-1}(S \setminus \{p\})$ vers $S \setminus \{p\}$.



Double éclatement.

Notons en particulier que le bord de $\overline{S}$ est connexe. L'image inverse $\overline{\Psi}^{-1}(p)$ est le *diviseur exceptionnel*. C'est une réunion finie de cercles lisses plongés dans $\overline{S}$. Deux de ces cercles sont soit disjoints, soit ils se coupent transversalement en un seul point. Trois cercles différents ne se coupent pas. L'image rappelle le logo des jeux olympiques. La différence est que les anneaux olympiques sont disjoints, contrairement à notre situation où certains cercles se coupent.

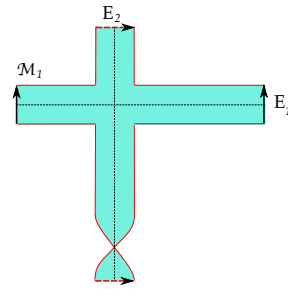


©

Cette composition d'éclatements est le microscope à lentilles multiples que nous utiliserons et qui nous permettra d'analyser tous les points singuliers.

Le microscope

Avant d'utiliser notre microscope, examinons-le. Si l'on part d'un disque S, l'éclatement en une étape $\overline{S}$ est un ruban de Möbius. Nous allons illustrer la topologie de $\overline{S}$ dans le cas général d'un nombre fini d'éclatements.



Commençons par l'éclatement en deux étapes. Nous devons imaginer le résultat de l'éclatement d'un point dans un ruban de Möbius. Commençons par un ruban de Möbius $\mathscr{M}$ contenant le diviseur exceptionnel E comme âme. Comme précédemment, on choisit un point p_1 dans E et on éclate $\mathscr{M}$ en p_1. Le résultat sera une surface $\mathscr{M}_1$ contenant deux cercles E_1 et E_2 qui se coupent en un point. Ici E_1 est la transformée stricte de E et E_2 est le diviseur exceptionnel du second éclatement.

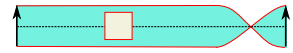
Soit γ un lacet sur une surface S. Commençons avec une orientation de l'espace tangent de S en $\gamma(0)$ et suivons-la le long de γ. Lorsque le lacet revient à son origine, l'orientation est soit celle d'origine, soit inversée. En conséquence, je dirai que γ est *orientant* ou *désorientant*. Formellement, cela définit un homomorphisme du groupe fondamental de S (ou de sa première homologie) vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Regardons le logo des Jeux olympiques de Rio de Janeiro et ses lacets orientants/désorientants.

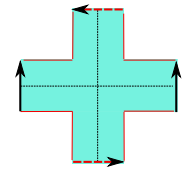
©

Revenons à notre ruban de Möbius éclaté $\mathscr{M}_1$. Nous verrons que E_1 est orientant et que E_2 est désorientant. Le fait que E_2 soit désorientant devrait être clair. Lorsque nous avons éclaté $\mathscr{M}$ en p_1, nous avons introduit un ruban de Möbius dont l'âme est E_2. Quant à E_1, c'est la transformée stricte de l'âme E de $\mathscr{M}$. Il est clair que E est désorientant dans $\mathscr{M}$, mais cela n'implique pas que sa transformée stricte soit également désorientante. Bien au contraire, comme nous le verrons.

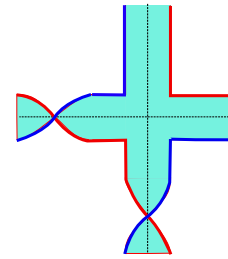
Pour construire $\mathscr{M}_1$, nous creusons un trou dans le $\mathscr{M}$ original et collons un autre ruban de Möbius sur son bord. Puisqu'il s'agit de topologie, nous pouvons creuser un « trou carré ».



En supprimant un petit voisinage annulaire du bord de $\mathscr{M}$, on peut même imaginer que le trou carré traverse $\mathscr{M}$ « de part en part » (sans oublier qu'un ruban de Möbius n'a qu'un seul cercle de bord). Dans ce cas, le complémentaire du carré dans $\mathscr{M}$ est un autre carré. La construction de $\mathscr{M}_1$ peut donc se faire d'une autre manière. On part d'un ruban de Möbius, on choisit deux intervalles disjoints sur son bord et on colle les deux côtés opposés d'un carré sur ces deux intervalles. Une question subsiste. Le recollement des deux côtés peut se faire de deux façons : avec ou sans torsion.

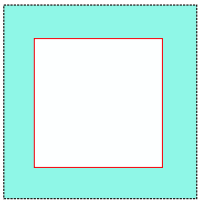


La construction précédente peut être visualisée de la manière suivante. Considérons une croix. Collons les côtés supérieur et inférieur avec une torsion, de sorte que la partie verticale de la croix devienne un ruban de Möbius. L'axe vertical est la courbe désorientante E_2.

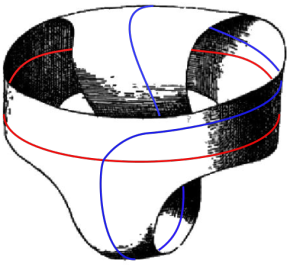


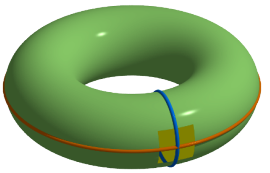
Maintenant, nous devons recoller les côtés gauche et droit de la croix et nous devons décider s'ils doivent être tordus ou non.

Essayons d'abord avec une torsion. Le bord de la surface résultante n'est pas connexe : il ne peut s'agir de notre surface $\mathscr{M}_1$. Il faut donc coller les deux côtés sans torsion : la courbe E_1 est bien orientante.



Nous avons obtenu une bonne image pour $\mathscr{M}_1$. Un ami m'a recommandé de montrer la meilleure image de $\mathscr{M}_1$ ☺ ! J'ai dessiné en rouge et bleu le diviseur exceptionnel.

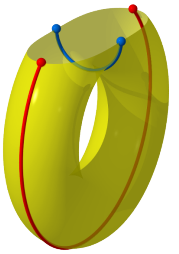




©

Cœurs entrelacés

J'encourage le lecteur à pratiquer les tours de magie topologique suivants.



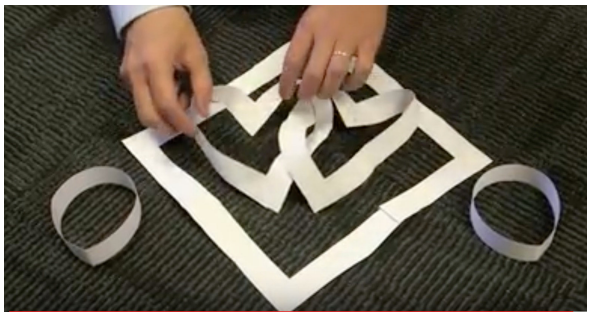
©

Commençons par une croix, collons les côtés opposés sans torsion. Découpons la surface résultante le long de la croix centrale, c'est-à-dire le long des deux cercles. Le résultat est un cadre carré. L'auriez-vous deviné ? Imaginons un tore dans l'espace tridimensionnel et creusons-y un carré. Découpons-le ensuite le long d'un méridien et d'un parallèle. Il est clair qu'il reste un carré avec un trou carré : un cadre carré.

Étonnamment, cet exemple de croix aux côtés opposés identifiés a déjà été étudié par Gauss sous le nom de *Doppelring*. Dans son remarquable article *Gauss als Geometer*, Stäckel[74] relate une conversation entre Gauss et Möbius. Gauss observe que le *Doppelring* a un bord connexe. Plus intéressant encore, il observe qu'il existe deux arcs *disjoints* reliant deux paires *entrelacées* de points sur le bord. Je rappelle que l'impossibilité d'une telle configuration dans un disque était le point crucial de sa démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

74. Stäckel (P.), *Gauss als Geometer*, *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, n° 5, 1917, p. 25-142.

Reprenons la même croix et collons les côtés opposés, maintenant avec une torsion. Découpons la surface obtenue le long des deux cercles. Le résultat est... En fait, tout dépend de la façon dont vous l'avez tordue. En tant que surface abstraite, elle est bien définie : elle consiste en deux composantes connexes, chacune homéomorphe à une couronne. Cependant, la façon dont elle est intégrée dans l'espace dépend de la torsion. Expérimentez ! Le résultat le plus impressionnant est obtenu lorsque les deux côtés opposés de la croix sont tordus, mais de manière différente, à gauche et à droite pour ainsi dire. On obtient alors deux cœurs entrelacés.



Sur ce sujet, le lecteur se reportera à la présentation de Tadashi Tokieda *Unexpected shapes* sur Youtube (en deux parties). ©

Enfin, en collant deux des côtés opposés avec une torsion et pas les deux autres, nous obtenons notre ruban de Möbius éclaté, avec un bord connexe. Que se passe-t-il si nous la découpons le long des deux cercles exceptionnels ? C'est facile puisque l'éclatement est un homéomorphisme à l'extérieur du diviseur exceptionnel. Nous obtenons quelque chose d'homéomorphe à un disque ponctué. En effet, nous obtenons également un cadre carré. De plus, la façon dont ce cadre est plongé dans l'espace dépend de la torsion. Pratiquez ces tours topomagiques !

Éclatement de plus de points

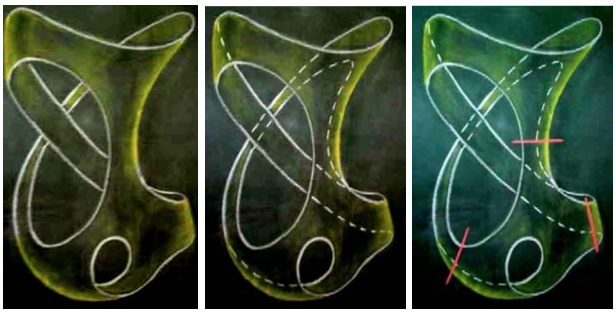
Je décris maintenant la situation quand plusieurs points sont éclatés. Il est facile de décrire la topologie de la surface résultante. L'éclatement d'un point revient à creuser un trou dans la surface et à coller un ruban de Möbius sur le bord. En

d'autres termes, l'opération d'éclatement est équivalente à la *somme connexe* avec un plan projectif.

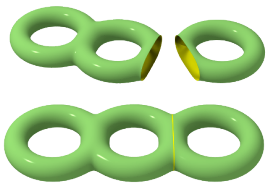
Étant donné deux surfaces connexes M_1 et M_2, leur somme connexe $M_1 \sharp M_2$ est obtenue en supprimant un disque de chacune d'entre elles et en les recollant le long du bord nouvellement créé. Puisque nous avons déjà observé que lorsque nous supprimons un disque dans un plan projectif, nous obtenons un ruban de Möbius, l'effet topologique d'un éclatement est la somme connexe avec un plan projectif.

Par conséquent, si l'on éclate un disque k fois de suite, la surface résultante est la somme connexe de k plans projectifs, moins un disque. Rappelons que toute surface compacte non orientable avec un bord à une seule composante est homéomorphe à une telle surface, et que le nombre $1 - k$ est connu comme la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface. Voir par exemple les livres [75] et [76]. Cependant, il ne s'agit là que d'une description partielle du résultat puisqu'il reste à décrire la position et la nature du diviseur exceptionnel. Ce dernier ne dépend pas seulement de k mais aussi des choix des k points successifs qui ont été éclatés.

Regardons la magnifique sculpture de Max Bill qui introduit ce chapitre. Un paragraphe de l'article de Ton Marar [77] est consacré à montrer que cette sculpture représente une somme connexe de *trois plans projectifs* (moins un disque). Ceci est expliqué dans les figures suivantes, extraites de cet article.



Le même article contient une autre version de la même surface, inspirée du livre déjà mentionné de Francis (page 101).



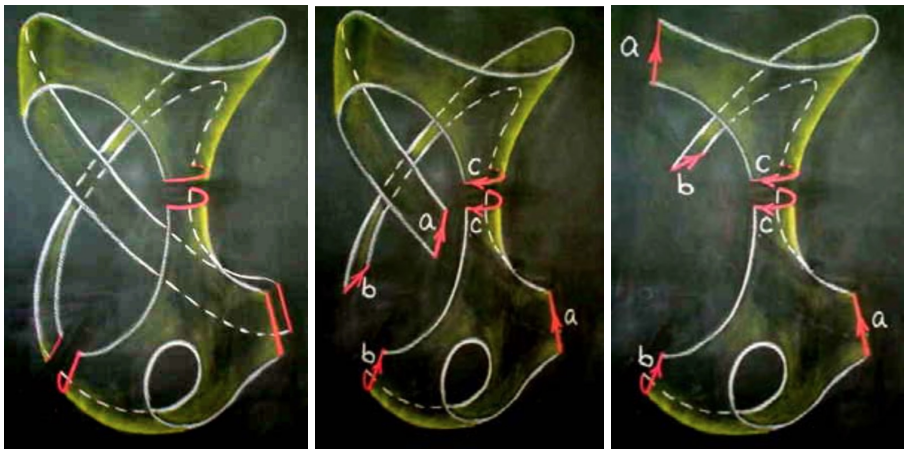
©

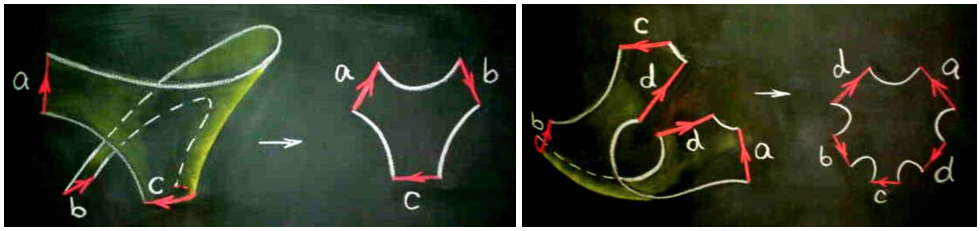
Une question subtile d'orientation se pose ici. Les deux surfaces perforées pourraient être recollées de deux manières différentes puisque le cercle de bord a deux orientations. Cependant, les surfaces orientables ont des homéomorphismes inversant l'orientation. Vérifier que cela implique que la somme connexe est bien définie parmi les surfaces connexes non orientées, qu'elles soient orientables ou non.

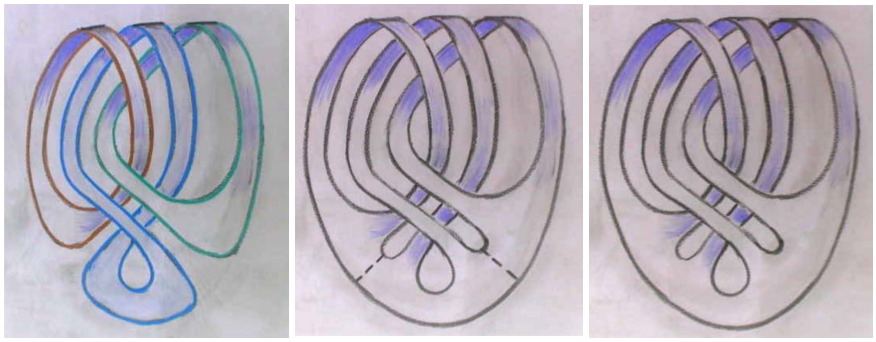
75. Barr (S.), *Experiments in Topology*, Dover, 1989.

76. Boltyanskiĭ (V. G.) et Efremovich (V. A.), *Intuitive Combinatorial Topology*, Springer, 2001.

77. Marar (T.), *Aspectos topológicos na arte concreta*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.


a
b
c
a
b
c
a
b
c
a
b
c


a
b
c
a
b
c
c
d
b
d
a
d
a
b
d
c



©

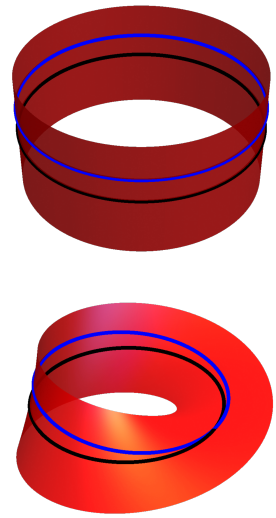
Colliers de diviseurs

Il nous reste à décrire la topologie du diviseur exceptionnel *à l'intérieur* de la somme connexe des plans projectifs. Dans la première étape, il n'y a pas de surprise : le diviseur est l'âme du ruban de Möbius. Lors de la deuxième étape, nous éclatons un point du ruban de Möbius. Le cas qui nous intéresse est celui où l'on éclate un point sur E_1, comme nous l'avons vu plus haut. Les géomètres algébristes considèrent la droite projective comme une droite... et la dessinent comme une droite, même si elle est homéomorphe à un cercle...

Pour les excuser, je dois rappeler que la droite projective sur les nombres complexes est homéomorphe à une 2-sphère, et à un ensemble de Cantor pour les nombres p-adiques.

Lorsque nous arrivons au troisième éclatement, nous pouvons choisir le point soit sur E_1, soit sur E_2, soit à l'intersection de E_1 et E_2. Dans tous les cas, la surface éclatée est une somme connexe de *trois plans projectifs* (moins un disque), c'est-à-dire la surface de Max Bill. Cependant, la position du diviseur exceptionnel sur cette surface n'est pas la même. À titre d'exercice, le lecteur devrait essayer de dessiner (mentalement) les trois diviseurs exceptionnels possibles, directement sur la sculpture.

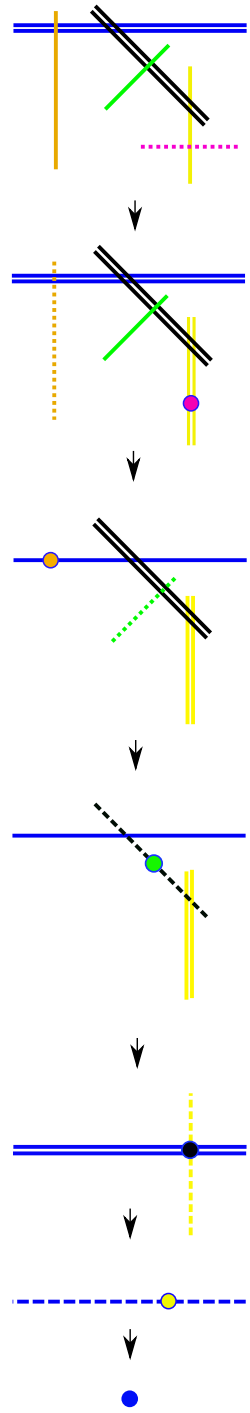
La situation générale est maintenant facile à décrire. D'un point de vue combinatoire, les nombreuses composantes du diviseur exceptionnel sont organisées sous la forme d'un arbre. À chaque éclatement, un nouveau ruban de Möbius est attaché sur le collier précédent. Cependant, cela modifie l'orientabilité du ruban sur lequel le nouveau ruban est attaché.



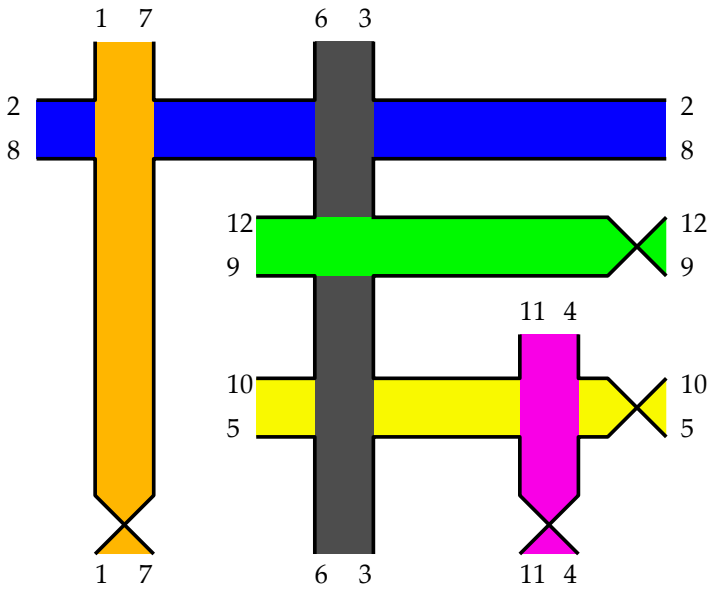
Pour le démontrer, considérons une courbe fermée γ sur une surface S. Déformons légèrement γ en un certain γ', transverse à γ, et comptons le nombre de points d'intersection dans $\gamma \cap \gamma'$ modulo 2. C'est ce qu'on appelle *l'auto-intersection* de γ'. Elle est égale à 0 ou à 1 selon que γ est orientant ou désorientant.

Maintenant, éclatons un point p de $\gamma \subset S$. Choisissons γ' qui passe également par p et éclatons l'image en p. Les deux transformées strictes $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$ ont précisément un point d'intersection de moins que γ et γ' puisque les tangentes en p sont différentes. Par conséquent, l'auto-intersection de $\bar{\gamma}$ est égale à l'auto-intersection de γ moins (ou plus, puisque nous comptons modulo 2 !) un.

Prenons un exemple. La figure dans la marge illustre une succession de six éclatements. Les points épais représentent les centres de ces éclatements. Les droites représentent les droites projectives (n'oublions pas qu'il s'agit en fait de cercles). Les droites en pointillés représentent les nouveaux diviseurs qui apparaissent à chaque étape. Ainsi, les contractions représentées par des flèches vers le bas réduisent ces droites en pointillés à des points de la même couleur. Les droites doubles représentent les composantes qui sont orientantes. À la fin du processus, le diviseur exceptionnel est constitué de six cercles.



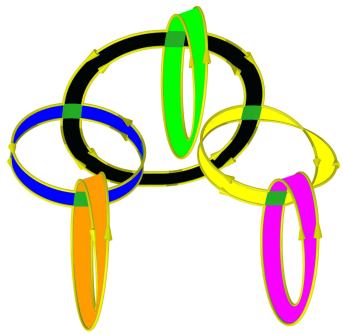
Nous pouvons maintenant dessiner le collier correspondant, composé de quatre rubans de Möbius et de deux couronnes. Les côtés opposés des six bandes doivent être recollés comme le suggère la figure.



Vous devriez vérifier que le bord est bien connexe, comme il devrait l'être. Faites le tour du bord en suivant les chiffres de 1 à 12, puis revenez à 1.

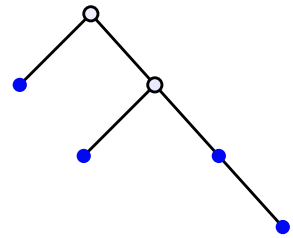
Plomberie

Voici une autre vue de l'exemple précédent.



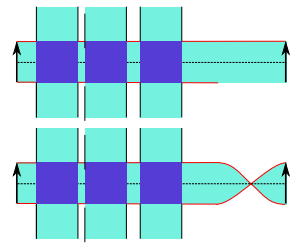
78. Ozbagci (B.) et Popescu-Pampu (P.), Generalized plumbings and Murasugi sums, *Arnold Math. J.*, n° 2(1), 2016, p. 69-119.

Un topologue dirait que cette surface est obtenue en faisant de la *plomberie* sur plusieurs rubans de Möbius et des couronnes. Cette opération est très simple. Supposons que l'on dispose de deux surfaces S_1 et S_2 à bord non vide. Choisissons deux plongements i_1 et i_2 du carré $[-1,1]^2$ dans S_1 et S_2 de telle sorte que les images $i_1(\pm 1\} \times [-1,1])$ et $i_2([-1,1] \times \{\pm 1\})$ se trouvent respectivement sur le bord de S_1 et S_2. Maintenant, pour chaque $(x,y) \in [-1,1]^2$, identifions $i_1(x,y)$ et $i_2(x,y)$. Le résultat est la plomberie de S_1 et S_2 le long de i_1 et i_2. Il s'agit d'une surface avec un bord (et des coins qui peuvent être lissés facilement). Voir [78] pour une présentation de quelques variantes autour de cette construction.



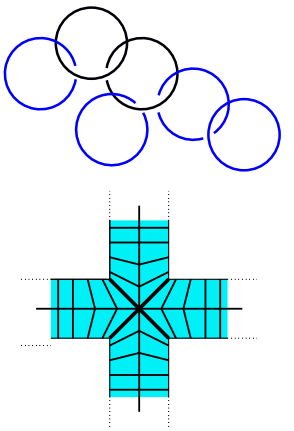
Les points bleus correspondent aux rubans de Möbius et les blancs aux couronnes.

Commençons maintenant par un arbre planaire enraciné. Pour chaque nœud, prenons une couronne ou un ruban de Möbius. Maintenant, faisons de la plomberie avec tous ces rubans ensemble selon le plan donné par l'arbre. Chaque ruban est relié à tous les rubans associés à ses fils dans l'arbre, comme dans la figure dans la marge. Remarquons que la couronne et le ruban de Möbius admettent quatre homéomorphismes qui permutent les côtés opposés du carré, de sorte que l'opération de plomberie sur un tel ruban est bien définie. Le résultat final de cette plomberie est une surface S avec un bord.



Chaque bande (couronne ou ruban de Möbius) contient un

cercle comme âme. La réunion de ces cercles définit un graphe $E \subset S$ que nous pouvons appeler le diviseur, même si notre S n'a pas nécessairement été construit par une suite d'éclatements. Il existe une projection π de S sur E telle que l'image inverse $\pi^{-1}(x)$ consiste en un arc si x est un point régulier de E et en deux arcs sécants sinon. Désignons par S/E l'espace topologique obtenu en réduisant E à un seul point. Si S est le résultat d'une suite d'éclatements, on sait que S/E est un disque fermé et que la projection de S sur S/E est la contraction.

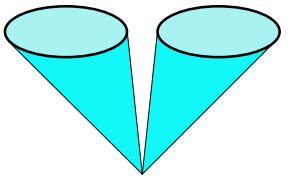


Les fibres de la projection $\pi : S \to E$.
Ne pas confondre π de S vers le diviseur E avec la contraction Ψ de S vers S/E.

Exercice. Montrer que l'espace S/E est homéomorphe à un cône dont la base est la réunion disjointe de k cercles, où k est le nombre de composantes connexes du bord de S.

En particulier, *l'espace quotient* S/E *est homéomorphe à un disque si et seulement si le bord de* S *est connexe*.

L'exercice suivant donne un critère simple qui permet de vérifier directement à partir du dessin de définition si le bord de S est connexe. Ceci est plus facile que de dessiner l'image sur une feuille de papier et de suivre attentivement le bord. La solution de cet exercice nécessite une certaine compréhension de l'homologie des surfaces. Supposons que l'arbre ait n nœuds. Considérons la matrice symétrique A de taille $n \times n$, avec des coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, définie de la manière suivante. Posons $a_{ii} = 0$ si le nœud i est une couronne et $a_{ii} = 1$ s'il s'agit d'un ruban de Möbius. Si $i \neq j$, posons $a_{ij} = 1$ si les nœuds i et j sont adjacents dans l'arbre et 0 sinon.



Le cône sur deux cercles.

Exercice. Montrer que le bord de S est connexe si et seulement si la matrice A est inversible (sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Indication. Vérifier les points suivants :

— l'injection $E \subset S$ et la projection $\pi : S \to E$ induisent des isomorphismes inverses entre $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H_1(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$;

— une base de $H_1(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est donnée par les âmes des n rubans ;

— la forme d'intersection symétrique sur $H_1(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est donnée par la matrice A ;

— le noyau de la forme d'intersection est l'image de $H_1(\partial S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Un microscope de 1882. ©

Résolution des singularités

Nous utilisons maintenant notre microscope pour analyser la nature des singularités et démontrer un théorème qui est essentiellement dû à Max Noether[79].

79. Noether (M.), Rationale Ausführungen der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen, *Math. Ann.*, n° 23, 1883, p. 311-358.

Éclatement d'une branche

Considérons un point singulier d'une courbe analytique réelle définie par une équation $F(x, y) = 0$.

Supposons que nous ayons trouvé une branche réelle de cette courbe, c'est-à-dire une solution de la forme

$$x = \pm t^m, \qquad y = \sum_{k \geqslant 1} a_k t^k.$$

Considérons l'ensemble $I \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ des entiers k tels que $a_k \neq 0$. On peut toujours supposer que le plus grand commun diviseur des éléments de I et de m est 1. En d'autres termes, le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par m et I est $\mathbb{Z}$. Soit $\mu \geqslant 1$ le plus petit entier tel que $a_\mu \neq 0$.

Max Noether (1844-1921). ©

Si $\mu < m$, la série y/x « tend vers l'infini » lorsque t tend vers 0, ce qui signifie géométriquement que l'axe vertical $x = 0$ est tangent à la branche à l'origine.

Si $\mu > m$, la série y/x « tend vers 0 » lorsque t tend vers 0, ce qui signifie géométriquement que l'axe horizontal $y = 0$ est tangent à la branche à l'origine.

Si $\mu = m$, la tangente à l'origine est la droite $y = a_m x$.

Jusqu'à présent, en suivant Newton, nous avons considéré y comme une « fonction » de x. Nous sommes maintenant plus

intéressés par la *courbe* $\mathrm{F}(x,y) = 0$, de sorte que nous pouvons permuter les rôles de x et y.

Nous pouvons donc toujours supposer $\mu \geqslant m$. En effet, nous pouvons définir τ comme une racine μ-ième de $\pm y = \pm \sum_{k\geqslant\mu} a_k t^k$, de sorte que τ est une série de puissances de t. Inversons le rôle de x et y afin d'avoir maintenant $y = \tau^\mu$ et x comme une série en puissances entières de τ.

Si notre branche est singulière, c'est-à-dire si $m > 1$, on procède comme suit.

1. Soit β_1 le plus petit entier de I qui n'est pas un multiple de m.
2. Soit β_2 le plus petit entier de I qui n'est pas dans le groupe engendré par m et β_1.

Continuons ainsi jusqu'à ce que nous obtenions une famille d'entiers dans I qui engendre $\mathbb{Z}$. Ceci définit une suite finie d'entiers $m < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_g$. Cette liste est la *caractéristique de Puiseux de la branche*. Encore une fois, Puiseux n'est pas responsable de cette définition, qui a été introduite plus tard par Halphen et Smith [80]. Pauvre Puiseux !

Examinons l'effet d'un éclatement sur notre branche. Rappelons qu'en pratique cela revient à regarder les coordonnées (x, y_1), où $y_1 = y/x$ est la pente de la droite qui passe par l'origine et (x,y). Dans ces coordonnées (x,y_1), on a

$$x = \pm t^m\,, \qquad y_1 = \sum_{k\geqslant\mu} a_k t^{k-m}.$$

La division euclidienne de β_1 par m donne

$$\beta_1 = mq + m_1 \quad \text{avec} \quad 0 < m_1 < m$$

et nous avons

$$x = \pm t^m\,, \qquad y_1 = a_m + a_{2m}t^m + \cdots + a_{qm}t^{(q-1)m} + \sum_{k\geqslant\beta_1} a_k t^{k-m}.$$

Nous translatons maintenant afin de ramener la singularité à l'origine. Autrement dit, nous posons $y_2 = y_1 - a_m$,

$$x = \pm t^m\,, \qquad y_2 = a_{2m}t^m + \cdots + a_{qm}t^{(q-1)m} + \sum_{k\geqslant\beta_1} a_k t^{k-m},$$

©

Cette procédure peut sembler compliquée. Elle est très similaire à *l'algorithme d'Euclide*. Étant donné deux entiers strictement positifs $0 < a \leqslant b$, on soustrait a à b de manière à obtenir $a, b-a$. Si $0 < a \leqslant b-a$, on continue : $a, b-2a$. On continue tant que le premier entier est plus petit que le second. Ce n'est rien d'autre que la division euclidienne de b par a. Ensuite, permutons les deux entiers et continuons le processus. L'algorithme se termine après un nombre fini d'étapes, lorsque le deuxième entier est égal à 0. À cette étape finale, le premier nombre est le p.g.c.d. de a et b. Par exemple $(6,9) \to (6,3) \to (3,6) \to (3,3) \to (3,0)$. Dans notre situation plus compliquée, nous procédons de la même manière, en éclatant autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que nous puissions permuter les rôles de x et y et continuer…

80. García Barroso (E. R.), González Pérez (P. D.) et Popescu-Pampu (P.), Variations on inversion theorems for Newton–Puiseux series, *Math. Ann.*, n° 368(3-4), 2017, p. 1359-1397.

et nous pouvons éclater et translater à nouveau si $q \geqslant 2$. Après q étapes, on obtient

$$x = \pm t^m, \qquad y_{2q} = \sum_{k \geqslant \beta_1} a_k t^{k-qm}.$$

Puisque $\beta_1 - qm = m_1 < m$, l'axe vertical est tangent à cette dernière courbe à l'origine. Comme précédemment, nous permutons le rôle des deux coordonnées de sorte que

$$y_{2q} = \pm \tau^{m_1}, \qquad x = \sum_{k \geqslant 1} b_k \tau^k.$$

En d'autres termes, après un certain nombre d'éclatements, la nouvelle courbe a une multiplicité $m_1 < m$. En continuant ainsi, après un nombre fini d'étapes, la courbe est lisse.

Nous avons donc démontré ce qui suit.

Théorème. *Soit* C *une branche d'une courbe analytique* $\mathrm{F}(x, y) = 0$ *au voisinage de l'origine. Alors la transformée stricte de* C *par une succession convenable d'éclatements est une courbe lisse.*

Éclatement de toutes les branches

Au voisinage de l'origine, une courbe $\mathrm{F}(x, y) = 0$ est constituée de plusieurs branches. Nous avons appris à désingulariser chacune de ces branches, mais les nombreuses courbes lisses que nous obtenons peuvent être dans une situation relative assez compliquée. D'autres éclatements sont nécessaires pour démêler les ficelles. En utilisant le théorème précédent, nous pouvons désingulariser toutes les branches, une par une. Nous avons

— une contraction Ψ d'une surface S vers un voisinage de l'origine,

— un diviseur exceptionnel $\mathrm{E} \subset \mathrm{S}$ envoyé à l'origine par Ψ,

de sorte que la transformée stricte de notre courbe est la réunion d'un certain nombre de courbes lisses. Chacune de ces courbes rencontre le diviseur exceptionnel en un seul point.

Si tous ces points sont distincts, notre travail est terminé : notre courbe singulière $\mathrm{F} = 0$ a été « désingularisée » comme une réunion de courbes lisses disjointes.

En toute rigueur, nous n'avons défini les applications d'éclatement que pour les surfaces réelles. Des applications similaires pourraient également être définies sur les nombres complexes. Dans ce cas, le résultat d'une succession d'éclatements est une surface holomorphe (c'est-à-dire de dimension complexe 2), contenant un diviseur exceptionnel qui est maintenant une réunion de droites projectives complexes qui se coupent transversalement. Ces opérations d'éclatement pourraient même être définies dans le contexte des surfaces algébriques sur n'importe quel corps. La majeure partie de ce chapitre s'adapterait mot pour mot à ce cas général.

En dimension 3 ou plus, la désingularisation est beaucoup plus subtile et il ne suffit pas d'éclater des points. En 1964, Hironaka a démontré que toute variété algébrique sur un corps de caractéristique nulle peut être désingularisée. On m'a toujours dit que cette démonstration était un tour de force très difficile à assimiler. Cependant, dans ses conférences de 2007 sur la résolution des singularités (*Princeton University Press*), J. Kollár écrit que « la perception persistante que la démonstration de la résolution est très difficile s'est progressivement écartée de la réalité. [...] Il est possible de démontrer la résolution dans les deux dernières semaines d'un cours de géométrie algébrique pour débutants. » Alors, pourquoi n'essayez-vous pas de lire Kollár ?

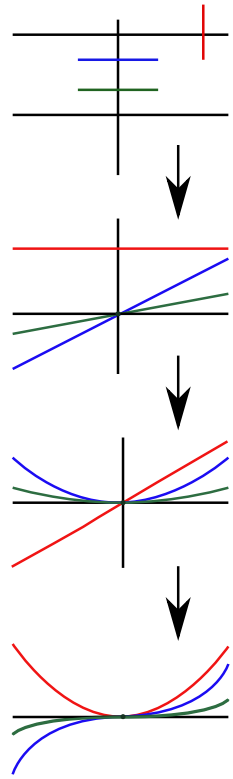
La seule tâche qu'il nous reste à accomplir est de traiter un certain nombre de *courbes lisses* qui passent par le même point p dans le diviseur exceptionnel. Notons que certaines de ces courbes peuvent être tangentes au diviseur.

Le point p peut appartenir à une ou deux composantes de E. Ajoutons cette ou ces composantes à la liste de nos courbes lisses qui passent par p. Choisissons des coordonnées locales (x, y) dans le voisinage de p telles que les équations des courbes lisses soient $y = f_i(x)$, où les f_i sont des séries convergentes distinctes.

Ensuite, éclatons à nouveau en introduisant une nouvelle droite projective. Les transformées strictes des courbes resteront lisses et intersecteront la nouvelle composante du diviseur en un point correspondant aux dérivées des f_i à l'origine. Deux courbes pourraient être tangentes à l'origine, c'est-à-dire que deux f_i pourraient avoir la même dérivée en 0, mais nous pourrions éclater à nouveau. Ce processus séparera les f_i par certains de leurs polynômes de Taylor. Finalement, le résultat est une collection de courbes lisses qui sont disjointes et transverses au diviseur exceptionnel. Nous pouvons même supposer que la collection finale de courbes ne coupe le diviseur qu'en des points réguliers, c'est-à-dire pas à l'intersection de deux cercles.

C'est le théorème de Noether.

Théorème. *Soit* C *une courbe analytique dans le voisinage de l'origine. Alors la transformée stricte de* C *après une succession appropriée d'éclatements est une réunion disjointe de courbes lisses transverses au diviseur exceptionnel.*



Les courbes rouge, bleue et verte sont tangentes au diviseur noir. Trois éclatements les rendent transverses au (nouveau) diviseur.

Transformations quadratiques

Max Noether travaillait dans le contexte global des *courbes algébriques* et non des singularités locales des courbes analytiques. Son microscope était légèrement différent et s'appelle la *transformation quadratique*.

Voici une définition du groupe de *Cremona* du plan projectif $\mathrm{P}^2(\mathrm{K})$ sur un corps K [81]. Il est constitué des K-*automorphismes* du corps $\mathrm{K}(x, y)$ des fonctions rationnelles à deux variables. Un tel automorphisme est complètement défini par deux fonctions

Ceci est un détour. ©

81. Cantat (S.), *The Cremona group in two variables*, dans *European Congress of Mathematics*, European Mathematical Society, Zurich, 2013, p. 211-225.

rationnelles $f(x,y)$ et $g(x,y)$ qui sont les images de x et y. Deux fonctions f et g définissent un élément du groupe de Cremona si la transformation $(x,y) \dashrightarrow (f(x,y),g(x,y))$ est *birationnelle*.

Les transformations projectives définies par des éléments de PGL(3,K) sont des isomorphismes birationnels du plan, mais le groupe de Cremona est beaucoup plus grand. Un bon exemple est l'involution quadratique

$$\sigma : (x,y) \dashrightarrow (1/x, 1/y)$$

qui peut aussi être vue en coordonnées homogènes $[x : y : z]$ comme

$$\sigma : [x : y : z] \dashrightarrow [yz : zx : xy].$$

Elle écrase la droite contenant deux des trois points $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ et $[0 : 0 : 1]$ au troisième point. L'involution n'est pas définie en ces points. En dehors des trois droites, σ est une bijection et même une involution. Notons aussi que $[1 : 1 : 1]$ est un point fixe de σ.

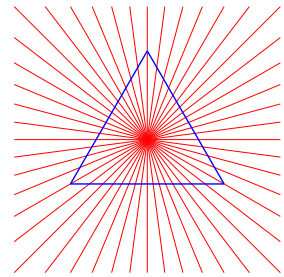
Si A, B, C, M est une base projective dans $P^2(K)$ (trois d'entre eux ne sont pas colinéaires), il existe une transformation projective ϕ qui les envoie vers $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ et $[1 : 1 : 1]$. Le conjugué $\phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi$ est la *transformation quadratique* associée au triangle A, B, C (et au point fixe M). Max Noether a utilisé ces applications en lieu et place des éclatements.

L'avantage est que tout le processus se fait dans le plan projectif sans avoir à introduire une nouvelle surface. L'inconvénient est que σ éclate et contracte en même temps. Il écrase les droites et éclate les points, de sorte que tout en résolvant certaines singularités, il en crée de nouvelles.

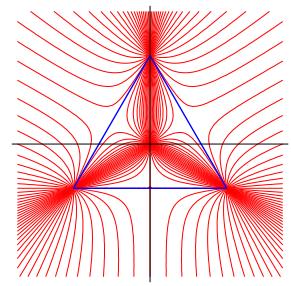
Noether affirmait que σ et PGL(3,K) engendraient le groupe complet de Cremona. C'est vrai, mais sa démonstration n'est pas correcte.

Commençons par une courbe algébrique définie par une équation polynomiale $P(x,y) = 0$. Choisissons un point singulier A et deux points B et C qui ne sont pas sur la courbe et tels que les droites AB, BC et CA coupent la courbe algébrique transversalement (sauf en A bien sûr). Considérons ensuite l'image de la courbe par une transformation quadratique associée à

Luigi Cremona (1830-1903). ©



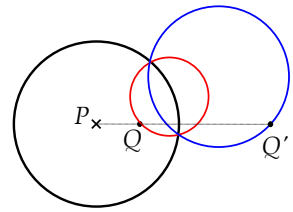
L'involution quadratique applique le faisceau des droites qui passent par M vers le faisceau des coniques qui passent par A, B, C, M.



A, B, C (et à un point fixe M qui importe peu). Le point A est éclaté. Les autres intersections de la courbe avec AB, BC et CA produisent des branches lisses qui se coupent transversalement. On peut donc éclater autant de fois que nécessaire, au prix de l'introduction de multiples points où des courbes lisses s'intersectent transversalement. C'est ainsi que Noether a exprimé son théorème :

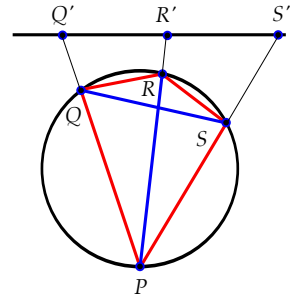
Théorème. *Toute courbe algébrique peut être transformée par un automorphisme de Cremona adéquat en une autre courbe dont les seules singularités sont* ordinaires, *c'est-à-dire constituées de branches lisses qui se coupent transversalement.*

Il existe une autre involution célèbre dans le plan (réel) : l'*inversion*. Il y a soixante ans, tous les élèves de l'enseignement secondaire la connaissaient. Les manuels scolaires étaient remplis d'exercices du style suivant : prenez votre théorème favori en géométrie plane, transformez-le par inversion et obtenez un nouveau théorème. La définition est très simple. Choisissons un point P dans le plan euclidien, appelé le *pôle* de l'inversion. Chaque point Q est envoyé par involution au point Q′ tel que P, Q et Q′ soient sur la même droite et $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = 1$. Cette involution n'est pas définie au pôle P. Elle envoie les cercles ne contenant pas P sur des cercles et les cercles contenant P sur des droites ne contenant pas P. Si P est l'origine du plan complexe, il s'agit simplement de la transformation $z \in \mathbb{C}^\star \mapsto 1/\overline{z} \in \mathbb{C}^\star$.



$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = 1$.

Par exemple, le théorème que tous les enfants français appellent *relation de Chasles* stipule que pour 3 points Q′, R′ et S′ sur une droite orientée, la chose suivante est vraie : $\overline{Q'R'} + \overline{R'S'} = \overline{Q'S'}$. Transformez ceci par inversion et vous découvrirez le théorème de Ptolémée : « Pour tout quadrilatère convexe PQRS inscrit dans un cercle, la somme des produits des deux paires de côtés opposés est égale au produit de ses deux diagonales. »



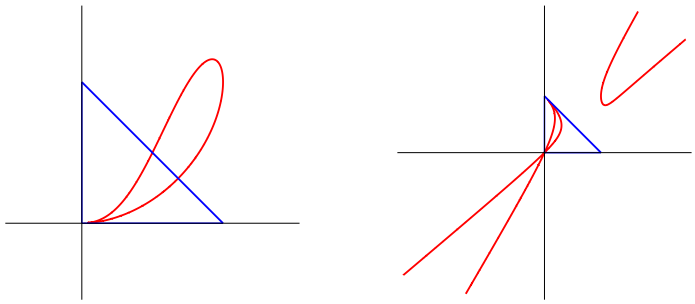
QR.SP + PQ.RS = PR.QS.

Il s'avère que l'inversion est un cas particulier de la transformation quadratique. Pour le premier sommet A de notre triangle, choisissons le point $[0 : 0 : 1]$ dans $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$, alias l'origine du plan $\mathbb{R}^2$, alias le point $0 \in \mathbb{C}$. Pour les deuxième et troisième sommets, B et C, choisissons les points dits *cycliques* : ces points autrefois célèbres parmi les étudiants, qui sont à la fois *à l'infini*

et *imaginaires*. Plus précisément, ce sont les points $[1 : i : 0]$ et $[1 : -i : 0]$ (i est $\sqrt{-1}$). Ils sont appelés *cycliques* car tous les cercles du plan euclidien passent par ces points. Pour le point fixe M, choisissons par exemple le point $[1 : 0 : 1]$, c'est-à-dire le point $1 \in \mathbb{C}$. J'encourage mon lecteur à montrer que la transformée quadratique dans ce cas est juste l'inversion. Ceci peut être vérifié par un calcul aveugle ou en utilisant la géométrie projective classique. Notons que l'image d'une droite (générique) par une transformation quadratique est une conique qui passe par les trois sommets du triangle. Notons également que toute conique qui passe par les points cycliques est un cercle. Bonne démonstration !

Je devrais parler de la *complexification* des cercles, mais cette complexification a toujours été implicite dans le passé. Les trois points $[0 : 0 : 1]$, $[1 : i : 0]$ et $[1 : -i : 0]$ sont dans $P^2(\mathbb{C})$ et non dans $P^2(\mathbb{R})$, mais l'involution quadratique qu'ils définissent dans $P^2(\mathbb{C})$ préserve $P^2(\mathbb{R})$ et induit l'inversion dans le plan euclidien réel, vu comme le complémentaire de la droite à l'infini dans $P^2(\mathbb{R})$. Vérifiez !

Prenons un exemple

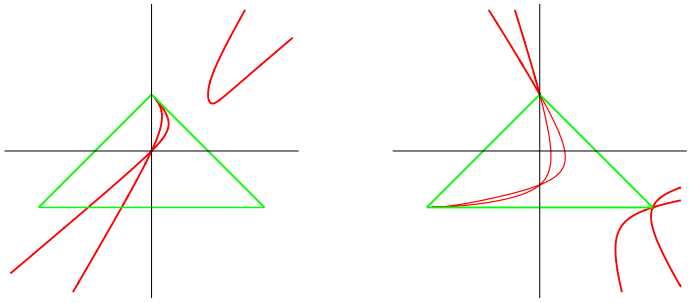


Regardons la courbe d'équation $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$. Il s'agit d'un exemple de *courbe ramphoïde* d'Euler, discutée précédemment, avec un point de rebroussement de seconde espèce.

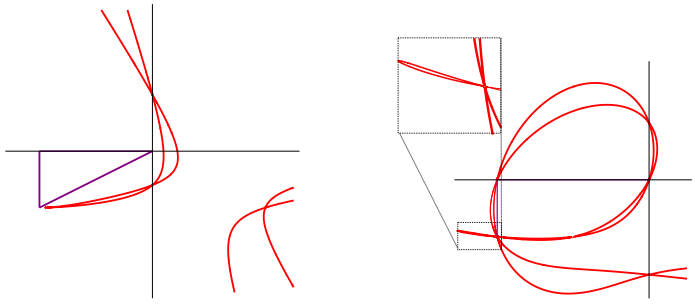
Choisissons un triangle (bleu) dont un sommet se trouve au point singulier et qui est transverse à la courbe partout ailleurs. Effectuons une transformation quadratique. Le résultat se trouve sur la figure de droite ci-dessus (dans laquelle j'ai fait un zoom arrière). Le point singulier de la courbe ramphoïde étant situé à un sommet, la transformation se comporte comme un éclatement au voisinage de ce point. Ce sommet est éclaté jusqu'au côté opposé du triangle. Cependant, la singularité est trop profonde pour être résolue dès la première étape. La nouvelle courbe

possède toujours un point singulier à un (autre) sommet. Chaque côté du triangle s'écrase sur le sommet opposé, ce qui crée un point double à l'origine.

Choisissons un autre triangle (plus grand et vert) dont le sommet est situé sur le point singulier. Appliquons une nouvelle fois la transformation quadratique correspondante. Le résultat est illustré à droite. La nouvelle courbe est toujours singulière dans le coin inférieur gauche, tandis que les autres sommets sont des points doubles ordinaires.



Choisissons un autre triangle (violet). Une autre transformation quadratique conduit finalement à une courbe dont les seules singularités sont des intersections transversales de courbes lisses.



Le théorème de Noether est incontestablement très beau, mais ces singularités *ordinaires* ne sont pas si simples après tout. L'exercice suivant montre que n courbes lisses qui se coupent transversalement contiennent encore trop d'informations.

Exercice (pas si facile). Soient n courbes analytiques *lisses* qui se coupent transversalement en un point. Montrer que pour

$n = 1, 2, 3, 4$, il existe un difféomorphisme analytique local du plan les envoyant vers n droites dans le plan. Montrer que ce n'est pas nécessairement vrai lorsque $n \geqslant 5$. Pouvez-vous décrire l'espace de *modules* de n courbes lisses transverses, c'est-à-dire l'espace quotient par les difféomorphismes locaux ?

Il existe une autre approche. Considérons le fibré tangent à l'espace projectif $\mathrm{P}^d(\mathrm{K})$ de dimension d sur un corps K. Projectivons ce fibré tangent afin de produire une variété algébrique de dimension $2d-1$, qui peut donc être plongée dans un espace projectif de dimension supérieure $\mathrm{P}^{2(2d-1)+1}(\mathrm{K})$. Étant donné une courbe algébrique C dans $\mathrm{P}^d(\mathrm{K})$, on peut regarder la fermeture (de Zariski) de l'ensemble de ses droites tangentes en des points réguliers. Cela produit une autre courbe algébrique C_1 dans un autre espace projectif de dimension d_1. En répétant le processus, nous obtenons finalement une courbe lisse C_n plongée dans un espace projectif de dimension d_n. Choisissons maintenant une projection *générique* sur une courbe dans $\mathrm{P}^2(\mathrm{K})$. Le résultat est une courbe $\overline{\mathrm{C}}$ qui est lisse avec un nombre fini de *points doubles ordinaires*.

Une variété algébrique projective lisse de dimension k peut être, par définition, plongée dans un espace projectif d'une certaine dimension. Si nous la projetons génériquement sur un sous-espace projectif de dimension $2k+1$, cela définit un plongement.

Théorème. *Toute courbe algébrique est birationnellement équivalente à une autre courbe dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires où deux branches lisses se coupent transversalement.*

On pourrait être optimiste et s'attendre à ce que toute courbe algébrique plane soit birationnellement équivalente à une courbe plane *lisse*, mais c'est loin d'être le cas. Le genre d'une courbe plane lisse de degré d est $(d-1)(d-2)/2$, de sorte que si une courbe algébrique a un genre qui n'est pas un entier de cette forme, des points doubles sont obligatoires.

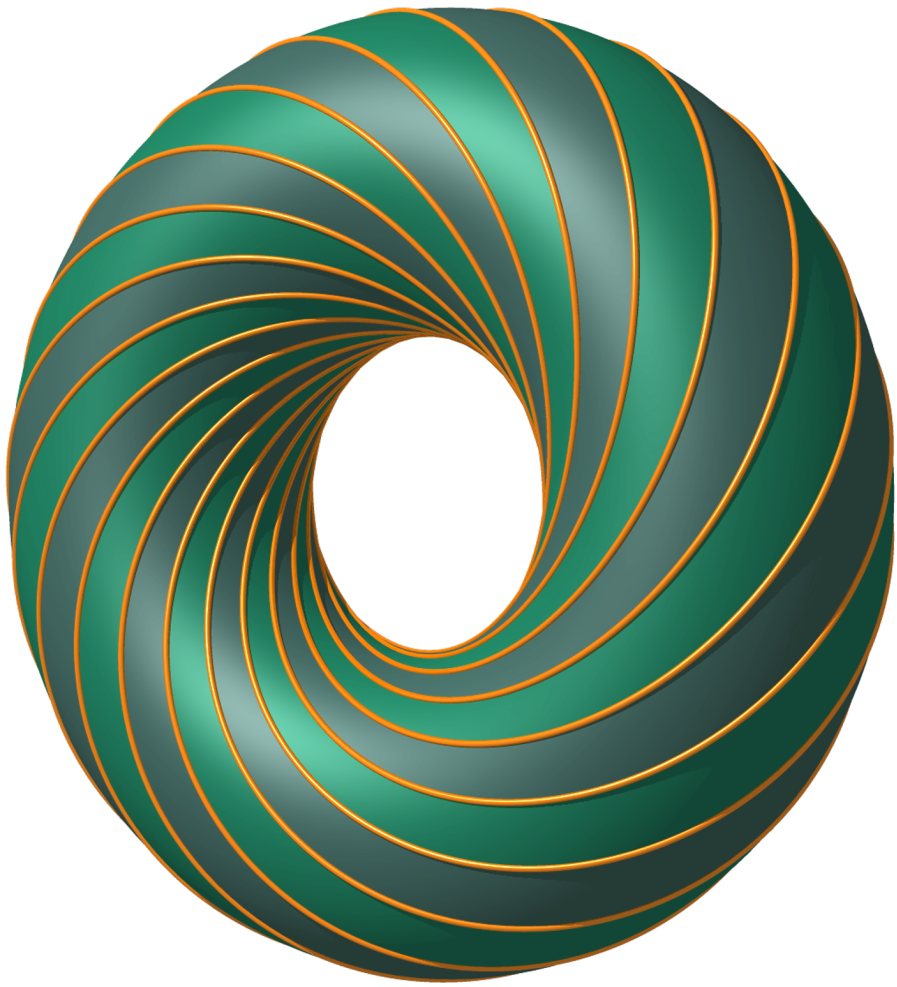
On pourrait être moins optimiste et espérer que toute courbe algébrique puisse être transformée en une courbe dont les singularités sont des points doubles ordinaires en utilisant une transformation de Cremona. Hélas ! Ce n'est pas vrai non plus. L'équivalence birationnelle fournie par le théorème précédent peut ne pas être induite par une transformation de Cremona (voir [82] page 42). Pour une présentation moderne de tous ces concepts, je recommande les livres de Wall et Dolgachev [83] [84] et, pour une version traditionnelle, le livre de Semple et Roth [85].

82. Kollár (J.), *Lectures on Resolution of Singularities*, Princeton University Press, 2007.

83. Dolgachev (I. V.), *Classical Algebraic Geometry, A Modern View*, Cambridge University Press, 2012.

84. Wall (C. T. C.), *Singular Points of Plane Curves*, Cambridge University Press, 2004.

85. Semple (J. G.) et Roth (L.), *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford University Press, 1985.



Un tore de Clifford rempli de cercles dits de Villarceau. Chacun de ces cercles est l'intersection d'une droite de $\mathbb{C}^2$ (passant par l'origine) avec la sphère unité S^3 (et projetée stéréographiquement dans l'espace de dimension 3.

©

La sphère de dimension 3 et la fibration de Hopf

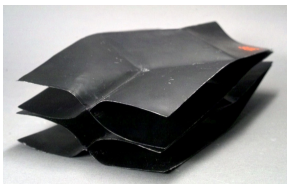
Un monde complexe ?

Il a fallu beaucoup de temps pour que les nombres complexes soient acceptés par les mathématiciens comme de véritables nombres.

> « Avec l'essor de l'algèbre, les racines complexes des équations réelles ont réclamé avec de plus en plus d'insistance d'être reconnues. »

Ce sont les mots de Coolidge dans son merveilleux livre[86] qui décrit la lente émergence de la géométrie complexe en mathématiques. Comme nous l'avons vu, Gauss a été l'un des principaux pionniers en considérant un nombre complexe comme un point dans le plan. Visualiser $\mathbb{C}^2$ était beaucoup plus difficile car il s'agit d'un objet de dimension 4 sur les nombres réels et seuls des visionnaires pouvaient imaginer la quatrième dimension au XIXe siècle. De nombreuses tentatives infructueuses sont expliquées dans le livre de Coolidge.

86. Coolidge (J. L.), *Geometry of the Complex Domain*, Clarendon Press, Oxford, 1924.



Un modèle à la Riemann de la collection de modèles et d'instruments mathématiques de Göttingen. ©

Même Riemann, avec son concept révolutionnaire appelé aujourd'hui « *surface de Riemann* », a dû les « voir » comme

des surfaces dans l'espace réel de dimension 3 *étalées sur* $\mathbb{C}$ et présentant d'étranges *lignes de coupe* là où la surface s'intersectait elle-même, d'une manière virtuelle en quelque sorte. Le moins que l'on puisse dire, c'est que la géométrie sur les nombres complexes avait quelque chose de mystérieux.

Néanmoins, il est devenu progressivement clair que la géométrie complexe n'est pas complexe du tout et qu'elle est d'une grande aide pour comprendre le domaine réel. La citation suivante de Paul Painlevé, en 1900[87], en est un bon exemple :

> « Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe. »

87. Painlevé (P.), *Œuvres de Paul Painlevé*, Tome I, Éditions du Centre national de la recherche scientifique, Paris, 1973, p. 72-73.

Aujourd'hui, la géométrie complexe est mieux comprise. En gros, il existe deux types d'approches. La première consiste à utiliser les nombres complexes de manière formelle, en tant qu'éléments d'un corps algébriquement clos, sans chercher à les visualiser. Cette approche a été très efficace en géométrie algébrique moderne et, en effet, les propriétés algébriques de $\mathbb{C}$ sont étonnamment puissantes. L'inconvénient est que les questions originales, issues des nombres réels, sont généralement oubliées. Un célèbre géomètre algébriste donnait un jour une conférence sur les variétés abéliennes (complexes). À la fin de son exposé, une question a été posée sur les variétés abéliennes *réelles*. L'orateur a été surpris et a pris un certain temps avant de répondre, avec sérieux :

> « Désolé, je n'ai jamais pensé à la réalité ! »

La seconde approche consiste à *dessiner des images*, des projections, des coupes, etc. Plus important encore, on essaie de développer une certaine intuition des espaces de grande dimension basée sur l'*analogie*. Les topologues et géomètres modernes ne sont plus effrayés par les objets dans $\mathbb{C}^2$ et les considèrent même comme très concrets. Dans ce chapitre, nous essayons de développer une partie de cette intuition.

Selon un canular circulant sur Internet, Sophus Lie aurait dit :

> « La vie est complexe parce qu'elle comporte une partie réelle et une partie imaginaire. »

Il est difficile de croire qu'un mathématicien aussi austère ait pu dire une pareille chose.

La sphère ronde à 3 dimensions

La plupart du temps, les géomètres tracent une droite sur le tableau noir lorsqu'ils veulent dire $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{P}^2(\mathbb{C})$, même s'ils savent que $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ est une sphère (de Riemann) de dimension 2 et que $\mathrm{P}^2(\mathbb{C})$ est une variété non-contractile de dimension 4 qui n'a pas grand-chose en commun avec un tableau noir.

Ils dessinent souvent un cercle dans le plan quand ils pensent à une sphère de dimension 3 dans $\mathbb{C}^2$. Ils dessinent une branche réelle d'une courbe $\mathrm{P}(x,y) = 0$ même s'ils savent que la topologie réelle sur les nombres complexes est beaucoup plus riche.

Nous utilisons ces « images erronées » car elles sont souvent la seule approximation possible de la « réalité » dans le monde complexe.

Notre but est de donner une description, aussi visuelle que possible, du voisinage d'un point d'une courbe analytique $\mathrm{F}(x,y) = 0$ dans $\mathbb{C}^2$. Ici, x et y sont des nombres complexes $x_1 + \mathrm{i}x_2$ et $y_1 + \mathrm{i}y_2$ et x_1, x_2, y_1, y_2 sont des nombres réels. La courbe est en fait donnée par deux équations

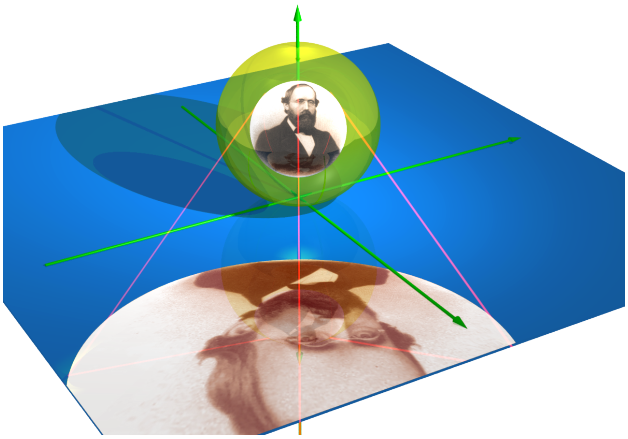
$$\Re(\mathrm{F}(x_1 + \mathrm{i}x_2, y_1 + \mathrm{i}y_2)) = \Im(\mathrm{F}(x_1 + \mathrm{i}x_2, y_1 + \mathrm{i}y_2)) = 0$$

dans $\mathbb{R}^4$, de sorte que du point de vue des nombres réels, notre courbe est une surface. L'idée très naturelle est d'intersecter notre courbe/surface avec une petite sphère de dimension 3 de rayon ε et nous espérons voir quelque chose de dimension 1 (sur les réels).

Nous commençons donc par une description de la sphère à 3 dimensions. L'intersection de notre courbe avec la sphère sera illustrée plus tard. Il y a plusieurs façons de visualiser la sphère unité de dimension 3.

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {y_1}^2 + {y_2}^2 = 1\right\}.\end{aligned}$$

Nous pourrions d'abord utiliser la *projection stéréographique*.



Projection stéréographique de Bernhard Riemann. ©

Choisissons par exemple le point $N = (0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ comme *pôle Nord* de $\mathbb{S}^3$ et projetons de N sur le plan tangent au pôle Sud $(0,0,-1,0) \in \mathbb{R}^4$. Le point $(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{S}^3$ est envoyé vers $(u,v,-1,w)$ de telle sorte que les points N, (x_1,x_2,y_1,y_2) et $(u,v,-1,w)$ soient alignés. En formule,

$$\Pi : (x_1,x_2,y_1,y_2) \in \mathbb{S}^3 \smallsetminus \{N\} \mapsto \left(\frac{2x_1}{1-y_1}, \frac{2x_2}{1-y_1}, \frac{2y_2}{1-y_1} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

La sphère *moins un point* peut donc être représentée comme l'espace ordinaire à 3 dimensions. Certaines symétries sont cependant perdues puisque le pôle Nord est complètement arbitraire. C'est l'occasion de recommander le célèbre livre[88] sur l'imagination en géométrie. Je recommande également le film *Dimensions*.

88. Hilbert (D.) et Cohn-Vossen (S.), *Anschauliche geometrie*, Springer, 1996.

Les propriétés suivantes de la projection stéréographique sont bien connues :

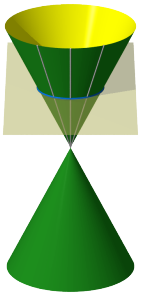
— la projection est *conforme* (sa différentielle en tout point est une similitude) ;

— l'image d'un cercle sur la sphère de dimension 3 est un cercle dans l'espace de dimension 3 (ou une droite si le cercle original passe par le pôle Nord).

Selon certains historiens, ces propriétés ont été établies (dans le cas bidimensionnel) par Hipparque, que nous avons déjà rencontré dans ce livre.

Le groupe SO(4) des rotations de la sphère $\mathbb{S}^3$ peut donc être vu comme un groupe de difféomorphismes conformes de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.

Le groupe des difféomorphismes conformes de la n-sphère est en fait beaucoup plus grand que $\mathrm{SO}(n+1)$ car il n'est pas compact. Par exemple, $\mathbb{R}^{n+2}$ peut être muni de la forme quadratique de signature $(n+1,1)$ donnée par $q = {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 - {x_{n+2}}^2$, de sorte que la n-sphère peut être interprétée comme l'intersection du cône isotrope $q = 0$ avec l'hyperplan $x_{n+2} = 1$. De manière équivalente, la n-sphère peut être considérée comme l'espace des droites isotropes. Le groupe non compact $\mathrm{SO}(n+1,1)$ induit une action conforme sur la n-sphère.



La géométrie conforme des sphères est très riche. Je ne mentionnerai que deux propriétés. Tout difféomorphisme conforme entre deux ensembles ouverts connexes dans une sphère de dimension au moins 3 s'avère être la restriction d'un difféomorphisme conforme global (théorème de Liouville). Ceci contraste fortement avec le cas de la dimension 2 où les difféomorphismes conformes coïncident avec des difféomorphismes holomorphes ou anti-holomorphes, et le paysage mathématique serait beaucoup moins beau si les applications holomorphes se réduisaient à des automorphismes de Möbius $(az+b)/(cz+d)$ de la sphère de Riemann.

Une vue conforme de Paris. ©

Si le groupe conforme d'une variété riemannienne est non compact, cette variété est conforme à la sphère ou à l'espace euclidien. C'est le théorème d'Obata et de Lelong-Ferrand.

Je m'abstiens de poursuivre dans cette direction car nous pourrions facilement nous perdre et ne jamais revenir de notre promenade mathématique. Je recommande le manuel de Berger [89] ainsi que son vaste panorama [90]. Pour le lecteur intéressé par les présentations à l'ancienne, le livre de Coolidge [91] est magnifique.

89. Berger (M.), *Géométrie I*, Cassini, Paris, 2016.

90. Berger (M.), *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, Cassini, Paris, 2009.

91. Coolidge (J. L.), *A Treatise on the Circle and the Sphere*, Clarendon Press, Oxford, 1916.

La 3-sphère « carrée »

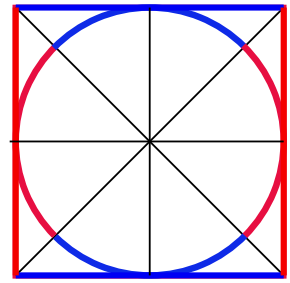
La quadrature du cercle ?

Puisque $|x|^2 + |y|^2 = 1$ sur la 3-sphère, nous pouvons la diviser en deux parties T_1 et T_2 définies par

$$\mathrm{T}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{S}^3 \mid |x|^2 \leqslant 1/2\right\} \quad , \quad \mathrm{T}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{S}^3 \mid |y|^2 \leqslant 1/2\right\}.$$

L'intersection de T_1 et T_2 est un *tore de Clifford* paramétré par

$$(\theta,\phi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\theta), \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(i\phi)\right) \in \mathbb{S}^3.$$



Quant à T_1 et T_2, ce sont des *tores solides*, paramétrés par le produit d'un disque unité D^2 dans $\mathbb{C}$ et d'un cercle :

$$(z,\phi) \in D^2 \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}z, \sqrt{1-\frac{|z|^2}{2}}\exp(i\phi)\right) \in T_1 \subset \mathbb{S}^3$$

$$(\theta,z) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times D^2 \mapsto \left(\sqrt{1-\frac{|z|^2}{2}}\exp(i\theta), \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \in T_2 \subset \mathbb{S}^3.$$

La 3-sphère est donc la réunion de deux tores solides collés le long de leurs bords. Les méridiens de ∂T_1, c'est-à-dire les cercles qui bornent un disque dans T_1, sont collés aux parallèles de ∂T_2, qui ne bornent pas un disque dans T_2, et réciproquement.

Nous pourrions également utiliser la « sphère carrée »

$$D^2 \times D^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\right\}.$$

Son bord est formé de deux tores solides $T_1' = \{|x| \leqslant 1 \text{ et } |y| = 1\}$ et $T_2' = \{|x| = 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$. En utilisant la projection radiale, les deux tores solides T_1 et T_2 s'identifient à T_1' et T_2'. Il est souvent plus pratique d'utiliser la sphère carrée, car on peut dessiner des images dans le tore solide sans avoir recours à la projection stéréographique. Cette idée simple mais très utile est due à Kähler [92].

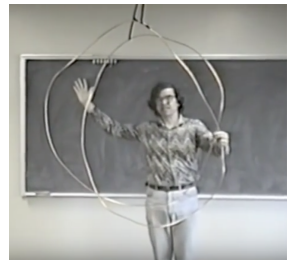
92. Kähler (E.), Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einer singulären Stelle, *Math. Z.*, n° 30(1), 1929, p. 188-204.

93. Thurston (W. P.), How to see 3-manifolds, *Classical Quantum Gravity*, n° 15(9), 1998, p. 2545-2571.

La 3-sphère est très *ronde*

William Thurston [93], l'un des maîtres de l'aspect visuel des mathématiques, avait l'habitude de dire que la 3-sphère est « plus ronde » que les autres sphères. Il avait à l'esprit le fait important que le groupe $SO(n+1)$ n'est pas un groupe simple si et seulement si $n = 3$ (et bien sûr $n = 0$ ou 1). Ceci est lié à ce que l'on appelait autrefois le *parallélisme de Clifford*.

Rappelons que les quaternions sont des expressions formelles de la forme $q = x_1 + ix_2 + jy_1 + ky_2$ où x_1, x_2, y_1, y_2 sont des nombres



Une capture d'écran de *Knots to Narnia*. William Thurston (1946-2012) montre que lorsqu'il tourne autour d'un nœud, il arrive « quelque part ailleurs ». Cette vidéo rétro sur YouTube est à voir absolument. ©

réels. Les symboles formels i, j et k satisfont ij = −ji = k, jk = −kj = i, ki = −ik = j et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Ceci définit un corps non commutatif $\mathbb{H}$. Le conjugué $\overline{q}$ de q est défini comme étant $x_1 - ix_2 - jy_1 - ky_2$ et la norme $N(q)$ est le produit $q\overline{q} = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {y_1}^2 + {y_2}^2$. Cette norme est multiplicative, c'est-à-dire que $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$, et l'inverse d'un quaternion non nul est $q^{-1} = \overline{q}/N(q)$.

Par conséquent, *la 3-sphère s'identifie au groupe des quaternions unités* $\{q \in \mathbb{H} | N(q) = 1\}$. C'est l'un des grands succès des mathématiques du XXe siècle que de démontrer que les seules sphères qui peuvent être munies de la structure de groupe topologique sont $\mathbb{S}^0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{S}^1 \simeq SO(2)$ et $\mathbb{S}^3$. Le livre [94] est un bon point de départ pour ce sujet.

94. Ebbinghaus (H. D.), Hermes (H.), Hirzebruch (F.), Koecher (M.), Mainzer (K.), Neukirch (J.), Prestel (A.) et Remmert (R.), *Les Nombres* (trad. F. Guénard), Vuibert, 1998.

Mais ce n'est pas la seule raison pour laquelle la 3-sphère est plus ronde. Comme n'importe quel groupe, elle peut être considérée comme homogène de deux façons commutatives, en utilisant les actions à droite et à gauche. Étant donné deux quaternions unitaires q_1 et q_2, l'application $q \in \mathbb{H} \mapsto q_1 q q_2^{-1} \in \mathbb{H}$ est une isométrie et définit un élément de $SO(4)$. Il s'avère que cet homomorphisme de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ vers $SO(4)$ est surjectif et que son noyau ne contient que $\pm(1,1)$. En d'autres termes, toute rotation de la 3-sphère est la composition d'une *rotation à gauche* et d'une *rotation à droite* qui commutent. Cette situation est unique à la dimension 3 car tous les autres groupes de rotation sont simples, à l'exception évidente de $SO(2)$.

Un groupe (non trivial) est *simple* s'il ne contient pas de sous-groupe normal propre. Il est habituel de dire qu'un groupe de Lie est simple si chaque sous-groupe de Lie normal est soit discret, soit ouvert. Cela revient à dire que son algèbre de Lie est simple, c'est-à-dire qu'elle ne contient pas d'idéal propre. Le seul sous-groupe normal non propre de $SO(n)$ (pour $n \neq 1$) est $\{\pm Id\}$ pour n pair, de sorte que $SO(n)$ n'est pas simple en tant que groupe pour n pair, mais l'est en tant que groupe de Lie.

La fibration de Hopf

Nous pouvons maintenant commencer notre description de la topologie des courbes algébriques dans $\mathbb{C}^2$ et commencer par la courbe la plus simple possible : *la droite*. Considérons l'intersection des droites $x = 0$ et $y = 0$ avec la sphère unité.

Selon la projection stéréographique, puisque la droite $x = 0$ passe par le pôle Nord, son image est simplement une droite verticale. L'autre droite $y = 0$ est projetée sur un cercle qui « fait le tour de la droite verticale $x = 0$ ».

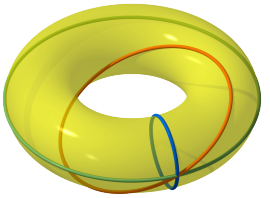
Dans notre décomposition en deux tores solides, $x = 0$ devient

Heinz Hopf (1894-1971) ne doit pas être confondu avec Eberhard Hopf (1902-1983) (le seul mathématicien à avoir quitté les États-Unis pour l'Allemagne en 1936 ?).

©

le cercle $\{0\} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ qui est l'âme de T_1. Inversement, $y = 0$ devient le cercle $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \{0\}$ qui est l'âme de T_2. Notons que ces deux cercles sont entrelacés.

La droite $y = x$ coupe la sphère sur un cercle qui est dans T_1 et T_2 : ce n'est ni un méridien ni une parallèle mais sa classe d'homotopie est $(1,1)$ dans T_1 et T_2.



Un méridien, un parallèle et un $(1,1)$-cercle sur un tore. ©

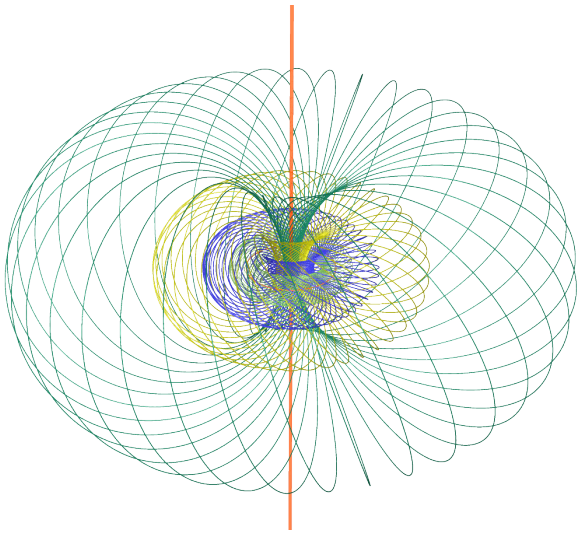
Toute cette structure est globalement décrite par ce que l'on appelle la *fibration de Hopf*. Chaque point (x,y) du plan ponctué $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ appartient à une unique droite complexe qui passe par l'origine, c'est-à-dire qui définit un élément de $P^1(\mathbb{C})$. En d'autres termes, une droite qui passe par l'origine a pour équation $y = \lambda x$ où λ appartient à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, identifié à la sphère de Riemann ou à une sphère à 2 dimensions $\mathbb{S}^2$. Ceci définit une application

$$\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$$

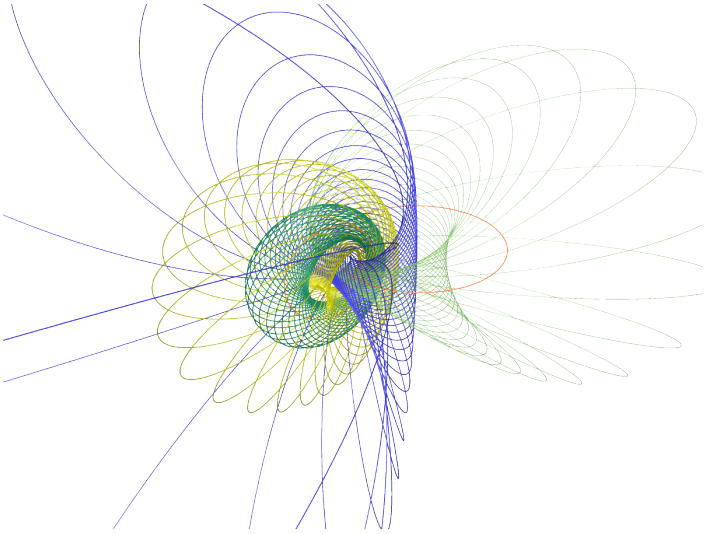
dont les fibres sont des cercles, des intersections de droites complexes avec la sphère. Deux fibres quelconques sont entrelacées.

Bien sûr, cette application n'a pas été inventée par Hopf ! Sa contribution a été de montrer qu'elle n'est pas homotope à une application constante, mais c'est une autre histoire.

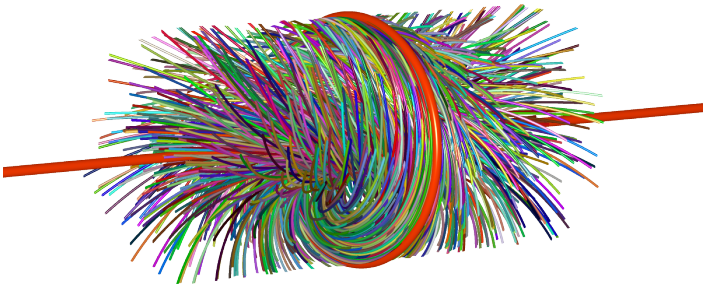
Voici quelques images de la fibration de Hopf, sous la projection stéréographique, extraites de *Dimensions*.



La fibration de Hopf : chaque cercle est une fibre de π. L'image inverse d'un cercle par π est un tore de Clifford, qui est une réunion de fibres (de la même couleur sur l'image). ©



La même image que ci-dessus, après une rotation de la 3-sphère, qui correspond à une application conforme de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. ©



Cercles de Hopf dans le voisinage de l'un d'entre eux, projetés comme une droite dans l'espace (en rouge) . Un de mes lecteurs m'a dit qu'il trouvait cette figure « effrayante ». Êtes-vous d'accord avec lui ? ©

Quelle est la version réelle de la fibration de Hopf ? Elle existe, mais elle est un peu décevante. Chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ appartient à une unique droite passant par l'origine et définit un élément de $\mathrm{P}^1(\mathbb{R})$. Une pareille droite est de la forme $y = \lambda x$, où λ appartient à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui est une sphère à une dimension, c'est-à-dire un cercle $\mathbb{S}^1$. Ceci définit une application

$$\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

dont les fibres sont $\mathbb{S}^0$, intersections de droites réelles avec le cercle unité. Il s'agit simplement de la multiplication par 2 dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. N'oublions pas qu'une sphère de dimension zéro est une paire de points.

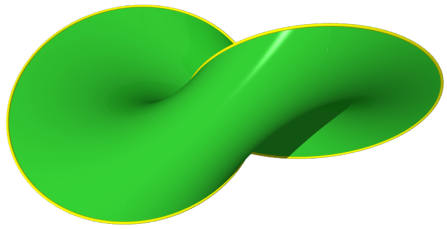
Entrelacs de Hopf

Une fibre de Hopf n'est qu'un cercle dans la sphère, il n'y a donc pas grand-chose à en dire. Ce n'est pas tout à fait vrai : la géométrie de l'espace des cercles dans l'espace de dimension 3 est merveilleuse. Regardez le livre moderne de Cecil [95] ou les *Vorlesungen* classiques de Blaschke [96].

Deux cercles de Hopf sont plus intéressants car ils définissent l'entrelacs non trivial le plus simple. Remarquons que même s'ils sont entrelacés, les deux cercles délimitent une couronne. En effet, regardons la préimage par la fibration de Hopf d'un arc reliant deux points : c'est une couronne.

95. Cecil (T. E.), *Lie Sphere Geometry, with Applications to Submanifolds*, Springer, 1992.

96. Blaschke (W.), *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Band I, Elementare Differentialgeometrie*, Dover, 1945.

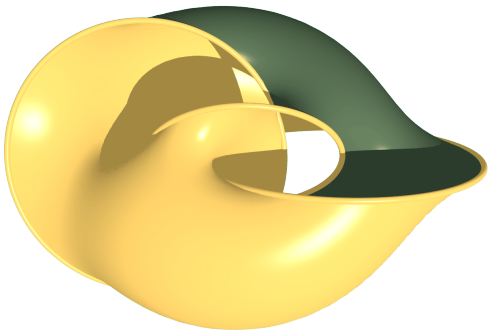


Deux cercles de Hopf bordant une couronne. ©

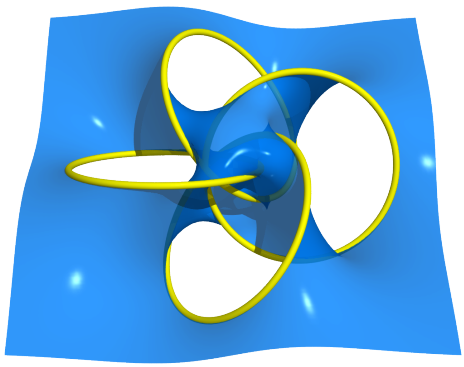
Trois cercles de Hopf (ou plus) donnent un *entrelacs de Hopf*. Chaque composant est un cercle et deux composants quelconques sont entrelacés une fois. Il est facile de trouver une surface orientable ayant un tel entrelacs comme bord. En effet, considérons n nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et le polynôme

$$F(x,y) = (y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x)\cdots(y - \lambda_n x).$$

L'intersection de la 3-sphère avec l'ensemble des (x,y) tels que $F(x,y)$ soit un nombre réel strictement positif est une surface dont le bord est constitué de n cercles de Hopf. Tout ceci sera largement généralisé dans les chapitres suivants.



Trois cercles de Hopf bordant une surface. ©



Quatre cercles de Hopf bordant une surface. ©

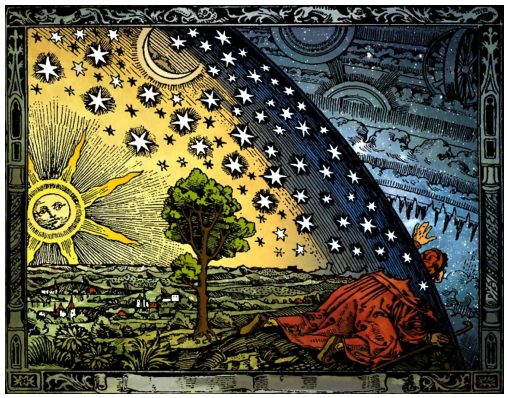
Dante, la Divine Comédie et la 3-sphère

Cette section n'est bien sûr pas nécessaire pour le reste du livre.

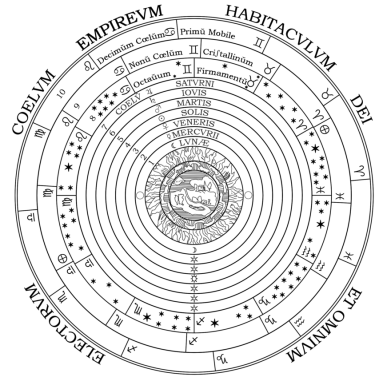
Mark Peterson [97] a soutenu que l'univers de Dante, tel qu'il est décrit dans la *Divine Comédie*, est homéomorphe à une 3-sphère. Même si je ne suis pas totalement convaincu « qu'il est clair que Dante invente la notion de variété [98] », j'aime cette vision cosmologique. Au moins, elle répond à une question que nous avons tous posée à nos parents lorsque nous étions enfants : que se passe-t-il lorsque nous atteignons le bord de l'univers ? Eh bien, l'univers de Dante est une 3-variété compacte sans bord !

97. Peterson (M. A.), Dante and the 3-sphere, *Am. J. Phys.*, n° 47, 1979, p. 1031-1035.

98. Peterson (M. A.), The geometry of Paradise, *Math. Intell.*, n° 30(4), 2008, p. 14-19.



Gravure de Flammarion (1888). ©



Système géocentrique d'Aristote et Ptolémée. ©

Je rappelle que le monde hérité des Grecs anciens est fini [99]. Fondamentalement, dans le système d'Aristote et Ptolémée, la Terre est fixe au centre de l'univers et entourée de sept sphères célestes, chacune portant une « planète » : la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne. Une huitième sphère porte les *étoiles fixes*. Enfin, une neuvième sphère, appelée *Primum Mobile*, sert de réceptacle à l'ensemble du système et génère le mouvement des autres sphères. Le monde sensible est donc une boule à 3 dimensions, dont le bord est le *Primum Mobile*. Au-delà de ce bord commence le domaine de l'*empyrée* dont la nature n'est pas très claire. Selon Aristote [100], « il est clair qu'il ne contient ni espace, ni vide, ni temps. »

La *Divine Comédie* est un long poème écrit vers 1320 qui offre

99. Koyré (A.), *Du monde clos à l'univers infini* (trad. R. Tarr), Presses universitaires de France, Paris, 1962.

Bien sûr, la Lune et le Soleil ne sont pas des planètes mais ils tournent autour de la Terre… dans le système géocentrique.

100. Aristote, *Du ciel* (trad. P. Moreau), Les Belles Lettres, Paris, 2003.

une description fascinante du monde chrétien au XIVe siècle [101]. Dante nous raconte son voyage à travers l'enfer, le purgatoire et le paradis, comme une allégorie du salut des âmes. Dans la dernière partie, *Paradiso*, sa muse Béatrice l'aide à visiter successivement les neuf sphères célestes. Arrivé sur le *Primum Mobile*, il peut contempler le monde depuis son bord, avec la minuscule Terre au centre. Soudain, il fait demi-tour et découvre que l'empyrée a exactement la même structure que le monde sensible. Il est constitué du même nombre de sphères qui sont maintenant centrées sur Dieu. Ces sphères angéliques, symétriques aux sphères célestes, portent les noms suivants (en allant de Dieu au *Primum Mobile*) : Séraphins, Chérubins, Trônes, Dominations, Vertus, Puissances, Principautés, Archanges, Anges.

L'univers de Dante est donc la réunion de deux boules de dimension 3, *collées le long du* Primum Mobile. *C'est donc une* 3*-sphère !* ⊡

Voir [102] pour une discussion plus approfondie sur la vision médiévale de l'univers et [103] pour plus d'informations sur la poésie et les mathématiques.

101. Dante Alighieri, *La Divine Comédie* (trad. L. Moland), Garnier frères, Paris, 1879.

102. Grzybowski (J.), *Cosmological and Philosophical World of Dante Alighieri: "The Divine Comedy"*, Peter Lang, Francfort-sur-le-Main, 2015.

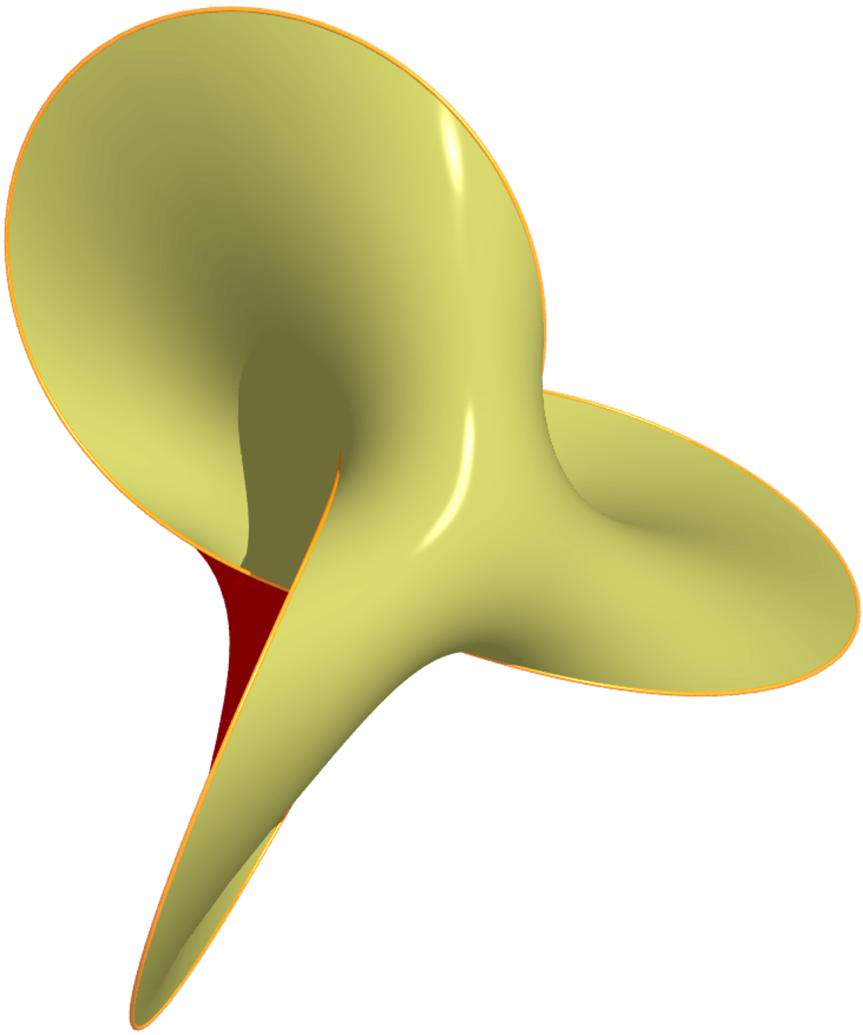
103. Osserman (R.), *Les mathématiques de l'univers : Ératosthène, Einstein, Dante, Feynman et les autres* (trad. A. et É. Bouquet), Éd. Le Pommier, Paris, 2008.

Rose céleste : Dante et Béatrice contemplent le plus haut des cieux, l'empyrée (gravure de Gustave Doré). ©

Les derniers vers de la *Comédie* :

« All'alta fantasia qui mancò possa ; ma già volgeva il mio disiro e il velle, l'amor che move il sole e l'altre stelle. »

« Ici la puissance manqua à mon imagination qui voulait garder le souvenir d'un si haut spectacle ; et ainsi que deux roues obéissent à une même action, ma pensée et mon désir, dirigés avec un même accord, furent portés ailleurs par l'amour sacré qui met en mouvement le soleil et les autres étoiles. » (Traduction de Louis Moland.)



Une page du livre ouvert de Milnor associée à la courbe $y^2 - x^3 = 0$. ©

La cubique cuspidale et le trèfle

L'objectif général de notre promenade est de décrire la topologie des singularités des courbes analytiques *réelles*. Comme nous l'avons expliqué précédemment, un raccourci par le domaine *complexe* pourrait peut-être éclairer notre discussion « réelle ». Quoi qu'il en soit, dans ce livre, nous préférons les détours aux raccourcis.

Pour une description complète de la topologie des singularités des courbes algébriques *complexes*, je recommande vivement l'excellent livre de 721 pages [104] de Brieskorn et Knörrer. Cependant,

> « un petit livre est rassurant »

comme l'a écrit Jules Tannery dans la préface d'une très concise et très belle introduction [105] à la théorie de Galois. Suivant ce conseil, je me limiterai aux caractéristiques de base de la théorie.

Mon seul but dans ce chapitre est de convaincre le lecteur que la topologie locale d'une singularité dans le domaine complexe est incroyablement riche.

L'entrelacs d'une singularité

L'idée d'intersecter une courbe analytique complexe $F(x,y) = 0$ par une petite sphère $\mathbb{S}^3_\varepsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\right\}$ est probablement très ancienne. Le premier article qui explique cette construction est publié en 1928 par Brauner [106] suite à une idée de son directeur de thèse Wirtinger en 1905. Voir [107] pour une présentation passionnante de l'évolution historique de ces idées.

104. Brieskorn (E.) et Knörrer (H.), *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Bâle, 1986.

105. Vogt (H.), *Leçons sur la résolution algébrique des équations*, Librairie Nony, Paris, 1895.

106. Brauner (K.), Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderliche, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, n° 6(1), 1928, p. 1-55.

107. Epple (M.), Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory, *Historia Math.*, n° 22(4), 1995, p. 371-401.

Il est important de rappeler qu'une courbe sur les nombres complexes est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ et donc de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, de sorte qu'une courbe complexe est une surface réelle. Cet équilibre constant entre courbes et surfaces est l'un des charmes de la théorie.

Nous avons déjà examiné le cas le plus simple $F(x,y) = y - \lambda x$, qui conduit à la fibration de Hopf. Nous allons maintenant étudier le deuxième exemple significatif : la *cubique cuspidale* définie par $F(x,y) = y^2 - x^3$.

Comment choisir le petit rayon ε ? Pourrions-nous utiliser une autre hypersurface comme par exemple un ellipsoïde ? La réponse est que, sous des hypothèses très modérées, toutes ces intersections définissent le *même* objet topologique, *à homéomorphisme près*. Le cas de $y^2 - x^3 = 0$ est particulièrement simple. Considérons le flot linéaire suivant sur $\mathbb{C}^2$:

$$\phi^t(x,y) = \left(e^{2t}x, e^{3t}y\right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

L'espace $\mathscr{O}$ des orbites de ϕ^t dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$. En effet, le long d'une telle orbite, la norme $|x|^2 + |y|^2$ est strictement croissante et chaque orbite coupe la sphère exactement une fois. Le même argument peut être utilisé avec un ellipsoïde centré sur l'origine, ou avec notre « sphère carrée » $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$, ou avec beaucoup d'autres hypersurfaces.

Observons maintenant que le flot ϕ^t préserve notre courbe, dont l'équation est $y^2 - x^3 = 0$, de sorte que la courbe définit *canoniquement* un sous-ensemble K de $\mathscr{O}$. En identifiant $\mathscr{O}$ à $\mathbb{S}^3_\varepsilon$, on s'aperçoit que, à homéomorphisme près, l'intersection de la courbe avec $\mathbb{S}^3_\varepsilon$ est en effet indépendante de ε et que l'on pourrait tout aussi bien utiliser la sphère carrée.

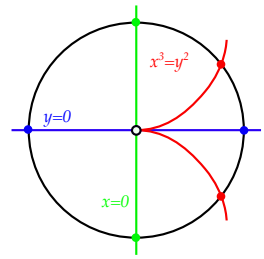
Intersectons donc $y^2 - x^3 = 0$ avec $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$. Si $\varepsilon < 1$, ceci est paramétré par $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

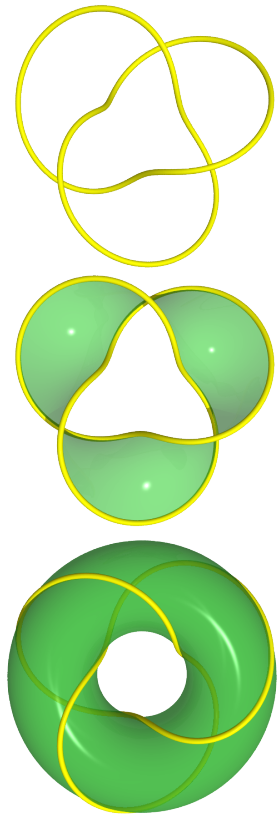
$$x = \varepsilon \exp(2i\theta), \qquad y = \varepsilon^{3/2} \exp(3i\theta)$$

dans le tore solide (où $|x| = \varepsilon$ et $|y| \leqslant \varepsilon$). C'est le nœud de *trèfle*, vu comme le *nœud torique* $(3,2)$: il est dessiné sur un tore de révolution dans l'espace à 3 dimensions et fait trois tours dans le sens des méridiens tout en faisant deux tours dans le sens des parallèles.

Il existe de nombreux excellents livres sur la topologie des nœuds. Je recommande le « petit livre » de Sossinsky [108] et le livre très visuel de Kauffman [109].

Pour comprendre la topologie de la cubique cuspidale $y^2 - x^3 = 0$ dans une petite *boule* $|x|^2 + |y|^2 \leqslant \varepsilon^2$, il suffit de noter que toutes



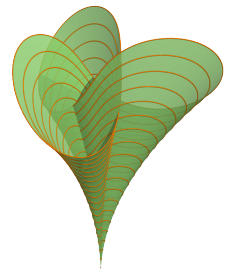


Le nœud de trèfle. ©

108. Sossinsky (A.), *Nœuds : genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, Paris, 1999.

109. Kauffman (L. H.), *On Knots*, Princeton University Press, 1987.

les sphères concentriques coupent la courbe sur un tel trèfle. Il s'ensuit que dans une petite boule, notre courbe est homéomorphe au *cône* topologique sur le nœud de trèfle. Le trèfle est un cercle (plongé de manière nouée). Le cône est donc un disque plongé d'une manière astucieuse dans l'espace à 4 dimensions. Sur les nombres complexes, la courbe est topologiquement lisse, c'est-à-dire localement homéomorphe à un disque, mais le plongement de ce disque dans $\mathbb{C}^2$ est noué. C'est un phénomène typique que l'on peut détecter sur les nombres complexes et qui est invisible sur les réels, puisque la courbe réelle $y^2 - x^3 = 0$ et en fait *toute branche d'une courbe analytique réelle est localement homéomorphe à une droite dans le plan* : c'est ce que nous avons appelé plus tôt l'affirmation de Gauss.



Une image locale d'une branche (projetée dans l'espace à 3 dimensions dans lequel la branche n'est pas plongée). ©

La fibration de Milnor

Décrivons plus en détail la cubique cuspidale et démontrons un cas très particulier d'un théorème général de Milnor qui sera présenté plus loin. Considérons l'application

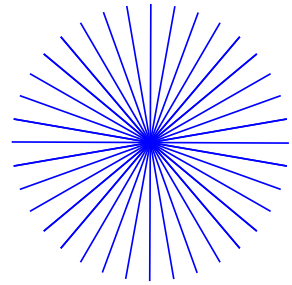
$$\mu : (x, y) \in \mathbb{S}^3 \mapsto y^2 - x^3 \in \mathbb{C}.$$

L'image inverse de 0 est le nœud de trèfle. Nous voulons étudier l'image inverse Σ_θ d'une demi-droite partant de l'origine, dont l'équation est $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. En d'autres termes, on s'intéresse aux fibres de l'application $\arg \circ \mu$ définie sur le complémentaire du nœud de trèfle à valeurs dans le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Il est facile de voir que $\arg \circ \mu$ est une submersion. En effet, le flot

$$\psi^s(x, y) = \left(e^{2is}x, e^{3is}y\right)$$

préserve les sphères et satisfait $\arg(\mu \circ \psi^s) = \arg(\mu) + 6s$. Il s'ensuit que le champ de vecteurs associé à ψ^s n'est pas dans le noyau de la différentielle de $\arg \circ \mu$. Observons que ψ^s permute les fibres Σ_θ.



Demi-droites radiales avec argument constant.

Au voisinage du nœud de trèfle, la situation est très facile à analyser. Notre sphère carrée peut toujours être utilisée puisque $\arg \circ \mu$ est invariant par ϕ^t et puisque nous travaillons en fait dans l'espace des orbites $\mathcal{O}$. Paramétrons un voisinage du trèfle

par des couples (α, ζ) avec $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et ζ un petit nombre complexe :

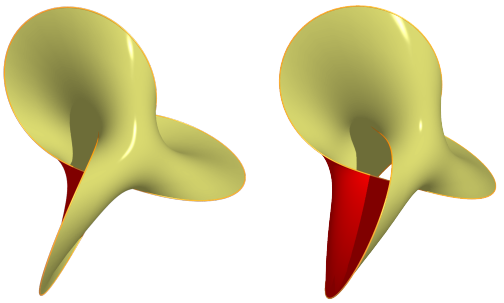
$$x = \varepsilon \exp(2\,\mathrm{i}\alpha)\,, \qquad y = \varepsilon^{3/2}\left[\exp(3\,\mathrm{i}\alpha) + \exp(-3\,\mathrm{i}\alpha)\zeta\right].$$

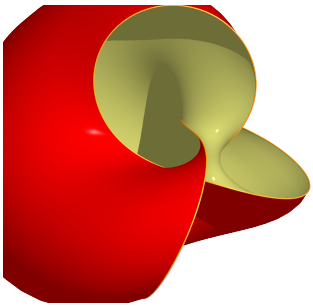
Dans ces coordonnées, $\arg \circ \mu$ est égal à $\arg(\zeta)$ au premier ordre. Au voisinage du trèfle, les Σ_θ sont donc des surfaces qui se comportent comme les pages d'un livre autour de sa reliure.

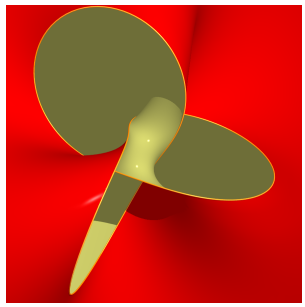
©

Un livre étrange dans lequel les pages sont ordonnées de manière cyclique et sans première page. Un livre de rêve que l'on lit éternellement. Au moins, les pages sont orientables.

Je dirai que le nœud de trèfle est *fibré* ou que son complémentaire se fibre sur le cercle. Les fibres sont des *pages* disjointes dont les fermetures dans la sphère de dimension 3 ont toutes le nœud comme bord commun. Notons qu'une page passe par le pôle Nord de la sphère de dimension 3, qui est le centre de la projection stéréographique. Cette page, lorsqu'elle est projetée dans l'espace euclidien de dimension 3, n'est pas compacte.







Quelques pages. ©

Monodromie

Le flot $\psi^s(x,y) = \left(e^{2is}x, e^{3is}y\right)$ permute les pages de notre livre. Plus précisément, ψ^s envoie la page Σ_θ vers la page $\Sigma_{\theta+6s}$. Notons que $\psi^{2\pi}$ est l'identité et que $\psi^{\pi/3}$ fixe globalement chaque page, induisant ainsi sur chaque page un homéomorphisme d'ordre 6, appelé *monodromie* de la cubique cuspidale.

Notre but est maintenant de décrire la topologie des pages et l'action de la monodromie. Par définition, une page Σ est l'ensemble des (x,y) dans $\mathbb{S}^3$ tels que le nombre complexe $y^2 - x^3$ soit dans une certaine demi-droite, par exemple l'axe réel positif $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C}$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe algébrique définie par $y^2 - x^3 = 1$ dans $\mathbb{C}^2$. Considérons la sphère de dimension 3 comme l'espace orbital du flot $\phi^t(x,y) = \left(e^{2t}x, e^{3t}y\right)$ agissant sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Les deux surfaces réelles Σ et $\mathscr{C}$ définissent le même objet dans cet espace orbital, nous travaillons donc avec $\mathscr{C}$. L'action de la monodromie correspond à

$$(x,y) \in \mathscr{C} \mapsto \left(\omega^2 x, \omega^3 y\right) \in \mathscr{C}$$

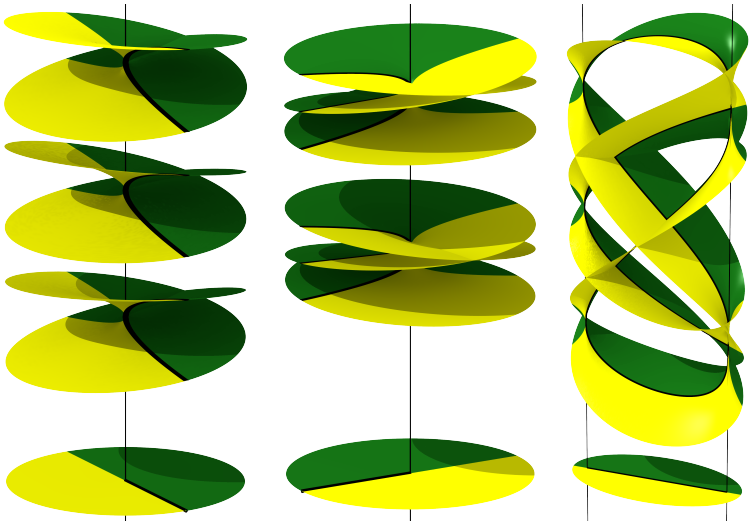
où $\omega = \exp(2i\pi/6)$ est une racine primitive 6e de l'unité.

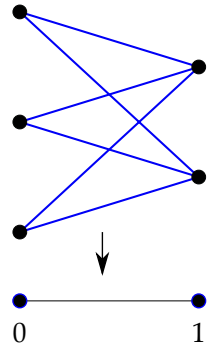
La topologie de $\mathscr{C}$ est facile à décrire... si l'on a des connaissances sur le genre des surfaces de Riemann et des courbes algébriques. Dans $\mathrm{P}^2(\mathbb{C})$, la cubique homogénéisée $y^2z - x^3 = z^3$ est une courbe elliptique lisse qui coupe triplement la droite à l'infini au point $[0:1:0]$. Par conséquent, la courbe affine $\mathscr{C}$ est homéomorphe à un tore ponctué.

De manière plus terre à terre, on peut procéder de la manière suivante. Posons $Y = y^2 = 1 + x^3$, de telle sorte que l'application $(x, y) \in \mathscr{C} \mapsto Y$ soit un revêtement ramifié à six plis de $\mathbb{C}$, ramifié en 0 et 1, d'ordre 2 et 3.

Traçons un arc dans le plan complexe reliant $Y = 0$ et $Y = 1$. Il se relève en six arcs dans $\mathscr{C}$. Au-dessus de $Y = 0$, il y a 3 points, où les 6 arcs fusionnent en 3 groupes de 2. Au-dessus d'un petit disque centré en 0, il y a 3 *doubles plateaux*, comme dans la partie gauche de l'image suivante. Au-dessus de $Y = 1$, comme sur la deuxième figure, il y a 2 points, où les arcs fusionnent en 2 groupes de 3.

Les points $(-1, 0)$, $(\exp(2i\pi/6), 0)$ et $(-\exp(2i\pi/6), 0)$ sont envoyés vers 0 et les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont envoyés vers 1.

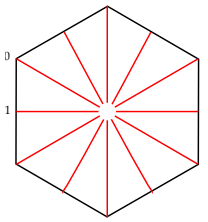




Comme il est impossible de dessiner dans $\mathbb{C}^2$ qui est de dimension 4, ces images représentent le graphe d'une combinaison appropriée des parties réelles et imaginaires de $\sqrt{Y} + \sqrt[3]{1-Y}$. La combinatoire des six arcs est représentée dans la marge de droite.

En coupant $\mathbb{C}$ le long de 3 arcs, de $-\infty$ à 0, de 0 à 1 et de 1 à ∞, on décompose $\mathbb{C}$ en deux *triangles* où la partie imaginaire est positive ou négative (jaune et vert sur l'image). Il s'agit bien de triangles dont les sommets sont en $0, 1$ et ∞. Dans $\mathscr{C}$, cela produit au total 18 arcs et $12 = 6 \times 2$ triangles.

Une autre façon de voir la même image est la suivante. Identifions les côtés opposés d'un hexagone régulier par des translations. Cela définit un tore. En supprimant le centre, on obtient un tore ponctué. À partir du centre de l'hexagone, dessinons les 6 segments allant vers les sommets et les 6 hauteurs vers les côtés. Notre tore est maintenant décomposé en 12 triangles, ayant au total 18 côtés. Les six racines de l'unité agissent par rotation sur l'hexagone (ponctué), en permutant les triangles exactement comme dans le cas de $\mathscr{C}$.



La présentation plus économique d'un tore à partir d'un carré est plus habituelle mais cette présentation avec un hexagone est encore plus belle. Observons que les six côtés définissent trois arcs dans le tore et que les six sommets définissent deux points dans ce tore.

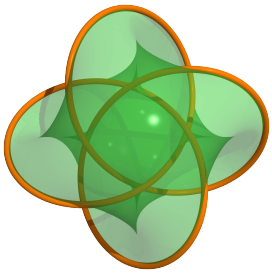
En résumé, *chaque page du livre associé à la cubique cuspidale est un tore ponctué comme ci-dessus et la monodromie est simplement une rotation de 1/6e de tour complet*.

Nœuds toriques

La plupart de ce qui a été vu pour la cubique cuspidale $y^2 = x^3$ s'étend à une courbe générale $F(x,y) = 0$. Cela demandera un peu de travail, mais il y a au moins une famille d'exemples où il n'y a pas de travail supplémentaire. Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux et considérons la courbe $y^p - x^q = 0$. Nous pouvons supposer $q > p$. Comme précédemment, examinons l'intersection avec la sphère carrée :

$$x = \varepsilon \exp(\mathrm{i}p\theta)\,, \qquad y = \varepsilon^{q/p} \exp(\mathrm{i}q\theta).$$

Il s'agit d'un nœud torique $K_{p,q}$ de type (p,q), dessiné sur un tore standard dans l'espace à 3 dimensions, qui fait p fois le tour du parallèle et q fois le tour du méridien.



Un nœud torique de type $(3,4)$. ©

Exactement pour la même raison, il existe une décomposition en livre ouvert et une fibration sur le cercle. Toute page est homéomorphe à la courbe algébrique affine $y^p - x^q = 1$, dont la topologie peut être décrite de la même manière. Posons $Y = y^p$ et considérons cette courbe comme étalée sur Y, ramifiée en 0 et 1. Au-dessus d'un point Y différent de 0 et 1, il y a pq points. Au-dessus de 0 (resp. 1), il n'y a que q (resp. p) points, mais chacun avec une multiplicité p (resp. q). Remplaçons l'hexagone par un pq-gone et la situation est la même. Il y a $2pq$ triangles (pq de chaque couleur) et $3pq$ arêtes. Il y a p sommets au-dessus de 0, q au-dessus de 1 et un au-dessus de l'infini.

Cela donne une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à

$$p+q+1-3\,pq+2\,pq = 2-2\tfrac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Chaque page est une surface ponctuée de genre $(p-1)(q-1)/2$.

Esquissons une preuve d'un fait fondamental : la topologie retrouve une bonne partie de la courbe algébrique $y^p = x^q$.

J'ai affirmé dans la préface que j'ai essayé d'écrire un livre que j'aurais pu comprendre moi-même en tant qu'étudiant de premier cycle. Je crains que ce ne soit pas le cas pour la fin de ce chapitre. Si c'est trop obscur, passez votre chemin !

Théorème. *Si un homéomorphisme de la sphère de dimension* 3 *envoie le nœud torique de type* (p_1,q_1) *vers* (p_2,q_2)*, alors les ensembles* $\{p_1,q_1\}$ *et* $\{p_2,q_2\}$ *sont égaux.*

La preuve nécessite quelques notions de topologie algébrique. À partir de la topologie des nœuds toriques, nous construisons un gadget algébrique qui permettra de reconstruire p et q. Le complémentaire du nœud torique de type (p,q) dans la 3-sphère est une 3-variété ouverte. Son invariant le plus primitif est son groupe fondamental, noté $\Gamma_{p,q}$. Le point clé est d'extraire algébriquement p et q de ce groupe. Nous allons démontrer que Γ_{p_1,q_1} est isomorphe à Γ_{p_2,q_2} seulement si $\{p_1,q_1\} = \{p_2,q_2\}$.

Remarquons d'abord que l'application $\arg\mu = \arg(y^p - x^q)$ du complémentaire du nœud torique de type (p,q) dans la sphère de dimension 3 vers $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ induit un homomorphisme surjectif

$$\lambda : \Gamma_{p,q} \to \pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$

entre groupes fondamentaux. En effet, considérons le lacet suivant dans la sphère unité, défini pour $t \in [0,1]$ par

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}(1+\zeta(t))}{2\,|1+\zeta(t)|}\exp(2\mathrm{i}p\pi t)\,, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(2\mathrm{i}q\pi t).$$

Les débutants sont vivement encouragés à consulter le remarquable site internet d'Henri Paul de Saint-Gervais consacré à l'*Analysis Situs*.

Pour de petites valeurs de ζ, il s'agit d'un petit lacet autour du nœud (p,q). L'argument de μ sur ce lacet est proche de

$$\pi + \arg\zeta(t) + 2\pi pqt\,,$$

de sorte que nous pouvons choisir $\zeta(t) = \varepsilon\exp(\mathrm{i}(1-2\,pqt)\pi)$ pour nous assurer que l'image de ce lacet par λ est 1.

Dans la *première étape*, nous montrons que cet homomorphisme est au signe près la *seule* surjection de $\Gamma_{p,q}$ sur $\mathbb{Z}$ et donc que le noyau de λ ne dépend que de la topologie du nœud.

Dans la *deuxième étape*, nous analysons l'abélianisé du noyau de λ, montrons qu'il s'agit d'un groupe abélien libre de type fini et trouvons son rang. Cela nous permettra de retrouver $\{p,q\}$ du groupe $\Gamma_{p,q}$ comme demandé.

La première étape peut être expliquée de diverses manières, plus ou moins sophistiquées, la plupart d'entre elles étant basées sur ce que l'on appelle la *dualité de Lefschetz*. Supposons qu'une variété orientable fermée X, par exemple un cercle, soit incluse dans une sphère, par exemple de dimension 3. Alors l'homologie du complémentaire de X ne dépend pas de la façon dont X est plongée dans la sphère. En particulier, l'homologie du complémentaire d'un nœud dans la sphère de dimension 3 est la même que dans le cas d'un nœud trivial, donc cette homologie de degré 1 est simplement isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Je pourrais présenter le même fait de la manière suivante. Soit γ un lacet lisse dans $\mathbb{S}^3 \setminus K_{p,q}$. Puisque la sphère est simplement connexe, γ est le bord d'une certaine application lisse $D \to \mathbb{S}^3$ qui peut ne pas être un plongement. Mettons ce disque en position générale avec $K_{p,q}$, de sorte que les intersections entre $K_{p,q}$ et D soient transverses. Comptons le nombre d'intersection entre le disque D et $K_{p,q}$, le comptage étant algébrique, en tenant compte des orientations. Ce nombre est l'*enlacement* $\mathrm{Enl}(\gamma)$. Il s'avère qu'il ne dépend que de la classe d'homologie de γ dans $\mathbb{S}^3 \setminus K_{p,q}$. Ceci découle du fait qu'une surface sans bord dans $\mathbb{S}^3$ a une intersection algébrique triviale avec n'importe quelle courbe fermée. L'enlacement définit donc un homomorphisme

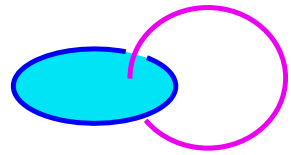
$$\mathrm{Enl} : H_1\left(\mathbb{S}^3 \setminus K(p,q), \mathbb{Z}\right) \to \mathbb{Z}$$

qui est surjectif. Or, si γ est dans le noyau de Enl, cela signifie que les signes + et − de l'intersection peuvent être couplés. Creusons des trous dans D, autour des points d'intersection, et relions leurs bords deux à deux par des tubes, afin de construire une surface dont le bord est encore γ et qui ne coupe plus $K(p,q)$. Les éléments du noyau de Enl sont donc homologues à zéro. En d'autres termes, Enl est un isomorphisme. Rappelons enfin que le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental, de sorte que tout homomorphisme $\pi_1\left(\mathbb{S}^3 \setminus K\right) \to \mathbb{Z}$ se factorise à travers Enl. Il en résulte en particulier que Enl

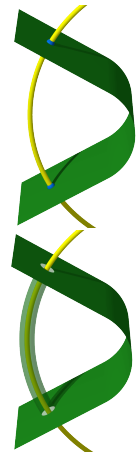
Toute application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$ se prolonge au disque unité D^2. Si cette extension est un plongement, alors γ est un nœud trivial. Cependant, tout nœud est le bord d'une surface orientée plongée (de genre supérieur) : on l'appelle « surface de Seifert ».

Remarquons que le complémentaire d'un cercle non noué dans la sphère de dimension 3 est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Plus précisément, il s'agit de l'enlacement de γ et $K_{p,q}$. Nous y reviendrons plus loin dans ce livre.



L'enlacement.



Suppression de deux points d'intersection.

©

coïncide (au signe près) avec λ défini précédemment. C'est la première étape.

Nous passons maintenant à la deuxième étape. Notons $G(p,q)$ le noyau de Enl. C'est donc le groupe fondamental d'un revêtement galoisien de $S^3 \setminus K(p,q)$ dont le groupe des automorphismes est cyclique infini $\mathbb{Z} = \Gamma_{p,q}/\operatorname{Ker}\mathrm{Enl}$. Ce revêtement est clairement le produit $\Sigma \times \mathbb{R}$ d'une page avec $\mathbb{R}$ et le groupe des revêtements est simplement engendré par

$$(p,t) \in \Sigma \times \mathbb{R} \to (M(p), t + 2\pi) \in \Sigma \times \mathbb{R},$$

où M désigne la monodromie. Donc $G(p,q)$ est le groupe fondamental d'une page Σ. Nous avons déjà décrit la topologie d'une page. Puisque $G(p,q)$ n'est pas abélien, il peut être plus facile de le rendre abélien. Notons $H(p,q)$ cet abélianisé, qui n'est rien d'autre que la première homologie d'une page.

Je rappelle que p et q sont premiers entre eux.

Décrivons ce groupe abélien $H(p,q)$ et l'action de M. Dans Σ, il existe un graphe contenant pq arcs, obtenu en relevant l'arc reliant 0 et 1. Il contient q sommets au-dessus de 0 et p sommets au-dessus de 1. Rappelons que Σ est obtenu à partir d'une surface triangulée fermée en supprimant un sommet commun à tous les triangles. Par conséquent, la surface ponctuée Σ peut être déformée en la réunion de toutes les arêtes opposées à ce sommet, ce qui constitue notre graphe avec pq arêtes. Ce graphe est généralement appelé un *graphe complet bipartite*. Cela produit un 1-complexe très simple qui donne $H(p,q)$.

Le groupe abélien des 1-chaînes est librement engendré par les arcs $c_{i,j}$, où $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Le groupe abélien des 0-chaînes est engendré par p points a_i et q points b_j avec $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. L'opérateur de bord ∂ envoie $c_{i,j}$ vers $b_j - a_i$. Enfin la monodromie $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ agit de façon évidente sur les indices i et j. L'homologie $H(p,q)$ s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow H(p,q) \longrightarrow \mathbb{Z}^p \otimes \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^p \oplus \mathbb{Z}^q \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

qui est équivariante par rapport aux actions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ à chaque niveau. Le générateur M de la monodromie est associé à l'action de $(1,1)$. En tensorisant par $\mathbb{R}$ pour obtenir des espaces

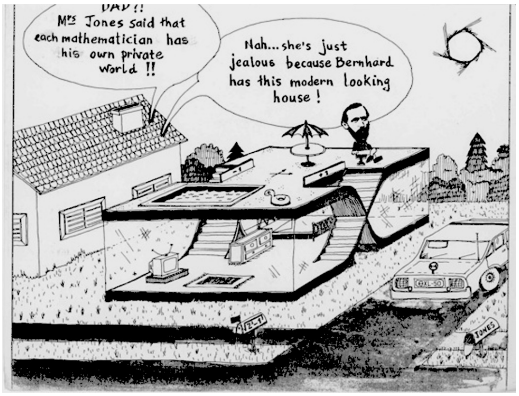
vectoriels et des applications linéaires, il en résulte que la dimension de $H(p,q) \otimes \mathbb{R}$ est $pq - (p+q) + 1$, c'est-à-dire $(p-1)(q-1)$. Le polynôme caractéristique de l'action $M_\star$ de M sur $H(p,q)$ peut même être calculé en utilisant la suite exacte :

$$P(X) = \frac{(X^{pq}-1)(X-1)}{(X^p-1)(X^q-1)}.$$

Les racines de P, valeurs propres de $M_\star$, sont les racines pq-ièmes de l'unité, moins les racines p-ièmes et q-ièmes, plus 1. À partir de ce spectre, on peut extraire les valeurs de p et q.

La démonstration du théorème est terminée. À partir du groupe fondamental Γ du (complémentaire du) nœud $K(p,q)$, construisons son premier groupe dérivé $\Gamma_1 = [\Gamma,\Gamma]$, qui est aussi, comme nous l'avons vu, le noyau de Enl. Ensuite, rendons Γ_1 abélien et définissons le groupe $\Gamma_1/[\Gamma_1,\Gamma_1]$. Considérons maintenant un élément g dans Γ avec $\mathrm{Enl}(g) = \pm 1$ et la conjugaison par g sur $(\Gamma_1/[\Gamma_1,\Gamma_1]) \otimes \mathbb{R}$. Les valeurs de p et q s'obtiennent à partir des valeurs propres de cette application linéaire. ⊡

Cette astuce algébrique est en fait une technique très générale et puissante qui ne se limite pas aux nœuds. Étant donné un groupe Γ quelconque, regardons l'action de l'abélianisé $\Gamma_{ab} = \Gamma/\Gamma_1 = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ par conjugaison sur l'abélianisé $(\Gamma_1/[\Gamma_1,\Gamma_1]) \otimes \mathbb{R}$. Cela définit une famille d'automorphismes qui commutent et dont les classes de conjugaison sont des invariants du groupe Γ. On parle du *module d'Alexander* de Γ. C'est l'un des invariants les plus primitifs d'un groupe.



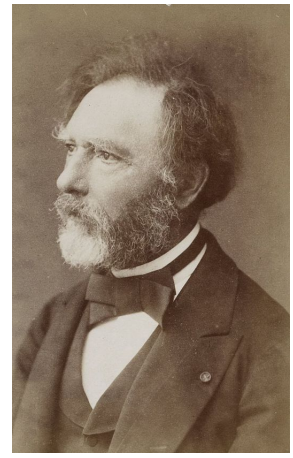
Sur le site web d'André Nachbin. ©

La pointe Puiseux. ©

Victor Puiseux, enfin !

Le nom de Puiseux est déjà apparu plusieurs fois dans ce livre. Le lecteur peut être désireux de savoir ce qu'il a réellement fait. Malheureusement, le « théorème bien connu de Puiseux » ne lui est pas dû, mais comme nous l'avons vu à Newton avec l'aide postérieure de Cramer. On pourrait arguer que ni Newton ni Cramer n'ont démontré la convergence des séries associées, mais cette convergence se démontre facilement, par exemple en utilisant le *calcul des limites* de Cauchy.

Puiseux a cependant abordé le problème de la structure locale des singularités d'une manière totalement différente et sa contribution est fondamentale. Dans ce chapitre, je voudrais expliquer son point de vue. Il serait malheureusement inutile de s'en tenir à sa présentation originale.

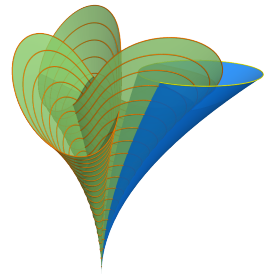


Victor Puiseux (1820-1883) ©

Étrange destin pour un mathématicien : il est « célèbre » pour un théorème qui était connu bien avant lui et que nous comprenons aujourd'hui bien mieux que lui, en utilisant des techniques qui sont apparues bien après lui.

Heureusement, Puiseux est encore plus célèbre parmi les alpinistes puisque le plus haut sommet du mont Pelvoux (3 946 m), dans le massif des Écrins, porte le nom de *pointe Puiseux*. Il a atteint ce sommet le 9 août 1848. Il n'est malheureusement même pas sûr qu'il s'agisse d'une « première », puisque le capitaine Durand affirme avoir atteint le sommet 18 ans plus tôt. Éternel second ?

L'approche topologique de Puiseux

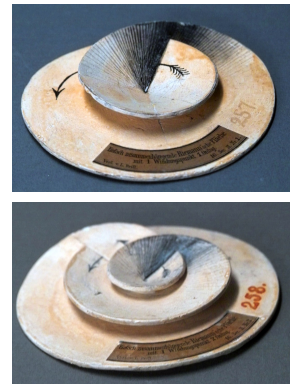


Deux branches peuvent être entrelacées. ©

Rappelons ce qu'on appelle d'habitude le théorème de Puiseux :

Théorème. *Soit* $F(x,y)$ *une fonction holomorphe non nulle définie dans le voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^2$ *et telle que* $F(0,0) = 0$. *Alors il existe un nombre fini de fonctions holomorphes* $g_1, \dots, g_n$ *définies dans le voisinage de* $0 \in \mathbb{C}$ *et des entiers strictement positifs* $m_1, \dots, m_n$ *tels que la courbe* $F(x,y) = 0$ *soit dans le voisinage de* $(0,0)$ *la réunion de* n *branches* $t \mapsto (t^{m_i}, g_i(t))$ *(pour* $i = 1, \dots, n$*) (plus éventuellement l'axe des* y*). De plus, ces branches sont injectives et ne se coupent qu'à l'origine.*

Nous avons déjà discuté d'une preuve pré-Puiseux, très algébrique dans l'esprit, où l'on trouve d'abord les séries formelles g_i avant de démontrer qu'elles convergent. Puiseux a proposé une approche topologique [110] en 1850, juste avant les grands articles de Riemann qui introduisent des idées topologiques en géométrie algébrique. Il faut donc lui « pardonner », car il ne pouvait pas bien sûr s'exprimer en termes de surfaces de Riemann.



Deux modèles de la collection de modèles et d'instruments mathématiques de Göttingen, que le lecteur devrait absolument visiter. ©

Voici une esquisse d'une telle démonstration topologique. Considérons d'abord $F(0,y)$. Si ceci est identiquement nul, F peut être divisée par une puissance de x sans changer le problème. On peut donc supposer que la valuation de $F(0,y)$ (aussi appelée multiplicité) est un entier $m > 0$. En particulier, $F(0,y)$ possède un zéro isolé à l'origine (de multiplicité m). Choisissons un $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit la seule racine de $F(0,y) = 0$ dans $|y| \leqslant \varepsilon$. Par un simple argument de continuité, il existe $\eta > 0$ tel qu'il n'existe aucune racine de $F(x,y) = 0$ sur le tore solide $\{(x,y) \mid |x| \leqslant \eta\,;\, |y| = \varepsilon\}$. En divisant x et y par ε et η, nous supposons que $\varepsilon = \eta = 1$.

110. Puiseux (V.), Recherches sur les fonctions algébriques, *J. Math. Pures Appl.*, n° 15, 1850, p. 365-480.

Faisons maintenant une hypothèse qui sera analysée en détail par la suite. *Supposons que la dérivée partielle* $\partial F/\partial y$ *ne soit pas nulle sur la courbe* $F(x,y) = 0$, *sauf à l'origine.*

N'oublions pas que toute cette discussion est locale, donc quand j'écris « ne soit pas nulle », je veux dire « ne soit pas nulle dans un certain voisinage de l'origine ».
Encore une fois, ne manquez pas *Analysis Situs*, par Henri Paul de Saint-Gervais, disponible en ligne.

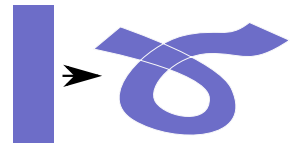
Notons $\mathscr{C}^\star$ la courbe ponctuée

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \;\mid\; (x,y) \neq (0,0)\,;\, F(x,y) = 0\,;\, |x| \leqslant 1\,;\, |y| \leqslant 1\right\}.$$

L'assertion principale est que *la projection de* $\mathscr{C}^\star$ *sur le disque ponctué* $D^\star = \{x \mid |x| \leqslant 1\} \smallsetminus \{0\}$ *est un revêtement*.

Rappelons rapidement la définition des revêtements et ce qui les différencie des homéomorphismes locaux. Une application continue $p : X \to Y$ est un *homéomorphisme local* (parfois appelé une application étale) si chaque point de X a un voisinage ouvert U tel que $p(U)$ soit ouvert et tel que la restriction de p à U soit un homéomorphisme sur $p(U)$. Une application continue $p : X \to Y$ est un *revêtement* si chaque point de Y a un voisinage ouvert V tel que $p^{-1}(V)$ soit une réunion disjointe d'ensembles ouverts U_i tels que la restriction de p à chaque U_i soit un homéomorphisme sur V. Il est clair qu'un revêtement est un homéomorphisme local, mais des exemples simples montrent que la réciproque n'est pas vraie. On montre facilement qu'un homéomorphisme local est un revêtement s'il est *propre*.

Le mot *étale* a été introduit en mathématiques par les géomètres algébristes français. Il signifie « stationnaire » et est fréquemment utilisé pour décrire la surface de la mer au repos.



Une application étale qui n'est pas un revêtement.

Une application est *propre* si l'image inverse d'un ensemble compact est compacte. Bien entendu, la réciproque n'est pas vraie et un revêtement peut ne pas être propre (comme par exemple $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(it) \in S^1$).

Montrons maintenant que $\mathscr{C}^\star$ est un revêtement du disque ponctué. Le fait que la projection soit un homéomorphisme local découle immédiatement de notre hypothèse que $\partial F/\partial y$ ne s'annule pas sur $\mathscr{C}^\star$ et du théorème des fonctions implicites. Le caractère propre de la projection est également clair puisqu'une suite de points sur $\mathscr{C}^\star$ s'échappe d'un ensemble compact si et seulement si elle converge vers l'origine.

Le principal théorème de la théorie des revêtements est que les revêtements connexes d'un espace connexe (localement simplement connexe) sont décrits, à isomorphisme près, par les sous-groupes du groupe fondamental. Par exemple, les revêtements connexes de $D^\star$ sont isomorphes à une application puissance $x \in D^\star \mapsto x^m \in D^\star$ pour un entier $m \geqslant 1$ ou à l'exponentielle complexe restreinte au demi-plan $\Re(x) \leqslant 0$.

En fait, Puiseux a utilisé implicitement les revêtements lorsqu'il a décrit certains lacets suivis par x autour de l'origine et la permutation associée des valeurs de y qui satisfont $F(x, y) = 0$.

Choisissons une composante connexe $\mathscr{C}_0^\star$ de $\mathscr{C}^\star$. Puisque le revêtement $\mathscr{C}_0^\star \to D^\star$ a des fibres finies, il est isomorphe à un revêtement $x \in D^\star \mapsto x^m \in D^\star$. En d'autres termes, il existe un *homéomorphisme*

$$\phi : x \in D^\star \mapsto (x^m, g(x)) \in \mathscr{C}_0^\star.$$

Ce ϕ est clairement holomorphe sur le disque ponctué et il nous reste à montrer qu'il se prolonge en tant que fonction holomorphe dans le disque. Cela découle du théorème de prolongement de Riemann : une fonction holomorphe bornée sur un disque ponctué est holomorphe dans le disque complet.

Un anachronisme de plus !

Le théorème est démontré *sous l'hypothèse que la dérivée partielle* $\partial F/\partial y$ *n'est pas nulle sur la courbe ponctuée* $F(x,y) = 0$, ce qui sera discuté dans le paragraphe suivant.

Racines simples

Une fonction holomorphe d'une variable complexe y et sa dérivée sont nulles simultanément en un certain y_0 si et seulement si ce zéro est multiple. Il s'agit donc de montrer que dans le théorème de Puiseux, on peut toujours supposer que F a la propriété que, pour x_0 petit et non nul, il n'y a pas de petites racines multiples de $F(x_0,y) = 0$.

Il s'avère que Puiseux n'a pas considéré des fonctions holomorphes générales $F(x,y)$ mais des polynômes en x et y. Dans ce cas, il est facile de traiter les racines multiples et Puiseux rejette le problème en une phrase (dans un article de 135 pages). Soyons un peu plus prudents que lui.

Considérons le *polynôme* F comme un élément de $\mathbb{C}[x][y]$. Ce F peut être vu comme un polynôme en une variable y avec des coefficients dans un anneau factoriel. On peut écrire F comme un produit de facteurs irréductibles de sorte que la courbe $F(x,y) = 0$ soit la réunion des courbes associées à ces facteurs irréductibles. On peut donc supposer que F est irréductible.

Supposons maintenant qu'il existe une suite (x_k,y_k) qui converge vers $(0,0)$ avec $x_k \neq 0$ et telle que y_k soit une racine multiple de $F(x_k,y) = 0$. Alors le discriminant du polynôme $F(x_k,y)$ est égal à 0. Par conséquent, le discriminant de F, en tant qu'élément de $\mathbb{C}[x]$, est identiquement nul puisqu'il a un nombre infini de racines. Si le discriminant d'un polynôme P est nul, le polynôme et sa dérivée ont un facteur commun. Ceci est impossible si P est irréductible.

Le discriminant d'un polynôme est le résultant de ce polynôme et de sa dérivée.

Donc si F est irréductible dans $\mathbb{C}[x][y]$ et si x est petit et non nul, alors $F(x,y) = 0$ n'a pas de petite racine multiple comme équation de la variable y. C'est ce qui manquait à la preuve du théorème de Puiseux *pour une équation polynomiale* $F(x,y) = 0$.

Pour une fonction holomorphe générale $F(x,y) = 0$, que Puiseux n'a pas considérée, il y a encore du travail à faire.

Le théorème de préparation de Weierstrass

Nous avons déjà vu le théorème de préparation de Weierstrass, que nous avons démontré dans le cadre des séries formelles avant d'établir la convergence. Le but ici est de démontrer ce théorème à l'aide de l'analyse complexe. Rappelons l'énoncé :

Théorème. *Soit* $F(x,y)$ *une fonction holomorphe non nulle définie dans un voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^2$. *Il existe alors m fonctions holomorphes* $a_0(x),\dots,a_{m-1}(x)$ *définies dans un voisinage de* $0 \in \mathbb{C}$, *une fonction holomorphe* $U(x,y)$ *qui ne s'annule pas à l'origine et un entier* $r \geqslant 0$ *tels que*

$$F(x,y) = x^r U(x,y)\left(y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x)\right).$$

Karl Weierstrass (1815-1897). ©

Ce théorème est exactement ce qu'il faut. Il stipule qu'aux fonctions qui ne s'annulent pas près, on peut toujours supposer que la fonction F étudiée est un polynôme dans la variable y, avec des coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}\{x\}$ des séries convergentes en x. La démonstration précédente de Puiseux — que l'on peut toujours supposer que $\partial F/\partial y$ ne s'annule pas identiquement sur la courbe, sauf à l'origine — peut donc être reproduite mot à mot en remplaçant l'anneau des polynômes en x par l'anneau des séries convergentes. Le théorème de Puiseux est donc démontré, en utilisant le théorème de Weierstrass.

Présentons maintenant la démonstration analytique de Weierstrass. Supposons, après avoir divisé F par x^r, que $F(x,y)$ ne s'annule pas pour $|x| \leqslant 1$ et $|y| = 1$. En fixant x avec $|x| \leqslant 1$, la fonction $y \mapsto F(x,y)$ a un nombre fini de zéros $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ dans le disque unité, comptés avec leur multiplicité. La difficulté est qu'il est impossible de choisir ces fonctions $y_i(x)$ comme des fonctions holomorphes ou même continues de x, précisément à cause du caractère multivalué du $y(x)$ implicite dans $F(x,y) = 0$. Cependant, nous allons montrer que toutes les fonctions symétriques des $y_i(x)$ sont bien des fonctions holomorphes de x. La preuve la plus simple utilise la formule de Cauchy. Soit

$$s_k(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|y|=1} \frac{y^k F'_y(x,y)}{F(x,y)}\,dy.$$

Le résidu de $y^k F'_y(x,y)/F(x,y)$, fonction de y, en l'une des racines $y_i(x)$ est la k-ième puissance $y_i(x)^k$, de sorte que $s_k(x)$ est la somme des k-ièmes puissances des racines. L'intégrale montre clairement que $s_k(x)$ est une fonction holomorphe de x. Puisque les s_k engendrent les fonctions symétriques, toutes les fonctions symétriques des $y_i(x)$ sont des fonctions holomorphes de x, en particulier les fonctions symétriques élémentaires $a_i(x)$. D'après le théorème de Viète, le polynôme

s_0 est le nombre de racines. Étant un entier et une fonction holomorphe de x, il est constant. Ceci a été utilisé implicitement quelques lignes plus haut !

Un autre théorème bien connu de Newton.

$$y^m - a_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1}a_1(x)y + (-1)^m a_0(x)$$

s'annule exactement aux mêmes points que F avec les mêmes multiplicités, de sorte que le quotient $U(x,y)$ ne s'annule pas.

Le théorème de préparation de Weierstrass et le théorème de Puiseux sont démontrés. ⊡

Qui a démontré le théorème de préparation de Weierstrass ?

Mon lecteur aura deviné que la réponse à cette question n'est certainement pas Weierstrass. Les historiens des mathématiques savent bien que les questions du type « qui a démontré ceci en premier ? » sont trop naïves et passent souvent à côté de l'essentiel. Il est néanmoins intéressant de noter que deux mathématiciens importants du XXe siècle, Henri Cartan [111] et Carl Siegel [112], ont écrit des articles détaillés sur le développement des idées autour de ce théorème. Leurs articles ne sont cependant pas complètement convergents. En voici quelques étapes :

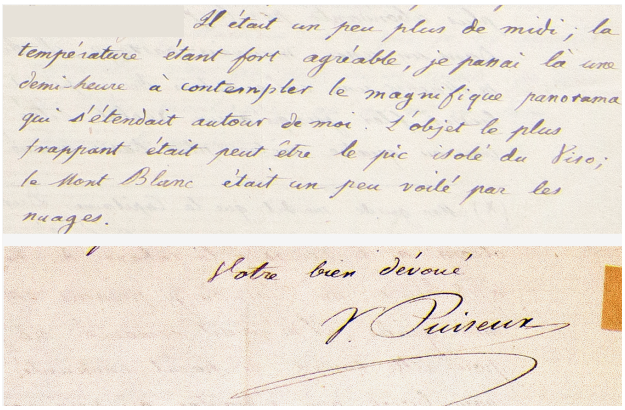
1. Le fait que les fonctions symétriques des racines d'une équation holomorphe $F(x,y) = 0$, où y est l'inconnue et x un paramètre, dépendent holomorphiquement de x était connu de Cauchy en 1831, avec la démonstration que j'ai présentée.
2. Weierstrass a publié sa démonstration en 1886 mais mentionne dans une note de bas de page qu'il donnait des cours sur ce théorème depuis 1860. Comme on pouvait s'y attendre, il évite autant que possible l'utilisation des résidus de Cauchy, mais pas complètement, et travaille avec des séries. Sa démonstration n'est que partiellement algébrique.

111. Cartan (H.), *Sur le théorème de préparation de Weierstrass*, dans *Festschr. Gedächtnisfeier K. Weierstrass*, Westdeutscher Verlag, Cologne, 1966, p. 155-168.

112. Siegel (C. L.), *Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstrass*, dans *Number Theory and Analysis (Papers in Honor of Edmund Landau)*, Plenum, New York, 1969, p. 297-306.

3. Poincaré démontre le théorème dans sa thèse en 1879 sans mentionner Cauchy. Comme d'habitude, le mot « démonstration » doit être pris avec beaucoup de précautions dans les écrits de Poincaré et c'est particulièrement vrai dans cet article de jeunesse. Bien plus tard, par exemple dans ses *Méthodes nouvelles*, il a fait référence à sa thèse sans fournir de meilleure démonstration et sans mentionner Weierstrass. Il est intéressant de noter qu'Henri Cartan, l'un des pères fondateurs de Bourbaki, ne mentionne pas Poincaré dans son article.
4. En 1905, Lasker [113] a fourni une démonstration entièrement algébrique et en a déduit des conséquences algébriques pour les anneaux de séries formelles et convergentes.
5. Siegel souligne également que, selon lui, la démonstration la plus courte est due à Stickelberger [114] en 1887.

Pour une présentation moderne et élémentaire du théorème, voir le livre d'Ebeling [115]. Pour une description minutieuse des nombreuses variantes du théorème et des commentaires historiques supplémentaires, voir [116]. Je ne peux pas terminer ce chapitre sans mentionner qu'il existe une version de ce théorème pour les fonctions C^∞, conjecturée par Thom et démontrée par Malgrange [117]. Mais c'est une autre histoire [118]...


Il était un peu plus de midi ; la température étant fort agréable, je passai là une demi-heure à contempler le magnifique panorama qui s'étendait autour de moi. L'objet le plus frappant était peut être le pic isolé du Viso ; le Mont Blanc était un peu voilé par les nuages.

Votre bien dévoué
P. Puiseux

Extrait d'une lettre de Puiseux qui décrit son expédition au mont Pelvoux. Puiseux aurait pu servir de modèle à Caspar David Friedrich lorsqu'il peignit *Le Voyageur contemplant une mer de nuages*, mais l'expédition du Pelvoux a eu lieu 30 ans plus tard ! ©

113. Lasker (E.), Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, n° 60(1), 1905, p. 20-116.

114. Stickelberger (L.), Über einen Satz des Herrn Noether, *Math. Ann.*, n° 30(3), 1887, p. 401-409.

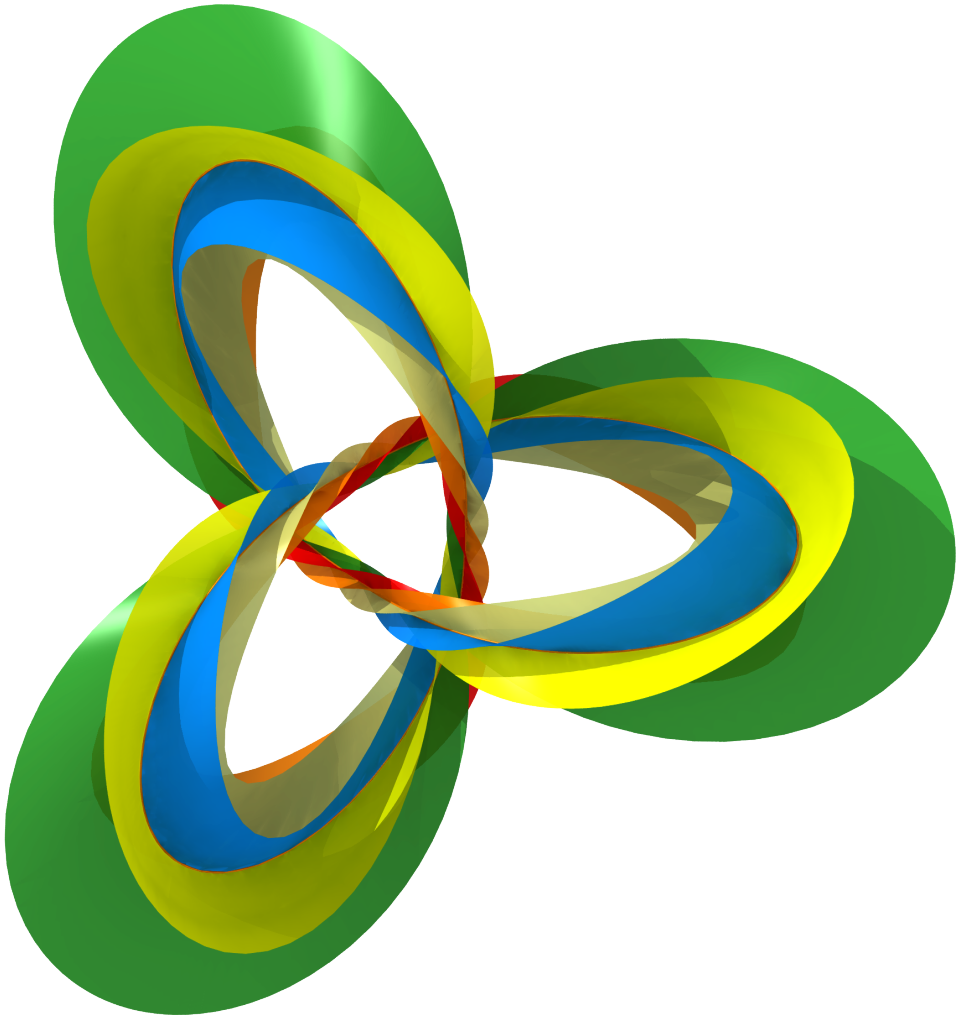
115. Ebeling (W.), *Functions of Several Complex Variables and their Singularities*, American Mathematical Society, 2007.

116. Grauert (H.), Remmert (R.), *Analytische Stellenalgebren*, Springer, 1971.

117. Malgrange (B.), *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford University Press, 1967.

118. Arnold (V. I.), Gusein-Zade (S. M.) et Varchenko (A. N.), *Singularities of Differentiable Maps. Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*, Birkhäuser, 2012.

« Il était un peu plus de midi, la température étant fort agéable, je passai là une demi-heure à contempler le magnifique panorama qui s'étendait autour de moi. L'objet le plus frappant était peut-être le pic isolé du Viso ; le Mont Blanc était un peu voilé par les nuages. »



Fibres de Milnor de $x^3 - y^2$.
©

Jack Milnor et sa fibration

Lorsque j'entre dans une bibliothèque mathématique ou lorsque je parcours les *Mathematical Reviews*, ou simplement lorsque je fais des recherches avec Google, je suis souvent submergé par l'immensité du monde mathématique. Même les sujets qui peuvent sembler microscopiques pour le profane, comme par exemple la topologie des courbes algébriques, sont en fait des territoires immenses dont l'exploration pourrait facilement nécessiter plusieurs vies. Ce sentiment peut être déprimant ou enivrant, selon mon humeur ☹. Dans ce petit livre, le mieux que je puisse faire est de décrire un exemple significatif, de mentionner certains des principaux résultats et de renvoyer à certains des (longs) livres qui proposent une discussion complète de l'état de l'art. Quoi qu'il en soit, un seul livre doit être signalé comme un joyau et *doit être lu par tous les étudiants* intéressés par ce sujet, celui de Milnor [119], un grand maître dans l'art d'écrire les mathématiques.

John Milnor. © Les francophones sont souvent surpris d'apprendre que Jack est un surnom pour John. La traduction anglaise de Jacques est James.

Un exemple

Observons la courbe

$$F(x,y) = -x^{10} + x^9 + 6\,x^8y - 3\,x^6y^2 + 2\,x^5y^3 + 3\,x^3y^4 - y^6 = 0.$$

Ce F n'a pas été choisi au hasard. Toute équation F = 0 peut être résolue en utilisant les séries de Puiseux. Dans cet exemple, j'ai triché. Je suis parti de la solution

$$y = x^{3/2} + x^{5/3}$$

119. Milnor (J.), *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.

et j'ai cherché l'équation ! Nous avons

$$\left(y - x^{3/2}\right)^3 = x^5.$$

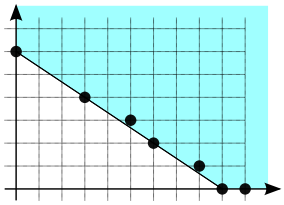
En développant et en élevant à une puissance appropriée afin d'éliminer les exposants fractionnaires, nous trouvons en effet $F(x,y) = 0$. En fait, en posant $x = {x_1}^2$ et $y = {x_1}^3(1+y_1)$, comme on devrait le faire en utilisant l'algorithme de Newton, le résultat se factorise, comme il se doit :

$$F\left({x_1}^2, {x_1}^3(1+y_1)\right) = -{x_1}^{18}\left(x_1 - {y_1}^3\right)\left(-8 + x_1 - 12\,y_1 - 6\,{y_1}^2 - {y_1}^3\right).$$

Donc le lieu des zéros de F dans le voisinage de l'origine contient exactement une branche $x_1 = {y_1}^3$ ou

$$x = t^6, \qquad y = t^9 + t^{10},$$

de sorte que $y = x^{3/2} + x^{5/3}$ comme prévu. Pour un F général et même pour un polynôme, on devrait s'attendre à une série de Puiseux *infinie*, mais nous allons d'abord nous intéresser à cet exemple spécifique.



Le polygone de Newton de F.

Examinons l'*entrelacs de la singularité*, intersection de la courbe $F = 0$ avec une petite sphère $\mathbb{S}^3_\varepsilon$. La transversalité de l'intersection de la courbe avec les petites sphères est facile à voir. En effet le carré de la norme

$$\phi : t \in \mathbb{C} \mapsto \left|t^6\right|^2 + \left|t^9 + t^{10}\right|^2 \in \mathbb{R}_+$$

est équivalent à $|t|^{12}$ pour t petit et l'équation $\phi(t) = \varepsilon^2$ définit un lacet dans $\mathbb{C}$, proche de $|t| = \varepsilon^{1/6}$, transverse aux droites radiales. En d'autres termes, l'intersection de $F = 0$ avec une petite sphère $\mathbb{S}^3_\varepsilon$ est un cercle plongé, c'est-à-dire un *nœud*, qui est l'image par ϕ de ce lacet.

Un *nœud* est un plongement du cercle dans la sphère de dimension 3. Un *entrelacs* est la réunion disjointe d'un nombre fini de nœuds. Deux nœuds ou entrelacs sont considérés comme équivalents s'il existe un homéomorphisme de la sphère qui préserve l'orientation et envoie le premier sur le second.

Aux homéomorphismes de la sphère près, ce nœud est indépendant de ε. Nous pourrions même utiliser des ellipsoïdes à la place des sphères ou même notre sphère carrée $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$. La démonstration détaillée est technique et ennuyeuse, mais l'idée clé est très simple. Étant donné deux normes euclidiennes N_0 et N_1 dans $\mathbb{R}^4$, on peut couper la courbe $F(x,y) = 0$ par de petites sphères $N_0 = \varepsilon$ et $N_1 = \varepsilon$. On obtient ainsi deux nœuds

Cette non-démonstration cache un fait fondamental en topologie différentielle. Si nous avons une famille de plongements $i_\lambda : X \to Y$ (pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$) d'une variété compacte X dans une autre variété Y, alors il existe une *isotopie*, c'est-à-dire une famille de difféomorphismes Φ_λ de Y telle que $i_\lambda = \Phi_\lambda \circ i_0$.

dans deux variétés homéomorphes à une sphère. Nous construisons maintenant un chemin de normes $\lambda N_1 + (1-\lambda)N_0$ (pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$) de sorte que nous ayons en fait une famille continue de cercles plongés dans des sphères qui définissent donc « le même nœud ». Un argument similaire pourrait être utilisé pour la « sphère carrée ». Voir [120] pour une illustration des erreurs possibles qu'un débutant naïf pourrait commettre.

120. Deloup (F.), The fundamental group of the circle is trivial, *Amer. Math. Monthly*, n° 112(5), 2005, p. 417-425.

Notons ce nœud K_F. Nous utiliserons la sphère carrée bien pratique $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$. L'intersection avec la courbe est située dans le tore solide $|x| = \varepsilon$ et $|y| \leqslant \varepsilon$, de sorte que $|t| = \varepsilon^{1/6}$. Changeons d'échelle et posons $X = x/\varepsilon$ et $Y = y/\varepsilon$. En particulier, X est dans le cercle unité et Y dans le disque unité. Si $t = \varepsilon^{1/6}\tau$, on obtient

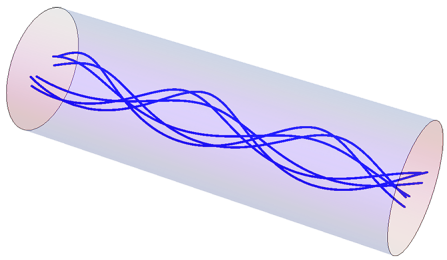
$$X = \tau^6\,, \qquad Y = \varepsilon^{1/2}\tau^9 + \varepsilon^{2/3}\tau^{10}\,,$$

où τ décrit le cercle unité.

Dans toutes les images suivantes, le tore solide $\mathbb{S}^1 \times D^2$ est dessiné comme le cylindre $[0, 2\pi[\times D^2$ et les deux faces $\{0\} \times D^2$ et $\{2\pi\} \times D^2$ doivent être collées.

Prenez votre temps ! Regardez les images de ce chapitre avec beaucoup d'attention. Ce n'est pas facile. ©

Pour tout X sur le cercle unité, il y a exactement six valeurs de Y, différant par la multiplication de τ par une racine sixième de l'unité. On dit que le nœud K_F est en *forme de tresse* : il coupe transversalement tous les disques $\{\star\} \times D^2$. En faisant le tour du cercle, ces six points sont permutés d'une manière qui va maintenant être décrite.

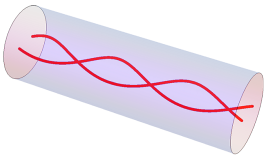


Observons que $\varepsilon^{2/3}$ est petit par rapport à $\varepsilon^{1/2}$ pour un petit ε et que $\varepsilon^{1/2}\tau^9$ ne prend que deux valeurs lorsqu'on multiplie τ

par une racine sixième de l'unité. Le nœud associé à

$$X = \tau^6, \qquad Y_0 = \varepsilon^{1/2}\tau^9$$

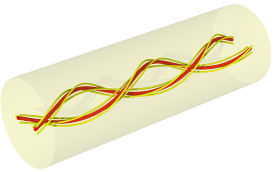
est simplement notre ami le trèfle $x^3 = y^2$. Lorsque X fait le tour du cercle, les deux points correspondants dans $\{X\} \times D^2$ tournent de trois demi-tours, ce qui produit le nœud de trèfle.

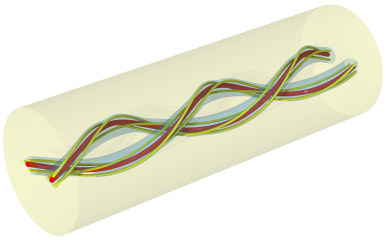


Considérons $Y = \varepsilon^{1/2}\tau^9 + \varepsilon^{2/3}\tau^{10} = Y_0 + Y_1$ comme une petite perturbation de Y_0. Remarquons que

$$X = \tau^6, \qquad Y_1 = \varepsilon^{2/3}\tau^{10}$$

donne trois valeurs (très petites) de Y_1 pour chaque valeur de X sur le cercle unité. Ainsi, les six points Y sur chaque disque $\{\star\} \times D^2$ viennent en deux groupes de trois points. En d'autres termes, le nœud K_F se trouve dans un mince voisinage tubulaire du nœud de trèfle et coupe les petits disques transversaux au trèfle en trois points.





Ce voisinage tubulaire du trèfle peut être paramétré ainsi :

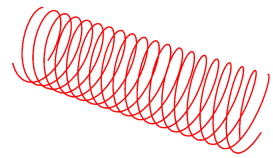
$$(\mu, \zeta) \in \mathbb{S}^1 \times D^2 \mapsto \left(X = \mu^2, Y = \varepsilon^{1/2}\mu^3 - 2\varepsilon^{2/3}\mu^{-3}\zeta\right).$$

Le cercle $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, âme de ce tore solide, est envoyé vers le nœud de trèfle. On peut se demander pourquoi j'ai choisi $\varepsilon^{1/2}\mu^3 - 2\varepsilon^{2/3}\mu^{-3}\zeta$ et non simplement $\varepsilon^{1/2}\mu^3 + 2\varepsilon^{2/3}\zeta$ qui serait également une paramétrisation. Le fait est qu'avec ce choix de coordonnées, dans ce voisinage tubulaire, $x^3 - y^2$ est égal à

$$\varepsilon^3\left(\mu^2\right)^3 - \varepsilon^2\left(\varepsilon^{1/2}\mu^3 - 2\varepsilon^{2/3}\mu^{-3}\zeta\right)^2$$

qui est de l'ordre de $4\varepsilon^{19/6}\zeta$ pour les petits ζ, de sorte que l'argument de $x^3 - y^2$ est proche de l'argument de ζ. Par conséquent *les*

Le coefficient 2 devant $\varepsilon^{2/3}\mu^{-3}$ n'est pas important : son seul rôle est de donner une épaisseur suffisante au tube pour contenir notre nœud.



fibres de Milnor de $x^3 - y^2 = 0$ *dans le voisinage tubulaire sont proches des pages* $\arg\zeta$ = *constante.*

Dans ces coordonnées, nous pouvons relier les expressions $\varepsilon^{1/2}\mu^3 - 2\,\varepsilon^{2/3}\mu^{-3}$ et $\varepsilon^{1/2}\tau^9 + \varepsilon^{2/3}\tau^{10}$ pour Y. En utilisant $\mu = \tau^3$, notre nœud K_F est l'image de

$$\tau \in S^1 \mapsto (\mu, \zeta) = \left(\tau^3, -\tfrac{1}{2}\,\tau^{19}\right) \in S^1 \times D^2.$$

Il s'agit d'un nœud torique de type $(19,3)$. Ce 19 peut sembler étrange. Notons qu'il existe un homéomorphisme du tore solide $S^1 \times D^2$ qui envoie le nœud torique de type $(19,3)$ vers le nœud torique de type $(19-3k,3)$ pour tout k (par exemple vers le nœud de type $(1,3)$, qui est beaucoup plus simple), mais un tel homéomorphisme ne peut pas être (homotope à) l'identité sur le bord et ne peut pas être prolongé à la sphère entière.

En effet, l'application $(\tau,\zeta) \mapsto (\tau, \tau^k\zeta)$ est un homéomorphisme qui tord le tore solide.

Donc K_F s'obtient en insérant un nœud torique de type $(19,3)$ dans le voisinage d'un nœud torique de type $(3,2)$. C'est un exemple typique d'un *nœud torique itéré*. Ils sont parfois appelés *nœuds de câble*, car ils ressemblent à la construction de câbles faits de brins torsadés qui sont tressés ensemble, ou *satellites* tournant autour des planètes qui tournent autour du Soleil.

La fibration de Milnor

Dans le cas du trèfle, les surfaces de niveau de $\arg(x^3 - y^2)$ remplissent le complémentaire du nœud comme les pages d'un livre dont la reliure est le trèfle. Nous avons décrit la topologie de ces pages comme des tores ponctués. Dans son livre fondateur de 1968, Milnor a montré qu'il s'agissait d'un fait général. Il a en fait

démontré un théorème pour toutes les dimensions, mais nous nous limitons au cas de la dimension (complexe) 2.

Théorème. *Soit* $F(x,y)$ *une fonction holomorphe réduite non nulle définie dans le voisinage de l'origine de* $\mathbb{C}^2$ *telle que* $F(0,0) = 0$. *Si* $\varepsilon > 0$ *est suffisamment petit, alors*

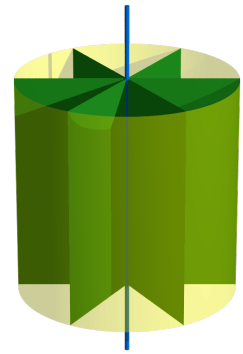
— *la courbe* $F(x,y) = 0$ *coupe transversalement les petites sphères* $\mathbb{S}^3_\varepsilon$ *le long d'un entrelacs* $L_\varepsilon \subset \mathbb{S}^3_\varepsilon$ *dont la topologie est indépendante de* ε ;

— *l'application*

$$(x,y) \in \mathbb{S}^3_\varepsilon \setminus L_\varepsilon \mapsto \arg(F(x,y)) = \frac{F(x,y)}{|F(x,y)|} \in \mathbb{S}^1$$

est une fibration localement triviale. Les fermetures des fibres sont des surfaces compactes dont les bords coïncident tous avec L_ε. *Dans un voisinage tubulaire de l'entrelacs, elles ressemblent à un livre ouvert : les fibres sont localement des produits d'un segment radial dans* D^2 *et d'un segment.*

Une série $F(x,y)$ est *réduite* si elle n'a pas de facteurs multiples dans sa décomposition en facteurs irréductibles.



©

Ce théorème est l'outil fondamental de l'étude locale des singularités. Cependant, je dois avouer que pendant longtemps, je n'ai pas regardé sa démonstration ; j'étais en quelque sorte convaincu qu'elle devait être élémentaire et simple. Nous avons une application très naturelle sur le cercle ; pourquoi ne serait-ce pas une fibration ? Je me trompais et la démonstration est en effet assez subtile. Étonnamment, les livres qui traitent de cette question sont de deux sortes. Les premiers arrivent au point clé de la démonstration et écrivent simplement de manière très discrète : « voir Milnor, chapitre II ». Les seconds arrivent au même point clé et se contentent de copier presque mot à mot le contenu de « Milnor, chapitre II ». Tous ces livres ont raison, car il est difficile de faire mieux que « Milnor, chapitre II ». Mon but ici n'est pas d'innover mais de donner quelques intuitions sur ce théorème.

Observons d'abord que le théorème est vrai et élémentaire en dimension 1. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe non nulle définie dans le voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$ et telle que $f(0) = 0$.

On écrit $f(x) = ax^m + \cdots$ avec $a \neq 0$ et on regarde l'application

$$x \in \mathbb{S}^1_\varepsilon \mapsto \arg(f(x)) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \in \mathbb{S}^1.$$

Il s'agit évidemment d'un revêtement pour ε suffisamment petit. En effet, dans la topologie C^1, cette application est proche du revêtement $x \mapsto \arg(a)\arg(x)^m$.

Après ce cas trivial, considérons une courbe $F(x,y) = 0$. Supposons que F soit réduite de sorte que $\partial F/\partial y$ ne s'annule pas sur $F = 0$ (sauf à l'origine). Au lieu d'utiliser la sphère ronde, nous utiliserons notre sphère carrée $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$. Pour simplifier, supposons que notre courbe n'intersecte que le tore solide T_1 défini par $|x| = \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$.

Nous voulons d'abord montrer que l'argument de $F(x,y)$, restreint à ce tore solide, est une submersion (en dehors de $F = 0$). En d'autres termes, étant donné un point (x,y) dans T_1, nous cherchons une direction tangente dans T_1 le long de laquelle la dérivée de $\arg F$ n'est pas nulle. Comme première tentative, nous pouvons essayer une direction verticale, en fixant x. Alors $F(x,y)$ change en fonction de la dérivée partielle $\partial F/\partial y$ de sorte que $\arg F$ est en effet une submersion, *au moins en dehors des zéros* de $\partial F/\partial y$.

L'*argument* d'un nombre complexe non nul z peut être défini de plusieurs façons. Il peut s'agir d'un élément de $[0, 2\pi[$, ou de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ou encore de $z/|z|$, dans le cercle unité. Dans ce qui suit, je choisis toujours la façon la plus commode. Je pense que cela ne créera pas de difficultés.

Maintenant le lieu des zéros $\partial F/\partial y(x,y) = 0$ est une autre courbe, qui ne coupe $F = 0$ qu'à l'origine. Cette nouvelle courbe peut être paramétrée à la Puiseux par $x = t^n$ et $y = f(t)$. D'après notre cas trivial à 1 dimension, l'application

$$t \in \mathbb{S}^1_{\varepsilon^{1/m}} \mapsto \arg F(t^m, f(t)) \in \mathbb{S}^1$$

est un revêtement. Par conséquent, pour les points où $\partial F/\partial y(x,y) = 0$, nous avons trouvé une autre direction dans laquelle la dérivée de l'argument ne s'annule pas.

Cet argument n'est certainement pas une démonstration complète du théorème de Milnor pour plusieurs raisons. La première est que nous avons utilisé une sphère carrée au lieu d'une sphère ronde : ce n'est pas si grave et l'argument pourrait facilement être adapté à la sphère ronde. La seconde est qu'une submersion peut ne pas être une fibration, sans hypothèse de compacité sur les fibres. Nous devons étudier la structure locale

de notre submersion près de l'entrelacs $L_\varepsilon \subset \mathbb{S}^3_\varepsilon$. Cela n'est pas difficile. Le point clé est que si $F(x,y) = 0$ et si nous prenons une droite complexe dans $\mathbb{C}^2$ qui passe par (x,y) et transverse à la courbe, alors nous pouvons appliquer le cas trivial à 1 dimension pour analyser l'argument $\arg F$ dans le voisinage de (x,y) afin d'obtenir l'image locale autour de l'entrelacs.

Notre présentation simple est limitée au cas de la dimension 2 ; le théorème de Milnor est valable en toute dimension. Pour une excellente présentation, je vous renvoie à Milnor, chapitre II ☺.

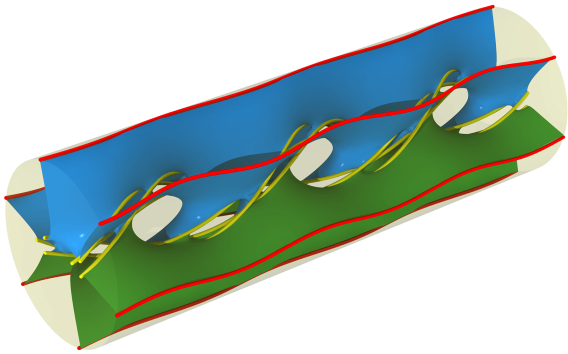
La fin de ce chapitre demande une grande attention, même si elle n'est pas nécessaire pour le reste du livre. ©

Les fibres de Milnor dans notre exemple

Revenons à notre exemple

$$F(x,y) = x^9 - x^{10} + 6\,x^8y - 3\,x^6y^2 + 2\,x^5y^3 + 3\,x^3y^4 - y^6 = 0.$$

La courbe $F(x,y) = 0$ coupe une petite sphère le long d'un nœud qui est un satellite du nœud de trèfle. Nous souhaitons décrire la topologie des fibres de Milnor $\arg F(x,y) = \text{const}$. Si je demande à mon ordinateur de dessiner une de ces fibres, l'image obtenue est la suivante.

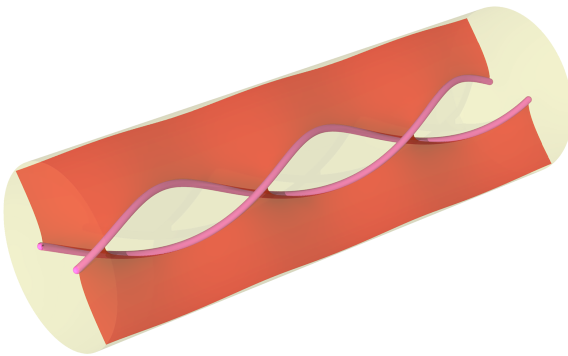


©

Ceci est compliqué et nécessite une analyse minutieuse. Remarquons au moins que cette surface coupe le bord du tore solide le long de 6 courbes (en rouge). Le nœud, représenté en jaune, est également une composante du bord. Les couleurs bleue et

verte des deux faces montrent que cette surface est orientable. Gardons à l'esprit que le bord du tore solide comporte 7 composantes.

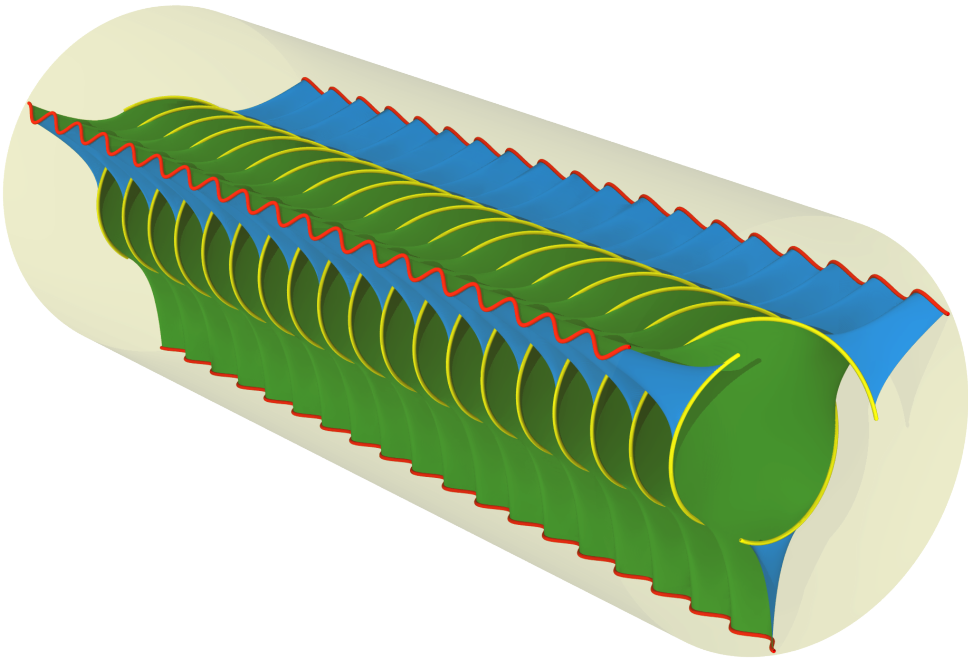
Pour comprendre cette image, examinons d'abord *les fibres de Milnor d'une courbe* p,q, $x^p - y^q = 0$, où p et q sont premiers entre eux (avec $p > q$). Nous savons que ce sont des surfaces de genre $(p-1)(q-1)/2$ auxquelles on a enlevé un disque. Examinons leur position par rapport à notre sphère carrée $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$. Puisque $p > q$, l'intersection avec $x^p - y^q = 0$ se trouve dans le tore solide T_1 défini par $|x| = \varepsilon$. Sur le tore du bord $|x| = \varepsilon$ et $|y| = \varepsilon$, la valeur de $x^p - y^q$ est très proche de y^q et l'argument de $x^p - y^q$ est presque égal à q fois l'argument de y. Donc un fibré de Milnor de $x^p - y^q$ coupe le bord de T_1 le long de q courbes très proches de q parallèles.



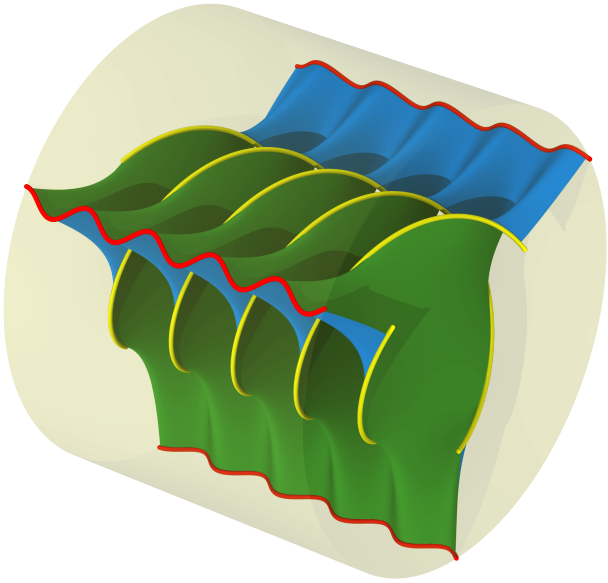
Une fibre de Milnor du nœud de trèfle, vue comme un nœud torique de type $(3,2)$. Le bord de la surface est le nœud et son intersection avec le bord du cylindre consiste en deux parallèles. ©

Pour la même raison, sur l'autre tore T_2 défini par $|y| = \varepsilon$, une fibre de Milnor coïncide presque avec q disques où l'argument de y prend q valeurs et x décrit le disque de rayon ε. En d'autres termes, l'intersection d'un fibré de Milnor de $x^p - y^q$ avec T_1 est une surface de genre $(p-1)(q-1)/2$ où $1+q$ disques ont été enlevés. Le bord du premier disque enlevé est le nœud torique situé à l'intérieur de T_1 et les q autres disques ont comme bords q cercles sur le bord de T_1.

Revenons maintenant à notre *exemple plus compliqué défini par* $F(x,y) = 0$. En extrayant les termes dominants du polygone de



Une fibre de Milnor d'un nœud torique de type $(19,3)$. Le bord de la surface est le nœud (en jaune) et son intersection avec le bord du cylindre consiste en 3 parallèles (en rouge). ©



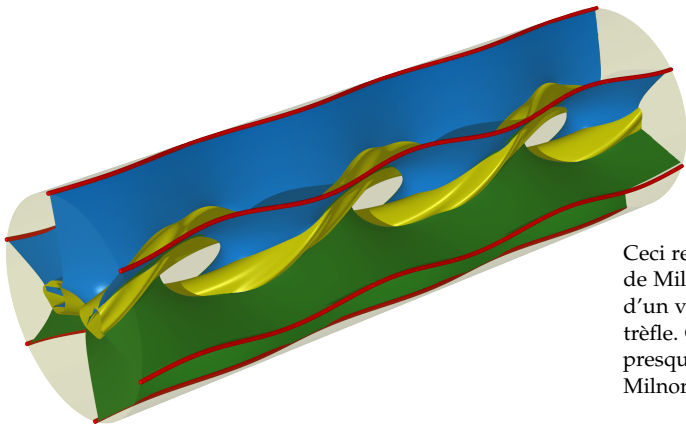
Voici une petite coupe pour mieux comprendre l'image précédente. Les couleurs bleue et verte montrent que la surface est bien orientable. ©

Newton, nous obtenons

$$F(x,y) = \left(x^3 - y^2\right)^3 - x^{10} + 6\,x^8 y + 2\,x^5 y^3.$$

Rappelons que nous avons construit un voisinage tubulaire $\mathscr{T}_\varepsilon$ du nœud de trèfle paramétré par $(\mu,\zeta) \in \mathbb{S}^1 \times D^2$ et dans lequel $x^3 - y^2$ est de l'ordre de $4\,\varepsilon^{19/6}\zeta$. Sur le bord de ce tore solide, où $|\zeta| = 1$, on a $|(x^3 - y^2)^3| \approx 64\,\varepsilon^{57/6}$ et $|x|, |y| \leqslant \varepsilon$, de sorte que $F(x,y)/(x^3 - y^2)^3$ est très proche de 1 et que l'argument de $F(x,y)$ est proche de $\arg(\zeta)^3$. En particulier, chaque fibre de Milnor de F *sur le bord* de $\mathscr{T}_\varepsilon$ est très proche de *trois* parallèles avec $\arg\zeta$ = constante.

C'est également le cas en dehors de $\mathscr{T}_\varepsilon$: chaque fibre de Milnor de F *en dehors* de $\mathscr{T}_\varepsilon$ est très proche de *trois* fibres de Milnor de $x^3 - y^2 = 0$. N'oublions pas que les fibres de Milnor de $x^3 - y^2 = 0$ sont des tores ponctués. Leurs intersections avec T_2 sont constituées de deux disques. Leurs intersections avec T_1 ont trois composantes de bord, deux étant sur le bord de T_1, la troisième étant le nœud lui-même. C'est en effet ce que l'on peut voir si l'on cache ce qui se trouve à l'intérieur de $\mathscr{T}_\varepsilon$.



Ceci représente la fibre de Milnor de F, en dehors d'un voisinage tubulaire du trèfle. Cette surface coïncide presque avec 3 fibres de Milnor de $x^3 - y^2 = 0$. ©

L'intérieur de $\mathscr{T}_\varepsilon$ est le domaine du nœud de type $(19,3)$ qui est inséré dans le tube. Évaluons $F(x,y) = F(\varepsilon X, \varepsilon Y)$ à l'intérieur du tube, aux coordonnées (μ,ζ) :

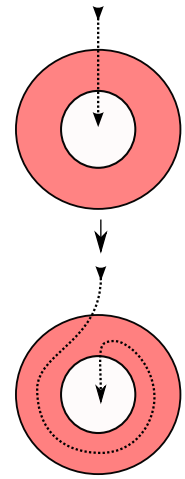
$$F\left(\varepsilon\mu^2, \varepsilon^{3/2}\mu^3 - 2\,\varepsilon^{5/3}\mu^{-3}\zeta\right).$$

Ceci s'annule exactement sur $\zeta = -\frac{1}{2}\mu^{19}$, au premier ordre. Par conséquent, une fibre de Milnor de F, à l'intérieur de $\mathscr{T}_\varepsilon$, est proche d'une fibre de Milnor de $y^3 = x^{19}$. C'est une surface de genre $(3-1)(19-1)/2 = 18$ à laquelle on a enlevé 4 disques. L'un des bords est le bord de notre nœud, comme il se doit, et les trois autres sont trois parallèles sur le bord de $\mathscr{T}_\varepsilon$.

En résumé, une fibre de Milnor de $F(x,y) = 0$ *est homéomorphe à une surface fermée orientable de genre* 18 *sur laquelle on effectue trois sommes connexes avec un tore et dans laquelle on supprime finalement un disque.* Il s'agit d'une surface de genre 21. C'est assez compliqué.

Le reste de ce chapitre sera très vague : je ne peux pas donner plus qu'un aperçu de la théorie. En divisant le complémentaire de K_F le long d'une fibre de Milnor Σ, nous obtenons un produit $\Sigma \times [0,1]$. Pour reconstruire le complémentaire du nœud, il faut coller $\Sigma \times \{0\}$ à $\Sigma \times \{1\}$ en utilisant un difféomorphisme de Σ. Ce difféomorphisme, bien défini à isotopie près, est appelé *monodromie* du nœud. L'action de la monodromie sur la première homologie possède un polynôme caractéristique qui est le *polynôme d'Alexander* du nœud. Dans notre exemple, tout peut être décrit de manière assez concrète.

En effet, la fibration de Milnor dans le complémentaire d'*une* fibre est une fibration sur $[0,1]$, donc une fibration triviale puisque $[0,1]$ est contractile.



Une torsion de Dehn. Cet homéomorphisme est l'identité sur le bord de la couronne, préserve les cercles concentriques et les tord comme indiqué.

Je me contenterai de donner le résultat. Notre surface Σ contient trois courbes fermées γ_i ($i = 1,2,3$) le long desquelles nous avons effectué la somme connexe. En coupant le long des γ_i, nous obtenons quatre composantes : S et les Σ_i, où S est une surface de genre 18 moins 4 disques et où chaque Σ_i est un tore ponctué. Une application de monodromie ψ préserve les courbes γ_i et c'est une *torsion de Dehn* dans un certaine couronne autour de ces courbes. Cela signifie que ψ ressemble dans le voisinage de ces courbes à l'image dans la marge. Cela montre que l'action de la monodromie sur l'homologie est périodique, ce qui ne serait pas vrai en homotopie. Les courbes γ_i sont homologues à zéro mais non homotopes à zéro.

Si nous coupons Σ le long de γ_i, nous trouvons les monodromies de $x^3 - y^2$ trois fois et de $x^{19} - y^3$ une fois. Donc le polynôme d'Alexander est le produit du cube du polynôme pour

$x^3 - y^2$ et du polynôme pour $x^{19} - y^3$. On obtient donc

$$\frac{(X^6-1)^3(X-1)^3(X^{57}-1)(X-1)}{(X^2-1)^3(X^3-1)^3(X^{19}-1)(X^3-1)},$$

qui est égal à

$$\begin{aligned}&\left(1-X+X^2\right)^3\left(1-X+X^3-X^4+X^6-X^7+X^9-X^{10}+X^{12}\right.\\&-X^{13}+X^{15}-X^{16}+X^{18}-X^{20}+X^{21}-X^{23}+X^{24}-X^{26}\\&\left.+X^{27}-X^{29}+X^{30}-X^{32}+X^{33}-X^{35}+X^{36}\right).\end{aligned}$$

Le cas général

Je ne mentionnerai que les résultats les plus marquants. Les nœuds associés à une branche d'une courbe sont toujours des nœuds toriques itérés. Les nœuds associés à deux courbes *irréductibles* $F_1(x,y) = 0$ et $F_2(x,y) = 0$ sont topologiquement équivalents par un homéomorphisme de la sphère de dimension 3 si et seulement si les deux branches associées ont le même invariant caractéristique de Puiseux. En fait, on distingue ces nœuds en utilisant les polynômes d'Alexander. Ceci a été démontré il y a longtemps pour le cas des nœuds et même pour le cas des courbes à deux branches. Le fait analogue pour les courbes non irréductibles, qui produisent des *entrelacs* constitués de *plusieurs* nœuds disjoints, a été établi beaucoup plus récemment. La *monodromie* associée aux courbes générales a été magnifiquement décrite par A'Campo [121]. Je dirais que la situation est maintenant très bien comprise.

Il est sage d'arrêter notre excursion ici si nous voulons continuer notre promenade : il y a d'autres sites à visiter. Cependant, je comprendrais parfaitement une certaine frustration du lecteur obligé de faire demi-tour sur un chemin qui semble être (et qui est) beau.

Pour en savoir beaucoup plus sur le sujet, avec une perspective historique, le lecteur peut consulter la merveilleuse étude de Weber [122] et l'ouvrage déjà mentionné [123].

121. A'Campo (N.), Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.*, nº 20, 1973, p. 147-169.

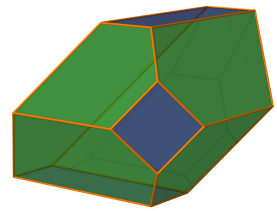
122. Weber (C.), On the topology of singularities, *Singularities II*, American Mathematical Society, 2008, p. 217-251.

123. Brieskorn (E.) et Knörrer (H.), *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Bâle, 1986.

La célèbre gravure *Melencolia* de Dürer (1514). Le polytope n'est pas K_5 ! Je recommande l'article de Günter Ziegler dans *The Guardian* : « Le polyèdre de Dürer : cinq théories pour expliquer le cube bizarre de *Melencolia* ».

©

L'associaèdre d'Hipparque-Schröder-Tamari-Stasheff



Un modèle de K_5. ©

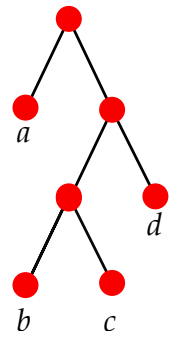
Nous allons oublier les courbes analytiques pour un moment et revenons aux arbres, aux mots et à la combinatoire. Il existe un dictionnaire naturel entre les trois types d'objets suivants :

— *les arbres planaires enracinés binaires* avec n feuilles ;

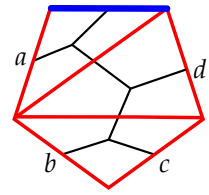
— *les parenthésages binaires* sur un mot de longueur n ;

— *les partitions d'un polygone convexe* avec $(n+1)$ arêtes (l'une d'entre elles étant appelée *la racine*) en n triangles.

Ceci est illustré par les figures dans la marge.



a((bc)d)



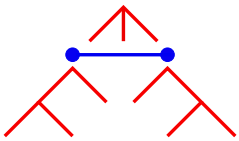
Nous nous sommes également intéressés aux arbres planaires enracinés à n feuilles tels que chaque nœud interne ait *au moins* deux fils. Ces arbres sont associés à des parenthésages de Schröder sur un mot de longueur n qui ne sont pas nécessairement binaires. En termes de diagonales sur un polygone convexe à $(n+1)$ côtés, ils correspondent à des collections de k diagonales non sécantes avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de ces objets est le n-ième (petit) nombre d'Hipparque-Schröder.

Un polytope abstrait

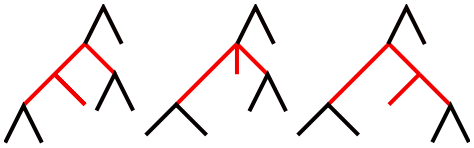
Nous allons construire une suite de polytopes K_n de dimension $n-2$ appelés *associaèdres*.

Dessinons un intervalle et étiquetons-le avec l'unique arbre enraciné avec une racine ayant 3 fils et aucun autre nœud. Étiquetons ses extrémités avec les deux arbres binaires planaires

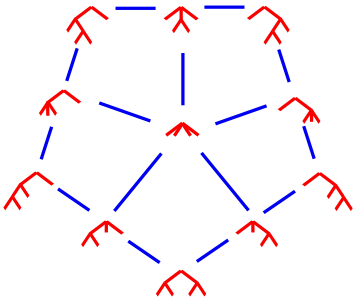
enracinés à 3 feuilles. On obtient la figure suivante. C'est K_3 : juste un intervalle.



Il est très tentant de relier deux arbres binaires par une arête si l'on passe de l'un à l'autre par une transition locale, comme le suggère la figure précédente. Si nous détectons dans un arbre binaire un sous-arbre à 3 feuilles, nous le supprimons et nous le remplaçons par l'autre arbre à 3 feuilles : nous avons défini une arête dans l'associaèdre.



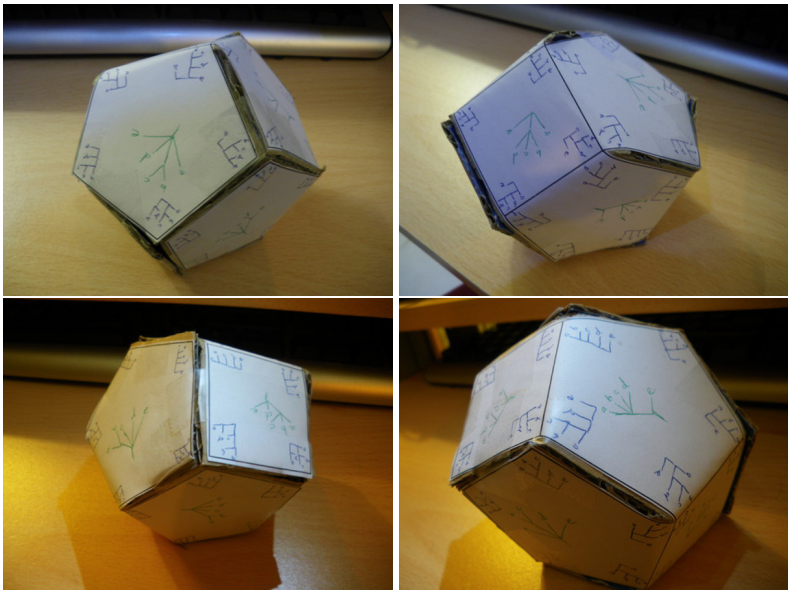
Dessinons la figure pour $n = 4$. Il y a 5 arbres binaires avec 4 feuilles. Nous les plaçons aux sommets d'un pentagone. Les 5 arêtes sont étiquetées par les 5 arbres planaires avec 4 feuilles et exactement un nœud avec 3 fils. Il y a encore un arbre planaire avec une racine et 4 fils. Plaçons-le au centre du pentagone, comme étiquette pour la face de dimension 2 du pentagone. C'est K_4.



Cela suggère que l'on pourrait définir un *polytope* de dimen-

sion $n-2$ dont les sommets sont étiquetés par des arbres binaires avec n feuilles, dont les arêtes sont étiquetées par des arbres avec un seul nœud avec 3 fils, etc., et dont l'unique face de dimension maximale (de dimension $n-2$) est étiquetée par l'arbre unique avec une racine et n fils (généralement appelé une *corolle*).

En passant à $n = 5$, nous pouvons encore dessiner une figure.



©

Il s'avère qu'il est effectivement possible de construire un tel polytope pour toutes les valeurs de n. Le premier problème est de donner une définition précise du mot *polytope* dans un *contexte combinatoire*. On aimerait une définition inspirée de notre intuition géométrique d'un polytope *dans l'espace euclidien*, mais qui ne devrait pas prendre en compte un plongement dans un espace quelconque.

Il existe un concept bien défini de *polyèdre combinatoire*, dont les faces sont des segments, des triangles et des simplexes en général. On part d'un ensemble S de points appelés *sommets* et on sélectionne des sous-ensembles de S appelés *faces* à une seule condition : un sous-ensemble d'une face doit être une face. Si une face contient $k+1$ éléments, on dit que c'est un simplexe de dimension k. Cette définition est assez simple, mais elle ne

convient pas à notre situation. Par exemple, le polytope K_5 à 3 dimensions ci-dessus a des faces à 2 dimensions qui sont des carrés ou des pentagones, non des triangles.

Il existe en effet plusieurs définitions combinatoires (non équivalentes) des *polytopes abstraits*, mais nous ne les utiliserons pas puisque notre polytope sera finalement réalisé comme un objet géométrique dans l'espace euclidien. Néanmoins, un *polytope abstrait* devrait au moins être constitué de *faces* ayant une certaine dimension et il devrait y avoir un certain ordre partiel entre les faces, correspondant à l'idée intuitive de contiguïté. Nous nous contenterons donc de définir un ensemble partiellement ordonné K_n de hauteur $n-2$. C'est très facile.

Définissons la hauteur d'un ensemble partiellement ordonné comme la cardinalité d'un sous-ensemble totalement ordonné maximal moins 1.

Pour simplifier, choisissons un polygone convexe dans le plan Π_{n+1} avec $(n+1)$ sommets, mais la construction suivante est indépendante du choix de ce polygone. Choisissons également un côté du polygone, appelé *racine*.

Une face de dimension d de K_n est par définition un ensemble F de $n-2-d$ diagonales non sécantes dans Π_{n+1}. La relation d'adjacence est définie à l'aide de l'inclusion *inverse* : on dit qu'une face associée à un sous-ensemble F_1 est une *sous-face* de F_2 si $F_2 \subset F_1$. Par exemple, les sommets de K_n, de dimension 0, correspondent à des partitions de Π_{n+1} en $(n-1)$ triangles par $n-2$ diagonales. En utilisant la racine, ces sommets sont associés à des arbres binaires planaires, comme souhaité.

Une face de codimension q de K_n est associée à un arbre planaire enraciné à n feuilles ayant exactement q nœuds internes (différents de la racine et des feuilles) ou de manière équivalente ayant q arêtes internes. Du point de vue de l'arbre, on peut dire que la face associée à un arbre T_1 est une sous-face de celle associée à T_2 si l'on obtient T_2 à partir de T_1 en réduisant certaines arêtes.

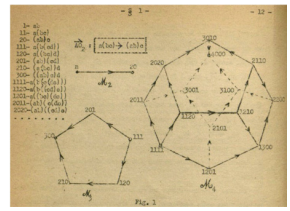
Dov Tamari (1911-2006).

Pour l'instant, je n'ai défini qu'un ensemble partiellement ordonné. Il ne serait pas difficile de vérifier que cet ensemble satisfait aux axiomes qui définissent les polytopes abstraits, axiomes que j'ai choisi de ne pas expliciter.

C'est l'*associaèdre d'Hipparque-Schröder-Tamari-Stasheff*.

Un peu d'histoire

Comme d'habitude, il est presque impossible de donner un nom unique à un objet mathématique. Comme on le sait, Catalan comptait le nombre de sommets de K_n et Hipparque et Schröder comptaient leurs faces. Dov Tamari (anciennement Bernhard Teitler) a défini l'objet combinatoire en 1951 dans sa thèse.



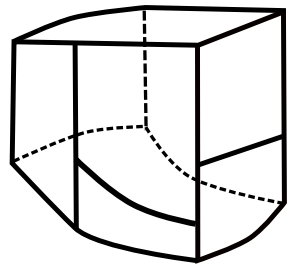
Une figure de la thèse de Tamari.

Je vous suggère de lire le premier chapitre du *Tamari Memorial Festschrift* [124] pour une description de ses motivations et de sa biographie (une « promenade » en Allemagne, en Palestine, en France, en Israël, aux États-Unis, au Brésil et aux Pays-Bas, à travers le xxe siècle). On y apprend par exemple ceci :

> « Au moins après 1948, Tamari s'est opposé aux injustices commises par les Israéliens à l'égard des Palestiniens ainsi qu'à la discrimination à l'encontre des immigrants juifs originaires des pays du Moyen-Orient. Ces points de vue n'étaient pas du tout acceptés à l'époque. »

124. Müller-Hoissen (F.), Pallo (J. M.) et Stasheff (J.), *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures: Tamari Memorial Festschrift*, Birkhäuser, Bâle, 2012.

En 1963, J. Stasheff a défini le même objet, également dans sa thèse, mais dans un contexte topologique très différent qui sera discuté en détail dans le chapitre suivant. Il n'avait pas connaissance des travaux antérieurs de Tamari. La figure dans la marge montre le *polytope courbé* de son article original.



Une figure dessinée par Stasheff.

La construction d'un polytope convexe *dans un espace euclidien quelconque* était une question très naturelle. Selon une anecdote, Milnor est venu assister à la soutenance de thèse de Stasheff avec un modèle en carton de K_5.

Le nom *associaèdre* a été inventé par Kalai qui a demandé à Haiman s'il existait un polytope convexe géométrique (non abstrait) dans $\mathbb{R}^n$ qui réalise K_{n-2}. Haiman a fourni une construction en 1984 mais ne l'a pas publiée. Une construction a été publiée par Lee en 1989. Plusieurs auteurs ont fourni d'autres constructions. Voir le chapitre correspondant de Ceballos et Ziegler dans le *Festschrift* de Tamari.

La construction de Loday

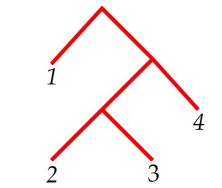
Je décris maintenant une belle construction, due à Jean-Louis Loday [125] en 2004, d'un polytope convexe *dans l'espace euclidien*

125. Loday, (J.-L.), Realization of the Stasheff polytope, *Arch. Math. (Basel)*, n° 83(3), 2004, p. 267-278.

dont les faces (au sens géométrique) réalisent précisément la combinatoire de l'associaèdre d'Hipparque et de ses continuateurs.

Considérons un arbre planaire enraciné binaire T avec n feuilles, considéré comme un sommet de K_n. Étiquetons les feuilles de 1 à n, de gauche à droite. Pour chaque paire de feuilles i et j, notons $i \vee j$ le nœud de T qui est le plus petit ancêtre commun de i et j. Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$, considérons le nœud $i \vee (i+1)$ et désignons par $\nu_{\mathrm{g}}(i)$ (resp. $\nu_{\mathrm{d}}(i)$) le nombre de ses feuilles descendantes le long de sa branche gauche (resp. droite). On associe à l'arbre T le point

$$\mathrm{M}(\mathrm{T}) = \big(\nu_{\mathrm{g}}(1)\nu_{\mathrm{d}}(1), \nu_{\mathrm{g}}(2)\nu_{\mathrm{d}}(2), \dots, \nu_{\mathrm{g}}(n-1)\nu_{\mathrm{d}}(n-1)\big) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$



$\nu_{\mathrm{g}}(3) = 2 \qquad \nu_{\mathrm{d}}(3) = 1$
$\mathrm{M}(\mathrm{T}) = (3, 1, 2)$

Théorème. *L'enveloppe convexe de l'ensemble des points* $\mathrm{M}(\mathrm{T}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ *où* T *décrit tous les arbres planaires enracinés binaires est un polytope convexe dont la combinatoire est précisément celle de l'associaèdre d'Hipparque-Schröder-Tamari-Stasheff.*

Montrons d'abord que tous les points M(T) sont situés sur l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont l'équation est

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Une façon de le démontrer est de compter le nombre de triplets (a, b, v), où $a < b$ sont deux feuilles avec $v = a \vee b$. Puisque v est déterminé par a et b, ce nombre est égal au nombre de paires $a < b$, égal à $n(n-1)/2$. En comptant le même nombre selon le nœud v, on obtient la somme des $\nu_{\mathrm{g}}(i)\nu_{\mathrm{d}}(i)$ de $i = 1$ à $n-1$. Ceci démontre l'affirmation. ⊡

Afin de démontrer le théorème de Loday, nous commençons par identifier les faces F de codimension 1 de K_n. Elles sont étiquetées par des arbres (non binaires) ayant un seul nœud intérieur. Elles sont définies par deux entiers $1 \leqslant p < p+q-1 \leqslant n$ et sont obtenues en greffant une q-corolle au p-ième sommet de la $n-q+1$-corolle. L'ensemble $\mathrm{F}_{p,q}$ des sommets de cette face est l'ensemble des arbres (planaires enracinés) *binaires* qui sont obtenus en greffant un arbre planaire enraciné binaire

avec q feuilles à la feuille numérotée p dans un arbre (planaire enraciné binaire) avec $(n-q+1)$ feuilles.

On pourrait exprimer la même chose d'une manière encore différente. Un arbre binaire T appartient à $F_{p,q}$ si et seulement les feuilles $\{p,\dots,p+q-1\}$ sont les descendants d'un seul nœud.

Définissons une fonction linéaire $l_{p,q}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par

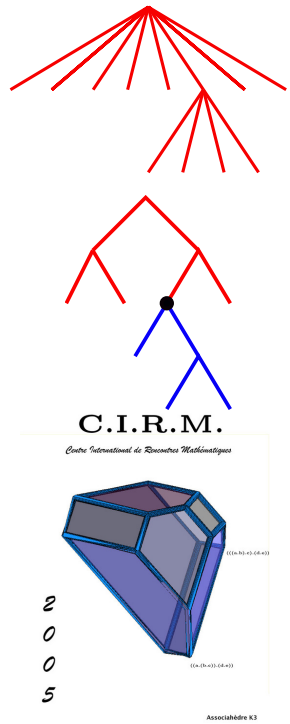
$$l_{p,q}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) = x_p + x_{p+1} + \cdots + x_{p+q-1}.$$

Évaluons $l_{p,q}(M(T))$ lorsque T est un sommet de la face $F_{p,q}$ de codimension 1. Nous savons que T est une greffe d'un arbre planaire enraciné binaire T_1 avec q feuilles sur la feuille numérotée p sur un arbre (planaire enraciné binaire) T_0 avec $n-q+1$ feuilles. Il est clair que la i-ième coordonnée de M(T) pour $p \leqslant i \leqslant p+q-1$ est la $(i-p)$-ième coordonnée de $M(T_1) \in \mathbb{R}^{q-1}$, de sorte que $l_{p,q}(T) = q(q-1)/2$ comme nous l'avons vu plus haut.

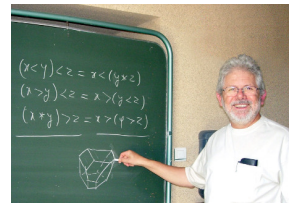
Supposons maintenant que T ne soit pas dans $F_{p,q}$, de sorte qu'il existe au moins une feuille i dans l'intervalle $\{p,\dots,p+q-1\}$ telle que $i \vee (i+1)$ ait un descendant à l'extérieur. En calculant $l_{p,q}(M(T))$, on obtient $q(q-1)/2$ si l'on ne compte que les descendants de $i \vee (i+1)$ qui se trouvent dans l'intervalle $\{p, p+q-1\}$. Tout descendant situé en dehors de l'intervalle $p, p+q-1$ donne une somme plus importante.

La démonstration du théorème est terminée. En effet pour chaque face $F_{p,q}$ de codimension 1 de K_n, la fonction affine $l_{p,q} - q(q-1)/2$ est nulle sur tous les M(T) pour tous les sommets T de $F_{p,q}$ et strictement positive sur tous les M(T) pour les sommets T de K_n qui ne sont pas dans $F_{p,q}$. En d'autres termes, nous avons trouvé des fonctions affines support qui montrent explicitement que l'enveloppe convexe des points M(T) a bien la combinatoire de notre polytope abstrait.

Jean-Louis Loday a expliqué la découverte de ce plongement dans un bel article en ligne [126]. Il a souvent utilisé Guillaume William Zinbiel comme pseudonyme, en raison de son admiration pour Leibniz.



Voici la carte de vœux du CIRM pour la saison 2005, qui représentant K5. Un tee-shirt a même été produit. ©

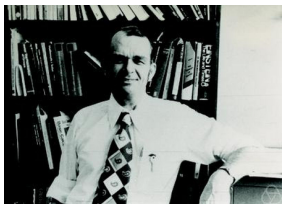


Jean-Louis Loday (1946-2012) donnant un cours sur l'associaèdre. ©

126. Loday (J.-L.), Comment j'ai trouvé l'associaèdre.

Cerisier, de la série *Cerisier et érable*. Peinture en couleur sur papier doré (1592). ©

Jim Stasheff et l'espace des lacets



Jim Stasheff. ©

Détour ! À proprement parler, ce chapitre n'est pas nécessaire pour la suite du livre. Il servira à motiver le concept d'opérade, qui n'est pas non plus nécessaire, mais qui éclaire un peu le tableau d'ensemble. C'est probablement la partie la plus ardue de notre promenade. ©

Il n'est pas nécessaire de rappeler l'importance des groupes en mathématiques en général et en topologie en particulier. L'un des problèmes est que ce concept est plutôt subtil dans la *théorie de l'homotopie*, comme on l'explique dans ce chapitre.

Rappelons que deux applications continues f_0 et $f_1 : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \to Y$ (appelée homotopie) telle que $F(x,0) = f_0(x)$ et $F(x,1) = f_1(x)$. Deux espaces topologiques X et Y sont de même *type d'homotopie*, s'il existe des *équivalences d'homotopie* $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$, c'est-à-dire des applications telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. La théorie de l'homotopie étudie la *catégorie d'homotopie* dont les objets sont des espaces topologiques et dont les flèches sont les classes d'homotopie des applications.

Pour prendre un exemple trivial, un intervalle fermé ne peut pas être *homéomorphe* à un groupe topologique puisque l'ensemble de ses deux points extrêmes est invariant sous tout homéomorphisme alors que tout groupe agit transitivement sur lui-même par des translations. Néanmoins, l'intervalle est contractile : il a le même type d'homotopie qu'un point, qui est un groupe (trivial). Dans sa thèse de 1961 (publiée en 1963 [127]), Jim Stasheff s'est penché sur la question de savoir quels espaces ont le type d'homotopie d'un groupe topologique.

127. Stasheff (J. D.), Homotopy associativity of H-spaces. I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, n° 108, 1963, p. 275-312.

Groupes topologiques, fibrés principaux

Dans cette section, je donne un très bref aperçu du rôle des groupes topologiques dans la théorie de l'homotopie. Mon seul objectif est d'introduire suffisamment de terminologie

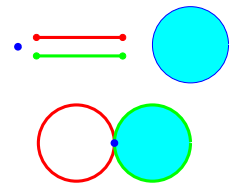
et de faits de base pour pouvoir expliquer la contribution de Stasheff. Une fois encore, il s'agit d'un vaste domaine et je dois me référer à d'excellents ouvrages, comme par exemple celui de... Milnor et Stasheff [128], qui traite de ce que l'on appelle les classes caractéristiques.

128. Milnor (J. W.) et Stasheff (J. D.), *Characteristic Classes*, Princeton University Press, 1974.

Soit G un *groupe topologique*, c'est-à-dire un groupe doté d'une topologie de telle sorte que les applications de composition et d'inversion soient continues. Un *fibré* G*-principal* est une *action libre* de G sur un espace X avec un « bon quotient » B. Chaque point de X devrait avoir un voisinage G-invariant homéomorphe à un produit $U \times G$ dans lequel la G-action est juste l'action par les translations dans le second facteur. Il est souvent plus commode de considérer le fibré comme la projection $p : X \to B$ sur l'espace B des G-orbites. Un G-fibré $p' : X' \to B$ est *isomorphe* à p s'il existe un homéomorphisme G-équivariant entre X et X′ induisant l'identité sur B. On dit que l'*espace total* X est *sur* la *base* B et que l'image inverse d'un point par p, qui est une G-orbite, est une *fibre*.

Traditionnellement, dans le contexte des fibrés principaux, les groupes agissent *à droite*.

À ce stade, nous devons être très prudents quant au type d'espaces topologiques qui seront utilisés. Ils doivent être séparés et ne pas être trop pathologiques. En général, on limite l'étude aux *CW-complexes*. Il n'est pas dans mon intention de donner une description précise de ces espaces. Je mentionnerai seulement qu'un tel espace X est par définition une réunion croissante de sous-espaces $\mathrm{Sq}_n(X)$, appelés leurs n-ièmes *squelettes*. Le $(n+1)$-ième squelette $\mathrm{Sq}_{n+1}(X)$ est obtenu à partir de $\mathrm{Sq}_n(X)$ en collant certaines boules de dimension B^{n+1} le long de certaines « applications d'attachement » $u : \partial B^{n+1} \to \mathrm{Sq}_n(X)$. Le livre de Hatcher [129] (librement accessible en ligne) est une excellente référence.



Prenons un point, deux intervalles et un disque. Collons les extrémités des intervalles sur le point. On obtient ainsi un huit. Collons le bord du disque à l'une des composantes du huit. Nous obtenons un exemple très simple de CW-complexe. Bien sûr, en général, les applications de recollement peuvent être beaucoup plus compliquées.

Les fibrés principaux sont des objets fondamentaux en topologie (différentielle). Par exemple, étant donné une variété lisse V de dimension m, considérons l'espace Fr(V) des paires (x, f), où x est un point de V et f est un *repère* en x, en d'autres termes une base de l'espace tangent $T_x(V)$. Il existe une action libre évidente du groupe linéaire $GL(m, \mathbb{R})$ sur Fr(V) et l'application p qui envoie $(x, f) \in \mathrm{Fr}(V)$ vers $x \in V$ est un fibré principal.

129. Hatcher (A.), *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

Étant donné un fibré G-principal $p : X \to B$ et une application

$i : B_1 \to B$, on peut considérer l'image réciproque de p pour produire un fibré principal $p_1 : X_1 \to B_1$. Formellement, X_1 est le sous-espace de $B_1 \times X$ constitué des couples (b_1, x) tels que $i(b_1) = p(x)$ et $p_1(b_1, x) = b_1$. Par exemple, si i est une inclusion, p_1 est la restriction à « ce qui est au-dessus de $i(B_1)$ dans X ».

Voici un exemple important. Soit $G_{k,n}$ l'espace des sous-espaces de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. C'est un espace compact appelé *grassmannienne*. Il existe un *fibré* $GL(k, \mathbb{R})$*-tautologique* sur $G_{k,n}$ dont la fibre sur un sous-espace donné est constituée des bases de ce sous-espace. Si une variété V de dimension k est immergée dans $\mathbb{R}^n$, alors la différentielle de cette immersion donne une application de V vers $G_{k,n}$. L'image réciproque du fibré $GL(k, \mathbb{R})$-tautologique sur $G_{k,n}$ est isomorphe au fibré des repères de V.

Voici deux faits importants concernant les fibrés principaux :

— tout fibré ayant une base contractile B est trivial(isable), c'est-à-dire isomorphe à $B \times G$; voir [130] pour l'histoire de ce théorème ;

— si i et $i' : B_1 \to B$ sont homotopes, alors les fibrés principaux images réciproques p_1 et p_1' de p par i et i' sont isomorphes.

Ces deux propriétés montrent que l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés G-principaux sur un espace B ne dépend que du type d'homotopie de B et définit un foncteur contravariant sur la catégorie d'homotopie.

130. Audin (M.), Publier sous l'Occupation. I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences, *Rev. Hist. Math.*, n° 15(1), 2009, p. 7-57.

Suites spectrales et orbites de l'action de groupe, par A. Fomenko. ©

Espaces classifiants

Un fibré G-principal $p_G : E(G) \to B(G)$ est appelé *universel* si tout fibré G-principal $p : X \to B$ est isomorphe à l'image réciproque de p_G par une application $i : B \to B(G)$ qui est unique, à homotopie près. Plus tard, nous esquisserons une démonstration de ce qui suit.

Théorème. *Pour tout groupe topologique* G*, il existe un fibré* universel $p_G : E(G) \to B(G)$.

En d'autres termes, il existe une bijection naturelle entre

— les classes d'isomorphisme des fibrés G-principaux sur un espace B ;

— les classes d'homotopie $[B, B(G)]$ des applications de B vers B(G).

Nous dirons que B(G) est *l'espace classifiant de* G.

Voici deux exemples importants. Supposons tout d'abord que G soit un *groupe discret*. Dans une telle situation, un fibré G-principal n'est rien d'autre qu'un revêtement galoisien avec le groupe de Galois G. Les revêtements d'un espace B sont décrits par des sous-groupes de son groupe fondamental. Dans ce cas, B(G) est un *espace d'Eilenberg-MacLane* $K(G,1)$: son groupe fondamental est G et son revêtement universel E(G) est contractile (de manière équivalente, tous les groupes d'homotopie supérieurs de $K(G,1)$ sont triviaux). Un revêtement galoisien de groupe G d'un espace B est équivalent à une classe d'homotopie des applications $B \to K(G,1)$.

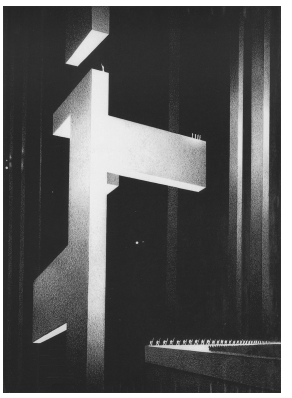
Pour la théorie des revêtements, voir le livre de Hatcher ou *Analysis Situs*.

Une remarque importante. Pour définir le groupe fondamental d'un espace X*, nous avons besoin d'un point de base* $x \in X$*. Une notation comme* $f : (X, x) \to (Y, y)$ *signifie que* $f(x) = y$*. Lorsque je discute de l'homotopie des applications, je devrais mentionner explicitement si cette homotopie préserve les points de base ou non.* Je devrais... mais je ne le ferai pas ! Cela impliquerait des phrases longues et techniques et, comme le lecteur l'a déjà remarqué, ce livre n'est pas une encyclopédie complète. J'espère que mon lecteur me pardonnera ce manque de précision.

Comme deuxième exemple, considérons le groupe U(1) des nombres complexes de module 1. Pour tout n, il existe une action de U(1) sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2n-1}$ dans $\mathbb{C}^n$. L'élément ω agit sur $(z_1, \ldots, z_n)$ pour produire $(\omega z_1, \ldots, \omega z_n)$. Ceci définit un fibré U(1)-principal

$$p_n : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{C}P^n$$

sur l'espace projectif complexe. Toutes ces sphères et tous ces espaces projectifs sont naturellement emboîtés, en plongeant $(z_1, \ldots, z_n)$ vers $(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$, de sorte que nous pouvons définir un fibré U(1)-principal dont l'espace total est la sphère de dimension infinie et dont la base est l'espace projectif de



Polyèdres et chaînes simpliciales, 1973, par A. Fomenko. ©

dimension infinie

$$p_\infty : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty.$$

Nous verrons qu'il s'agit du fibré universel pour $G = U(1)$. Le point clé est le suivant.

Proposition. *Un G-fibré est universel si et seulement si son espace total est contractile.*

La démonstration de ce fait fondamental est un exemple typique de *théorie de l'obstruction*. Commençons par un G-fibré $p_G : E(G) \to B(G)$ tel que $E(G)$ soit contractile et montrons qu'il est universel. Considérons un autre G-fibré $p : E \to B$ et montrons qu'il est l'image réciproque de p_G par une application $i : B \to B(G)$. Nous construisons i sur les squelettes de B (qui est, comme toujours, un CW-complexe), par récurrence sur leurs dimensions. À chaque étape, une application continue doit être prolongée et la contractilité de $E(G)$ est précisément ce qui est nécessaire pour cette construction. Voir le livre de Milnor et Stasheff pour les détails et pour la démonstration de la réciproque.

Dans l'exemple de $U(1)$, l'espace classifiant $B(U(1))$ est $\mathbb{C}P^\infty$ puisque la sphère de dimension infinie est en effet contractile.

Vérifiez tout vous-même, sans trop ouvrir les livres recommandés ! Pourquoi la sphère S^∞ est-elle contractile ?

Espaces cellulaires, par A. Fomenko. ©

La construction du joint de Milnor

La construction de $B(G)$ par Milnor est belle et facile [131]. Tout groupe topologique G agit librement sur lui-même mais, bien sûr, le groupe n'est pas forcément contractile. Par conséquent, nous devons forcer la contractilité en préservant une action de groupe libre. Soit $E(G)$ le *simplexe sur* G. Un élément de $E(G)$ est par définition une combinaison barycentrique formelle finie d'éléments de G, c'est-à-dire une somme formelle $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k$, où $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$. Cet espace est convexe, donc contractile, et muni d'une action libre de G. La projection de $E(G)$ sur son quotient $B(G)$ est donc un espace classifiant. Et voilà ! Mais soyons plus précis dans la définition de $E(G)$. Commençons par la réunion disjointe des produits $G^{n+1} \times \Delta_n$, où

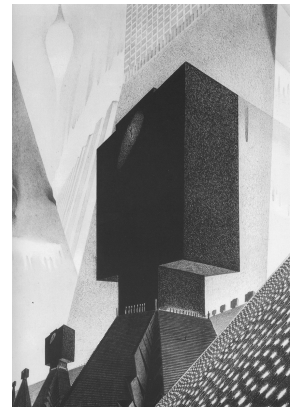
$$\Delta_n = \left\{ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

131. Milnor (J.), Construction of universal bundles, II, *Ann. of Math. (2)*, n° 63, 1956, p. 430-436.

est le simplexe standard. Ensuite, introduisons une relation d'équivalence « évidente » engendrée par

$$((g_0,\dots,g_i,g_{i+1},g_{i+2},\dots,g_n),(\lambda_0,\dots,\lambda_i,0,\lambda_{i+2},\dots,\lambda_n)) \in G^{n+1}\times\Delta_n$$
$$\equiv ((g_0,\dots,g_i,g_{i+2},\dots,g_n),(\lambda_0,\dots,\lambda_i,\lambda_{i+2},\dots,\lambda_n)) \in G^n\times\Delta_{n-1}.$$

Définissons E(G) comme l'espace quotient. C'est la *construction du joint de Milnor*. Le nom vient du fait que des « connexions virtuelles » ont été créées qui joignent des points dans G.



Complexes simpliciaux, 1973, par A. Fomenko. ©

Les lacets et leur composition

Étant donné un espace B avec un point de base $\star \in B$, l'*espace des lacets avec base* $\Omega(B,\star)$ est l'espace des... lacets avec une base ☺, c'est-à-dire des applications continues $\gamma : [0,1] \to B$ telles que $\gamma(0) = \gamma(1) = \star$, muni de la topologie compacte-ouverte. Étant donné deux lacets avec base γ_1 et γ_2, ils peuvent être *concaténés*. Une définition possible consiste à définir $\gamma_1 \bullet \gamma_2(t)$ comme $\gamma_1(2t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ et $\gamma_2(2t-1)$ pour $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Cette application composée

$$\Omega(B,\star)\times\Omega(B,\star) \to \Omega(B,\star)$$

n'est certainement pas associative. Dans la composition $(\gamma_1 \bullet \gamma_2) \bullet \gamma_3$ nous suivons γ_1 pour $t \in [0,1/4]$, puis γ_2 pour $t \in [1/4,1/2]$ et enfin γ_3 pour $t \in [1/2,1]$. Ce n'est pas le même chemin que $\gamma_1 \bullet (\gamma_2 \bullet \gamma_3)$, même si ces deux lacets sont homotopes.

En modifiant quelque peu les définitions, nous obtenons un espace de lacets qui est *strictement associatif* et pas seulement à homotopie près. Utilisons ce que l'on appelle les *lacets de Moore*. Un pareil lacet consiste en un certain nombre $l \geqslant 0$ (considéré comme une certaine longueur) et une application continue $\gamma : \mathbb{R}_+ \to B$ telle que $\gamma(0) = \star$ et $\gamma(t) = \star$ pour $t \geqslant l$. Il existe une topologie naturelle sur l'espace de ces lacets fantaisistes, notée $\Omega_M(B,\star)$, qui a le même type d'homotopie que $\Omega(B,\star)$. Étant donné (l_1,γ_1) et (l_2,γ_2), leur composition est définie comme $(l_1+l_2,\tilde{\gamma})$, où $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(t)$ pour $t \leqslant l_1$ et $\gamma_2(t-l_1)$ pour $t \geqslant l_1$. Ceci est clairement associatif.

Il existe une autre astuce moins connue pour obtenir un autre espace, toujours de même type d'homotopie que $\Omega(B,\star)$, qui est

maintenant un *groupe topologique*. Ceci est dû à Milnor (encore lui !) et décrit dans un livre [132] de Stasheff. Nous faisons une hypothèse très modeste : B est la réalisation géométrique d'un complexe simplicial avec un nombre dénombrable de faces. Définissons un groupe G(B) de la manière suivante. Commençons par la réunion disjointe des B^n pour $n \geqslant 0$. Considérons un élément de B^n comme un chemin discret $b_1, \dots, b_n$ avec n étapes, où un point, au lieu de suivre un chemin continu, saute d'un point à l'autre. Considérons la relation d'équivalence où

$$(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n) \equiv (b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

si $b_i = b_{i+1}$ ou $b_{i-1} = b_i$.

Dans l'espace quotient, définissons G(B) comme le sous-espace des classes qui ont un représentant $(b_1, \dots, b_n)$ tel que $b_1 = b_n = \star$ et tel que deux éléments consécutifs quelconques b_i et b_{i+1} soient dans le même simplexe (de sorte qu'on puisse mentalement les relier par un segment). La structure de groupe est juste une concaténation. C'est un exercice simple de vérifier qu'il s'agit bien d'un groupe topologique avec le même type d'homotopie que l'espace des lacets $\Omega(B, \star)$.

Cette construction n'est pas si compliquée, mais il faut garder à l'esprit que le groupe produit est plutôt énorme même si B est très simple. Ce groupe est très rarement utilisé « en pratique ».

Quoi qu'il en soit, nous devrions nous rappeler qu'un espace $(B, \star)$ définit un utile $\Omega(B, \star)$ muni d'une certaine application de concaténation, qui n'est pas associative mais qui peut être transformée en une loi associative ou même en un groupe topologique au prix de quelques contorsions.

Une dernière remarque dans cette section :

Proposition. *Tout groupe topologique* G *a le même type d'homotopie que l'espace des lacets de son espace classifiant.*

Je ne cite que les mots-clés de la démonstration afin d'illustrer le type de gymnastique requis dans cette partie de la topologie. Si (X, x) est un espace ponctué, sa *suspension* $S(X, x)$ s'obtient à partir de $X \times [0,1]$ en écrasant $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ et $\{x\} \times [0,1]$ en un seul point. Une application de $S(X, x)$ vers un autre espace

132. Stasheff (J.), H-*Spaces from a Homotopy Point of View*, Springer, 1970.

Un *complexe simplicial* est un concept combinatoire. Il consiste en un ensemble S dont les éléments sont appelés *sommets* et en une famille de sous-ensembles finis de S dont les éléments sont appelés *faces*. Le seul axiome est qu'un sous-ensemble non vide d'une face est une face. Étant donné un complexe simplicial, il existe un espace topologique associé appelé *réalisation géométrique*. Il consiste en des fonctions $t : S \to [0,1]$ telles que $\sum_{x \in S} t(x) = 1$ et telles que $\{x | t(x) \neq 0\}$ soit une face.

Un espace fibré, par A. Fomenko. ©

(Y, y) est équivalente à une application de (X, x) vers l'espace des lacets $\Omega(Y, y)$. Les éléments suivants sont équivalents :

— une classe d'homotopie des applications de (X, x) vers $\Omega(B(G), e)$ (e est l'unité dans G) ;

— une classe d'homotopie des applications de $S(X, x)$ vers $(B(G), e)$;

— une classe d'isomorphisme d'un G-fibré sur $X \times [0, 1]$ trivialisé sur $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ et $\{x\} \times [0, 1]$;

— un chemin de G-fibrés p_t sur X et des isomorphismes entre p_0 et p_1 avec le fibré trivial $X \times G$.

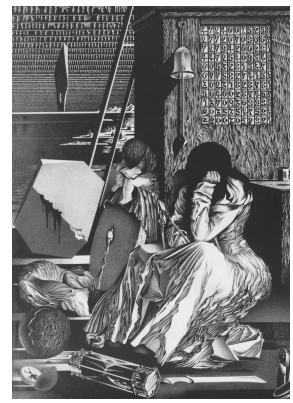
Remarquons qu'étant donné un fibré trivialisé $X \times G \to X$, les autres trivialisations sont simplement données par des applications $X \to G$. En effet, un isomorphisme de $X \times G \to X$ sur lui-même envoie (b, g) vers $(b, u(g)g)$ pour un $u : B \to G$. Par conséquent, les classes d'homotopie des applications de (X, x) dans $\Omega(B(G), e)$ sont en bijection canonique avec les classes d'homotopie des applications de (X, x) dans (G, e). ⊡

Notons que le fait que les translations à droite et à gauche commutent n'est rien d'autre que l'associativité.

Le théorème de Stasheff sur les H*-espaces*

Un espace $(X, \star)$ est appelé H-*espace* s'il est muni d'une « multiplication » $m_2 : X \times X \to X$ telle que $m_2(x, \star) = m_2(\star, x) = x$. La question étudiée par Stasheff s'appelle le *problème de reconnaissance*. Est-il possible de décider à partir de X et m_2 s'il existe un espace Y et une *équivalence d'homotopie* de (X, x) vers l'espace des lacets $\Omega(Y, y)$ qui transforme m_2 en la concaténation de lacets dans $\Omega(Y, y)$? Ceci est équivalent à la reconnaissance de groupes topologiques parmi les H-espaces, à homotopie près.

H est en l'honneur de Heinz **H**opf et non de l'**h**omotopie.



Anti-Dürer, tiré du cycle *Dialogue avec des auteurs du* XVI*e siècle*, 1975, par A. Fomenko. ©

Il s'agit en effet d'une question fondamentale : *quel est le bon concept de groupe dans la catégorie d'homotopie ?* Comme le lecteur l'a certainement deviné, la réponse donnée par Stasheff fera intervenir l'associaèdre introduit dans le chapitre précédent.

Supposons que (X, x) ait effectivement le type d'homotopie d'un espace de lacets $\Omega(Y, y)$ et que m_2 soit homotope à la concaténation. Il est commode d'utiliser l'espace des lacets de Moore

$\Omega_M(Y, y)$ avec sa *concaténation associative* μ. Les deux applications

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) \in X^3 &\mapsto m_2(m_2(x_1, x_2), x_3) \in X \\ &\mapsto m_2(x_1, m_2(x_2, x_3)) \in X\end{aligned}$$

devraient être homotopes puisque μ est associatif. Cette condition ne se vérifie pas nécessairement. Si c'est le cas, le H-espace est associatif *à homotopie près* et nous disons que le H-*espace* (X, m_2) *est un* A_1-*espace*. Dans ce cas, l'homotopie est une application de $X^3 \times [0,1]$ vers X et le facteur $[0,1]$ doit être considéré comme l'associaèdre K_3.

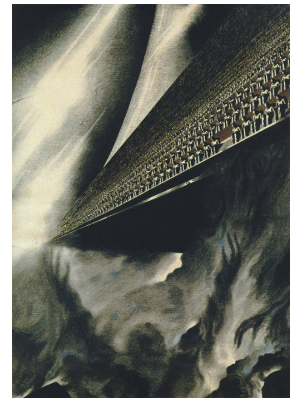
Quatre termes définissent cinq applications $X^4 \to X$ associées aux cinq arbres planaires enracinés binaires à quatre feuilles. Ces cinq arbres peuvent être vus comme les sommets d'un pentagone K_4. Dans l'étape précédente, nous avons considéré cinq applications $[0,1] \times X^4 \to X$. Ces applications sont égales sur leurs bords et définissent une application $\partial K_4 \times X^4 \to X$. Si X a le type d'homotopie d'un espace de lacets $\Omega_M(Y)$ avec une multiplication strictement associative μ, cette application doit se prolonger au pentagone complet $K_4 \times X^4 \to X$. Si c'est le cas, on dit que X est un A_2-*espace.*

Il devrait être clair que cette image est valable en toute dimension. Nous pouvons enfin énoncer le théorème de Stasheff :

Théorème. *Un* H-*espace* $m_2 : X \times X \to X$ *est homotopiquement équivalent à un espace de lacets si et seulement si c'est un* A_∞-*espace, c'est-à-dire s'il existe des applications cohérentes* $m_n : K_n \times X^n \to X$ *compatibles avec les faces de l'associaèdre* K_n *(*$n \geqslant 1$*).*

La condition nécessaire est maintenant claire. La partie la plus intéressante du théorème est bien sûr la condition suffisante, que je *ne* démontrerai *pas* dans la section suivante.

Commençons par un A_∞-espace X, avec des applications compatibles $m_n : K_n \times X^n \to X$. Notre but est de produire un espace Y dont l'espace des lacets ait le même type d'homotopie que X. Nous savons que $\Omega(Y, y)$ a le même type d'homotopie qu'un certain groupe topologique G, qui à son tour a le type d'homotopie de $\Omega(B(G), \star)$. Il est donc tentant de choisir $Y = B(G)$, mais nous ne connaissons pas G.



La méthode de trivialisation des espaces en topologie homotopique, 1968, par A. Fomenko. ©

Nous ne connaissons que la collection d'applications m_n : $K_n \times X^n \to X$ qui sont une sorte de substitut à une structure de groupe. Notre stratégie est donc claire. Nous devons adapter la construction du joint de Milnor de $B(G)$ à ces A_∞-structures plus générales. Ce projet a été réalisé par Stasheff.

Au lieu de partir de la réunion disjointe de $G^{n+1} \times \Delta_n$ et d'identifier les points selon une relation d'équivalence « évidente », partons de la réunion disjointe de $K_n \times X^n$ et définissons une relation d'équivalence « évidente » dans cette réunion disjointe. On obtient ainsi un espace $B(X)$ qui est l'*espace classifiant* du A_∞-espace X.

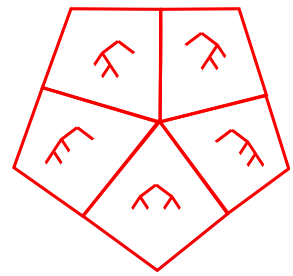
La « seule chose qu'il nous reste à montrer » est que, comme prévu, l'espace des lacets de $B(X)$ est une solution de notre problème : c'est-à-dire un « *delooping* » de X. Ce n'est pas facile et Stasheff l'a démontré avec quelques hypothèses supplémentaires (mineures) sur la topologie de X.

Les cerisiers

Afin de mieux comprendre ce $B(X)$, je vais décrire brièvement les *cerisiers* introduits par Boardman et Vogt [133]. Considérons un arbre planaire enraciné binaire avec n feuilles. Si les $n-2$ arêtes internes sont munies d'une certaine longueur dans $[0,1]$, on obtient un arbre *métrique*. Cet espace d'arbres métriques définit un cube $[0,1]^{n-2}$ pour chaque arbre binaire.

133. Boardman (J. M.) et Vogt (R. M.), *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Springer, 1973.

Si une ou plusieurs arêtes internes ont une longueur nulle, ces arêtes peuvent être réduites et le résultat est un arbre planaire enraciné, qui n'est plus binaire, mais dont les arêtes internes ont toujours une longueur. Ceci produit des identifications le long du bord de ces cubes. L'ensemble de ces arbres métriques définit une décomposition cubique de K_n. Par conséquent, K_n peut être considéré comme un espace d'arbres métriques. Par exemple, le pentagone est décomposé en cinq carrés. Cette présentation de K_n comme un espace d'arbres métriques nous permet de définir des *applications de greffage* $\iota_{k_1,\dots,k_n}$:



$$K_n \times \left(K_{k_1} \times K_{k_2} \times \cdots \times K_{k_n}\right) \to K_{k_1+\cdots+k_n}.$$

Il suffit d'attacher des arbres métriques aux feuilles d'un arbre

métrique.

Nous voulons maintenant nous représenter $K_n \times X^n$. Imaginons simplement que chaque feuille de nos arbres métriques porte un élément de X, sous la forme d'une cerise. Il s'agit d'un *cerisier* : un arbre métrique dont les feuilles portent des cerises.

L'espace classifiant B(X) peut être décrit en utilisant cette terminologie. Supposons qu'un cerisier T contienne une arête α *entièrement développée* de longueur 1. En coupant le long de α, l'arbre T est décomposé en deux arbres métriques. Désignons par T_1 la partie constituée des descendants de l'extrémité α : c'est un cerisier avec $k \leqslant n$ feuilles. L'autre arbre, T_0, contenant la racine de T, n'est pas tout à fait un cerisier puisque la feuille nouvellement créée, à l'origine de α, n'est pas munie d'une cerise. Nous pouvons maintenant évaluer m_k sur le cerisier T_1 et déposer le résultat comme une nouvelle cerise sur la feuille de T_0 qui attendait sa cerise. On obtient ainsi un nouveau cerisier. Par définition, l'espace classifiant B(X) est le quotient de l'espace des cerisiers par cette opération qui consiste à couper les arêtes complètement développées et à appliquer m_k comme expliqué.

Je *ne* vais *pas* montrer que l'espace des lacets de B(X) a le type d'homotopie de X. Je dois admettre que les références que j'ai données contiennent des démonstrations qui ne sont pas faciles à lire ☹. La référence la plus lisible que je connaisse est [134].

134. Hoefel (E.), Livernet (M.) et Stasheff (J.), A_∞-actions and recognition of relative loop spaces, 2013.

©

Un arbre tressé,
illustrant une opérade ?

Opérades

Commençons ce chapitre par une citation de Peter May [135] :

> « Le mot « opérade » est un mot que j'ai inventé moi-même, en passant une semaine à ne penser à rien d'autre. Outre le fait qu'il sonne bien, ce nom est censé rappeler à la fois les opérations et les monades. [...] Ce que je n'avais pas prévu, c'est la souplesse de cette notion, le nombre de contextes mathématiques essentiellement différents dans lesquels elle jouerait un rôle naturel, le nombre de façons différentes de l'exploiter sur le plan philosophique. »

135. May (J. P.), *Operads, algebras and modules*, dans *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford/Luminy, 1995)*, American Mathematical Society, 1997, p. 15-31.

D'après Wikipédia, une autre raison pour ce nom serait que la mère de May était chanteuse d'opéra. Comme presque tous les concepts que nous avons rencontrés jusqu'à présent, les opérades « existaient » bien avant leur naissance [136], ou plus exactement avant qu'elles ne soient baptisées. La définition de May vise à englober de nombreux types d'*opérations*, dont la plupart rappellent la greffe d'arbres que nous avons déjà rencontrée.

136. Stasheff (J.), *The pre-history of operads*, dans *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford/Luminy, 1995)*, American Mathematical Society, 1997, p. 9-14.

Un groupe est bien plus qu'un ensemble muni d'une application de multiplication qui vérifie certains axiomes. Les groupes n'existent qu'à travers leurs représentations en tant qu'automorphismes de « quelque chose ». De la même manière, les opérades n'existent qu'à travers leurs représentations et nous ne passerons pas trop de temps sur les définitions abstraites.

Dans son exposé *Sur l'éducation mathématique*, V. Arnold critique vivement l'approche axiomatique de la théorie des groupes, telle qu'elle est généralement enseignée en France. Je suis entièrement d'accord avec lui.

Une opérade se compose

— d'ensembles $\mathscr{O}_n$ pour $n \geqslant 0$ (considérés comme des opérations n-aires) ;

— d'un élément 1 dans $\mathscr{O}_1$ appelé unité ;

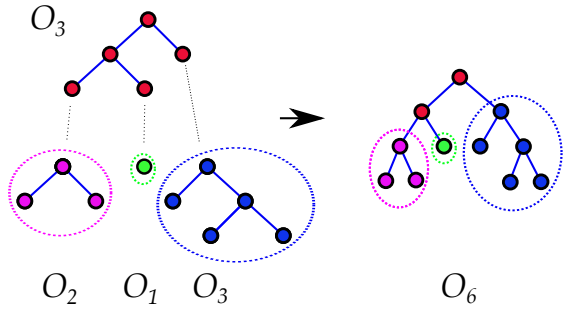
— pour tout $n, k_1, \ldots, k_n$, d'une *opération d'opérade*, c'est-à-dire d'une application

$$\mathscr{O}_n \times \left(\mathscr{O}_{k_1} \times \mathscr{O}_{k_2} \times \cdots \times \mathscr{O}_{k_n}\right) \to \mathscr{O}_{k_1+\cdots+k_n}$$

qui vérifie... certains axiomes. Je ne veux pas écrire les formules qui expriment ces axiomes car je serais moi-même incapable de lire les formules que j'aurais écrites. Je préfère donner d'abord un exemple (que le lecteur a probablement déjà deviné) avant de décrire les axiomes avec des mots.

Les informaticiens nous ont appris que certaines bijections calculables $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont faciles à évaluer et ont des inverses très compliqués. Il est généralement facile d'écrire une formule, mais la comprendre peut s'avérer terriblement compliqué.

L'exemple est celui des arbres planaires enracinés binaires. Notons $\mathscr{O}_n$ l'ensemble des arbres planaires enracinés binaires à n feuilles et notons 1 l'arbre dont une feuille est en même temps la racine. L'opération de greffage que nous avons utilisée à plusieurs reprises définit l'exemple le plus simple d'une opérade.



Quels sont les axiomes d'une opérade générale ? Greffer 1 sur un arbre ne change pas l'arbre. Si l'on greffe B sur un arbre A et que l'on greffe ensuite C sur le résultat, on pourrait tout aussi bien greffer C sur B et greffer le résultat sur A. Les axiomes d'opérade ne sont rien d'autre que cela, en remplaçant le mot *greffage* par l'opération d'opérade. Une condition sur l'unité et une sorte d'associativité.

Bien entendu, nous pourrions également greffer des arbres planaires enracinés qui ne sont pas nécessairement binaires. Par exemple, nous pourrions utiliser des *arbres élagués*, c'est-à-dire des arbres planaires enracinés tels que chaque nœud intérieur a au moins deux fils. On obtient ainsi l'*opérade d'Hipparque-Schröder-Tamari-Stasheff*.

Pour une introduction de deux pages aux opérades, voir [137]. Pour une présentation de 27 pages, voir [138]. Pour un ouvrage plus récent de 634 pages sur le même sujet, voir [139].

Voici un autre exemple d'opérade naïve. Choisissons un ensemble E et définissons $\mathscr{O}_n$ comme l'ensemble des applications $E^n \to E$. Dans cet exemple, 1 est l'identité et les opérations de l'opérade sont simplement données par *substitution*. Si nous avons une application $f : E^n \to E$ et n applications $f_i : E^{k_i} \to E$, il suffit de remplacer x_i par f_i dans $f(x_1, \cdots, x_n)$ pour obtenir une application $E^{k_1+\cdots+k_n} \to E$. Ceci satisfait les axiomes que nous n'avons pas écrits. Cette opérade est notée End(E).

Une *algèbre* sur une certaine opérade $\mathscr{O}$ (également appelée représentation) est un ensemble E et une certaine application d'opérade de $\mathscr{O}$ dans End(E). En d'autres termes, chaque élément de $\mathscr{O}_n$ est incarné par une opération n-aire $E^n \to E$ d'une *manière compatible*.

Nous pourrions travailler dans de nombreuses catégories différentes. Au lieu d'ensembles, nous pourrions utiliser des espaces topologiques, des types d'homotopie, des espaces vectoriels, etc.

Je vais maintenant décrire des exemples d'opérades plus intéressants. D'autres exemples intéressants seront présentés dans les chapitres suivants.

137. Stasheff (J.), What is... an operad?, *Notices Amer. Math. Soc.*, n° 51(6), 2004, p. 630-631.

138. Chapoton (F.), Operads and algebraic combinatorics of trees, *Sém. Lothar. Combin.*, n° 58, 2008, article B58c.

139. Loday (J.-L.) et Vallette (B.), *Algebraic Operads*, Springer, 2012.

Permutations

Rappelons qu'au début de ce livre, nous avons étudié certaines questions combinatoires concernant la *reconnaissance de formes*. Cela s'accorde très bien avec l'opérade suivant.

$\mathscr{O}_n$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. J'ai écrit *ensemble* et non *groupe* car nous n'allons pas composer ces permutations. Nous considérons plutôt une permutation comme un ordre total sur $\{1, \ldots, n\}$.

Supposons que nous ayons des ordres totaux $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$ et $\{1, \ldots, k_1\}, \ldots, \{1, \ldots, k_n\}$. Écrivons $\{1, \ldots, k_1 + \cdots + k_n\}$ comme une réunion disjointe de n intervalles consécutifs de tailles $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Ordonnons ces intervalles selon σ et à l'intérieur du i-ième intervalle, ordonnons les éléments selon

l'ordre σ_i. On obtient ainsi un ordre total naturel sur $\{1, \dots, k_1 + \cdots + k_n\}$. Il est clair que ces *opérations de greffage* sur les ordres satisfont aux axiomes d'une opérade.

Dans le chapitre traitant des permutations séparables, nous avons remarqué que tout arbre planaire enraciné élagué définit une permutation des feuilles. En d'autres termes, cela définit une application d'opérade de l'opérade d'Hipparque-Schröder-Tamari-Stasheff vers l'opérade des permutations. Nous avons également démontré qu'il s'agit d'un plongement puisque l'arbre peut être reconstruit à partir de la permutation.

L'opérade libre : Hipparque-Schröder à nouveau

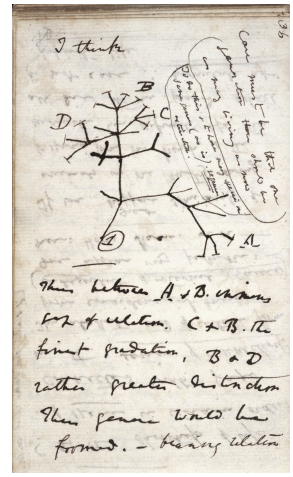
Considérons une suite d'ensembles $(\mathrm{E}_n)_{n\geqslant 1}$ et définissons *l'opérade libre engendrée* par les E_n. Nous devons créer des ensembles $\mathscr{O}_n$ dont les éléments sont produits sous les opérations de l'opérade à partir d'éléments des E_n. Puisque nous voulons une *opérade libre*, tous ces nouveaux éléments doivent être supposés différents, à moins qu'une certaine utilisation des axiomes n'implique qu'ils soient égaux. Il n'est pas difficile de construire cette opérade libre.

Je suis conscient du fait qu'il ne s'agit pas d'une définition précise, mais je suis réticent à définir cela en utilisant des objets initiaux dans des catégories.

Un élément de $\mathscr{O}_n$ est un arbre planaire enraciné avec n feuilles, tel que chaque nœud avec i fils soit muni d'une étiquette appartenant à E_i. Les opérations d'opérade sont à nouveau définies par greffage.

À titre d'exemple, considérons le cas où tous les E_n sont vides à l'exception de E_2 qui contient un élément. Alors l'opérade libre sur un élément « de degré 2 » est l'opérade des arbres enracinés binaires. Une algèbre sur cette opérade est juste un ensemble avec une opération binaire.

Autre exemple, considérons le cas où chaque E_n contient un seul élément pour $n \geqslant 2$. Nous obtenons des arbres planaires enracinés, pas nécessairement binaires, ce qui nous ramène au parenthésage d'Hipparque-Schröder. Une algèbre sur cette opérade est juste un ensemble avec une opération n-aire pour chaque n.



Le premier diagramme d'un arbre évolutif dessiné par Charles Darwin en 1837, tiré de l'un de ses carnets. ©

Symétrique et non symétrique

Au sens strict, nous avons traité jusqu'à présent des opérades dites *non symétriques*. Dans de nombreux cas, il existe des actions des groupes symétriques Σ_n sur $\mathscr{O}_n$ qui sont compatibles avec les opérations d'opérade $\mathscr{O}_n \times \left(\mathscr{O}_{k_1} \times \mathscr{O}_{k_2} \times \cdots \times \mathscr{O}_{k_n}\right) \to \mathscr{O}_{k_1+\cdots+k_n}$. Dans ce cas, l'opérade est dite *symétrique*. Souvent, l'adjectif « symétrique » est omis. J'invite le lecteur à déterminer lesquels des exemples précédents sont symétriques.

Trouvez la bonne définition !

Des petits cubes et Stasheff à nouveau

Rappelons l'interprétation des associaèdres K_n comme des espaces d'arbres métriques, où chaque arête intérieure a une certaine longueur dans $[0,1]$. En greffant ces arbres, on obtient des applications $\mathrm{K}_n \times \left(\mathrm{K}_{k_1} \times \mathrm{K}_{k_2} \times \cdots \times \mathrm{K}_{k_n}\right) \to \mathrm{K}_{k_1+\cdots+k_n}$. En d'autres termes, la vraie nature de la suite de polytopes K_n est celle d'une opérade : *l'opérade de Stasheff*. Il s'agit d'une opérade topologique puisque $\mathscr{O}_n$ est maintenant considéré comme un espace topologique.

Une algèbre sur K_n est par définition une famille d'applications de $\mathrm{K}_n \times \mathrm{X}^n$ dans X qui définit un homomorphisme d'opérade. Il est clair que toutes les définitions ont été préparées de telle sorte que la condition d'*homorphisme d'opérade* coïncide avec la définition d'un A_∞-espace. Le théorème de Stasheff peut donc être reformulé ainsi :

Théorème. *Un* H*-espace* $m_2 : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *est homotopiquement équivalent à un espace de lacets si et seulement s'il se prolonge comme une algèbre sur l'opérade de Stasheff.*

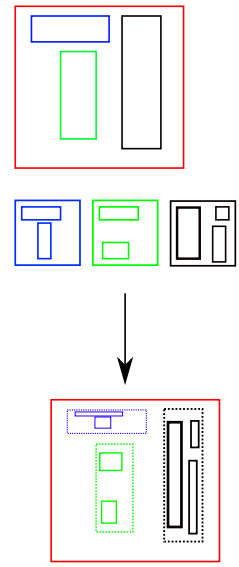
Boardman et Vogt ont transformé cet énoncé d'une autre manière et ont introduit l'*opérade des petits cubes*. Choisissons une dimension $d \geqslant 1$ et définissons une opérade topologique Cub_d de la manière suivante :

— $\mathrm{Cub}_d(n)$ est l'espace des n-uplets $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de plongements $[0,1]^d \to [0,1]^d$ tels que les intérieurs des images soient disjoints ; les c_i doivent être affines et plus précisément de la forme $c_i(x_1, \ldots, x_d) = (\alpha_{1i}x_1 + \beta_{1i}, \ldots, \alpha_{di}x_d + \beta_{di})$ avec $\alpha_{ij} > 0$;

— les opérations d'opérade

$$\mathrm{Cub}_d(n) \times (\mathrm{Cub}_d(k_1) \times \cdots \times \mathrm{Cub}_d(k_n)) \to \mathrm{Cub}_d(k_1 + \cdots + k_n)$$

sont « évidentes » ; il suffit d'insérer les cubes comme sur la figure.



Si $(\mathrm{Y}, \star)$ est un espace topologique (en fait, comme d'habitude, un CW-complexe), l'espace des d-lacets $\Omega^d(\mathrm{Y}, \star)$ est l'espace des applications continues (pointées) de la sphère de dimension d dans Y. On peut aussi définir $\Omega^d(\mathrm{Y}, \star)$ comme l'espace des applications $[0,1]^d \to \mathrm{Y}$ qui envoient le bord du cube au point de base.

L'espace des d-lacets de Y apparaît naturellement comme une algèbre sur l'opérade des petits cubes. Les opérations de l'opérade

$$\mathrm{Cub}_d(n) \times \Omega^d(\mathrm{Y}, \star)^n \to \Omega^d(\mathrm{Y}, \star)$$

sont « évidentes ». Étant donné n petits cubes $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ et n éléments $\gamma_i : [0,1]^d \to \mathrm{Y}$ de $\Omega^d(\mathrm{Y}, \star)$, nous définissons une application de $[0,1]^d$ dans Y. À l'intérieur de l'image de c_i, on utilise la composition de c_i et de γ_i et à l'extérieur on utilise la fonction constante qui envoie tout au point de base.

Dans son compte rendu du livre de Markl, Shinder et Stasheff sur les opérades [140], John Baez explique l'une des motivations des opérades :

> « La plupart des théoriciens de l'homotopie vendraient volontiers leur âme pour pouvoir calculer les groupes d'homotopie d'un espace arbitraire. »

En effet, Boardman, Vogt [141] et May [142] ont généralisé le théorème de reconnaissance de Stasheff :

Théorème. *Si un espace connexe* X *est une algèbre sur l'opérade des petits cubes* Cub_d*, alors il est homotopiquement équivalent à l'espace des d-lacets* $\Omega^d(\mathrm{Y})$ *d'un espace* Y*.*

Plus d'opérades

Je crois que mon jeune lecteur a compris que les opérades interviennent presque partout en mathématiques, au niveau des

140. Markl (M.), Shnider (S.) et Stasheff (J.), *Operads in Algebra, Topology and Physics*, American Mathematical Society, 2002.

141. Boardman (J. M.) et Vogt (R. M.), Homotopy-everything H-spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, n° 74, 1968, p. 1117-1122.

142. May (J. P.), *The Geometry of Iterated Loop Spaces*, Springer, 1972.

fondements. Peut-être que cette grande généralité rend la théorie un peu trop abstraite ? Certains mathématiciens se plaignent que le groupe libre est trop abstrait pour être un groupe et que ce n'est qu'un tas de mots ! Pour terminer ce chapitre conceptuel, voici quelques exemples supplémentaires. Entrons une formule dans un programme mathématique, par exemple la formule suivante dans Mathematica :

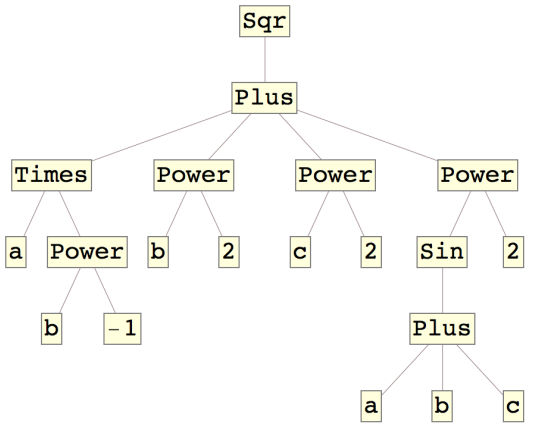
```
Sqrt[Sin[a + b + c]^2 + b^2 + c^2 + a/b]
```

$$\sqrt{\frac{a}{b} + b^2 + c^2 + \text{Sin}[a + b + c]^2}$$

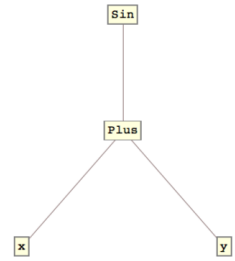
Si nous voulons savoir comment notre ordinateur « comprend » cette formule, tapons simplement ceci :

```
TreeForm[Sqrt[Sin[a + b + c]^2 + b^2 + c^2 + a/b]]
```

Nous obtenons… un arbre.



Les nœuds sont étiquetés par des opérateurs, qui peuvent être n-aires pour chaque n. Les feuilles sont des « atomes ». Donc le langage d'un logiciel comme Mathematica est en fait une certaine opérade. Mais cette opérade n'est pas libre. Par exemple, le *TreeForm* de $\sin(x+y)$ est l'arbre dans la marge.

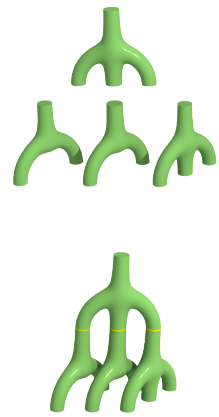


Si je substitue a à x et $\pi - a$ à y et si je demande à nouveau l'arbre correspondant

```
TreeForm[Sin[x + y] /. x → a /. y → Pi - a]
```

j'obtiens l'arbre trivial avec un seul nœud étiqueté avec 0. Mathematica « sait » que $\sin(\pi) = 0$ de sorte que l'arbre s'est effondré. En d'autres termes, l'opérade Mathematica est définie par *générateurs et relations*, qui sont intégrés. L'utilisateur est autorisé à ajouter des règles locales et travaille dans l'opérade quotient correspondante.

Les surfaces de Riemann fournissent une autre bonne source d'opérades. Supposons que nous ayons deux surfaces de Riemann Σ_1 et Σ_2 *avec bord*. Notons qu'une surface de Riemann est canoniquement orientée et que cela induit une orientation sur le bord. Supposons que l'on dispose d'un difféomorphisme f qui inverse l'orientation entre un cercle S_1 contenu dans le bord $\partial\Sigma_1$ et un cercle S_2 contenu dans $\partial\Sigma_2$. Collons les deux surfaces le long de f et nous obtenons une nouvelle surface (orientée !).



Recollement de surfaces de Riemann. ©

Il s'avère que cette nouvelle surface est canoniquement une surface de Riemann, c'est-à-dire qu'elle est munie d'une structure de variété holomorphe de dimension 1. Ceci est facile à voir si f est analytique réelle puisque elle peut être prolongée dans ce cas en un difféomorphisme holomorphe entre petites couronnes, ce qui peut être utilisé pour définir une structure holomorphe sur la surface collée. On peut aussi coller des surfaces de Riemann le long de difféomorphismes non analytiques, mais ce n'est pas important dans notre contexte.

L'utilisation de cette opération de recollement définit une opérade. Un élément de $\mathcal{O}_n$ est une classe d'isomorphisme d'une surface de Riemann compacte ayant $(n+1)$ composantes de bord étiquetées, l'une étant dite entrante, les n autres sortantes. De plus, chaque composante du bord est munie d'un difféomorphisme avec le cercle. Coller des surfaces le long de leurs bords, comme dans un jeu de Lego, donne un exemple d'opérade.

Plusieurs *foncteurs* peuvent être appliqués aux opérades afin d'en produire d'autres. Par exemple, considérons l'opérade Cub_2

des petits carrés. $\mathrm{Cub}_2(n)$ a le type d'homotopie de l'espace de n points distincts d'un carré. Son groupe fondamental PB_n est appelé *groupe de tresses pures*.

Un élément de PB_n est constitué de n petits carrés, numérotés $1, 2, \ldots, n$ dans un carré (ou un disque) qui se déplacent le long de n lacets sans se croiser. Au bout des lacets, les carrés reviennent à leur position initiale et cette dernière propriété est ce que l'on entend par *pure*.

En utilisant les groupes fondamentaux, nous obtenons des applications $\mathrm{PB}_n \times \left(\mathrm{PB}_{k_1} \times \cdots \times \mathrm{PB}_{k_n}\right) \to \mathrm{PB}_{k_1+\cdots+k_n}$ et une opérade de groupe. Ce n'est pas très compliqué. Un élément de PB_n donne naissance à n tubes dans un cylindre $[0,1]^2 \times [0,1]$. La structure d'opérade consiste à insérer des tubes dans des tubes.

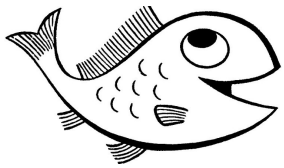
Il n'y a aucune raison de se limiter au cas de la dimension 2 et au groupe fondamental. Étant donné un espace topologique X et un entier n, l'espace dit de *configuration* $\mathrm{X}^{[n]}$ est défini comme l'espace des n-uplets de points *distincts* dans X. Si X est un disque de dimension 2, il s'avère que le revêtement universel de cet espace est contractile de sorte que, du point de vue de l'homotopie, seul son groupe fondamental est intéressant : c'est le groupe de tresses pures que nous venons d'introduire. Cependant, si X est une boule de dimension supérieure, $\mathrm{X}^{[n]}$ est simplement connexe et nous sommes tentés de décrire sa topologie. Par exemple, si $\mathrm{X} = \mathbb{R}^3$ et $n = 2$, la réponse est facile : deux points distincts x et y dans l'espace sont complètement définis par leur milieu $(x+y)/2$ et le vecteur non nul $x - y$. Par conséquent, $(\mathbb{R}^3)^{[2]}$ a le même type d'homotopie qu'une sphère de dimension 2. La situation est déjà plus compliquée pour $n = 3$: trois corps dans l'espace...

Une bonne approche consiste à étudier l'homologie ou la cohomologie de ces espaces non pas individuellement, pour chaque valeur de n, mais globalement : la cohomologie de l'opérade des petits cubes. Je conseille vivement à mon lecteur de lire l'article très accessible [143] qui peut servir de porte d'entrée à la théorie des opérades. Vous y apprendrez par exemple que « L'homologie de l'opérade des petits d-cubes est l'opérade de degré d de *Poisson* » (quoi que cela veuille dire).

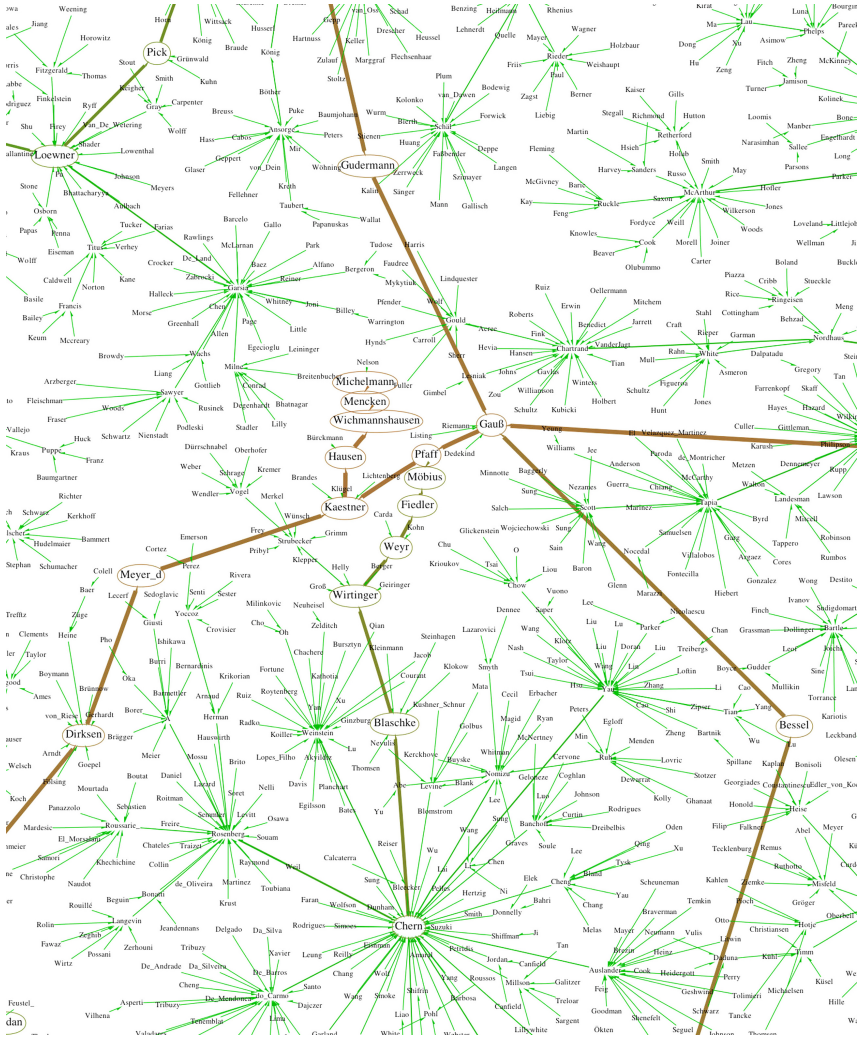
La définition du groupe fondamental nécessite un point de base. Par conséquent, pour définir PB_n, il faut choisir un n-uplet de points distincts dans le carré, comme « point de départ » pour nos tresses. Je suggère au lecteur de trouver lui-même ces points de base afin de définir correctement les applications d'opérade.

Trois petits carrés suivent un lacet. ©

143. Sinha (D. P.), *The (non-equivariant) homology of the little disks operad*, dans *OPERADS 2009*, Société mathématique de France, Paris, 2013, p. 253-279.



L'opérade de Poisson. ©



Ceci est une vision locale, centrée sur Gauss, de l'« arbre des mathématiciens » où l'on relie deux mathématiciens si l'un a été le directeur de thèse de l'autre.

©

Opérades singulières

Racines ou branches ?
(Rio Preguiças, au Brésil).

Nous revenons à notre discussion initiale sur la position relative des graphes d'une famille de polynômes.

L'opérade des polynômes réels

Soient $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ et $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ deux n-uplets de polynômes distincts dans $\mathbb{R}[x]$ qui s'annulent à l'origine. Nous dirons qu'ils sont *topologiquement équivalents* si pour de petites valeurs non nulles de x, les deux n-uplets de nombres réels $(P_1(x), \dots, P_n(x))$ et $(Q_1(x), \dots, Q_n(x))$ sont ordonnés de la même manière. Soit $\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(n)$ l'ensemble (fini) des classes d'équivalence de ces n-uplets. Construisons une structure d'opérade très simple sur $\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(n)$.

Supposons que l'on se donne

— $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ (un représentant d') un élément de $\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(n)$,

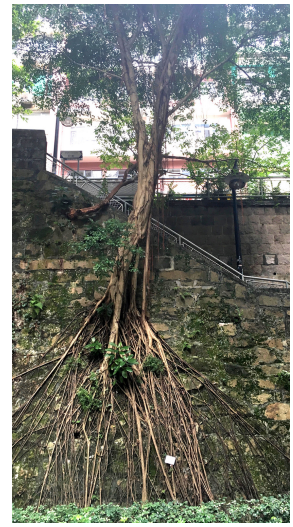
— pour tout $i = 1, \dots, n$, un élément de $\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(k_i)$ donné par (la classe de) $(P_{i;1}, \dots, P_{i;k_i})$.

Nous voulons *greffer* les $P_{i;j}$ sur les P_i. Il suffit de considérer les $k_1 + \cdots + k_n$ polynômes

$$P_i(x) + x^{2N} P_{i;j}(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant k_i)$$

dans l'ordre lexicographique de (i, j), où N est un grand entier.

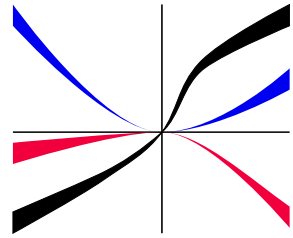
Quelques explications peuvent être utiles. Le rôle de x^{2N} est de s'assurer que les termes qui sont ajoutés aux P_i sont beaucoup plus petits que les différences $P_i - P_j$ $(i \neq j)$. Pour assurer cette propriété, il suffit de choisir 2N plus grand que tous les $v(P_i - P_j)$



Racines et branches.
(Hong Kong).

Rappelons que $v(P)$ désigne la valuation de P.

$(i \neq j)$. En fixant i, les graphes des polynômes $k_i\, P_i(x) + x^{2N} P_{i;j}(x)$ sont très proches du graphe de P_i. L'exposant *pair* 2N implique que, en fixant i, l'ordre entre les polynômes $P_i(x) + x^{2N} P_{i;j}(x)$ est le même que l'ordre entre les $P_{i;j}(x)$. Topologiquement, les graphes des P_i ont été transformés en de minces secteurs dans lesquels les $P_{i;j}$ ont été insérés.



Il devrait être clair que ceci est bien défini et donne une structure d'opérade sur $\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(n)$. Il s'agit d'une opérade symétrique car les polynômes $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ peuvent être permutés.

Il devrait être tout aussi clair, vu les premiers chapitres de ce livre, que cette opérade est très proche de l'opérade (non symétrique) des permutations séparables.

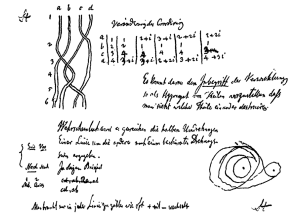
Pouvez-vous trouver une relation explicite entre les deux opérades ?

L'opérade des polynômes complexes

Jouons un jeu similaire avec les polynômes *complexes*. Si $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est un n-uplet de polynômes distincts dans $\mathbb{C}[x]$, qui s'annulent à l'origine, nous regardons les lacets suivants dans $\mathbb{C}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) :

$$\gamma_i : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto P_i(\varepsilon \exp(i\theta)) \in \mathbb{C}.$$

Choisissons ε très petit. Alors pour tout θ, les n points $\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta), \ldots$ sont distincts. Ceci définit un lacet dans l'espace des n-uplets de points distincts du plan, c'est-à-dire un élément du *groupe des tresses pures* PB_n. Pour être précis, je devrais parler de la classe de conjugaison d'une tresse pure, puisque les points initiaux $\gamma_i(0)$ peuvent être n'importe où et que la définition du groupe des tresses pures nécessite un point de base. Cette classe de conjugaison est indépendante du choix du petit ε.



Un manuscrit inédit de Gauss dans lequel il entame l'étude topologique des tresses.

On dira que $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ et $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ sont *topologiquement équivalents* si les tresses correspondantes sont conjuguées dans PB_n. Notons $\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Est-ce équivalent à l'existence d'un homéomorphisme local de $\mathbb{C}^2$ dans le voisinage de l'origine qui envoie chaque courbe complexe $P_i = 0$ vers la courbe complexe $Q_i = 0$?

Rappelons que les groupes de tresses pures définissent un de nos exemples d'opérades, où les opérations consistent à insérer des tresses dans des voisinages tubulaires des brins d'une tresse donnée. Cela suggère que $\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(n)$ pourrait être une sous-opérade de PB_n. C'est en effet le cas, comme je vais le montrer.

Nous savons que $\exp(-v(P_i - P_j))$ définit une distance ultramétrique sur $\{P_1, \dots, P_n\}$ qui peut être encodée par un arbre enraciné. La racine correspond à l'ensemble complet $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Ses fils sont les classes d'équivalence de la relation $v(P_i - P_j) \geqslant 2$, etc., jusqu'à ce que nous atteignions les singletons $\{P_i\}$ qui sont les feuilles étiquetées par $1, 2, \dots, n$.

Il y a deux différences principales avec le cas des polynômes réels :

— il n'y a pas de structure d'ordre naturel sur les nœuds, de sorte que notre arbre n'est pas planaire (après tout, la plupart des arbres dans la nature ne sont pas planaires) ;

— dans le cas réel, nous avons élagué l'arbre. Nous avons fait cela, car les paires $(0, x)$ et $(0, x^3)$ sont par exemple topologiquement équivalentes *sur les réels* : x et x^3 ont les mêmes signes. Mais ce n'est plus vrai dans le domaine complexe : la tresse associée à $(0, x^3)$ tourne 3 fois contrairement à $(0, x)$ qui ne tourne qu'une fois quand x décrit le bord d'un petit disque centré en 0.

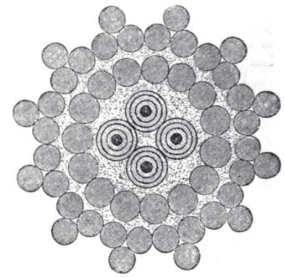
Le résultat (élémentaire) suivant donne une description précise de $\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(n)$.

Théorème. *Deux n-uplets de polynômes complexes $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ et $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ sont topologiquement équivalents si et seulement s'ils définissent le même arbre enraciné ou de manière équivalente si $v(P_i - P_j) = v(Q_i - Q_j)$ pour tout i, j.*

Montrons d'abord que *l'arbre détermine la tresse*. Commençons par la racine et descendons p arêtes jusqu'à atteindre le premier nœud avec $q \geqslant 2$ fils. Cela signifie que les p-ièmes polynômes de Taylor de tous les P_i sont tous égaux et qu'il y a q différents $(p+1)$-ièmes polynômes de Taylor.

Si t_p désigne ce p-ième polynôme de Taylor commun, on soustrait t_p à tous les P_i sans changer la tresse correspondante. Ainsi, $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ se présente en q groupes, où l'on place dans le même groupe deux P_i avec le même polynôme de Taylor d'ordre $(p+1)$, de la forme $a_\nu x^{p+1}$, pour $\nu = 1, \dots, q$, où tous les a_ν sont des nombres complexes distincts. Lorsque x décrit le cercle de rayon ε, ces q points $a_\nu x^{p+1}$ décrivent des petits cercles

Un arbre non planaire dans le *Jardim Botânico*, à Rio de Janeiro.



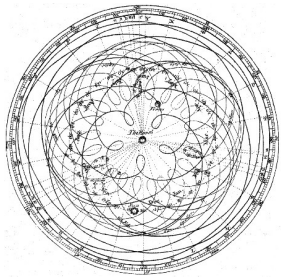
Un câble télégraphique sous-marin Angleterre-Hollande de 1858 et sa coupe transversale. ©

soumis à la même rotation rigide ; ils tournent de $p+1$ tours complets. Cette (classe de conjugaison de cette) tresse dans PB_q ne dépend que de q et p, non de la position des a_ν : on a q points qui tournent simplement en bloc et décrivent $p+1$ tours complets.

Autour de chaque $a_\nu \varepsilon^{p+1} \exp(\mathrm{i}(p+1)\theta)$, dessinons un petit disque qui contient tous les $\mathrm{P}_i(\varepsilon \exp(\mathrm{i}\theta))$ avec comme $(p+1)$-ième polynôme de Taylor $a_\nu x^{p+1}$. Poursuivons le processus à l'intérieur de chaque disque en divisant à nouveau chaque groupe en fonction des polynômes de Taylor d'ordre supérieur.

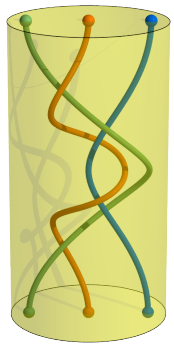
La tresse est donc comme un système solaire qui se déplace le long d'épicycles, à la Hipparque. Elle consiste en un groupe de q petits disques qui tournent rigidement de $p+1$ tours. À l'intérieur de chaque disque, la figure est similaire. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions aux $\gamma_i(\theta)$. Tous ces nombres p et q, pour tous ces disques, sont donnés par la combinatoire de l'arbre, de sorte que la tresse (toujours à conjugaison près) est bien déterminée par l'arbre, de façon très concrète.

Encore lui !



Le mouvement apparent du Soleil, de Mercure et de Vénus depuis la Terre. ©

Expliquons comment construire l'arbre *à partir de la tresse*. Soient deux entiers $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Une tresse pure dans PB_n est une classe d'homotopie d'un lacet de n points distincts $(x_1, \ldots, x_n)$ dans le plan. Oublions tous les points sauf x_i et x_j : cela définit un homomorphisme de PB_n vers PB_2, pour tout i et j. La structure de PB_2 est très simple : elle est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Lorsque deux points distincts se déplacent et reviennent à leur position initiale, le vecteur $x_i - x_j$ est un lacet dans le plan ponctué avec un indice par rapport à 0. C'est l'isomorphisme entre PB_2 et $\mathbb{Z}$. On définit ainsi $n(n-1)/2$ homomorphismes $\mathrm{Enl}_{i,j} : \mathrm{PB}_n \to \mathbb{Z}$, qui expriment simplement le nombre de tours de $x_i - x_j$. Deux tresses conjuguées ont les mêmes images par $\mathrm{Enl}_{i,j}$.



Une tresse pure à trois brins. ©

Revenons à notre tresse définie par les γ_i. En évaluant $\mathrm{Enl}_{i,j}$ sur cette tresse, on compte le nombre de tours de $\mathrm{P}_i(x) - \mathrm{P}_j(x)$ lorsque x fait le tour du bord d'un petit disque centré sur l'origine. Il s'agit évidemment de la valuation $v(\mathrm{P}_i - \mathrm{P}_j)$. Par conséquent, les valuations $v(\mathrm{P}_i - \mathrm{P}_j)$ peuvent être lues à partir de la classe de conjugaison de la tresse, comme on le souhaite. ⊡

Inversement, étant donné un arbre enraciné avec n feuilles, on construit facilement n polynômes dont l'arbre associé est donné.

Nos arbres sont non planaires. Cependant, les arbres non planaires enracinés peuvent être greffés dès lors que leurs feuilles sont étiquetées de 1 à n. Étant donné un arbre enraciné T avec n feuilles étiquetées $1,\dots,n$ et n arbres $T_1,\dots,T_n$, nous pouvons greffer T_i sur la feuille numérotée i de T. Ceci définit l'opérade des *arbres non planaires enracinés étiquetés*.

Cette opération de greffe définit donc une structure d'opérade naturelle sur $\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(n)$. De plus, la discussion précédente montre que $\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(n)$ est une sous-opérade de l'opérade des tresses pures. Nous pouvons décrire cette structure par des formules, directement en termes de polynômes. Étant donné un n-uplet $(P_1,\dots,P_n)$, posons

Il s'agit d'une opérade *symétrique*, puisque les polynômes peuvent être permutés.

$$\delta_i = \max_{j\neq i} v(P_i - P_j).$$

δ_i est le niveau auquel la feuille P_i est attachée à l'arbre.

L'action d'opérade de $(P_1,\cdots,P_n)$ sur une famille $(P_{i;j})$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k_i)$ est définie comme le $(k_1+\cdots+k_n)$-uplet de polynômes dans l'ordre lexicographique $P_i(x) + x^{\delta_i} P_{i;j}(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k_i)$.

Vérifier que cette définition réalise bien la greffe des arbres étiquetés associés, comme souhaité.

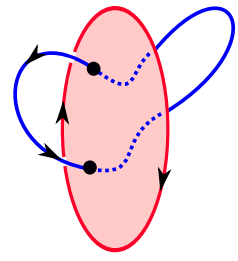
En résumé, $\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(n)$ *est isomorphe à l'opérade des arbres non planaires enracinés étiquetés et apparaît comme une sous-opérade de l'opérade des tresses pures* PB_n.

Une opérade associée aux courbes singulières complexes

Pour deux polynômes complexes $P_i(x)$ et $P_j(x)$ qui s'annulent en 0, la valuation $v(P_i - P_j)$ est aussi appelée *multiplicité* d'intersection des deux courbes lisses $y = P_i(x)$ et $y = P_j(x)$ à l'origine. Il n'y a pas de surprise dans cette terminologie puisqu'il s'agit bien de la multiplicité, au sens usuel du terme, de la racine 0 de $(P_j - P_i)(x) = 0$. Le paragraphe précédent peut également être réinterprété de la manière suivante.

Les deux derniers chapitres de ce livre traitent plus en détail de l'enlacement.

Les courbes $y - P_i(x) = 0$ sont lisses dans $\mathbb{C}^2$. Elles coupent transversalement une petite sphère S^3_ε sur un nœud trivial. Nous avons examiné ces nœuds dans la sphère carrée $\max(|x|,|y|) = \varepsilon$ et nous les avons désignés par γ_i. Il s'avère que l'*enlacement* de γ_i et γ_j n'est rien d'autre que leur multiplicité d'intersection. Il s'agit d'une interprétation topologique de la multiplicité.

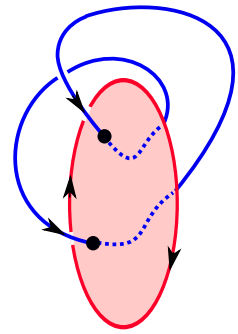


Enlacement = 1 – 1 = 0.

L'enlacement de deux nœuds orientés k_1 et k_2 dans S^3 est

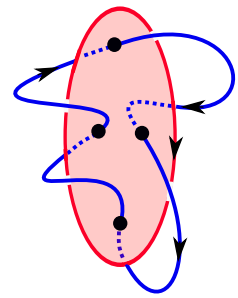
défini de la manière suivante. Choisissons une surface orientée plongée dont le bord orienté est k_1 et comptons le nombre d'intersection (algébrique) de cette surface avec k_2.

Dans notre cas simple, considérons l'entrelacs de la courbe lisse $y - P_i(x) = 0$ dans la sphère de dimension 3 comme le bord de l'une de ses fibres de Milnor, où $y - P_i(x)$ est réel et strictement positif. Pour calculer l'enlacement des deux courbes $y - P_i(x) = 0$ et $y - P_j(x) = 0$ dans la sphère de dimension 3, nous devons compter l'intersection (algébrique) du nœud $y - P_j(x) = 0$ avec la fibre de Milnor $y - P_i(x) \in \mathbb{R}_+$. Or $(P_j - P_i)(x) = ax^{v(P_i - P_j)} + \cdots$, de sorte que le second nœud coupe la fibre de Milnor exactement $v(P_i - P_j)$ fois (il faut vérifier que les intersections sont positives). Donc *l'enlacement de γ_i et γ_j est bien la multiplicité $v(P_i - P_j)$.*



Enlacement = 1 + 1 = 2.

Il s'avère que l'essentiel de ce qui a été dit est vrai pour les branches des courbes non lisses. Soit $F(x, y) = 0$ une courbe analytique complexe singulière, supposée réduite, qui admet n branches. On écrit $F = F_1 \dots F_n$, une décomposition en facteurs irréductibles. Chaque branche $F_i = 0$ admet un paramétrage de Puiseux $t \in \mathbb{C} \mapsto (t^{m_i}, g_i(t))$. L'entier m_i est l'*ordre* de la branche. L'intersection de chaque branche avec une petite sphère est un nœud k_i, qui n'est pas trivial si la branche n'est pas lisse. L'enlacement m_{ij} de k_i et k_j est la *multiplicité d'intersection des deux branches*. Le lecteur peut considérer ceci comme une définition si son esprit est orienté vers la topologie. S'il préfère l'algèbre, il pourra procéder de la manière suivante. Insérons la paramétrisation d'une branche dans l'équation de l'autre et regardons la multiplicité du zéro $t = 0$ de $t \in \mathbb{C} \mapsto F_j(t^{m_i}, g_i(t))$. Notons l'analogie des deux définitions : « multiplicité algébrique de l'intersection de deux branches » et « enlacement » de deux nœuds. Les deux semblent asymétriques mais sont en fait symétriques.



Enlacement = 4.

Il s'avère que les multiplicités d'intersection m_{ij} entre les branches ont toujours les propriétés importantes que nous avons remarquées pour les courbes lisses :

— m_{ij} est un entier strictement positif ; c'est facile ;

— les $m_{ij}/m_i m_j$ satisfont une sorte d'*inégalité ultramétrique* ; en d'autres termes, pour chaque $\varepsilon > 0$, la relation $m_{ij}/m_i m_j \geqslant \varepsilon$ est une relation d'équivalence dans $\{1, \dots, n\}$ de sorte que nous

Pouvez-vous démontrer qu'une branche définit un nœud trivial si et seulement si la branche est lisse ?

pouvons construire un arbre, comme précédemment (sauf que les longueurs des arêtes ne sont pas des entiers mais des nombres rationnels).

Le deuxième point est dû à Płoski [144] en 1985. Voir [145] pour une présentation moderne et une application et [146] pour une ample généralisation.

Nous pouvons maintenant construire une *opérade de courbes complexes singulières*. En fait, comme précédemment, nous avons besoin d'un étiquetage des branches de notre courbe $y = \mathrm{P}_1(x), \dots, y = \mathrm{P}_n(x)$, où les P_i sont maintenant les séries de Puiseux $g_i\left(x^{1/m_i}\right)$. En d'autres termes, nous considérons l'ensemble des n-uplets de séries de Puiseux distinctes, noté Curv_n, comme *courbes complexes à branches étiquetées*. Nous définissons maintenant une structure d'opérade sur les Curv_n exactement comme nous l'avons fait pour les polynômes. Définissons les *nombres rationnels* strictement positifs $\delta_1, \dots, \delta_n$, associés à $(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n) \in \mathrm{Curv}_n$ par

$$\delta_i = \max_{j \neq i} v(\mathrm{P}_i - \mathrm{P}_j),$$

où v est maintenant le plus petit exposant rationnel d'un terme non trivial d'une série de Puiseux.

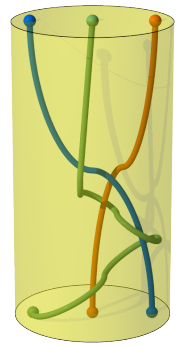
Étant donné des éléments de $\mathrm{Curv}_{k_1}, \dots, \mathrm{Curv}_{k_n}$, définis par la série de Puiseux $\mathrm{P}_{i;j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k_i$, nous pouvons construire l'élément de $\mathrm{Curv}_{k_1+\dots+k_n}$ comme $(k_1 + \dots + k_n)$-uplet $\mathrm{P}_i(x) + x^{\delta_i}\mathrm{P}_{i;j}(x)$ ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k_i$) dans l'ordre lexicographique. Cela définit une opérade (symétrique).

Exercice. L'intersection de $\mathrm{F}(x, y) = 0$ avec $|x| = \varepsilon$ définit une tresse, qui n'est plus une tresse pure. Chaque branche coupe en effet $x = \varepsilon$ un nombre de fois égal à son propre ordre m_i. Contrairement au cas précédent, le nœud défini par chaque branche n'est pas trivial. Trouver une version topologique de l'opérande précédent. Autrement dit, trouver une relation d'équivalence naturelle entre les courbes $\mathrm{F}(x, y) = 0$ (à branches étiquetées) en fonction des tresses associées qu'elles définissent. Cette relation d'équivalence doit être telle que l'opérade agisse effectivement sur des classes d'équivalence.

144. Płoski (A.), Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, nº 33(11-12), 1985, p. 601–605.

145. Abío (I.), Alberich-Carramiñana (M.) et González-Alonso (V.), The ultrametric space of plane branches, *Comm. Algebra*, nº 39(11), 2011, p. 4206-4220.

146. García Barroso (E.) et González Pérez (P.) et Popescu-Pampu (P.), Ultrametric spaces of branches on arborescent singularities, 2016.



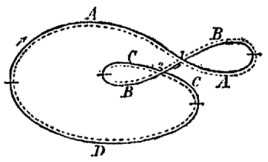
Une tresse « impure » avec 3 brins. ©

Gauss en 1840. ©

Gauss est de retour : courbes dans le plan

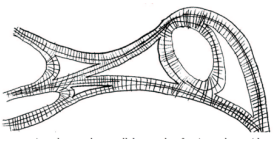
Détour ! J'aime bien ce chapitre, mais il est complètement indépendant du reste du livre.

De nombreux grands mathématiciens, anciens ou actuels, ont aimé ou aiment dessiner des courbes. En guise de devinette, je présente quelques dessins et mon lecteur doit en deviner les auteurs.

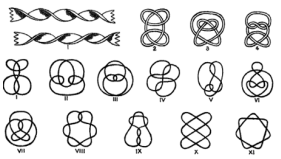


1

2

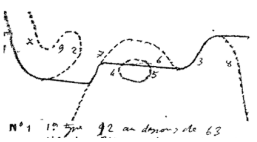


3



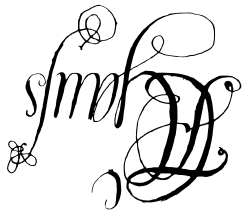
4

5



6

Solution : page suivante.



La signature de Gauss en 1794 (il avait 17 ans). ©

L'image 1 a été dessinée par Gauss dans son *Nachlass*, autour du problème qui est discuté dans ce chapitre.

L'image 2 est une courbe cubique dessinée par Newton dans son *Enumaratio Linearum tertii Ordinis* (1667). En termes modernes, Newton tente de classer ces courbes algébriques aux transformations projectives près. Il parle de « génération de courbes par des ombres », ce qui est une merveilleuse définition de la géométrie projective.

L'image 3 est un dessin réalisé par Thurston dans ses *Notes sur la topologie et la géométrie des variétés de dimension 3* (1980), qui ont eu une grande influence. Cette image représente une *voie ferrée*, un concept important qui est utile dans la description du bord de l'espace de Teichmüller.

L'image 4 est la projection d'un nœud réalisée par Tait (1884) dans une série d'articles qui représente la première tentative sérieuse de classification des nœuds.

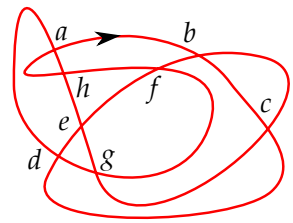
L'image 5 est tirée d'un billet de banque suisse en l'honneur d'Euler. Dans ses *Lettres à une princesse d'Allemagne*, il explique la logique *booléenne* à une jeune princesse allemande, en utilisant des diagrammes délimités par des ellipses. Il a déterminé toutes les configurations possibles des intersections de quatre ellipses et les nombreux cas possibles figurent à l'arrière-plan du billet de banque.

L'image 6 est due à Poincaré dans une tentative de démontration de son « dernier théorème » sur le nombre de points fixes d'un difféomorphisme d'une couronne qui préserve l'aire. En fait, il ne l'a pas démontré puisqu'il est décédé quelques mois plus tard. Le théorème a été démontré peu après la mort de Poincaré par Birkhoff.

Les mots de Gauss

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue une belle question soulevée par Gauss à propos des courbes dans le plan. Rappelons que sa première preuve du théorème fondamental de l'algèbre est basée sur le comportement qualitatif des courbes à l'intérieur d'un disque. Le volume VIII des *Œuvres de Gauss* contient quelques pages [147] (p. 272 et 282-286) sur les courbes immergées dans le plan. Attention ! Il s'agit de *Nachlässe* restés inédits de son vivant. N'oublions pas sa devise *Pauca sed matura* (« Peu, mais mûr »). Ces pages ne doivent pas être considérées comme une publication à proprement parler, mais plutôt comme un brouillon personnel.

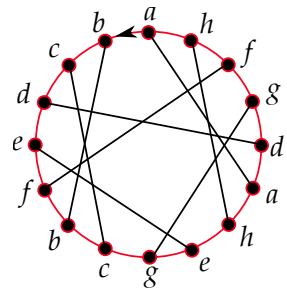
147. Gauß (C. F.), *Werke, Band VIII*, Réimpression de l'original de 1900, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973.



abcdefbcgehadgfh

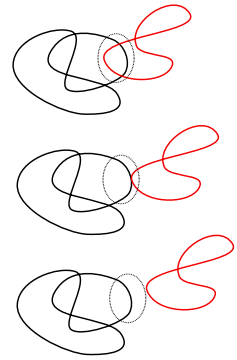
Traçons une courbe fermée, générique, orientée et immergée $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ dans le plan. Générique signifie que les points multiples ne sont que des points doubles avec deux tangentes différentes. On les note $a_1, \ldots, a_n$ (Gauss les appelait *Knoten*). En faisant le tour de la courbe, on passe deux fois par chacun de ces a_i. Cela définit un mot cyclique de longueur $2n$ dans lequel chacun des a_i apparaît deux fois. *La courbe fermée définit donc un diagramme de cordes* avec une corde pour chaque a_i.

La question posée par Gauss est de savoir quels diagrammes de corde peuvent être obtenus à partir d'une courbe plane. Il dresse d'abord la liste de toutes les possibilités pour $n \leqslant 8$, à la main ! Puis il trouve une condition *nécessaire*. En écrivant le mot sur un cercle, entre deux occurrences d'un certain a_i, il doit y avoir un *nombre pair* de lettres. Dans l'exemple en marge, la corde d décompose le cercle en deux intervalles qui contiennent respectivement 6 et 8 lettres. Certains auteurs modernes prétendent qu'il s'agissait d'une conjecture de Gauss et qu'il n'a pas pu la démontrer. Quel manque de respect ! Il me semble évident que Gauss pouvait la démontrer et qu'il n'a pas pris le temps de l'écrire dans son carnet personnel.

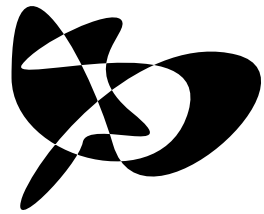


L'un des premiers théorèmes de topologie, présent dans la thèse de Gauss comme nous l'avons vu, est que deux courbes fermées du plan qui se coupent transversalement ont un *nombre pair de points d'intersection*. L'une des preuves possibles consiste à déplacer la première courbe par un chemin générique de

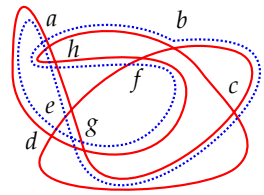
translations pour qu'à la fin du mouvement il n'y ait plus de point d'intersection. Nous examinons ensuite comment les points d'intersection apparaissent ou disparaissent dans les situations génériques. Il n'est pas difficile de voir que, de manière générique, les points apparaissent ou disparaissent par paires.



Un fait étroitement lié a été remarqué par tous les élèves qui dessinent des gribouillis pendant les cours de mathématiques ennuyeux. Si l'on dessine une courbe fermée générique dans le plan, les composantes connexes du complémentaire peuvent être colorées en noir et blanc comme sur un damier. Il suffit d'utiliser le blanc pour la composante à l'infini et, pour une autre composante, de la relier à l'infini par un arc générique et de la colorier en blanc si cet arc coupe la courbe fermée en un nombre pair de points et en noir dans le cas contraire. Ceci est cohérent en raison de l'observation précédente.



La condition nécessaire de Gauss est un corollaire facile. Toute corde décompose le cercle en deux intervalles I_1 et I_2 qui définissent deux courbes fermées dans le plan, γ_1 et γ_2, qui partent du même point. Déplaçons un peu ces deux courbes pour les rendre transverses. Le nombre de lettres dans I_1 est égal au nombre de points d'intersection de γ_1 et γ_2 plus deux fois le nombre d'auto-intersections de γ_1. Il est donc pair. Sur la figure dans la marge, l'un des deux lacets de b à b est légèrement décalé et représenté par un lacet bleu en pointillés. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, ce que savait bien Gauss.



Mots de Gauss avec signes

Le problème de Gauss a été résolu de nombreuses fois, de différentes manières, dans différentes communautés mathématiques, essentiellement topologiques ou combinatoires. Ceci s'accorde avec la citation de Poincaré :

> « Il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus. »

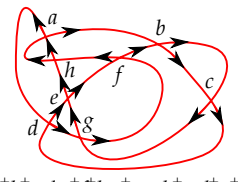
Je ne décrirai que deux solutions. Je présenterai d'abord une solution d'un problème plus simple qui utilise un argument topologique mêlant [148], [149] et [150]. Si le plan est orienté, chaque

148. Chaves (N.) et Weber (C.), Plombages de rubans et problème des mots de Gauss, *Exposition. Math.*, n° 12(1), 1994, p. 53-77.

149. Cairns (G.) et Elton (D. M.), The planarity problem for signed Gauss words, *J. Knot Theory Ramifications*, n° 2(4), 1993, p. 359-367.

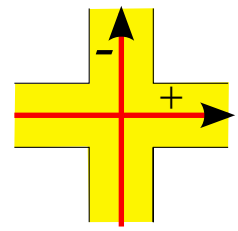
150. Cairns (G.) et Elton (D. M.), The planarity problem, II, *J. Knot Theory Ramifications*, n° 5(2), 1996, p. 137-144.

point double de notre courbe générique définit deux vecteurs tangents, de sorte que l'un d'eux est « le premier » et l'autre « le second ». En faisant le tour de la courbe, lorsque nous rencontrons un point double, nous marquons un signe + si nous passons par la première branche et un signe − dans le cas contraire. Ainsi, le mot cyclique est maintenant décoré de signes ou exposants ±1. Chaque lettre apparaît deux fois avec des signes différents. De manière équivalente, nous pourrions penser à un *diagramme de cordes orienté*, où chaque corde va disons de son extrémité + à son extrémité −. Le *problème de Gauss avec signes* (que Gauss n'a pas étudié) est le suivant. Étant donné un pareil *mot avec signes*, peut-on décider s'il est associé à une courbe générique du plan ?

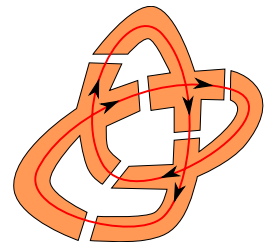


$a^+b^+c^-d^-e^+f^+b^-c^+g^-e^-h^+a^-d^+g^+f^-h^-$

Pour chaque symbole $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dessinons une croix, comme dans la marge. Chaque croix a deux côtés d'entrée et deux côtés de sortie. Chaque croix a deux bras, étiquetés + et −.



Un mot cyclique signé w définit de manière unique une façon de coller chaque côté de sortie de chaque croix à un côté d'entrée d'une autre croix. Le résultat de cette opération de recollement est une surface orientée S dont le bord contient une courbe orientée immergée γ. En faisant le tour de cette courbe, on lit précisément le mot avec signes w. Si S est planaire au sens où elle peut être plongée dans le plan, notre problème est résolu puisque nous avons construit une courbe dans le plan. Inversement, si le mot provient d'une courbe immergée dans le plan, un certain voisinage de son image est clairement une réunion de croix, assemblées comme dans S. *Donc w est réalisable par une courbe planaire immergée si et seulement si* S *est planaire.*



Pour la suite de ce chapitre, une certaine familiarité avec la théorie de base de l'homologie des surfaces est nécessaire. C'est l'occasion de recommander le livre illustré de Fomenko [151]. En ouvrant ce livre, mon lecteur comprendra immédiatement pourquoi je l'aime. Un livre plus standard de Massey est très accessible [152].

Soit k le nombre de composantes du bord de S. Soit $\widehat{\mathrm{S}}$ la surface obtenue à partir de S en collant un disque à chacune des composantes de son bord. La surface S a le type d'homotopie d'un graphe avec n sommets et $2n$ arêtes. Par conséquent, la

151. Fomenko (A.), *Visual Geometry and Topology* (trad. M. V. Tsaplina), Springer, 1994.

152. Massey (W. S.), *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, 1991.

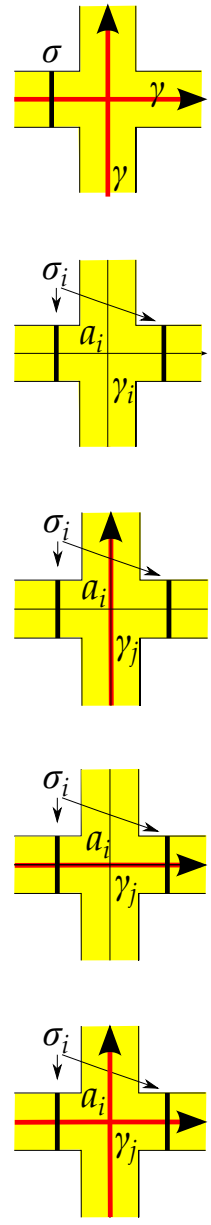
caractéristique d'Euler-Poincaré de $\widehat{S}$ est $n - 2n + k$. Les surfaces compactes orientées sans bord sont classées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. En corollaire, S est planaire si et seulement si $k - n = 2$. Cela donne un algorithme très simple pour décider si w est réalisable. Commençons par w, collons les croix et comptons les composantes du bord : il devrait y en avoir $n + 2$. Ceci est essentiellement dû à Carter [153].

153. Carter (J. S.), Classifying immersed curves, *Proc. Amer. Math. Soc.*, n° 111(1), 1991, p. 281-287.

Présentons maintenant un autre point de vue. Il découle de la classification des surfaces compactes orientées avec bord qu'une telle surface est planaire si et seulement si deux courbes transverses fermées quelconques se coupent en un nombre pair de points. En effet, dès que le genre d'une surface est $\geqslant 1$, elle contient un tore ponctué qui contient deux courbes se coupant exactement en un point. Ainsi, pour vérifier si le genre de S est 0, il suffit de trouver une base de son homologie $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ modulo 2 et de calculer l'intersection.

Il est facile de trouver une base de $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En guise d'observation préliminaire, notons qu'une paire ordonnée de points (a^+, a^-) sur le cercle orienté définit un intervalle ouvert, car nous nous déplaçons dans le sens positif de a^+ vers a^-. Je dirai que les éléments de cet intervalle sont *entre* a^+ *et* a^-. Attention cependant : cet intervalle est transformé en son complémentaire si l'on intervertit les deux points.

La courbe d'origine γ est tracée sur S et définit donc une classe d'homologie $[\gamma]$. De plus, pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'intervalle de a_i^+ vers a_i^- sur le cercle définit un lacet γ_i sur S et une classe d'homologie $[\gamma_i]$ dans $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Lorsque γ_i entre dans une croix, il ne change pas de direction à l'exception de la croix étiquetée a_i, où il tourne à droite. Autrement dit, l'intersection de γ_i avec une croix différente de celle étiquetée a_i est soit vide, soit un segment droit, soit deux segments perpendiculaires.



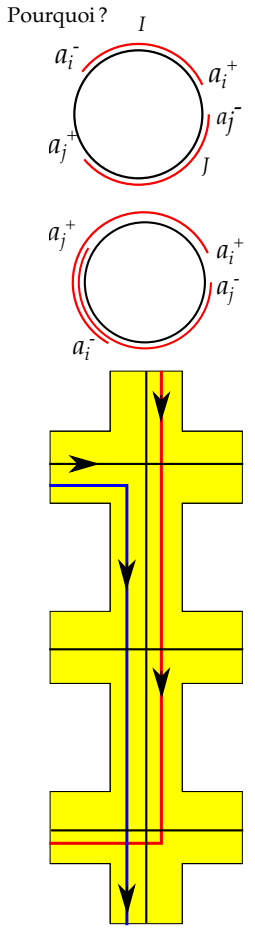
Lemme. *Les classes* $[\gamma], [\gamma_i]_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *définissent une base de* $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

La surface S a le type d'homotopie d'un graphe connexe avec n sommets et $2n$ arêtes. La caractéristique d'Euler-Poincaré est $-n$ et vaut 1 moins le rang de $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Ce rang est donc $(n + 1)$. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que $[\gamma]$ et $[\gamma_i]_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont linéairement indépendants dans $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Tout arc σ dans S avec des extrémités dans le bord de S définit une forme linéaire dans $H_1(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: il suffit de compter les points d'intersection avec σ (toujours modulo 2). Par exemple, choisissons σ dans une croix quelconque, comme dans la marge. Il est clair que γ intersecte σ en un seul point, de sorte que $[\gamma]$ n'est pas trivial. Dans la croix associée à la lettre a_i, soit σ_i la somme des deux courbes indiquées dans la marge. L'intersection de σ_i et γ_j est 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. L'intersection de γ et σ_i est 0. On peut donc utiliser les $n+1$ formes linéaires σ_i et σ pour montrer que $[\gamma]$ et $[\gamma_i]_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont linéairement indépendants. Le lemme est démontré. ⊡

Maintenant, la surface S a un genre zéro si et seulement si les nombres d'intersection des lacets γ et γ_i sont tous 0 modulo 2. Observons que l'auto-intersection de toute courbe fermée sur toute surface orientable est 0 (sur $\mathbb{Z}$ et donc sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Calculons le nombre d'intersection de γ et γ_i, noté $\gamma \cdot \gamma_i$. Pour les rendre transverses, déplaçons γ légèrement sur sa droite afin d'obtenir une courbe γ' qui est transverse à γ_i. N'oublions pas que la surface S et les lacets γ_i sont orientés. Le nombre d'intersection de γ et γ_i est donc le nombre de lettres entre a_i^+ et a_i^-. On retrouve la condition nécessaire de Gauss. *Supposons désormais qu'elle soit satisfaite*. Calculons le nombre d'intersection modulo 2 de γ_i et γ_j, noté $\gamma_i \cdot \gamma_j$.

Pourquoi ?



Si les lettres $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ ne *sont* pas *entrelacées*, il existe deux intervalles *disjoints* I et J dans le cercle (ou dans le mot cyclique) dont les extrémités sont respectivement a_i^+, a_i^- et a_j^+, a_j^-. Puisque γ_i peut être remplacé par $\gamma_i - \gamma$ dans le calcul du nombre d'intersection, il s'ensuit que, dans ce cas non entrelacé, $\gamma_i.\gamma_j$ est le nombre de lettres dans le mot avec une occurrence dans I et la seconde dans J. Il s'agit donc d'une deuxième condition de parité, nécessaire à la réalisabilité de w.

Si les lettres $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ sont *entrelacées*, les lacets γ_i et γ_j ne sont pas transversaux puisqu'ils coïncident sur un intervalle non trivial. Déplaçons γ_i légèrement vers la droite pour obtenir γ_i' et déplaçons γ_j vers la gauche pour obtenir γ_j'. Les courbes γ_i' et γ_j' sont maintenant parallèles sur cette partie commune. Nous allons maintenant compter le nombre d'intersection de γ_i' et

γ'_j. Regardons l'image. Il y a une intersection dans la croix a_j et aucune dans la croix a_i. Les autres intersections correspondent à des lettres entre a_i^+ et a_i^- dont la deuxième occurrence est entre a_j^+ et a_j^-. Ainsi, *lorsque $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ sont entrelacés, le nombre d'intersection $\gamma_i.\gamma_j$ est égal à 1 plus le nombre de lettres entre a_i^+ et a_i^- dont l'autre occurrence est entre a_j^+ et a_j^-*. Nous obtenons donc une réponse très simple au problème de Gauss *avec signes*.

Théorème. *Un mot de Gauss avec signes est réalisable par une courbe immergée plane si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *Pour chaque lettre a_i, il existe un nombre pair de lettres entre a_i^+ et a_i^- (condition de parité de Gauss).*
2. *Pour tout i et j tel que les lettres $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ ne soient pas entrelacées, notons* I *et* J *les intervalles disjoints dont les extrémités sont a_i^+, a_i^- et a_j^+, a_j^- (à l'exclusion de ces points). Le nombre de lettres du mot dont une occurrence se trouve dans* I *et l'autre dans* J *est pair.*
3. *Pour tout i et j tel que les lettres $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ soient entrelacées, le nombre de lettres entre a_i^+ et a_i^- dont l'autre occurrence se trouve entre a_j^+ et a_j^- est impair.*

De manière équivalente, les deux premières conditions nécessaires peuvent être exprimées en termes de diagramme de corde :

1. Chaque corde est coupée par un nombre pair de cordes.
2. Étant donné deux cordes qui ne se croisent pas, le nombre de cordes qui les croisent toutes les deux est pair.

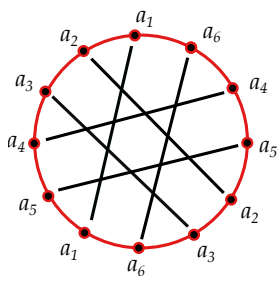
Le problème de Gauss

Revenons au problème initial : les mots *sans signe*. Bien sûr, nous pourrions tricher et essayer toutes les 2^n façons de choisir les signes sur le mot. Cela pourrait prendre beaucoup de temps. Même la force de calcul de Gauss aurait été battue par 2^n. De plus, cela ne serait pas très instructif.

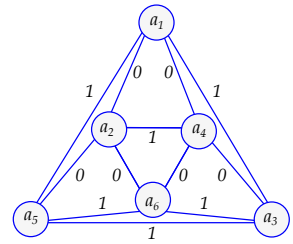
La condition de parité de Gauss est indépendante des signes. Il en est de même pour la deuxième condition dans le cas où $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ ne sont pas entrelacés. *Nous supposons donc qu'elles sont toutes deux satisfaites pour un mot sans signe w.* Le graphe dit d'*entrelacement* $G(w)$ est défini de la manière suivante. Ses sommets sont les entiers $1, \dots, n$ ou les cordes a_i et il y a une arête entre deux cordes si elles se croisent.

Voici un exemple tiré de l'article de Cairns et Elton :

$$w = a_1a_2a_3a_4a_5a_1a_6a_3a_2a_5a_4a_6.$$



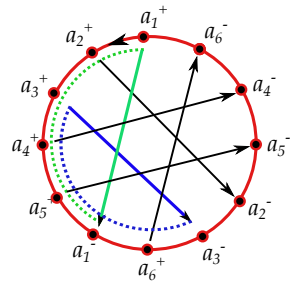
On vérifie facilement que la condition de parité de Gauss est satisfaite ainsi que la deuxième condition dans le cas non entrelacé. Le graphe d'entrelacement est représenté dans la marge.



Choisissons un mot avec signes $\overline{w}$ dont le mot associé sans signe est w, par exemple

$$\overline{w} = a_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4^+ a_5^+ a_1^- a_6^+ a_3^- a_2^- a_5^- a_4^- a_6^- .$$

Puisque nous sommes revenus aux mots avec signes, nous savons comment calculer les nombres d'intersection $\gamma_i.\gamma_j$ des lacets associés. On définit ainsi un élément $f(\alpha) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour chaque arête α de $G(w)$. Par exemple, les deux cordes 1 et 3 se coupent. Sur la figure dans la marge, il n'y a pas de lettre dans l'intervalle de a_1^+ à a_1^- (en vert pointillé) dont l'autre occurrence se trouve entre a_3^+ et a_3^- (en bleu pointillé). Par conséquent, $\gamma_1 \cdot \gamma_3$ est égal à $0+1$ modulo 2 et nous écrivons un 1 sur l'arête qui relie a_1 et a_3 dans le graphe. Comme nous voyons 1 sur certaines arêtes dans notre exemple, ce *mot avec signes* n'est pas réalisable par une courbe immergée dans le plan.



Nous devons maintenant décider s'il peut exister un changement astucieux des signes dans les lettres afin que toutes les arêtes puissent être étiquetées par 0. Cette étiquette $f(\alpha)$ peut être considérée comme une 1-cochaîne f (avec des valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) dans le graphe, donc un 1-cycle (puisqu'il n'y a pas de 2-faces dans un graphe). Examinons comment ce cocycle change lorsque les signes de $\overline{w}$ sont modifiés. Un changement de signe est défini par une fonction $u : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que nous pouvons considérer comme une 0-cochaîne dans notre graphe. J'affirme que le nouveau 1-cocycle f' sur $G(w)$, après le changement de signe associé à u, est simplement égal à $f + du$, où du est le *cobord* de u. Ce du, évalué sur une arête α est par définition la différence (ou la somme puisque nous travaillons modulo 2) des valeurs de u aux deux extrémités de α.

Commençons par ne changer que le signe d'*une lettre*, disons a_k. Pour tout i et j tels que les lettres $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ soient entrelacées, autrement dit pour chaque arête du graphe $G(w)$, nous devons comparer deux nombres d'intersection, pour les deux mots avec signes $\overline{w}$ et $\overline{w}'$ dont les signes ne diffèrent que sur la lettre k. Il est clair que ces nombres d'intersection sont égaux si k est

différent de i et j. Il s'avère qu'ils diffèrent de 1 (modulo 2) quand $k = i$ ou $k = j$. Par exemple, si $k = i$, nous devons comparer :

1. Le nombre de lettres entre a_i^+ et a_i^- dont l'autre occurrence est entre a_j^+ et a_j^-.
2. Le nombre de lettres comprises entre a_i^- et a_i^+ dont l'autre occurrence est comprise entre a_j^+ et a_j^-.

Modulo 2, cette différence est le nombre de lettres entre a_j^+ et a_j^-, *différentes de* a_i. Ce nombre est impair vu la condition de parité de Gauss et vu que $a_i^\pm$ et $a_j^\pm$ sont entrelacés. Ainsi, le changement de signe sur une seule lettre a_k a pour effet de changer de 1 les étiquettes sur les arêtes de $G(w)$ dont a_k est l'extrémité et de ne pas modifier les autres étiquettes. La formule $f' = f + du$ est donc valable dans ce cas simple. Le cas général s'ensuit puisqu'on peut changer les signes un par un.

Donc l'objet qui est bien défini, indépendamment des signes, est la classe de *cohomologie* de f dans $H^1(G(w), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cette classe est nulle si et seulement si le cocycle est nul pour un certain choix des signes, c'est-à-dire si et seulement si le mot sans signe w est réalisable par une courbe générique immergée dans le plan. Enfin, une classe de cohomologie dans un graphe est triviale si et seulement si elle est nulle lorsqu'elle est évaluée sur les cycles. Cela donne un algorithme très efficace. Choisissons n'importe quel mot avec signes $\overline{w}$, calculons le 1-cocycle et additionnons ses valeurs sur les cycles dans le graphe d'entrelacement. Dans notre exemple, le cycle $a_1 \to a_3 \to a_5 \to a_1$ dans $G(w)$ donne une somme totale 1 de sorte que le mot *sans signe* w n'est pas réalisable par une courbe immergée dans le plan. Voir [154] pour un historique du problème jusqu'en 1972 et [155] pour un livre plus récent.

154. Grünbaum (B.), *Arrangements and Spreads*, American Mathematical Society, 1972.

155. Godsil (C.) et Royle (G.), *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

Le genre d'un diagramme de cordes

Soit w un diagramme à n cordes. Prenons une couronne et collons n bandes sur son bord selon w, comme dans la figure page suivante. On obtient une surface $S(w)$ à bord, qui a un certain genre (qui est par définition le genre de la surface fermée obtenue après recollement de disques sur chaque composante

Détour dans le détour.

du bord) : c'est *le genre $g(w)$ du diagramme de cordes*. Il existe une manière intéressante de calculer ce genre, due à Moran [156]. Considérons la matrice $n \times n$ dont les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont égaux à 1 si les deux occurrences de a_i sont entrelacées aux deux occurrences de a_j et 0 sinon. Il s'agit de la *matrice d'incidence* du graphe d'entrelacement, modulo 2.

156. Moran (G.), Chords in a circle and linear algebra over GF(2), *J. Combin. Theory Ser. A*, n° 37, 1984, p. 239-247.

Théorème. *Le genre d'un diagramme de cordes est égal à la moitié du rang de la matrice d'incidence modulo* 2 *du graphe d'entrelacement.*

La preuve donnée par Moran est assez complexe, mais elle peut être présentée de manière plus simple. Les cordes peuvent être vues comme des arcs dans $S(w)$. On peut aussi voir ces cordes comme des arcs dans le disque de dimension 2. Collons le disque et $S(w)$ le long du cercle extérieur pour obtenir une surface $S'(w)$. Les deux copies de chaque corde définissent des lacets $b_1, \ldots, b_n$ qui génèrent l'homologie de $S'(w)$. Dans cette base, l'intersection de b_i et b_j est 0 si i et j ne sont pas entrelacés et 1 s'ils sont entrelacés.

Collons maintenant k disques le long des composantes du bord de $S'(w)$ afin de produire une surface fermée orientée $\widehat{S}(w)$. Le plongement de $S'(w)$ dans $\widehat{S}(w)$ induit une surjection dans la première homologie modulo 2. En effet, tout lacet dans $\widehat{S}(w)$ peut être homotopé loin des disques qui ont été ajoutés. Cependant, ce plongement n'induit pas d'injection en homologie. En effet, lorsque nous collons des disques le long du bord, les composants du bord meurent en homologie puisque ce sont maintenant... des bords de disques. Néanmoins, tout élément du noyau est dans le noyau de la forme d'intersection de $S(w)$ puisqu'il est homologue à une collection de courbes parallèles au bord. La forme d'intersection sur $S'(w)$, modulo son noyau, est donc isomorphe à la forme d'intersection de $\widehat{S}(w)$. Pour une surface fermée orientée de genre g, la forme d'intersection est non dégénérée de rang $2g$. ⊡

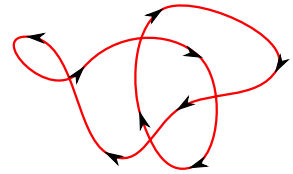
Un théorème de Lovász et Marx

Il existe une autre solution au problème de Gauss. Elle s'accorde très bien avec notre description des permutations

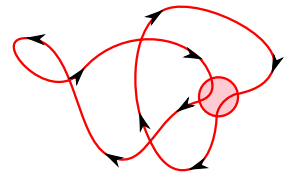
séparables comme celles qui évitent les deux motifs 3142 et 2413. Il est intéressant de noter que ce théorème est publié sans preuve [157]. J'espère que le lecteur prendra plaisir à en trouver une lui-même.

157. Lovász (L.) et Marx (M. L.), A forbidden substructure characterization of Gauss codes, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, nº 38(1-2), 1976, p. 115-119.

Étant donné une courbe planaire immergée générique, il existe deux façons de supprimer un point double donné, illustrées dans la marge. Dans la première, la courbe est divisée en deux composantes, de sorte que nous puissions choisir l'une d'entre elles. Du point de vue combinatoire, ces deux opérations peuvent être exprimées de la manière suivante :

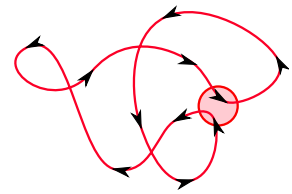


— à partir d'un mot $w = aUaV$, supprimons a et considérons le mot UV^{-1} (tous les mots sont écrits de façon cyclique) ;



— à partir d'un mot $w = aUaV$, supprimons a et toutes les lettres qui apparaissent dans V.

Par conséquent, chaque mot w produit d'autres mots avec moins de lettres. Les figures dans la marge montrent que les nouveaux mots sont réalisables si le premier l'était. Continuons et produisons de nouveaux mots plus courts. On dit que ces mots plus courts sont *contenus* dans le mot initial w.

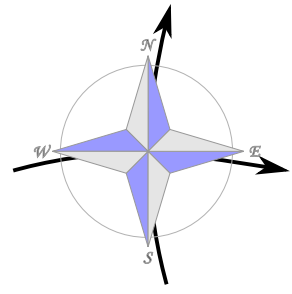


Théorème. *Un mot de Gauss est réalisable si et seulement s'il ne contient pas le mot $a_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_n$ pour n pair.*

Notons que le graphe d'entrelacement de $a_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_n$ est le graphe complet sur n sommets.

Une opérade de Gauss

Définissons une structure d'opérade sur l'ensemble des mots de Gauss. Plus précisément, nous traiterons des courbes immergées orientées génériques *marquées* dans le plan $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. *Génériques* signifie comme précédemment que les points multiples ne sont que des points doubles avec deux tangentes différentes. *Marquées* signifie que nous avons choisi l'un des points doubles comme point de départ et que les autres points doubles sont étiquetés de 1 à n. Puisque le plan et notre courbe sont orientés, tout point double définit une rose des vents : les quatre points

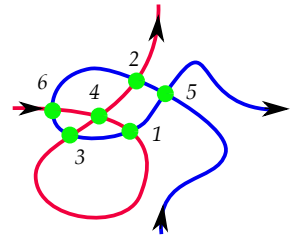


d'intersection avec un petit cercle autour du point peuvent être étiquetés par les directions cardinales.

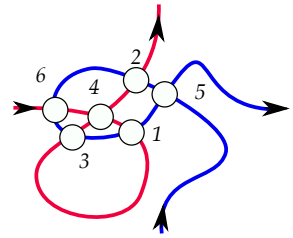
Si le point de départ marqué est envoyé à l'infini par inversion, on obtient une figure composée de deux *longues courbes* orientées γ_b et $\gamma_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (bleue et rouge) telles que

— la courbe bleue (resp. rouge) γ_b (resp. γ_r) va du sud à l'est (resp. de l'ouest au nord) ; plus précisément, $\gamma_b(t)$ est égal à it pour les grandes valeurs négatives de t et à t pour les grandes valeurs positives de t (resp. t et it) ;

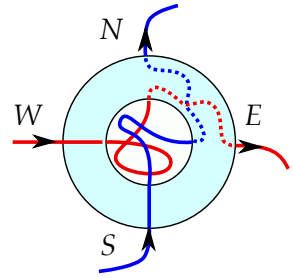
— γ_b et γ_r sont immergées et les seuls points multiples de leur réunion sont des points doubles transversaux étiquetés $1, \dots, n$.



Un élément de Γ_6.



Notons Γ_n l'ensemble des paires de courbes qui satisfont à ces propriétés et qui ont n points doubles, aux difféomorphismes du plan préservant l'orientation près. Il existe une structure d'opérade naturelle sur la réunion des Γ_n. Prenons une paire (γ_b, γ_r) de courbes bleu-rouge comme ci-dessus ayant n points doubles étiquetés. Choisissons n paires de courbes bleu-rouge $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$, $i = 1, \dots, n$, ayant $k_1, k_2, \dots, k_n$ points doubles. Creusons de petits disques autour des points doubles de (γ_b, γ_r). Nous aimerions insérer les $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$ dans le disque portant l'étiquette i, en respectant les directions cardinales. Cependant, cela n'est pas possible. Lorsque nous creusons un trou, les courbes bleues vont du sud vers le nord, les courbes rouges de l'ouest vers l'est, ce qui n'est pas cohérent avec le comportement sud-est et ouest-nord des courbes bleues et rouges $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$ que nous voulons insérer. Il est facile de contourner ce problème. Avant d'insérer dans les $(\gamma_{b,i}, \gamma_{r,i})$, il suffit d'insérer d'abord une couronne standard contenant des arcs orientés intervertissant le nord et l'est. Le résultat de cette opération de copier-coller est une paire de courbes avec $k_1 + \cdots + k_n$ points doubles. C'est l'*opérade de Gauss (symétrique)*. Pouvez-vous trouver un système générateur et des relations entre les générateurs ?



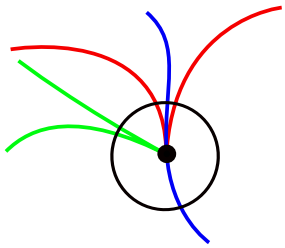
Pour conclure ce chapitre sur une large ouverture, je recommande le livre [158] qui est une introduction remarquable et compréhensible aux invariants de Vassiliev pour les nœuds , où les diagrammes de cordes jouent un rôle crucial.

158. Chmutov (S.), Duzhin (S.) et Mostovoy (J.), *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press, 2012.

Le caractère kanji pour « arbre ». ©

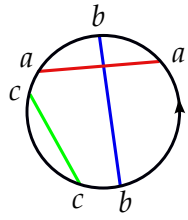
Diagrammes de cordes analytiques : un algorithme

Dans ce chapitre, nous atteignons l'un de nos objectifs : la description algorithmique des diagrammes de cordes qui apparaissent dans le voisinage d'un point singulier d'une courbe analytique réelle plane. Rappelons qu'une telle courbe coupe un petit cercle autour du point singulier en un nombre pair de points qui viennent par paires, chaque paire étant associée à une branche réelle.



Une courbe avec trois branches.

On peut considérer cette structure comme un mot cyclique de longueur $2n$ dans lequel chaque lettre apparaît exactement deux fois (le nom des lettres n'ayant aucune importance). Pour être plus pédant (et précis), nous discutons d'involutions sans point fixe sur $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ aux conjugaisons par des permutations cycliques près. On peut aussi tracer n cordes dans un cercle.



abaccb

Le nombre total de ces *diagrammes de cordes* de longueur $2n$ a été étudié dans de nombreux articles. Voir par exemple [159], fortement motivé par la théorie des nœuds. Le problème serait facile si, au lieu d'un mot cyclique, nous cherchions des mots standards (non cycliques) de longueur $2n$ dans lesquels chaque lettre apparaît exactement deux fois et dans lesquels les noms des lettres n'ont pas d'importance. En effet, il suffit d'écrire la première lettre du mot, puis de choisir l'un des $2n-1$ emplacements restants pour l'autre lettre qui est identique à la première, puis d'écrire la deuxième lettre dans le premier emplacement libre disponible et de choisir l'autre lettre identique dans l'un des $2n-3$ emplacements restants, etc. Le nombre total de ces mots est donc de $(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1$. Ces nombres sont parfois appelés *double*

J'oublie parfois le mot « cordes » dans « diagramme de cordes ».

159. Stoimenow (A.), On the number of chord diagrams, *Discrete Math.*, n° 218(1-3), 2000, p. 209-233.

factorielle et désignés par $(2n-1)!!$. Voir [160] pour une présentation de leurs propriétés combinatoires. Il serait tentant de diviser $(2n-1)!!$ par $2n$ pour tenir compte des permutations cycliques, mais certains mots admettent des symétries et c'est pourquoi la combinatoire est plus subtile. En tout état de cause, il résulte de ces considérations que le nombre de diagrammes de cordes de longueur $2n$ croît super-exponentiellement en n. Nous verrons qu'une très faible proportion des diagrammes de cordes sont *analytiques*, dans le sens où ils sont associés à une singularité d'une courbe analytique plane.

160. Callan (D.), A combinatorial survey of identities for the double factorial, 2009.

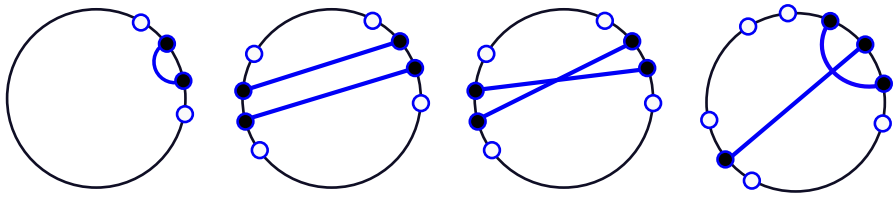
Attention ! La double factorielle $(2n-1)!!$ n'est ni la factorielle de la factorielle ni un point d'exclamation !

Utiliser la formule de Stirling pour montrer que $(2n-1)!$ est équivalent à $\sqrt{2}\left(\frac{2}{e}\right)^n e^{n\log n}$ lorsque n tend vers l'infini. Donc $(2n-1)!!$ croît effectivement de manière super-exponentielle, mais pas beaucoup plus vite. Par exemple, il est petit comparé à $C\lambda^{n^{1+\varepsilon}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 1$.

Une condition nécessaire

Rappelons que dans le premier chapitre de ce livre, nous avons montré que pour toute permutation séparable, il existe deux entiers *consécutifs* dont les images sont consécutives. C'est le point clé qui nous a permis de produire un algorithme qui décide si une permutation est séparable. Nous allons maintenant démontrer une propriété similaire pour les diagrammes de cordes analytiques.

Disons qu'une corde dans un diagramme est *solitaire* si elle relie deux points consécutifs du diagramme comme dans la figure de gauche ci-dessous. Deux cordes sont *parallèles* (resp. *antiparallèles*) si elles sont comme dans la 2e (resp. 3e) figure, c'est-à-dire si les lettres correspondantes a et b se trouvent dans le mot cyclique comme $\cdots ab\cdots ba\cdots$ (resp. $\cdots ab\cdots ab\cdots$). Enfin, deux cordes comme dans la 4e figure constituent une *fourche* ($\cdots a\cdots bab\cdots$).

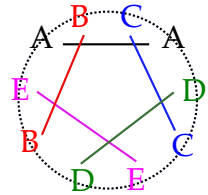


Lemme fondamental ☺. *Tout diagramme de cordes analytique contient une corde solitaire, une paire de cordes parallèles ou antiparallèles, ou une fourche.*

☺ Certains théorèmes ou lemmes sont si célèbres qu'il semble interdit d'utiliser des expressions comme « théorèmes A et B » (Cartan) ou « lemme fondamental » (Ngô).

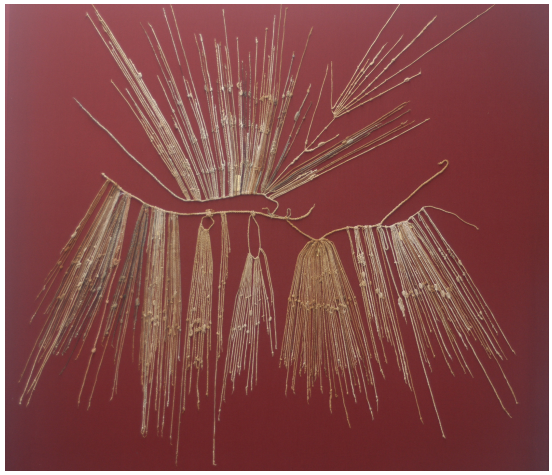
Observons que cela implique immédiatement le théorème énoncé dans la préface :

Théorème. *Il n'existe pas de courbe analytique singulière dans le plan constituée de cinq branches qui coupent un petit cercle comme dans la figure dans la marge.* ⊡



Cinq branches impossibles.

Vers l'éclatement

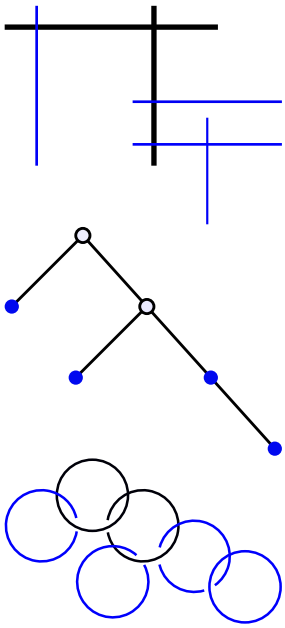


Un magnifique *quipu* : un dispositif à cordes nouées utilisé par les Incas pour enregistrer des informations statistiques. Comme une droite projective éclatée ? (*Centro Mallqui*, à Leymebamba au Pérou.)

©

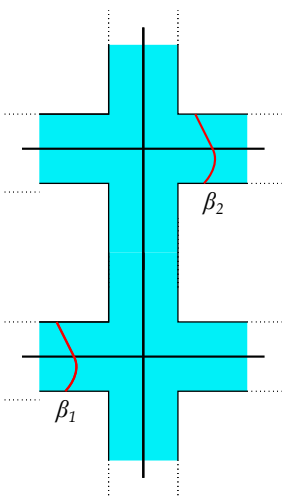
Commençons par un point singulier d'une courbe analytique dans le plan (réel). Éclatons-le une première fois. Le résultat est une courbe dans un ruban de Möbius, dont les points singuliers sont sur le diviseur exceptionnel, l'âme du ruban. Si les choses se passent bien, le point singulier se divise en plusieurs points singuliers, vraisemblablement plus simples. Éclatons-les tous. Il se peut qu'après un éclatement, il reste un point singulier unique sur le diviseur. Dans ce cas, éclatons-le une deuxième fois. Continuons le processus d'éclatement autant de fois que nécessaire. Nous savons qu'après quelque temps, la singularité sera *résolue*. Cela signifie que la transformée stricte de la courbe initiale est maintenant une collection de n courbes analytiques lisses disjointes qui coupent transversalement le diviseur exceptionnel.

Ce diviseur exceptionnel est une réunion de droites projectives réelles qui sont des cercles qui se coupent transversalement.



Considérons le graphe dont les sommets sont ces droites projectives et où une arête relie deux sommets si les droites projectives se coupent. Ce graphe est un arbre, comme on le voit facilement par récurrence. En effet, dans le processus itératif de désingularisation, on éclate à chaque étape un point qui peut être soit un point régulier du diviseur exceptionnel, soit un point d'intersection de deux droites projectives. Dans le premier cas, une nouvelle feuille est greffée à un arbre. Dans le second, une arête est scindée en deux arêtes. La première droite projective, issue du premier éclatement, peut être choisie comme racine de cet arbre.

Il sera commode d'éclater à nouveau chacun des n points du diviseur exceptionnel, si nécessaire, en introduisant de nouvelles droites projectives, afin de s'assurer que chaque droite projective contient à la fin du processus *au plus* un point de la transformée stricte. On peut même supposer que les composantes du diviseur qui rencontrent la transformée stricte sont des feuilles de l'arbre de désingularisation.



Résumons. Étant donné une courbe analytique $\mathscr{C}$ définie dans un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ par une équation $F(x,y) = 0$, on peut construire les objets suivants :

— une surface S dont le bord est orienté et connexe ;

— un diviseur exceptionnel $E \subset S$, constitué d'un certain nombre de cercles qui se coupent transversalement, chaque paire se rencontrant au plus une fois. Le graphe d'intersection associé est un arbre enraciné. Le plongement $E \subset S$ est une équivalence d'homotopie.

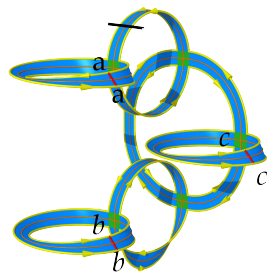
— une réunion disjointe finie $\widehat{\mathscr{C}}$ d'arcs analytiques *lisses* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ dans S qui coupent transversalement E. L'intersection de $\widehat{\mathscr{C}}$ avec une composante de E est vide si cette composante n'est pas une feuille de l'arbre et contient au plus un point si c'est une feuille. On peut supposer aussi que $\widehat{\mathscr{C}}$ est transverse au bord de S et que chaque arc β_i coupe le bord en deux points.

— une application analytique de contraction $\Psi : S \to \mathbb{R}^2$, qui écrase E sur l'origine, qui est un difféomorphisme de $S \setminus E$ sur un petit disque ponctué et qui réduit $\widehat{\mathscr{C}}$ à notre courbe singulière $\mathscr{C}$.

Rappelons que chaque lacet de S peut être orientant ou désorientant. Soit γ une courbe fermée immergée dans une surface, passant une fois par un point x. Lorsque la surface est éclatée en x, l'auto-intersection *modulo* 2 de la transformée stricte de γ (dans la surface éclatée) est égale à l'auto-intersection de γ (dans la surface d'origine) plus 1. Dans la construction par récurrence, lorsqu'une droite projective apparaît pour la première fois dans le diviseur exceptionnel, elle est l'âme d'un ruban de Möbius, d'auto-intersection 1. Par la suite, certains de ses points peuvent être éclatés. Chacun de ces éclatements permute le caractère orientant/désorientant d'une composante du diviseur. Les figures précédentes dans la marge (six droites, un arbre à six sommets et six cercles) correspondent au même exemple que celui qui a été analysé dans le chapitre sur les colliers : il est obtenu après six éclatements. J'ai indiqué en bleu les composantes qui correspondent à des rubans de Möbius.

Certaines des composantes de E coupent la courbe désingularisée $\widehat{\mathscr{C}}$: elles définissent certaines des feuilles de l'arbre de désingularisation. Disons que ces feuilles sont *colorées*. Observons que certaines feuilles peuvent être non colorées.

Notons que si nous choisissons une certaine orientation de chaque composante de E, l'arbre correspondant est planaire de sorte que les fils de n'importe quel nœud sont ordonnés linéairement. Le changement d'orientation inverse cet ordre.



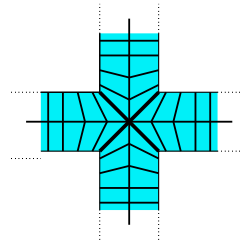
Un exemple

Observons le collier dans la marge. C'est le même objet dont il a déjà été question dans le chapitre sur les colliers de Möbius. Six éclatements ont produit six rubans : deux orientables, quatre non orientables. Le diviseur exceptionnel est constitué des six âmes des six rubans. La courbe désingularisée est constituée de trois arcs rouges (a, b et c), qui coupent chacun le bord de S en deux points. En haut, on voit en noir la transformée stricte de l'axe des y. En faisant le tour du bord de S, on lit le diagramme de corde analytique correspondant. Il suffit de suivre la flèche et de lire *abacbc*. Avouons qu'il n'est pas si facile de suivre les flèches !

Démonstration du lemme fondamental

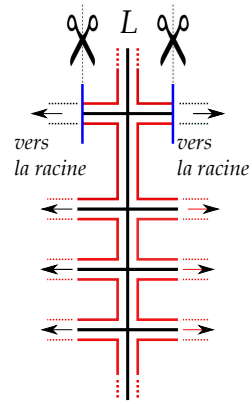
Une première observation triviale est que l'opération de suppression d'une corde dans un diagramme analytique le transforme en un autre diagramme analytique. Cela correspond à la suppression d'une branche.

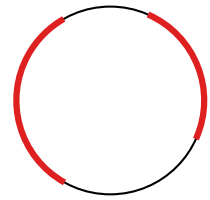
Commençons par un diagramme de cordes w associé à une singularité d'une courbe analytique plane. Considérons un arbre de désingularisation comme précédemment. Il existe une projection π de la surface S sur le diviseur exceptionnel E qui est une équivalence d'homotopie. Pour tout point $x \in$ E, la fibre $\pi^{-1}(x)$ est un arc qui relie deux points du bord si x est un point régulier et une croix si x est l'intersection de deux cercles.

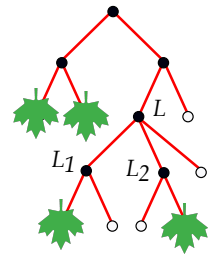


Les fibres de π. Ne pas confondre π (de S vers le diviseur E) avec Ψ (de S vers un disque) qui est une contraction de E en un point.

Soit L un nœud de l'arbre, c'est-à-dire une des droites projectives qui constituent le diviseur exceptionnel E. Il existe une chaîne unique de nœuds qui vont de L à la racine. Coupons deux arcs disjoints dans S comme sur la figure, afin de déconnecter L de la racine dans S. Les quatre extrémités de ces arcs décomposent le cercle bordant S en quatre intervalles. Deux d'entre eux (en rouge) correspondent à « ce qui est dans L ou en dessous de L » dans l'arbre. En faisant le tour du bord de S et en lisant le diagramme de cordes, on trouve donc deux intervalles disjoints de lettres, en dessous de L, dont la réunion est stable par l'involution qui envoie chaque occurrence d'une lettre vers l'autre occurrence. Notons que ces intervalles peuvent être vides s'il n'y a pas de feuille colorée en dessous de L. S'il y a une feuille colorée sous L, au moins un des deux intervalles est non vide, mais il se peut qu'un seul ne soit pas vide. En résumé, *chaque nœud* L *de l'arbre définit un diagramme de cordes* w(L) *qui est un sous-diagramme du diagramme original* w *et qui est « connexe » dans le sens où ses lettres forment un ou deux intervalles dans* w.





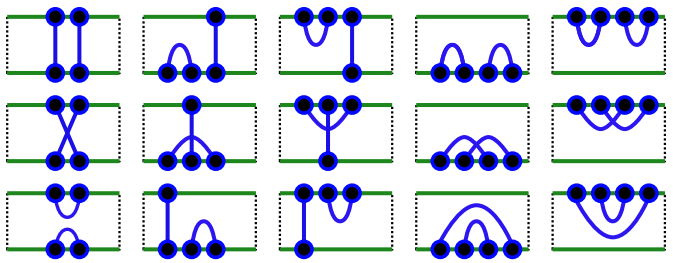


Les feuilles colorées sont vertes !

Imaginons un arbre enraciné comme un arbre généalogique, la racine étant le membre fondateur de la famille. Chaque nœud a un certain nombre de descendants, dont certains sont des feuilles colorées. Soit L l'un des plus jeunes membres de la famille ayant au moins deux feuilles colorées comme descendants. Parmi les fils de L, notons $L_1, \ldots, L_k$ ceux qui ont au moins un descendant coloré (ordonnés ainsi le long de L). Nous avons $k \geqslant 2$ car sinon

l'un des fils de L aurait au moins deux descendants colorés. Pour la même raison, chaque L_i a un unique descendant coloré.

Découpons la surface S comme dans la figure en marge, en déconnectant L_1 et L_2 de la racine et de toutes les autres feuilles colorées. Comme précédemment, cela définit deux intervalles (verts) sur le bord de S dont la réunion contient exactement quatre points de notre diagramme initial, associés à deux cordes. Deux cordes dans deux intervalles peuvent être organisées des quinze façons suivantes :



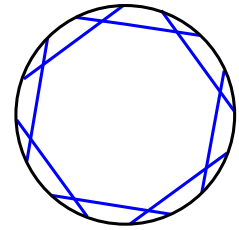
Dans chaque cas, il y a une corde solitaire, une fourche, ou une paire de cordes parallèles ou antiparallèles. ⊡

Plus de diagrammes non analytiques

Nous avons observé que la suppression de certaines lettres dans un diagramme de cordes analytique produit un autre diagramme analytique. Disons qu'un diagramme est *non analytique de base* s'il est non analytique mais devient analytique dès qu'une seule corde est supprimée. Il est clair qu'un diagramme de cordes est analytique si et seulement s'il ne contient pas de *diagramme de cordes non analytique de base*. Rappelons qu'une permutation est séparable si et seulement si elle *ne contient pas* la permutation de Kontsevitch $(2,4,1,3)$ ou sa permutation inverse $(3,1,4,2)$, de sorte que dans ce cas il n'y a que deux permutations de base non séparables. La situation est plus compliquée dans le cas des diagrammes de cordes.

Théorème. *Il existe un nombre infini de diagrammes de cordes non analytiques de base.*

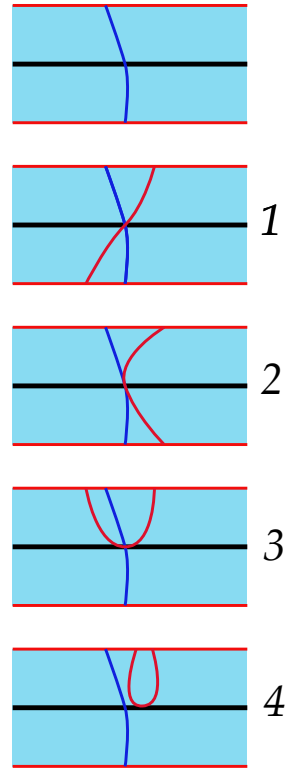
Voici un exemple qui sera noté $\mathscr{C}_n$ ($n \geqslant 5$). Considérons les $2n$ points de $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ordonnés de façon naturelle sur le cercle. Le diagramme de corde associe $2k$ et $2k+3$ pour $k = 1, \ldots, n$. Pour $n = 5$, il s'agit de notre exemple précédent de diagramme non analytique à cinq cordes. Ce diagramme $\mathscr{C}_n$ ($n \geqslant 5$) n'est pas analytique pour la même raison que dans le cas $n = 5$. Il nous reste à montrer que si l'on supprime une lettre, le diagramme restant est analytique. Pour cela, nous avons besoin d'une *condition suffisante d'analyticité*. Celle-ci sera fournie par un algorithme très simple qui décide si un diagramme de cordes est analytique.



Théorème. *L'algorithme suivant permet de déterminer si un diagramme de cordes est analytique :*

1. *S'il n'y a ni corde solitaire, ni fourche, ni paire de cordes parallèles ou antiparallèles, le diagramme n'est pas analytique.*
2. *S'il y a une corde solitaire, supprimons-la et continuons. S'il y a une fourche, supprimons la « petite corde » et gardons le manche. S'il y a une paire de cordes parallèles ou antiparallèles, supprimons l'une d'entre elles et continuons.*
3. *Si nous obtenons un diagramme vide, c'est que le diagramme original était analytique.*

La démonstration est facile. Il faut montrer que si w est un diagramme et si $\overline{w}$ est le nouveau diagramme avec une corde de moins obtenu après une étape de l'algorithme, alors w est analytique si $\overline{w}$ est analytique. La réciproque est facile : si w est analytique, $\overline{w}$ l'est aussi puisqu'il correspond à la suppression d'une branche. Il faut maintenant *ajouter* une branche supplémentaire.

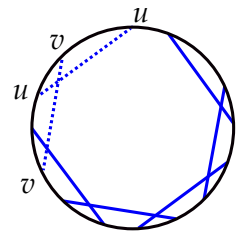


Choisissons une désingularisation d'un point singulier sur une surface S. Une corde correspond à un arc lisse γ (en bleu dans la marge) qui relie deux points du bord, transverse au diviseur en un point x. Ajoutons une nouvelle courbe analytique lisse (rouge) γ' dans S, également transverse au diviseur, très proche de γ et transverse à γ, comme en 1/. L'implosion de S produit un nouveau point singulier avec une branche de plus. Il est clair que le nouveau diagramme possède une corde de plus qui est parallèle ou antiparallèle à la corde initiale, selon les

orientations sur le bord. Choisissons maintenant γ' comme dans 2/ avec une tangence quadratique avec γ en x et nous obtenons l'autre situation de parallélisme ou d'antiparallélisme.

Si nous voulons créer une fourche avec un manche donné, il suffit d'ajouter une courbe lisse γ' proche de γ avec une tangence quadratique avec le diviseur comme en 3/.

Enfin, si nous voulons ajouter une corde solitaire juste après une lettre donnée, on procède comme en 4/. ⊡



Testons notre algorithme sur le diagramme précédent sur $\mathscr{C}_n$ ($n \geqslant 5$). En supprimant une corde, nous obtenons une chaîne non cyclique de $n-1$ cordes. Les deux premières cordes u et v définissent une fourche, on peut donc supprimer la première corde et continuer jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule corde. Ce diagramme est donc analytique. Il existe en effet une infinité de diagrammes non analytiques de base.

Avec un ordinateur

Afin de compter les diagrammes de cordes analytiques, utilisons un ordinateur et essayons de petites valeurs de n. C'est facile. On dresse d'abord la liste de tous les mots possibles de longueur $2n$ dans lesquels chaque lettre apparaît deux fois. La seule subtilité est de tenir compte du caractère cyclique du mot considéré. Voici le résultat pour $n \leqslant 7$. Dans le tableau suivant,

n	2	3	4	5	6	7
mots	3	15	105	945	10 395	135 135
diagrammes de cordes	2	5	18	105	902	9 749
à symétrie près	2	5	17	79	554	5 283

— *mots* signifie « mots de longueur $2n$ dans lesquels chaque lettre apparaît deux fois » ; le nombre de ces mots est la double factorielle de $2n-1$;

— *les diagrammes de cordes*, tels que nous les avons définis, sont des mots aux permutations cycliques près ;

— l'image d'un diagramme de cordes par une symétrie par rapport à une droite est un autre diagramme, qui peut être le

même ou pas ; la ligne « à symétrie près » compte le nombre de mots à ces symétries diédrales près.

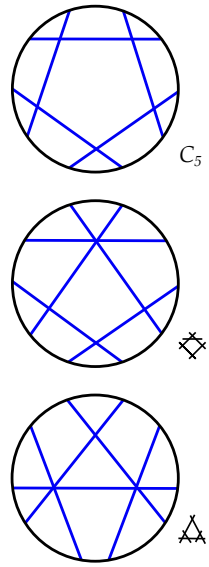
Nous comptons ensuite le nombre de diagrammes *analytiques*. Ceci n'est en principe pas difficile, en utilisant l'algorithme qui a été décrit précédemment. Le résultat est le suivant :

n	2	3	4	5	6	7
diagrammes analytiques	2	5	18	102	817	7 641
à symétrie près	2	5	17	76	499	4 132

Dans l'*Encyclopédie en ligne des suites d'entiers* : A007769, A054499, A279207, A279208. Neil Sloane a ajouté les deux dernières suites en se basant sur une version préliminaire de ce livre.

Donc *tous les diagrammes sont analytiques pour* $n \leqslant 4$.

Parmi les 105 *diagrammes avec* 5 *cordes, seuls les* 3 *exemples dans la marge ne sont pas analytiques*. Le premier diagramme est déjà connu, sous le nom de $\mathscr{C}_5$. Désignons les autres par et . Il ne m'a pas été difficile de deviner le premier, mais je dois admettre que je n'ai pas trouvé les deux autres à la main, mais à l'aide d'un ordinateur.

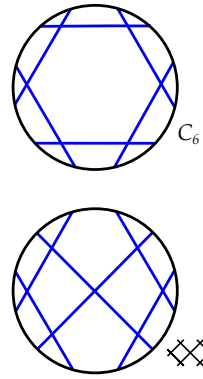


Les 3 diagrammes de cordes non analytiques de base avec 5 cordes.

Parmi les 902 *diagrammes avec* 6 *cordes,* 85 *ne sont pas analytiques*. Cependant, la non-analyticité de la plupart d'entre eux est due au fait que l'un de leurs sous-diagrammes n'est pas analytique. Il n'y a que deux diagrammes à 6 cordes qui sont *basiques* : ils sont non analytiques et tous leurs sous-diagrammes sont analytiques. Observons que le premier est le membre $\mathscr{C}_6$ de la famille infinie des diagrammes de base $\mathscr{C}_n$. Il correspond à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ où tout nombre pair k (mod 12) est connecté à $k+3$ (mod 12). Le second sera noté .

Parmi les 9 749 *diagrammes avec* 7 *cordes,* 2 108 *ne sont pas analytiques.* Le seul exemple de base non analytique est $\mathscr{C}_7$.

Dans le chapitre suivant, je montrerai que mon ordinateur a trouvé *tous* les diagrammes de base non analytiques.



Les 2 diagrammes de cordes non analytiques de base avec 6 cordes.

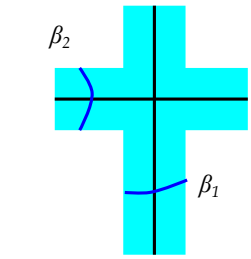
Diagrammes de cordes marqués

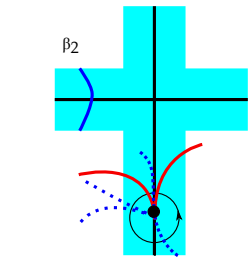
Pour conclure ce chapitre et le placer dans un contexte plus général, décrivons la structure d'opérade qui se trouve derrière le rideau. Il convient d'abord d'introduire un léger renforcement de la notion de diagramme de cordes analytique.

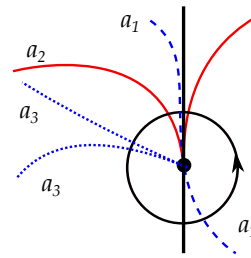
Lorsque nous avons démontré que notre algorithme décide si un diagramme est analytique, le point clé était la possibilité d'insérer une nouvelle branche. Il s'avère que des singularités plus complexes peuvent également être insérées, comme je l'explique maintenant. Considérons une désingularisation d'une courbe $\mathscr{C}$ comme précédemment, de sorte que nous ayons une surface S, un diviseur E et une collection de courbes lisses $\beta_1, \ldots, \beta_n$ qui coupent E transversalement en un nombre fini de points, $p_1, \ldots, p_n$, où n est le nombre de branches réelles. Choisissons l'un de ces points, disons p_1. Choisissons maintenant une *autre* courbe singulière $\mathscr{C}_1$ avec n_1 branches réelles et supposons qu'elle ne contienne pas l'axe des y. Supprimons β_1 et remplaçons-la par une copie de $\mathscr{C}_1$ dans la surface S, de telle sorte que l'axe des y de $\mathscr{C}_1$ soit appliqué sur le diviseur E et que le point singulier de $\mathscr{C}_1$ soit appliqué sur p_1. Nous pouvons maintenant contracter la réunion de cette copie de $\mathscr{C}_1$ et de $\beta_2, \ldots, \beta_n$. Le résultat est un nouveau point singulier avec $n + n_1 - 1$ branches : une des branches de $\mathscr{C}$ a été remplacée par une copie de $\mathscr{C}_1$.

Examinons l'effet de ce type d'opérations sur les diagrammes de cordes associés. En regardant le diagramme associé à $\mathscr{C}_1$, nous voyons que l'axe des y décompose le mot de longueur $2n_1$ en deux composantes, « Gauche » et « Droite ». Dans le nouveau diagramme de cordes avec $2(n + n_1 - 1)$ lettres, une paire de lettres identiques de l'ancien diagramme avec $2n$ lettres a été remplacée par deux intervalles, Gauche et Droite. Il faut cependant faire attention au fait que, dans ce processus, l'ordre des lettres dans Gauche et Droite a pu être inversé. En effet, les deux intersections du bord orienté de S avec β_1 pourraient être de signes différents. De plus, l'insertion de $\mathscr{C}_1$ dans S peut se faire de quatre façons puisque S n'est pas orientable et que E n'est pas orienté. Bien entendu, on peut procéder de la même manière avec toutes les autres branches de $\mathscr{C}$, en utilisant d'autres courbes singulières $\mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_n$. Ceci suggère la définition :

Définition. Un *diagramme de cordes marqué* est une collection de $2n$ points distincts $a_1^{\pm 1}, \ldots, a_n^{\pm 1}$ dans la réunion de deux côtés opposés d'un carré $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$ (aux homéomorphismes préservant l'orientation de chaque côté près).







Droite = a_1a_2, Gauche = $a_1a_2a_3a_3$

Notons que Gauche ou Droite peuvent être vides.

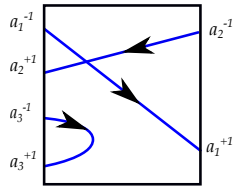
Dans une équation $F(x, y) = 0$, on peut remplacer (x, y) par $(-x, y)$ ou $(x, -y)$ ou encore (x, xy). La transformation $(x, y) \mapsto (x, xy)$ préserve chaque droite verticale, écrase l'axe $x = 0$ sur l'origine, et inverse l'orientation pour $x < 0$. Ce n'est pas une surprise : il s'agit d'une application de type contraction. Le carré de cette transformation préserve l'orientation sur chaque droite verticale (pour $x \neq 0$).

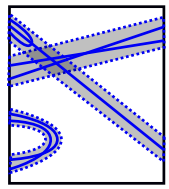
Comparés aux diagrammes standards, les diagrammes marqués ont en plus une partie droite et une partie gauche. Chaque corde a_i est par ailleurs *étiquetée* avec un nombre i de 1 à n et *orientée* de a_i^{-1} vers a_i^{+1}.

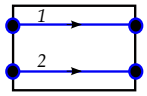
Soit $\mathscr{ACM}$ l'ensemble des diagrammes de cordes marqués qui sont *analytiques*, c'est-à-dire qui proviennent d'une courbe analytique $F(x,y) = 0$ qui ne contient pas l'axe des y. Remarquons que l'analyticité d'un diagramme marqué ne dépend ni de l'orientation des cordes ni de l'étiquetage.

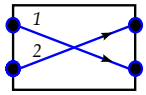
Le lecteur a sans doute deviné la structure de l'opérade sur $\mathscr{ACM}$. Soit w un diagramme analytique de cordes marqué avec n cordes. Étant donné n diagrammes analytiques de cordes marqués $w_1,\dots,w_n$, avec $k_1,\dots,k_n$ cordes, définissons l'action de w sur $(w_1,\dots,w_n)$ de la manière suivante. Dessinons w et épaississons chaque corde a_i de w, en créant des rectangles. Utilisons les a_i^{-1} et les a_i^{+1} comme côtés gauche et droit de ces nouveaux rectangles. Insérons $w_1,\dots,w_n$ dans ces rectangles en respectant les étiquettes et les orientations. Renommons les cordes de 1 à $k_1+k_2+\cdots+k_n$ en utilisant l'ordre lexicographique. Le résultat est un autre diagramme de cordes analytiques marqué puisque cette opération correspond à l'insertion de courbes analytiques décrite précédemment. Par conséquent, $\mathscr{ACM}$ a bien une structure d'opérade naturelle. Pour être complet, observons que l'action naturelle des groupes symétriques, par permutation des étiquettes des cordes, montre qu'il s'agit d'une opérade symétrique.

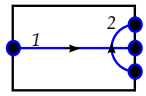
Le rôle des étiquettes et des orientations est simplement de donner les informations pertinentes sur le diagramme marqué qui est inséré dans chaque corde, et de quelle manière.

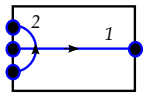


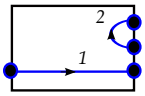


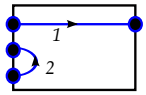










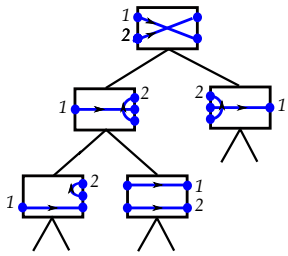


Bornons le nombre de diagrammes de cordes

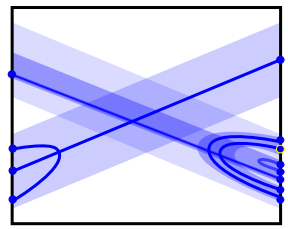
Il serait intéressant d'avoir des informations précises sur le nombre a_n de diagrammes analytiques avec n cordes. Par exemple, une formule explicite pour la série génératrice $\sum a_n t^n$ donnerait le taux de croissance exponentiel exact de a_n. Malheureusement, je n'ai pas pu calculer cette série ☹. Dans cette section, je montre que le lemme fondamental fournit au moins une borne raisonnable.

Considérons un arbre planaire fini enraciné *binaire*. Équipons chacun de ses nœuds intérieurs (y compris la racine) de l'un des

six exemples de diagrammes marqués à deux cordes représentés dans la marge. Par insertion récursive des diagrammes des fils dans le diagramme de leur parent, on obtient un diagramme analytique marqué et donc un diagramme analytique en oubliant les étiquettes, les orientations et les deux côtés du carré.



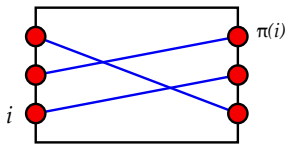
J'affirme que tous les diagrammes analytiques avec n cordes sont produits par cette recette. C'est vrai pour $n = 2$, car les deux diagrammes avec 2 cordes (entrelacées ou non entrelacées) apparaissent lorsqu'on oublie le marquage dans les six exemples. Soit w un diagramme analytique avec $n+1$ cordes et appliquons le lemme fondamental. On trouve donc $\cdots aa\cdots$, $\cdots ab\cdots ba\cdots$, $\cdots ab\cdots ab\cdots$ ou $\cdots b\cdots aba\cdots$ dans le diagramme. Dans le cas de aa, on appelle b la lettre qui vient *avant* a dans l'ordre cyclique. Notre algorithme supprime a et produit un diagramme analytique $\bar{w}$ avec n cordes, pour lequel nous pouvons appliquer la récurrence. Cela signifie que $\bar{w}$ peut être « habillé » avec des étiquettes et des orientations de telle sorte qu'il soit produit par un arbre binaire, comme ci-dessus. Notre diagramme w est obtenu à partir de $\bar{w}$ en remplaçant une corde par deux cordes. Il est facile de vérifier que nos six exemples sont suffisants pour réaliser ce dédoublement à l'aide d'une insertion dans l'opérade. Ainsi w est construit à partir d'un arbre binaire à $n+1$ feuilles avec la même recette.



Un arbre binaire enraciné avec n feuilles a $n-1$ nœuds intérieurs (y compris la racine) de sorte qu'il y a 6^{n-1} étiquettes possibles sur les nœuds intérieurs. Le nombre d'arbres binaires planaires avec n feuilles est donné par le $(n-1)$-ième nombre de Catalan. Nous obtenons donc une estimation approximative :

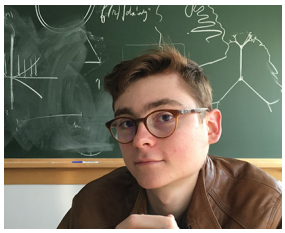
Théorème. *Le nombre a_n de diagrammes de cordes analytiques avec n cordes est inférieur à 6^{n-1} fois le $(n-1)$-ième nombre catalan C_{n-1}.*

Rappelons que $\frac{1}{n}\log C_n$ converge vers $\log 4$ lorsque n tend vers l'infini. Donc $\limsup \frac{1}{n}\log a_n \leqslant \log(24)$. Toute permutation sur n lettres peut être vue comme un diagramme à n cordes, tel que toutes ses cordes relient des points situés de part et d'autre d'un carré. En particulier, les permutations séparables produisent des diagrammes analytiques marqués. On a déjà compté les permutations séparables, d'où une borne inférieure pour la croissance de a_n : $\liminf \frac{1}{n}\log a_n \geqslant \log(3+2\sqrt{2})$.



Les $2^6 = 64$ hexagrammes chinois se composent de six barres horizontales qui peuvent être connexes ou non connexes. Ils apparaissent dans le *Yi Jing* (« Livre des transformations ») écrit il y a plus de 2500 ans et sont couramment utilisés comme outil de divination. À l'origine, ils étaient ordonnés d'une manière mystérieuse, généralement attribuée au roi Wen, que les érudits tentent toujours de déchiffrer. Il y a mille ans, Shao Yong les a ordonnées comme le montre l'image, en cercle et en carré. En 1701, le jésuite Joachim Bouvet a envoyé une copie de cette configuration à Leibniz, qui l'a expliquée en termes de développements binaires et a écrit l'un des premiers exposés systématiques de l'arithmétique en base 2. Il s'agit là d'un exemple intéressant d'interaction entre la philosophie orientale et la science occidentale. Je reviendrai un peu plus en détail sur ce *Yi Jing* dans la dernière section de ce chapitre. ©

Diagrammes de cordes analytiques : graphes d'entrelacement



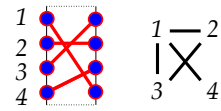
Christopher-Lloyd Simon.

L'un des aspects agréables des promenades aléatoires, c'est qu'elles sont pleines de surprises. Christopher-Lloyd Simon est un élève à l'*École normale supérieure de Lyon* qui a gentiment accepté de lire la première version de ce livre. Alors qu'il lisait une version préliminaire du chapitre précédent, il a eu la brillante idée de transférer la discussion des diagrammes de cordes aux *graphes d'entrelacement* qui leur sont associés. Nous avons déjà rencontré ce concept dans notre étude des mots de Gauss associés à des courbes immergées génériques dans le plan. Étant donné un diagramme de cordes, l'ensemble des sommets de son graphe d'entrelacement est simplement l'ensemble des cordes et les arêtes relient les cordes entrelacées (c'est-à-dire qui se croisent). Tous les graphes ne proviennent pas d'un diagramme et un graphe peut provenir de plusieurs diagrammes. Néanmoins, les graphes d'entrelacement provenant de diagrammes analytiques se sont avérés faciles à analyser. Cerise sur le gâteau, ces graphes ont été introduits il y a quarante ans dans un contexte totalement différent et sont très bien compris. Grâce à cette nouvelle perspective, nous allons obtenir la liste complète des diagrammes de cordes non analytiques de base.

Retour aux permutations séparables

Afin de motiver ce qui suit, revisitons rapidement la situation beaucoup plus simple des échanges polynomiaux (aussi appelés permutations séparables) que nous avons examinés dans les premiers chapitres.

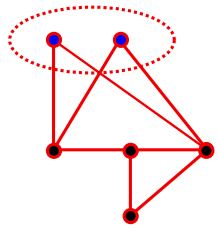
Soit π une permutation de $\{1,\dots,n\}$. Le *graphe de permutation* $G(\pi)$ associé à π a pour sommets $\{1,\dots,n\}$. Une arête relie i et j si π inverse l'ordre de (i,j). C'est aussi le graphe d'entrelacement du diagramme de cordes marqué associé, avec n lettres de chaque côté.



Une permutation et son graphe.

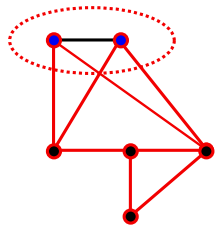
Nous savons que si π est un échange polynomial, au moins deux entiers consécutifs ont des images consécutives. Les cordes correspondantes ont donc la propriété que toute corde qui coupe l'une d'entre elles coupe l'autre.

En termes de graphe $G(\pi)$, cela suggère la définition suivante. Deux sommets x et y dans un graphe sont appelés *jumeaux* s'ils ont les mêmes voisins (différents de x ou y). Ils sont appelés *vrais* ou *faux jumeaux* selon l'existence d'une arête qui les relie. Deux jumeaux dans un graphe peuvent être fusionnés en un seul sommet, ce qui produit un graphe plus petit avec un sommet en moins.



Faux jumeaux. Observons que deux sommets isolés sont de faux jumeaux. Je ne suis pas responsable de la terminologie qui est classique et plus commode que celle de jumeaux dizygotes.

Par conséquent, le graphe $G(\pi)$ issu d'un échange polynomial π contient au moins deux jumeaux, qui correspondent à deux entiers consécutifs i et $i+1$ tels que $\pi(i+1) = \pi(i) \pm 1$. Fusionner les jumeaux dans le graphe revient à fusionner les deux éléments i et $i+1$. Les échanges polynomiaux sont caractérisés par le fait que l'itération de cette procédure de fusion conduit finalement à la permutation triviale avec $n = 1$.



Vrais jumeaux (identiques ou monozygotes).

Définition. Un graphe fini est appelé *cographe* s'il peut être ramené à un graphe trivial à 1 sommet en fusionnant successivement des jumeaux.

Le terme « *co*graphe » vient du fait que le *com*plementaire d'un cographe est aussi un cographe. Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ ont les mêmes sommets et deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G.

Proposition. *Une permutation est un échange polynomial si et seulement si son graphe de permutation est un cographe.*

Je viens d'expliquer pourquoi le graphe de permutation d'un échange polynomial est un cographe. Pour démontrer la

réciproque, il suffit de montrer que si $G(\pi)$ est un cograph, il existe deux entiers consécutifs avec des images consécutives. La démonstration se fait par récurrence sur n. Si $i < j$ sont des faux (resp. vrais) jumeaux, l'image par π de l'intervalle $\{i, i+1, \ldots, j\}$ est $\{\pi(i), \pi(i+1), \ldots, \pi(j)\}$ (resp. $\{\pi(j), \pi(j+1), \ldots, \pi(i)\}$). Si $j \geqslant i+2$, l'image $\pi(\{i, \ldots, j-1\})$ est également un intervalle et nous appliquons l'hypothèse de récurrence à la restriction de π à $\{i, \ldots, j-1\}$ de sorte que l'on trouve deux entiers consécutifs avec des images consécutives. ⊡

Les cographes ont été introduits dans les années 1970 sous différents noms (D^*-graphes, graphes de Dacey héréditaires et graphes de 2-parité : voir [161] pour des références). Ils ne sont pas très difficiles à décrire. Je vais énumérer quelques-unes de leurs propriétés et laisser les démonstrations (élémentaires) au lecteur.

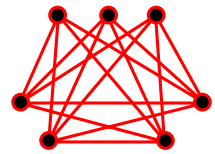
161. Brandstädt (A.), Le (V. B.) et Spinrad (J. P.), *Graph Classes: A Survey*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphie, 1999.

Dans ce qui suit, tous les graphes sont finis, sans boucles ni arêtes multiples. Un graphe connexe définit un espace métrique sur son ensemble de sommets. La distance entre deux sommets est par définition la longueur du plus court chemin qui les relie.

Les théoriciens des graphes disent qu'un sous-graphe H d'un graphe G est *induit* si toute arête de G qui relie deux sommets de H est aussi une arête de H.

Théorème. *Les propriétés suivantes d'un graphe fini* G *sont équivalentes :*

1. G *est un cograph.*
2. G *est le graphe de permutation d'un échange polynomial.*
3. *Deux sommets d'une même composante connexe de* G *sont reliés par un chemin d'une longueur maximale de* 2.
4. *Il n'existe pas de sous-graphe induit* P_4 *à quatre sommets comme dans la marge.*



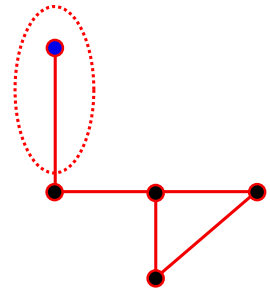
Un cograph.

P_4

Remarquons que les graphes de permutation associés aux deux permutations interdites de Kontsevitch $(2,4,1,3)$ et $(3,1,4,2)$ sont tous deux isomorphes à P_4.

Graphes compressibles

En partant d'un arbre, on peut en enlever les feuilles et recommencer jusqu'à ce que l'arbre soit complètement dénudé. Disons qu'un sommet d'un graphe est *pendant* s'il est adjacent à un sommet unique. Tout arbre peut être construit par ajouts successifs de sommets pendants, en commençant par l'arbre à un seul sommet.



Sommet pendant.

Définition. Un graphe fini est *compressible* s'il peut être ramené à un graphe à 1 sommet en appliquant deux types d'opérations élémentaires : la suppression d'un sommet pendant et la fusion de jumeaux.

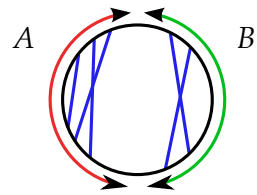
Si vous êtes plus constructif que destructeur, vous pouvez exprimer la même chose d'une autre manière. Commençons par le graphe trivial avec un sommet et appliquons deux types d'opérations : ajouter un sommet pendant ou créer une paire de jumeaux. La seconde opération consiste simplement à dupliquer un sommet et à relier le jumeau nouvellement né au reste du graphe comme l'était le sommet d'origine. Ensuite, il faut décider si l'on veut des vrais ou des faux jumeaux.

Le point clé est le suivant.

Proposition. *Un diagramme de cordes est analytique si et seulement si son graphe d'entrelacement est compressible.*

Cela découlera de la description algorithmique des diagrammes analytiques donnée dans le chapitre précédent.

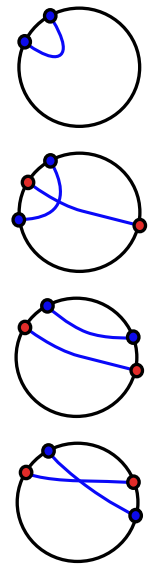
Avant la démonstration, commençons par une remarque élémentaire en guise d'entrée en matière.



Soit w un diagramme et A un sous-ensemble de ses $2n$ lettres sur le cercle. Je dirai que A est *stable* par w si toute corde dont une extrémité est dans A a son autre extrémité dans A. Autrement dit, A est un sous-diagramme de cordes w_{A} de w.

Supposons qu'il existe un *intervalle* A stable par w et que B soit son complémentaire. Il est clair que le graphe d'entrelacement $\mathrm{G}(w)$ de w est la réunion disjointe des graphes $\mathrm{G}(w_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{G}(w_{\mathrm{B}})$ de w_{A} et w_{B}. Il en résulte que $\mathrm{G}(w)$ est compressible si

et seulement si $G(w_A)$ et $G(w_B)$ sont compressibles. Notre algorithme montre que si w_A et w_B sont analytiques, w l'est aussi. Réciproquement, si w est analytique, leurs sous-diagrammes w_A et w_B le sont aussi.



Démontrons maintenant la proposition.

Commençons par un diagramme analytique w. Si deux cordes de w sont parallèles ou antiparallèles, les sommets associés dans le graphe d'entrelacement sont jumeaux et notre algorithme les fusionne. Une fourche donne un sommet pendant dans le graphe et l'algorithme supprime la corde courte et conserve le manche. Une corde solitaire définit un sommet isolé, qui est supprimé par l'algorithme. Donc le graphe d'entrelacement associé à un diagramme analytique est compressible.

Pour la réciproque, nous montrons que tout diagramme w dont le graphe d'entrelacement $G(w)$ est compressible contient une corde solitaire, une fourche ou une paire de cordes parallèles ou antiparallèles.

Une corde solitaire dans un diagramme correspond à deux lettres identiques consécutives $\cdots aa \cdots$ dans le mot cyclique.

Une fourche correspond à un sous-mot de la forme $\cdots aba \cdots$.

Une paire de cordes parallèles (resp. antiparallèles) correspond à $\cdots ab \cdots ba \cdots$ (resp. $\cdots ab \cdots ab \cdots$).

Notre démonstration se fera par l'absurde. Considérons un contre-exemple possible w à l'assertion précédente *avec un nombre minimal de cordes*. Alors $G(w)$ est compressible et w ne contient ni corde solitaire, ni paire de cordes parallèles ou antiparallèles, ni fourche.

Puisque $G(w)$ est compressible, il existe un sommet α isolé, ou pendant, ou qui fait partie d'une paire de jumeaux. Soit $\overline{w}$ le diagramme obtenu en supprimant α de w.

Bien sûr, $G(\overline{w})$ est compressible de sorte que, par minimalité, $\overline{w}$ contient ou un sous-mot $\cdots aa \cdots$, ou $\cdots aba \cdots$, ou $\cdots ab \cdots ba \cdots$, ou $\cdots ab \cdots ab \cdots$. Le problème est qu'il s'agit de sous-mots de $\overline{w}$ et non de w, qui contient également deux copies de la lettre α qui pourraient s'insérer dans les sous-mots ci-dessus.

Notons que par minimalité, tout intervalle stable par w est soit vide, soit tout.

A priori,

— 0, 1 ou 2 lettres α pourraient s'insérer dans le sous-mot ;

— le sous-mot de $\overline{w}$ pourrait correspondre à une corde solitaire, ou à une fourche, ou à une paire de cordes parallèles ou antiparallèles ;

— α pourrait être isolé, pendant ou jumeau, vrai ou faux, dans $\mathrm{G}(w)$.

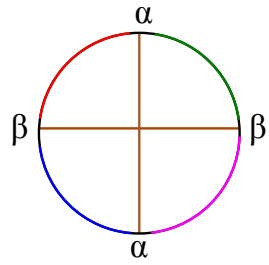
Cela fait $3 \times 4 \times 4$ cas à examiner ! Heureusement, plusieurs cas peuvent être étudiés simultanément.

Cette démonstration au cas par cas n'est pas particulièrement agréable. Vous pouvez la sauter si vous le souhaitez, mais si vous le faites, vous devrez compatir à ma peine pour énumérer tous les cas un par un.

J'utilise le symbole ↯ pour indiquer une « contradiction ».

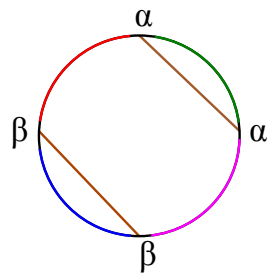
1. *Si aucune lettre* α ne se trouve dans les sous-mots ci-dessus, il n'y a pas de problème : notre corde solitaire, ou fourche, ou paire de cordes parallèles ou antiparallèles dans $\overline{w}$ ont la même propriété pour w ↯.
2. Si α est isolé dans $\mathrm{G}(w)$, cela signifie qu'aucune corde ne coupe α. Par conséquent, α décompose le cercle en deux intervalles stables, qui doivent être vides ↯.
3. *Si deux lettres* α sont présentes, elles ne peuvent pas être consécutives, car cela obligerait la corde α à être solitaire dans w ↯.

   Donc, toujours dans ce cas, nous devons examiner $\cdots a\alpha b\alpha a\cdots$, ou $\cdots a\alpha b\cdots b\alpha a\cdots$, ou $\cdots a\alpha b\cdots a\alpha b\cdots$. On obtient respectivement une fourche (α, b), une paire de cordes parallèles (α, b) ou des cordes antiparallèles (α, b) dans w ↯.
4. *En insérant un* α *dans une corde solitaire*, on obtient $\cdots a\alpha a\cdots$ qui produit une fourche dans w avec un manche α ↯.



Jusqu'à présent, nous n'avons pas utilisé le fait que α soit pendant ou jumeau. Nous l'utiliserons dans les cas restants, lorsqu'un seul α entre dans une fourche ou une paire de cordes parallèles ou antiparallèles de $\overline{w}$.

Si α est pendant, soit β la seule corde de w qui coupe α. Si α a des jumeaux, désignons l'un d'entre eux par β. Les deux cordes α et β déterminent quatre intervalles dans le cercle, *en excluant* α *et* β, que j'appellerai *secteurs*. Si α est pendant, la réunion de deux secteurs qui sont du même côté de α est stable. Si α et β sont jumeaux, la réunion des secteurs opposés est stable.



5. *Supposons maintenant qu'une seule lettre α entre dans $\cdots aba\cdots$, ou $\cdots ab\cdots ba\cdots$, ou $\cdots ab\cdots ab\cdots$ et que l'une des deux lettres a ou b soit égale à β.* Alors les deux lettres α et β sont consécutives dans w. Ceci implique que l'un des secteurs est vide.

   5.1. Dans le cas pendant, cela implique que l'autre secteur, du même côté de α, soit un intervalle stable et donc également vide. Ainsi, α, β est une fourche dans w dont le manche est β ↯.

   5.2. Dans le cas jumeau, cela implique que le secteur opposé soit un intervalle stable, donc vide. Donc α, β est une paire de cordes parallèles ou antiparallèles dans w ↯.

6. Enfin, *supposons qu'une seule lettre α entre dans $\cdots aba\cdots$, ou $\cdots ab\cdots ba\cdots$, ou $\cdots ab\cdots ab\cdots$ et qu'aucune des deux lettres a et b ne soit égale à β.*

   6.1. Supposons que a et b soient des cordes parallèles ou antiparallèles dans $\overline{w}$. En insérant un α dans ab, on obtient $\cdots a\alpha b\cdots ba\cdots$ ou $\cdots a\alpha b\cdots ab\cdots$. Des lettres consécutives ba (ou ab), il résulte que ces deux occurrences sont du même côté de la corde α. Des lettres consécutives $a\alpha b$ dans w, il résulte que ces deux autres occurrences de a et b sont dans des côtés différents de α. La corde α ne coupe donc qu'une seule des cordes a et b.

      6.1.1. Si α est pendant, cela oblige a ou b à être égal à β ↯.

      6.1.2. Si α et β sont jumeaux, cela n'est pas possible. ↯.

   6.2. Supposons que (a, b) soit une fourche dans $\overline{w}$. En insérant une lettre α dans $\cdots aba\cdots$ on obtient $\cdots a\alpha ba$ ou $\cdots ab\alpha a$, de sorte que la corde α doit couper la corde a.

      6.2.1. Si α est pendant, cela force $a = \beta$ ↯.

      6.2.2. Si α et β sont des jumeaux, les lettres consécutives $a\alpha ba$ montrent que les deux lettres a se trouvent dans des côtés opposés de α, donc sur des secteurs opposés. Donc $b = \beta$ ↯.

Ceci termine la démonstration. Ouf ! ⊡

Nous devons maintenant comprendre la nature des graphes compressibles.

Compressible, distance-héréditaire

Les graphes compressibles ont été définis par plusieurs auteurs il y a quarante ans, sous différents noms, avec des motivations très différentes. Nous verrons que ces graphes sont très proches des arbres.

Howorka [162] a défini les *graphes distance-héréditaires* en 1977.

Définition. Un graphe fini G est *distance-héréditaire* si pour tout sous-graphe induit connexe H ⊂ G, la distance entre deux sommets de H *dans* H est égale à la distance entre les mêmes sommets *dans* G.

Par exemple, un arbre est *distance-héréditaire* et un cycle de longueur au moins égale à 5 ne l'est pas. Il suffit de choisir H comme le sous-graphe induit défini par un chemin à l'intérieur du cycle dont la longueur est supérieure à la moitié de la longueur du cycle (en bleu sur la figure).

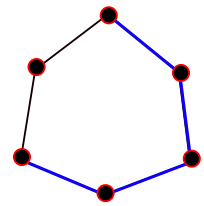
Considérons un graphe fini et choisissons une longueur pour chaque arête, qui peut être n'importe quel nombre réel strictement positif. Définissons la longueur d'un chemin comme la somme des longueurs de ses arêtes et la distance entre deux sommets comme la plus petite longueur d'un chemin qui les relient. On parle alors d'un *graphe métrique*.

Nous cherchons une caractérisation des espaces métriques (généralement appelés *arbres métriques*) qui proviennent de cette manière d'*arbres*. Voici la réponse. Soit (E, d) un espace métrique fini. Choisissons quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 dans E et calculons les sommes des longueurs des trois paires de diagonales :

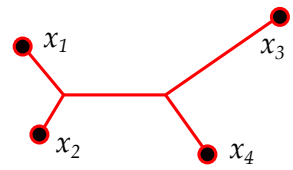
$$d(x_1,x_2)+d(x_3,x_4)\,;\ d(x_1,x_3)+d(x_2,x_4)\,;\ d(x_1,x_4)+d(x_2,x_3).$$

Soit s (resp. m, l) le plus petit (resp. le moyen, le plus grand) de ces trois nombres : $s \leqslant m \leqslant l$. Il s'avère qu'un espace métrique fini est isométrique à un sous-ensemble d'un arbre métrique si et seulement si $m = l$ pour tout quadruplet de points. Ceci n'est pas difficile à démontrer et je le laisse comme exercice M25. Le lecteur paresseux pourra voir la démonstration dans ce court article [163].

162. Howorka (E.), A characterization of distance-hereditary graphs, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, n° 28(112), 1977, p. 417-420.

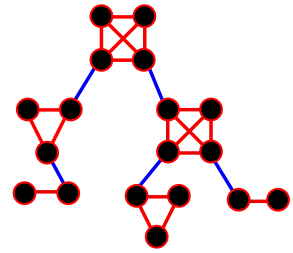


Un cycle de longueur ⩾ 5 n'est pas distance-héréditaire.



163. Buneman (P.), A note on the metric properties of trees, *J. Comb. Theory, Ser. B*, n° 17, p. 48-50.

Nous devrions être prudents. Un graphe dont toutes les arêtes ont une longueur de 1 peut être isométrique à un sous-ensemble d'un arbre métrique sans être lui-même un arbre. Regardez l'exemple dans la marge.



Un graphe de blocs.

En théorie des graphes, ces graphes sont appelés *graphes de blocs*. Pour les construire, il faut partir d'un arbre, supprimer certains de ses sommets et les remplacer par des *cliques*, c'est-à-dire des graphes finis où deux sommets quelconques sont adjacents, comme sur la figure. Je propose à mon lecteur de démontrer qu'il s'agit bien d'une caractérisation des graphes de blocs (M15 ; si besoin, voir [164]).

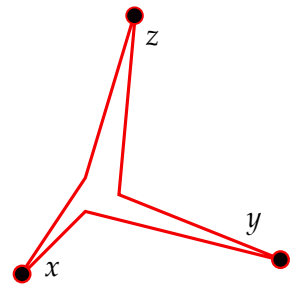
164. Harary (F.), A characterization of block-graphs, *Canad. Math. Bull.*, nº 6, 1963, p. 1-6.

Dans les années 1980, Gromov a développé une théorie géométrique pour les *espaces hyperboliques* qui a eu une très forte influence sur la théorie combinatoire et géométrique des groupes (qui ne fait malheureusement pas partie de notre promenade).

La définition est la suivante. Un espace métrique (E, d) est appelé *hyperbolique* s'il existe $\delta \geqslant 0$ tel que pour tout quadruplet de points comme ci-dessus, m et l soient « presque égaux », c'est-à-dire $l - m \leqslant \delta$. Notons que tout espace métrique fini est trivialement hyperbolique (pour δ suffisamment grand). Donc ce concept n'est pertinent que pour la géométrie *globale*.

Un espace métrique (E, d) est *géodésique* si pour tout couple de points (x, y) il existe un plongement *isométrique* $i : [0, d(x, y)] \to \mathrm{E}$ tel que $i(0) = x$ et $i(d(x, y)) = y$.

Il existe de nombreuses formulations équivalentes de cette propriété, la plus populaire (pour les espaces métriques géodésiques) étant que tous les triangles géodésiques sont *minces*. Considérons trois points x, y, z et choisissons trois géodésiques $[x, y], [x, z], [y, z]$ qui les relient. Tout point de $[x, y]$ doit être à une certaine distance uniformément bornée de la réunion $[x, z] \cup [y, z]$, indépendamment du choix de x, y, z (voir la figure).



165. Ghys (É.) et De la Harpe (P.), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhäuser, 1990.

Ce concept est remarquablement robuste. Par exemple, le revêtement universel d'une variété riemannienne compacte à courbure négative est hyperbolique. Ces espaces métriques sont bien approchés par des arbres, d'une manière quantitative. Pour en savoir plus sur cette théorie, le lecteur est invité à lire [165].

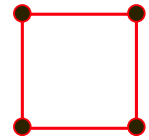
En 1986, Bandelt et Mulder ont publié un article [166] qui propose des caractérisations purement métriques des graphes distance-héréditaires, proches des conditions d'hyperbolicité de Gromov.

166. Bandelt (H. J.) et Mulder (H. M.), Distance-hereditary graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, nº 41(2), 1986, p. 182-208.

Définition. Un graphe fini G est *arborescent* si pour tout quadruplet de sommets x_1, x_2, x_3, x_4, deux des trois nombres suivants sont égaux :

$$d(x_1,x_2)+d(x_3,x_4), \quad d(x_1,x_3)+d(x_2,x_4), \quad d(x_1,x_4)+d(x_2,x_3).$$

Le lecteur a sans doute deviné que toutes ces définitions s'avèrent équivalentes.



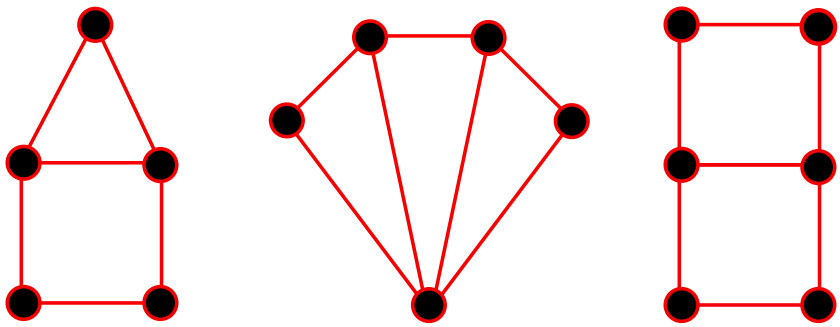
Un cycle de longueur 4 est arborescent mais n'est pas un arbre.

Théorème. *Soit* G *un graphe fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. G *est le graphe d'entrelacement d'un diagramme de cordes analytique.*
2. G *est compressible.*
3. G *est distance-héréditaire.*
4. G *est arborescent.*
5. G *ne contient pas de cycle d'une longueur d'au moins cinq, ni de maison, de pierre précieuse ou de domino en tant que sous-graphe induit.*

Exercice. Montrer qu'un graphe arborescent est hyperbolique au sens de Gromov avec $\delta = 2$.

La *maison*, la *pierre précieuse* et le *domino* sont illustrés ci-dessous.



Toutes les équivalences du théorème précédent (à l'exception bien sûr du premier point) sont démontrées dans les articles mentionnés ci-dessus. Cependant, je proposerai bientôt quelques démonstrations élémentaires.

Il est maintenant temps de récolter les fruits de notre travail et d'obtenir une description très simple des diagrammes de cordes analytiques.

Il ne faut pas s'étonner que les graphes d'entrelacement de , et soient la maison, la pierre précieuse et le domino.

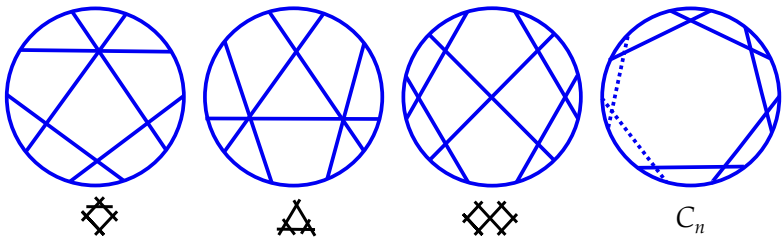
Exercice. Montrer que , et sont les seuls diagrammes de cordes dont les graphes d'entrelacement sont la maison, le domino et la pierre précieuse.

De même, nous avons déjà décrit le diagramme de cordes non analytique $\mathscr{C}_n$ défini par $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ ($n \geqslant 5$), où il existe une corde qui relie $2k$ et $2k+3$ (pour $k = 1, \dots, n$). Son graphe d'entrelacement est un cycle de longueur n.

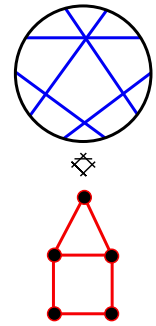
Exercice. Montrer que $\mathscr{C}_n$ est le seul diagramme de cordes dont le graphe d'entrelacement est un cycle de longueur n.

Enfin, notons qu'un sous-diagramme de cordes définit un sous-graphe induit dans le graphe d'entrelacement. Nous obtenons donc une description très satisfaisante des diagrammes de cordes analytiques. J'imprime le théorème suivant en bleu car il constitue un moment fort de notre promenade.

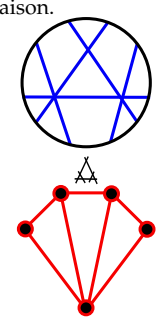
Théorème. *Un diagramme de cordes est analytique si et seulement s'il ne contient pas* , , *ou* C_n *($n \geqslant 5$) comme sous-diagramme de cordes.*



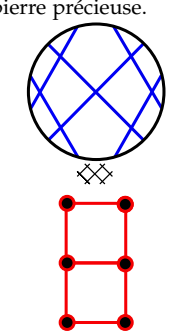
Remarquons l'analogie complète avec notre caractérisation des *échanges polynomiaux* comme les *permutations séparables*, qui sont à leur tour précisément les permutations qui ne contiennent pas les exemples de Kontsevitch $(2,4,1,3)$ et $(3,1,4,2)$.



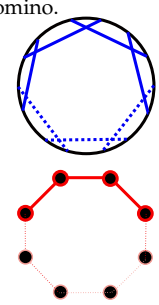
La maison.



La pierre précieuse.



Le domino.



$\mathscr{C}_n$ et son graphe d'entrelacement : le n-cycle.

Quelques démonstrations

Présentons maintenant les démonstrations des équivalences des définitions de la section précédente. Elles sont pour la plupart élémentaires et je suggère au lecteur intéressé d'essayer de les démontrer seul. Il est important de faire des dessins. Dans ce cas précis, il était probablement plus difficile de trouver les définitions significatives que de démontrer leur équivalence.

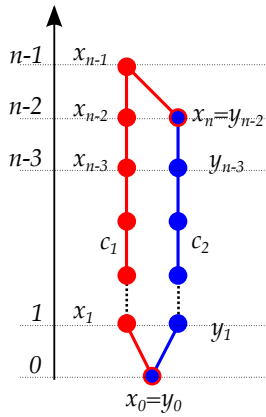
Aucun *n'est un sous-graphe induit* $\Longrightarrow$ *distance-héréditaire.*

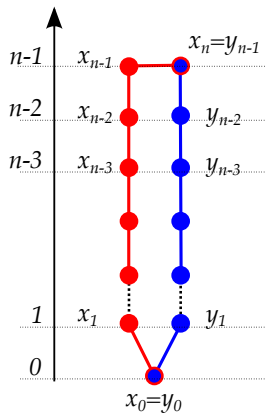
Soit H un sous-graphe induit d'un graphe G. Relions deux sommets p et q de H à la distance n *dans* H par un chemin $c = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (avec $p = x_0$ et $q = x_n$) dans H. Deux sommets x_i et x_j sont adjacents si et seulement si i et j sont consécutifs car sinon il y aurait un raccourci. En d'autres termes, le chemin c est induit dans G. Donc pour montrer qu'un graphe est distance-héréditaire, il faut démontrer que la distance entre les extrémités de tout chemin induit dans G est égale à la longueur du chemin.

Supposons qu'aucun ne soit induit dans G. Choisissons un chemin induit $c_1 = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et montrons, par récurrence sur n, que la distance dans G entre x_0 et x_n est exactement n.

Relions x_0 à x_n par un plus court chemin $c_2 = (y_0, y_1, \ldots, y_l)$ dans G (avec $y_0 = x_0$ et $y_l = x_n$). Bien sûr, c_2 est aussi induit et $d(y_0, y_i) = j$ pour $0 \leqslant i \leqslant l$. Par récurrence, $d(x_0, x_i) = i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Donc l est égal à $n-2$, $n-1$ ou n. Nous montrons que les deux premiers cas ne sont pas possibles. Supposons que $l = n-2$ ou $n-1$. Par récurrence, on peut supposer que les deux chemins c_1 et c_2 ne se coupent qu'à leurs extrémités : tout autre point d'intersection pourrait être utilisé comme point de départ de plus courts chemins c_1' et c_2'.

Dessinons une figure dans le plan de telle sorte que la hauteur d'un sommet de c_1 ou c_2 soit la distance à x_0. Les cas $l = n-2$ et $l = n-1$ sont représentés dans la marge. Les sommets de c_1 sont rouges et les sommets de c_2 sont bleus. La réunion de c_1 et c_2 définit un cycle c dans G. La longueur de c est d'au moins 5. Le cycle c ne peut pas être induit puisqu'il n'existe pas de cycle



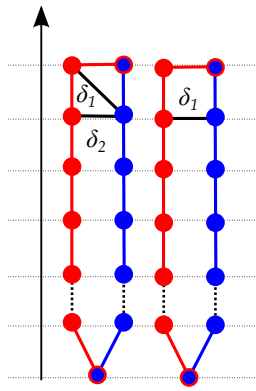


induit de longueur $\geqslant 5$. Il doit donc exister des diagonales qui relient les sommets de c_1 aux sommets de c_2.

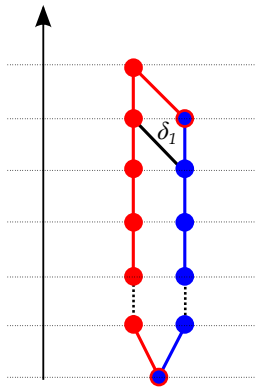
Par l'inégalité triangulaire, la différence de hauteur entre les deux extrémités d'une diagonale ne peut être que -1, 0 ou 1. De plus, les diagonales relient des points de couleurs différentes.

Ordonnons les diagonales (x_i, y_j) de haut en bas, c'est-à-dire que (x_i, y_j) est avant $(x_{i'}, y_{j'})$ si $j > j'$ ou si $j = j'$ et $i > i'$.

Essayons maintenant de construire l'échelle, une diagonale à la fois. La règle du jeu est la suivante. Nous devons dessiner une suite ordonnée de diagonales $\delta_1, \delta_2, \ldots$ en respectant les conditions ci-dessus et sans créer de induit. Remarquons que la diagonale δ_k ainsi que la partie de c qui se trouve au-dessus d'elle définissent un cycle. Toute corde de ce cycle doit être l'une des cordes choisies précédemment $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$.



Dans le cas $l = n - 1$, il n'y a que deux possibilités pour la première diagonale δ_1. Elle peut être (x_{n-1}, y_{n-2}) ou (x_{n-2}, y_{n-2}). Dans le cas $l = n - 2$, il n'y a qu'une seule possibilité pour δ_1.



Il faut ensuite essayer de choisir la deuxième diagonale δ_2, en évitant . Seul un des trois choix de δ_1 nous permet de le faire.

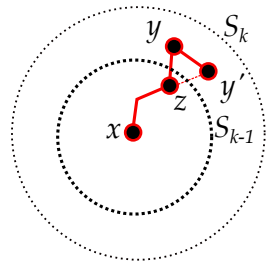
Essayons enfin de tracer la troisième diagonale, dans le seul cas où nous pourrions tracer δ_1 et δ_2. Il n'est pas possible de continuer sans créer un des graphes interdits. ⊡

Distance-héréditaire $\Longrightarrow$ *compressible.*

Voici tout d'abord une remarque élémentaire.

Choisissons un sommet x dans un graphe distance-héréditaire connexe G et cherchons le plus grand k tel que la sphère S_k dans G de rayon k et de centre x ne soit pas vide. Soit C une composante connexe de S_k. Si C ne contient qu'un seul élément, alors c'est un sommet pendant dans G.

Choisissons deux sommets y et y' dans C qui sont adjacents dans C. Choisissons un point z adjacent à y, à la distance $k-1$ de x. Choisissons une chaîne c de longueur $k-1$ de x à z et appelons c' la chaîne de longueur $k+1$ obtenue en ajoutant l'arête entre z et y et de y à y'. Puisque la distance entre x et y' est exactement k, cette chaîne ne peut pas être induite et y' doit être adjacent



à z. Cela implique que deux points de C sont simultanément adjacents ou non à tout point z à la distance $k-1$ de x. Donc C ne peut pas contenir un chemin induit P_4 de longueur 3, puisqu'il produirait avec z une pierre précieuse dans G, qui n'est pas distance-héréditaire. Par conséquent, C est un cograph et contient en particulier une paire de jumeaux. Par l'observation précédente, deux jumeaux dans C sont des jumeaux dans G. ⊡

Compressible $\Longrightarrow$ *arborescent.*

Facile par récurrence. Prenons quatre points dans un graphe, supprimons un sommet pendant ou fusionnons deux jumeaux. L'un des quatre points peut être le sommet qui a été supprimé. Si c'est le cas, remplacons-le par l'autre extrémité de l'arête supprimée. Examinons les points correspondants dans le graphe dépouillé (en tenant compte, par exemple, du fait que deux de nos quatre points pourraient être les deux jumeaux qui ont été fusionnés). Appliquons l'hypothèse de récurrence. ⊡

Arborescent $\Longrightarrow$ *pas de* *induit.*

C'est évident puisqu'on vérifie facilement qu'aucun de ces exemples de graphes n'est arborescent. ⊡

Un autre détour. Le seul but de cette section est de décrire la structure des graphes compressibles.

Graphes complètement décomposables

Les graphes qui peuvent être ramenés à un point en supprimant uniquement les sommets pendants sont des arbres. Les graphes qui peuvent être ramenés à un point en fusionnant uniquement des paires de jumeaux sont des cographes.

Je préfère le terme « décomposable » à celui de « séparable », qui est également courant dans ce domaine, puisque nous avons déjà utilisé le mot « séparable » pour les permutations.

Mon lecteur a probablement deviné que les graphes compressibles ne devraient pas être loin d'être des arbres. C'est effectivement le cas, comme je l'explique maintenant.

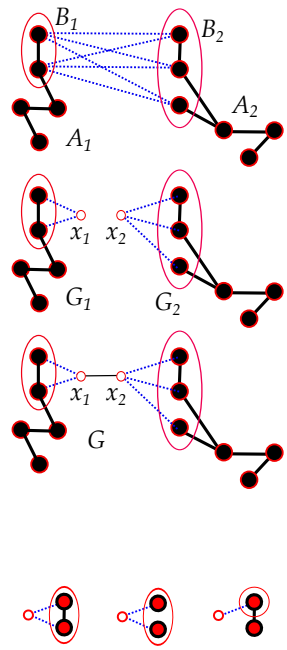
Soit G un graphe connexe fini. Supposons que ses sommets aient été partitionnés en deux parties A_1 et A_2. Soit $B_1 \subset A_1$ (resp. $B_2 \subset A_2$) l'ensemble des sommets de A_1 (resp. A_2) qui sont adjacents à un sommet de A_2 (resp. A_1). *Supposons que* chaque *élément de* B_1 *soit adjacent à chaque élément de* B_2. Cette condition est trivialement satisfaite si A_1 ou A_2 ne contient qu'un (ou zéro !) élément ; nous supposons donc que A_1 et A_2 contiennent

au moins deux éléments chacun. Dans cette situation, le graphe G est dit *décomposable* et la partition A_1, A_2 est une *division*. Afin de garder trace de cette décomposition, créons deux graphes G_1 et G_2 de la manière suivante. L'ensemble des sommets de G_1 (resp. G_2) est A_1 plus un sommet supplémentaire x_1 (resp. x_2) appelé *sommet de contrôle*. Comme pour les arêtes de G_1 (resp. G_2), choisissons les arêtes de G plus des arêtes supplémentaires qui relient x_1 (resp. x_2) à tous les éléments de B_1 (resp. B_2).

Le graphe G peut être reconstruit à partir de (G_1, x_1) et (G_2, x_2) par une construction élémentaire du *joint*. Remarquons que les points de contrôle x_1 et x_2 ne sont pas des sommets de G : ils ne sont utiles que pour définir les arêtes qui relient les deux parties.

Notons que lorsque A_2 contient deux éléments, comme dans la marge, le graphe G possède un sommet pendant ou une paire de jumeaux.

Hammer et Maffray [167] ont introduit une autre définition en 1987.



Remarquons l'analogie avec les arbres. Un graphe connexe fini est un arbre si et seulement si chaque sous-graphe connexe induit contient une *arête de coupe*, c'est-à-dire une arête qui le rend non connexe.

Définition. Un graphe fini est *complètement décomposable* si chaque sous-graphe connexe induit ayant au moins quatre sommets est décomposable.

Il n'est pas difficile de démontrer que les graphes (connexes) complètement décomposables sont précisément les graphes (connexes) compressibles.

En effet dans la construction du joint, si G_1 et G_2 sont compressibles, il en est de même pour G, de sorte que les graphes complètement décomposables sont compressibles, par récurrence.

Inversement, nous avons vu qu'un sommet pendant ou une paire de jumeaux donne lieu à une décomposition. Les graphes compressibles sont donc décomposables et même complètement décomposables, puisqu'un sous-graphe induit d'un graphe compressible est décomposable.

Afin de donner une description précise des graphes complètement décomposables, voici d'abord l'important théorème de *décomposition* pour les graphes finis connexes *généraux*.

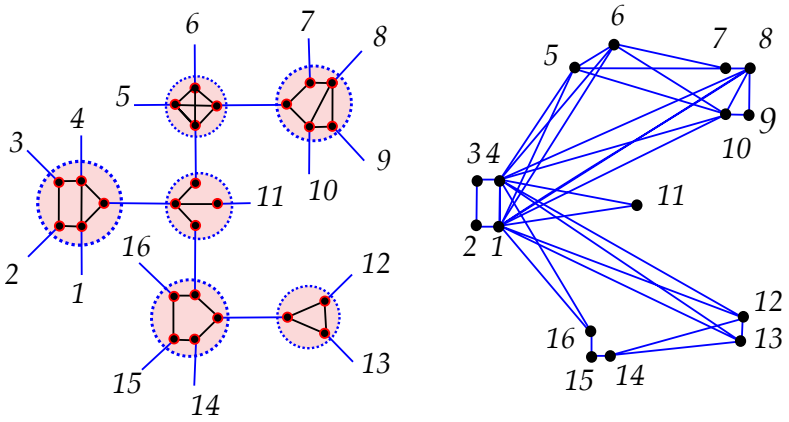
167. Hammer (P. L.) et Maffray (F.), Completely separable graphs, *Discrete Appl. Math.*, nº 27(1-2), p. 85-99.

Si un graphe fini connexe G est décomposable, considérons-le comme le joint de G_1 et G_2 comme précédemment. Ensuite, essayons de décomposer G_1 et G_2, etc., jusqu'à ce que les graphes résultants deviennent non décomposables. Le résultat final de cette décomposition en « morceaux premiers » peut être décrit de manière pratique par un *arbre décoré avec des graphes*, comme expliqué ci-dessous.

Il consiste en un arbre T où chaque nœud interne x est équipé d'un graphe fini connexe G_x. De plus, une bijection a été choisie entre les sommets de G_x et les arêtes sortant du nœud x dans T. Supposons que la valence de chaque nœud soit au moins égale à 3. Étant donné une telle structure, nous construisons un graphe G(T) qui est une « composition des G_x contrôlés par T ». La définition est la suivante.

Les sommets de G(T) sont les feuilles de T. Pour comprendre les arêtes de G(T), voici d'abord un dessin, inspiré par l'article de Gioan et Paul [168] qui ont introduit ce concept d'*arbre décoré avec des graphes*. Nous voyons un arbre avec 16 feuilles et 6 nœuds internes, en rose. Le graphe associé, avec 16 sommets, est dessiné à droite.

168. Gioan (E.) et Paul (C.), Split decomposition and graph-labelled trees: characterizations and fully dynamic algorithms for totally decomposable graphs, *Discrete Appl. Math.*, n° 160(6), 2012, p. 708-733.



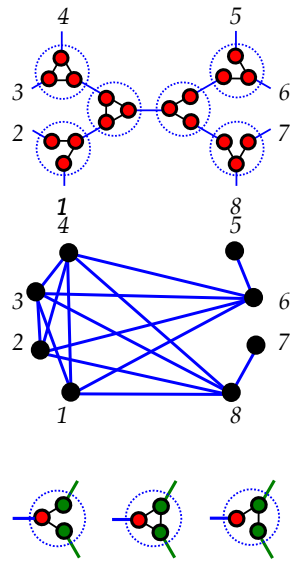
Choisissons deux feuilles de T et relions-les par le plus court chemin de l'arbre. Pour chaque nœud x visité par ce chemin, il existe une arête d'entrée et une arête de sortie. Ces deux arêtes définissent à leur tour deux sommets de G_x. Deux sommets de

G(T), c'est-à-dire deux feuilles de T, sont adjacents dans G(T) si pour chaque nœud x visité par ce chemin, les deux sommets correspondants de G_x sont adjacents dans G_x. Les sommets des G_x généralisent les deux sommets de contrôle, comme dans le cas simple où T ne contient qu'une seule arête.

Le résultat principal, démontré par Cunningham et Edmonds [169] en 1980 (et reformulé par Giona et Paul), est que *tout graphe connexe fini est obtenu par une telle construction dans laquelle les* G_x *sont indécomposables, d'une manière essentiellement unique*. L'*existence* de cette division est facile. La partie difficile est « l'unicité essentielle » que je ne définis pas puisque je n'en aurai pas besoin.

169. Cunningham (W. H.) et Edmonds (J.), A combinatorial decomposition theory, *Canad. J. Math.*, nº 32(3), 1980, p. 734-765.

Revenons aux graphes complètement décomposables. Dans ce cas particulier, les G_x doivent *avoir au plus* 3 *sommets*. En effet, ce sont des sous-graphes indécomposables et induits de G, de sorte que l'affirmation découle de la définition de la décomposabilité complète. Cela donne une description géométrique assez précise des graphes complètement décomposables. Prenons un arbre tel que chaque nœud ait une valence de 3. Pour chaque nœud, choisissons un graphe connexe à 3 sommets (il n'y a pas trop de choix !) et construisons un arbre étiqueté comme dans la marge. Tous les graphes complètement décomposables sont produits de cette manière.



Ce n'est absolument pas une surprise. En effet, regardons la troisième figure dans la marge, qui montre trois petits graphes à trois feuilles. Lorsque nous accrochons l'un d'entre eux à une feuille (bleue) d'un arbre étiqueté T, nous obtenons un autre arbre étiqueté T′ avec une feuille supplémentaire. Si nous examinons l'effet sur le graphe associé G(T), nous constatons que nous avons divisé un sommet en une paire de jumeaux (vrai ou faux) ou que nous avons créé un sommet pendant, selon les cas. Nous revenons à la définition originale des graphes compressibles comme des graphes qui peuvent être construits à partir d'un point par des introductions successives de jumeaux ou de sommets pendants. Nous revenons également aux opérades. Il s'agissait bien d'un détour !

Calculabilité

Il existe un algorithme qui décide en temps quadratique (en n) si un graphe de taille n est un graphe d'entrelacement. Ceci a été démontré dans [170] après une longue période d'améliorations successives (à partir d'un algorithme en n^9, en 1987).

Étant donné un diagramme avec n cordes, la construction de son graphe d'entrelacement nécessite un temps qui est quadratique en n. Il faut ensuite chercher les sommets pendants et les jumeaux et itérer le processus n fois pour décider en temps quadratique s'il est analytique.

170. Spinrad (J.), Recognition of circle graphs, *J. Algorithms*, n° 16(2), 1994, p. 264-282.

Un exercice ésotérique

Les 64 hexagrammes illustrés sur la première page de ce chapitre sont traditionnellement groupés en 32 paires d'*hexagrammes complémentaires*. Pensons au *yin* et au *yang*. Pour obtenir le *dual d'un hexagramme*, il suffit de le retourner. Dans le cas où l'hexagramme est symétrique, remplaçons chaque ligne connexe par une ligne non connexe et inversement.

Voici deux exemples de paires duales.

27 *28* *37* *38*

Les nombres (27-28) et (37-38) sont relatifs à l'ordre du roi Wen. De nombreux experts aiment dessiner un segment entre les hexagrammes duaux. En travaillant avec l'arrangement circulaire de Shao Yong, on obtient un diagramme avec 32 cordes.

Mon lecteur aura-t-il la patience de dessiner ces cordes et de *décider si ce diagramme du Yi Jing est analytique ou non ?*

Le 14 novembre 1701, Leibniz reçut une copie de l'arrangement circulaire de Shao Yong de la part du jésuite français Joachim Bouvet qui vivait en Chine. Deux ans plus tard, il publia un article remarquable sur l'arithmétique binaire [171] dans les

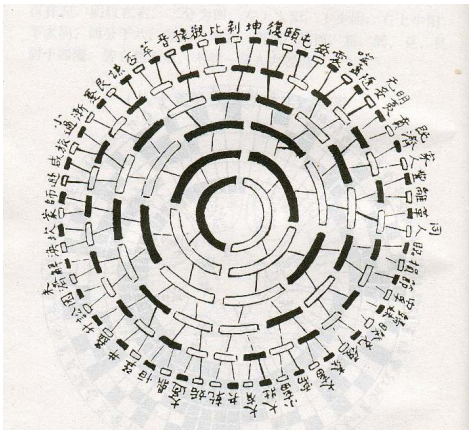
171. Leibniz (G. W.), Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 avec des remarques sur son utilité et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures chinoises de Fohy, *Hist. Acad. Royale Sci.*, Paris, 1703.

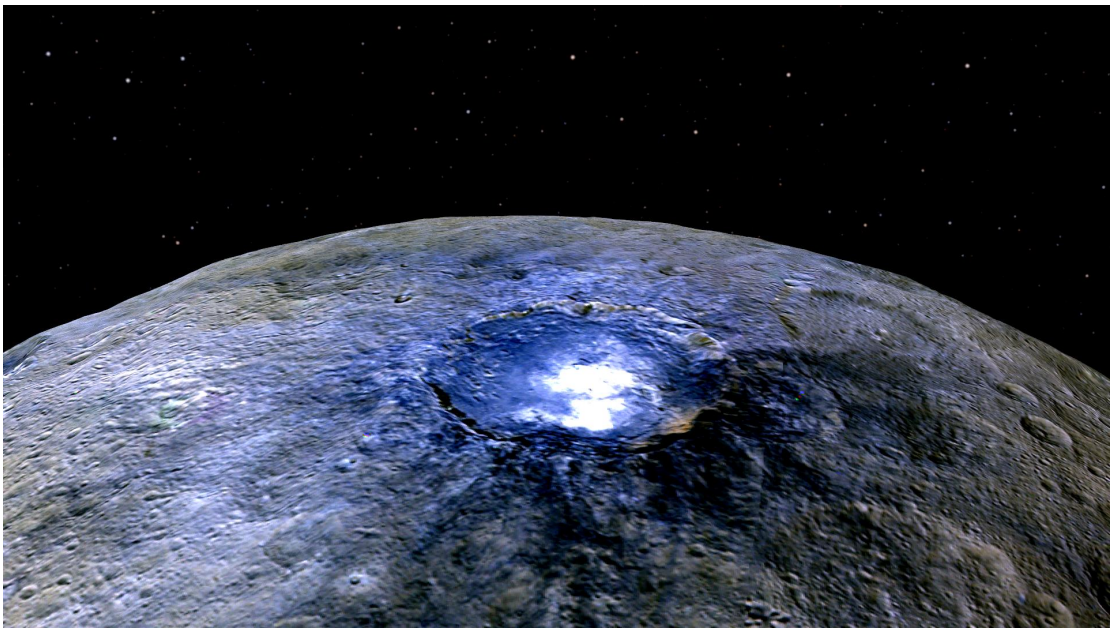
Mémoires de l'Académie des sciences. Selon lui :

> « Ces figures sont peut-être le plus ancien monument de science qui soit au monde. »

« Leibniz espérait que son analyse astucieuse des trigrammes du *Yi Jing* éveillerait en Chine une profonde appréciation de la science occidentale et, en fin de compte, du christianisme [172]. »

172. Lach (D.), Leibniz and China, *J. Hist. Ideas*, nº 6(4), 1945, p. 436-455.





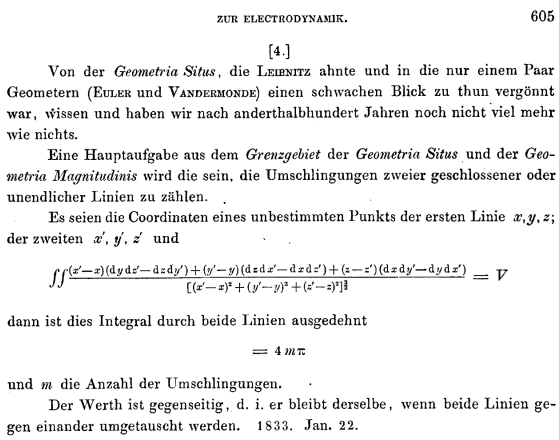
La planète naine Cérès, vue par la mission *Dawn*, en juillet 2016. La détermination de son orbite a été une réussite spectaculaire pour Gauss. ©

Gauss, à nouveau : enlacement, magnétisme et astronomie

Gauss et les enlacements

Pièce de monnaie allemande, émise en 1977, célébrant le 200e anniversaire de Gauss. ©

Le 22 janvier 1833, Gauss écrivit une formule énigmatique dans son carnet de notes [173].



ZUR ELECTRODYNAMIK. 605

[4.]

Von der *Geometria Situs*, die Leibnitz ahnte und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.

Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet* der *Geometria Situs* und der *Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.

Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der ersten Linie x, y, z; der zweiten x', y', z' und

$$\iint \frac{(x'-x)(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z'-\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y')+(y'-y)(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z')+(z-z')(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y'-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = V$$

dann ist dies Integral durch beide Linien ausgedehnt

$$= 4m\pi$$

und m die Anzahl der Umschlingungen.

Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegen einander umgetauscht werden. 1833. Jan. 22.

173. Gauß (C. F.), *Werke, Ergänzungsreihe, Band V*, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975.

Son but est de « déterminer l'enlacement de deux courbes fermées » : un entier associé à deux courbes fermées disjointes dans l'espace de dimension 3 qui soit invariant par déformation.

« *. . . die Umschlingungen zweier geschlossener Linien zu zählen.* »

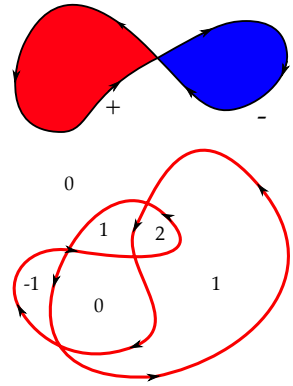
En 1833, la topologie n'existait pas encore... Même le mot n'apparaîtra que douze ans plus tard dans un livre de Listing. Leibniz avait déjà inventé le mot *Analysis Situs* et rêvait seulement d'une science manipulant des formes tout comme l'algèbre

manipule des symboles. Gauss utilise la terminologie *Geometria Situs* et mentionne Euler et Vandermonde comme précurseurs.

N'oublions pas que ces *Nachlässe* n'étaient pas destinés à être publiés. Qu'aurait-il pensé s'il avait su que ses projets privés deviendraient accessibles au public ? Cette note de 1833 a été publiée en 1867, après la mort de Gauss. L'éditeur l'a incluse dans un volume consacré à l'électromagnétisme. C'était un choix raisonnable. Un article récent [174] propose une bonne interprétation électromagnétique. Un autre article [175] affirme au contraire que la formule a une origine astronomique ; cet article semble tout aussi crédible. Qui a raison ? Les deux, bien sûr ! Gauss était convaincu de l'unité profonde des mathématiques. Il ne voulait pas établir de frontières entre les mathématiques, l'astronomie, la physique, etc. Je ne ferai certainement pas de choix et je présenterai trois points de vue parallèles : trois définitions de l'enlacement de deux courbes fermées disjointes dans l'espace de dimension 3.

174. Ricca (R. L.) et Nipoti (B.), Gauss' linking number revisited, *J. Knot Theory Ramifications*, nº 20(10), 2011, p. 1325-1343.

175. Epple (M.), Orbits of asteroids, a braid, and the first link invariant, *Math. Intell.*, nº 20(1), 1998, p. 45-52.



Essayons de démontrer l'existence d'un tel étiquetage en utilisant le fait que le nombre d'intersection (algébrique) de deux courbes orientées transverses fermées dans le plan est 0. Soient c_1 et c_2 deux courbes orientées transverses dans une surface orientée. Tout point d'intersection de c_1 et c_2 a un signe ± 1 qui dépend de l'orientation donnée par la paire de vecteurs tangents de c_1 et c_2 en ce point. La somme de tous ces signes pour tous les points d'intersection est le *nombre d'intersection algébrique* de c_1 et c_2. Si c_1 et c_2 sont des courbes dans le plan, ce nombre d'intersection est 0. En termes modernes, cela découle du fait que l'homologie du plan est triviale. Gauss connaissait ce fait. Pouvez-vous fournir une démonstration qu'il aurait pu accepter ?

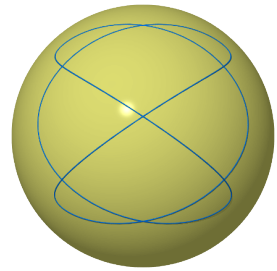
Géométrie

Une courbe fermée, orientée, lisse et *plongée* dans le plan délimite un domaine qui a une certaine aire. Disons que cette aire est positive si la courbe est orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et négative dans l'autre cas. C'est très simple. Si maintenant la courbe n'est pas plongée, la situation est un peu plus compliquée, comme par exemple dans la courbe en huit dans la marge. La boucle de gauche est orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, celle de droite dans le sens des aiguilles d'une montre : nous sommes amenés à définir *l'aire algébrique* comme la somme algébrique des deux aires.

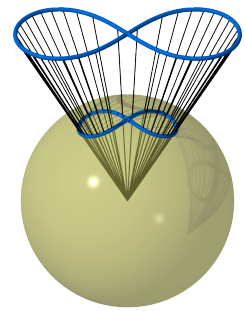
Dans le cas général d'une courbe immergée avec un nombre fini de points doubles, nous procédons de manière similaire. La courbe décompose le plan en composantes connexes. Dotons la composante non bornée du coefficient 0. Attribuons maintenant à chaque composante un entier avec la convention que lorsque nous traversons positivement la courbe, cet entier saute de +1. En d'autres termes, un point qui se déplace sur la courbe dans le sens positif voit un coefficient sur sa gauche égal au

coefficient sur la droite +1. Il s'avère qu'un tel étiquetage existe et est unique. Nous définissons alors l'aire algébrique de la courbe comme la combinaison linéaire des aires géométriques des composantes avec ces coefficients entiers. Cette définition est naturelle et due à... Gauss.

Une autre définition vient du fait qu'après tout, la *surface sous une courbe* $y(x)$ est l'intégrale de $y\,dx$. Considérons la 1-forme différentielle $\omega = -y\,dx$ dans le plan et intégrons-la le long de la courbe. J'encourage le lecteur à vérifier que ces deux définitions donnent le même nombre. En passant, notons que la différentielle de ω est la 2-forme $dx \wedge dy$, qui est la forme de l'aire. Ceci n'est pas une surprise pour un mathématicien du XXIe siècle, mais était loin d'être évident au début du XIXe siècle.



Considérons maintenant une courbe fermée orientée sur la sphère unité de dimension 2. Peut-on définir la surface délimitée ? Si la courbe est plongée, il n'y a pas de problème. La courbe décompose la sphère en deux domaines, l'un d'eux ayant la courbe orientée comme bord dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Nous pouvons définir l'aire comme étant l'aire de ce domaine. Si maintenant la courbe est compliquée, que pouvons-nous faire ? Nous pouvons toujours attribuer des nombres à la composante connexe du complémentaire avec la même propriété que précédemment, mais ils ne peuvent pas être normalisés en demandant qu'une composante à l'infini ait le poids 0, puisqu'il n'y a pas d'infini. Par conséquent, tous ces entiers sont bien définis à l'addition du même entier à chaque composante près. L'aire algébrique délimitée par la courbe n'est définie qu'à l'addition d'un multiple entier de l'aire de la sphère près, c'est-à-dire modulo $4\pi\mathbb{Z}$.



Une courbe lisse fermée dans la sphère définit un cône dans l'espace de dimension 3, dont le sommet est à l'origine. L'aire de la courbe est par définition l'*angle solide* du cône, donc définie modulo $4\pi\mathbb{Z}$. Tout comme un angle orienté dans le plan est défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que nous ayons une courbe fermée orientée γ dans l'espace de dimension 3, pas nécessairement plongée. Pour chaque point x *en dehors de* γ, regardons l'angle

solide $A_\gamma(x)$ du cône avec le sommet x et la base γ. Son angle solide définit une fonction

$$A_\gamma : \mathbb{R}^3 \setminus \gamma \to \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}.$$

Notons que si γ est un nœud, c'est-à-dire si c'est un cercle plongé, la préimage $A_\gamma^{-1}(\theta)$ est une surface orientable ayant γ comme bord pour toute valeur régulière θ de A_γ. Nous avons déjà rencontré de telles « surfaces de Seifert ».

Calculons la différentielle dA_γ. Soient x et x' deux points proches dans l'espace, tous deux distants de γ. Pour calculer $A_\gamma(x)$, nous devons translater γ par $-x$, projeter radialement le résultat sur la sphère unité et calculer son aire algébrique. La différence des aires $A_\gamma(x) - A_\gamma(x')$ est l'aire algébrique de la projection sur la sphère unité de la couronne qui borde les translatées de γ par $-x$ et $-x'$. Approchons γ par une courbe polygonale de sorte que $A_\gamma(x) - A_\gamma(x')$ soit approchée par la somme des aires algébriques des projections de certains parallélogrammes. Notons que si δx et $\delta' x$ sont deux vecteurs dans l'espace, le volume de la pyramide de sommet 0 et de base $(x, x+\delta x, x+\delta' x, x+\delta x+\delta' x)$ est

$$\tfrac{1}{3}\det(x, \delta x, \delta' x).$$

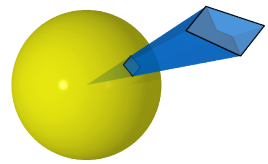
Si δx et $\delta' x$ sont très petits, l'angle solide correspondant s'obtient approximativement en divisant cette valeur par la norme de x au cube. En mettant tout ensemble, en passant à la limite, on obtient une formule pour dA_γ au point x sur le vecteur v :

$$dA_\gamma(x, v) = \int_\gamma \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|^3} \det\left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), v\right) dt.$$

Nous connaissons le concept d'*indice de Cauchy* d'une courbe fermée c dans le plan ponctué $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: le nombre de « tours » autour de l'origine lorsque l'on parcourt c. Suivons l'argument par continuité en faisant le tour de c, puis comptons l'augmentation de l'argument lorsque nous revenons au point de départ. On peut aussi utiliser la forme différentielle $\frac{1}{2i\pi} dz/z$ et l'intégrer sur c. Tout cela semble facile aux étudiants d'aujourd'hui, mais n'était pas évident pour les pères fondateurs Gauss, Cauchy, etc.

Faisons maintenant exactement la même chose dans l'espace de dimension 3, en remplaçant l'argument par l'angle solide

Une courbe fermée en dimension 3 est l'image d'une application de S^1 dans $\mathbb{R}^3$. En dimension 2, on peut considérer une application de S^0 dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire deux points P et Q dans le plan ! Le cône est maintenant remplacé par un triangle, et la fonction d'angle $A : \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ envoie x vers l'angle $\widehat{PxQ}$. L'observation des fibres de A peut vous rappeler le lycée.



Un angle solide. ©

créé par une courbe fermée γ. Si une courbe γ' ne coupe pas γ', faisons le tour de γ' et observons l'augmentation de l'angle solide lorsque nous faisons le tour complet (divisé par 4π). Cet indice est appelé l'*enlacement* de γ et γ' : c'est un nombre entier.

En utilisant la formule pour $d\mathrm{A}_\gamma$, nous obtenons la formule de Gauss pour l'enlacement $\mathrm{Enl}(\gamma, \gamma')$:

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{\|\gamma(t) - \gamma'(t')\|^3} \det\left(\gamma(t) - \gamma'(t'), \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma'}{dt'}(t')\right) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}t'.$$

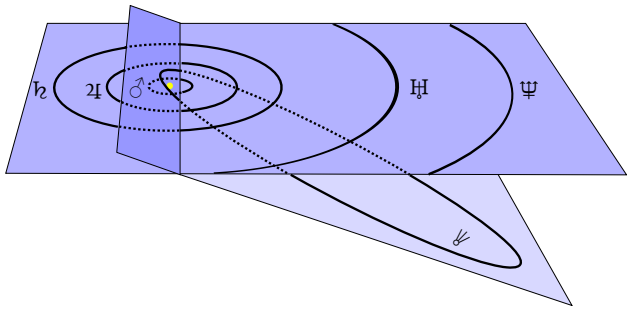
C'est bien ce que Gauss a écrit dans son carnet le 22 janvier 1833. Notons que la formule ci-dessus montre que l'enlacement est symétrique $\mathrm{Enl}(\gamma, \gamma') = \mathrm{Enl}(\gamma', \gamma)$, ce qui n'était pas évident d'après la définition. C'est ce que Gauss a écrit :

> « La valeur est symétrique : elle reste la même lorsque l'on intervertit les deux courbes. »

« Der Werth ist gegenseitig, d. i. er bleibt derselbe, wenn beide Linien gegen einander umgetauscht werden. »

Remarquons également que si γ et γ' sont déformées de façon continue de telle sorte qu'elles ne se croisent pas pendant la déformation, l'enlacement reste constant : un nombre entier ne peut pas changer de façon continue. C'est la caractéristique la plus importante de l'enlacement : il est *invariant par déformation*.

Astronomie



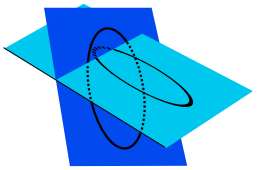
L'orbite de la comète de Halley, ainsi que les orbites de Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

L'article d'Epple mentionné ci-dessus propose une approche possible pour l'enlacement. L'une des premières réussites de Gauss l'ayant rendu célèbre a été la détermination en 1801 de l'orbite de la planète naine Cérès, qui venait d'être découverte.

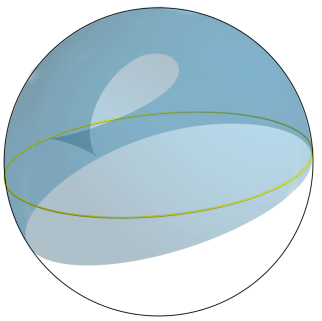
Supposons que nous observions une planète à partir d'une position fixe sur notre planète Terre. Où devons-nous regarder dans le ciel ? Plus précisément, supposons que γ soit la trajectoire de la Terre dans l'espace fixe (par rapport au Soleil) et que γ' soit la trajectoire de la planète que nous voulons observer. Pour simplifier, je suppose que γ et γ' sont disjoints. Si les périodes de rotation sont rationnellement indépendantes, les positions de la Terre et de la planète *sur leurs orbites* sont des variables aléatoires indépendantes. Gauss appelle *zodiacus* de la planète (par rapport à la Terre) l'image de l'application

$$\varpi : (t, t') \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \mapsto \frac{\gamma(t) - \gamma'(t')}{\|\gamma(t) - \gamma'(t')\|} \in \mathbb{S}^2.$$

C'est la zone de la sphère céleste où l'observateur doit chercher la planète. L'intégrande de la formule de Gauss pour l'enlacement est simplement le déterminant jacobien de cette application, de sorte que l'enlacement est égal à $1/4\pi$ fois l'aire algébrique du *zodiacus*. Un mathématicien moderne sait que l'intégrale du déterminant jacobien d'une application entre deux variétés orientées de même dimension est le degré topologique de cette application. Par conséquent, *l'enlacement peut également être défini comme le degré du* zodiacus ϖ. Gauss a bien entendu étudié en détail le cas de deux ellipses dans l'espace.

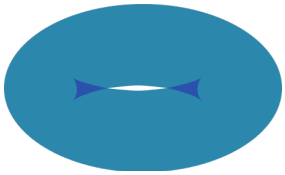


Deux ellipses non enlacées. Le *zodiacus* est à gauche.



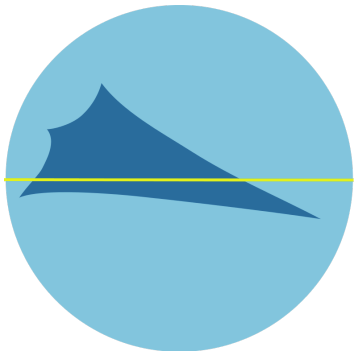
Quand les deux ellipses ne sont pas enlacées, comme dans la figure ci-dessus, le *zodiacus* ne couvre pas la totalité de la sphère céleste. La zone bleu clair du *zodiacus* correspond aux points qui sont couverts deux fois par ϖ. La zone plus sombre, avec

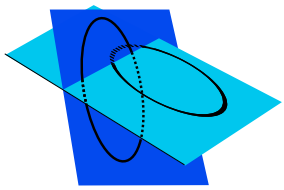
deux points singuliers, est couverte quatre fois. Comparer avec la représentation habituelle (en marge) de la perspective d'un tore de révolution et des singularités qui apparaissent dans son contour.



Projection d'un tore sur un plan.

Quand les ellipses sont enlacées, Comme dans la figure ci-dessous, le *zodiacus* est la sphère complète. La zone bleu clair du *zodiacus* correspond aux points qui ne sont couverts qu'une seule fois par ϖ. La zone plus foncée, avec quatre points singuliers, est couverte trois fois.





Deux ellipses enlacées. Le *zodiacus* est à gauche.

Étant donné une application lisse $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ entre deux variétés compactes orientées et connexes sans bord, il existe plusieurs définitions possibles de son *degré topologique*. La première consiste à choisir une forme volume « vol » sur N, de volume total 1, et à intégrer son image réciproque $f^\star$vol sur M. Il n'est pas difficile de voir que ceci est indépendant de la forme volume. En effet, si vol$'$ est un autre choix de forme volume, vol$'$ – vol est une forme exacte, donc l'intégrale de $f^\star$vol$'$ – $f^\star$vol est nulle. À partir de cette définition, il est facile de voir que ceci est invariant par déformation. En effet, si deux applications f_0 et f_1 sont homotopes, $f_0^\star$vol – $f_1^\star$vol est une forme exacte. Il est moins facile de voir que ce degré est un entier.

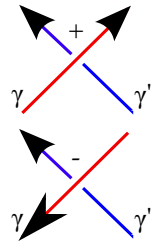
Une seconde définition consiste à choisir une valeur régulière $y \in \mathrm{N}$ de f et à regarder les préimages en nombre fini $x_1, \ldots, x_n$ dans M. À chacune de ces préimages, la différentielle de f préserve ou inverse l'orientation. Nous leur attribuons un signe + ou − en conséquence. Le degré de f est la somme de ces

Regardez à nouveau les figures précédentes du *zodiacus* de deux ellipses et trouvez les signes + ou −.

signes. Il faut montrer que cela ne dépend pas du choix de la valeur régulière et que c'est un invariant homotopique. Ceci est démontré brillamment dans le livre de Milnor [176]. Il faut aussi démontrer que les deux définitions coïncident... Une possibilité est d'utiliser une suite de formes volumes sur M qui converge vers la masse de Dirac à la valeur régulière y.

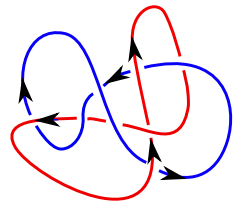
176. Milnor (J. W.), *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

Utilisons le point de vue de la valeur régulière pour calculer le degré du *zodiacus* $\varpi : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to S^2$. On choisit le pôle Sud de S^2 comme point y. Les préimages de y sont les paires de points $\gamma(t)$ et $\gamma'(t')$ tels que $\gamma(t)$ soit au-dessus de $\gamma'(t')$: ils ont les mêmes coordonnées x et y, et la coordonnée z de $\gamma(t)$ est plus grande que celle de $\gamma'(t')$. La différentielle de ϖ en un tel point est facile à calculer. Elle est non dégénérée si les projections de γ et γ' sur le plan (x, y) se coupent transversalement au point correspondant. Son déterminant jacobien est *positif* (resp. *négatif*) si l'intersection des projections est positive (resp. négative).



Cela conduit à la définition combinatoire de l'enlacement, que Gauss connaissait évidemment. Projetons les deux courbes γ et γ' dans un plan générique de sorte que les deux projections $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$ se coupent transversalement. Attribuons un indice +1 ou −1 à chaque point d'intersection, selon que les vecteurs tangents à γ et γ' définissent une base directe ou indirecte. Parmi ces points d'intersection, ne retenons que ceux où γ est *au dessus de* γ'. La somme des signes correspondants est l'enlacement de γ et γ'.

Sur la figure, la courbe rouge passe 3 fois sur la courbe bleue avec les signes $+1, +1, -1$. L'enlacement est 1.



Ce que l'on appelle l'*entrelacs de Whitehead* dans la marge a un enlacement de 0 mais cela ne signifie pas que les deux composantes puissent être séparées par une déformation [177]. Montrer qu'il n'existe pas de courbe algébrique complexe à deux branches telle que l'entrelacs associé soit cet entrelacs.

L'entrelacs de Whitehead.

177. Rolfsen (D.), *Knots and Links*, Publish or Perish, Houston, 1990.

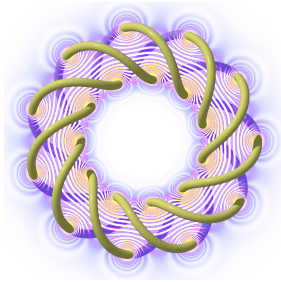
Électromagnétisme

La formule de Gauss rappelle la loi de Biot et Savart en physique. Un courant électrique engendre un champ magnétique. Supposons qu'un fil fermé γ transporte un courant constant d'intensité i et que x soit un point situé à l'extérieur du fil. Le

champ magnétique créé en x est alors

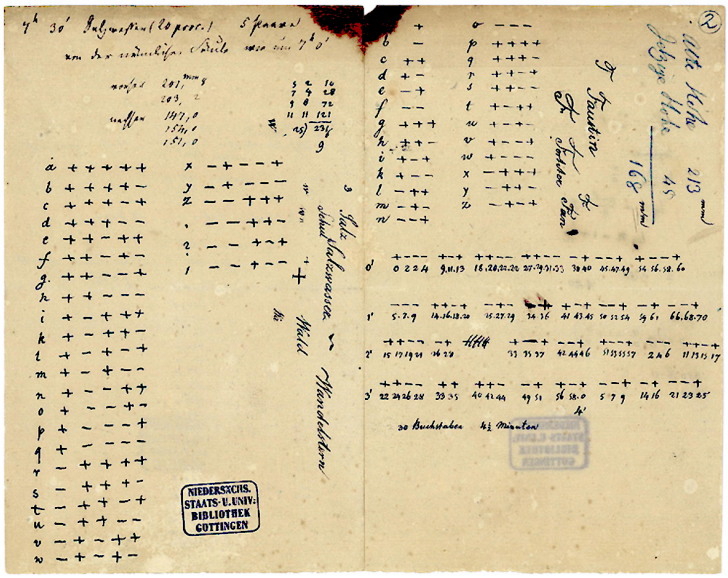
$$\mathrm{B}(x) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_\gamma \frac{1}{\|(\gamma(t) - x\|^3} \left((\gamma(t) - x) \wedge \frac{d\gamma(t)}{dt} \right) \mathrm{d}t\,,$$

où μ_0 est la constante magnétique. Ce champ de vecteurs est le dual de la 1-forme fermée $d\mathrm{A}_\gamma$ (par rapport à la métrique euclidienne sur l'espace physique à 3 dimensions). On peut également l'interpréter comme le champ de gradient d'une primitive locale de la 1-forme A_γ. Donc la circulation du champ magnétique sur un lacet γ' est la même que l'intégrale de $d\mathrm{A}_\gamma$ sur γ', c'est-à-dire l'enlacement. Ainsi, $\mathrm{Enl}(\gamma, \gamma')$ est la circulation du champ magnétique créé par un courant.

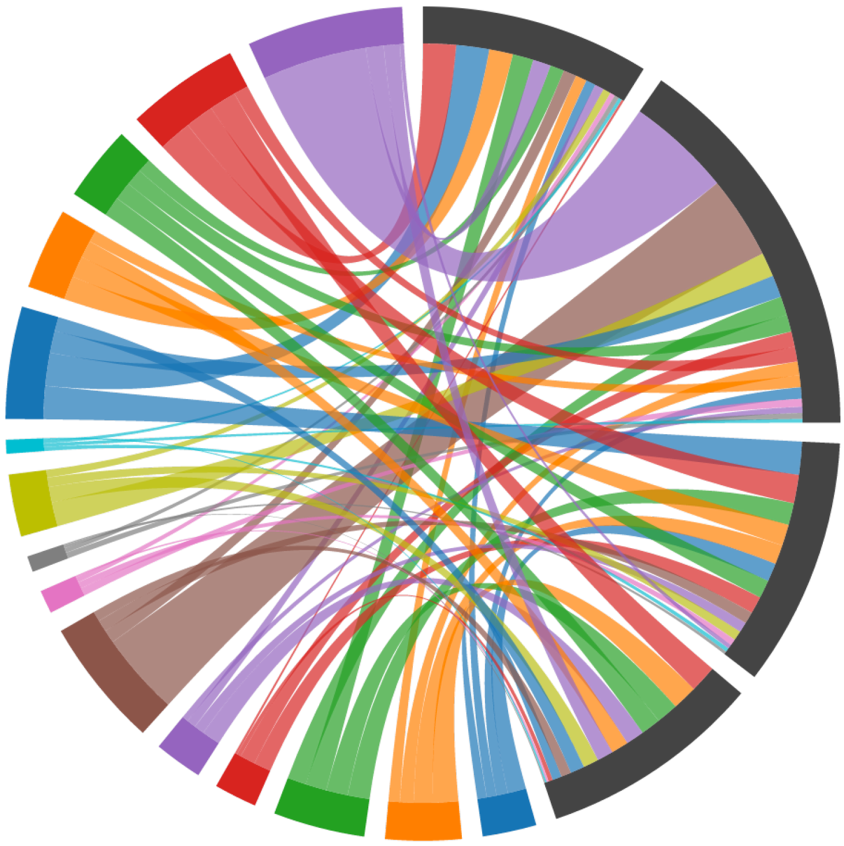


Le champ magnétique engendré par un nœud torique. ©

L'article de Ricca et Nipoti mentionné ci-dessus donne une reconstruction intéressante de ce qu'aurait pu être l'interprétation magnétique dans l'esprit de Gauss. N'oublions pas qu'avec Weber, Gauss a créé le premier télégraphe qui transmettait des messages à travers Göttingen.



Le code de Gauss et Weber pour leur télégraphe : la combinatoire à nouveau ! ©



Un diagramme de cordes est aussi une méthode graphique qui permet d'afficher les relations entre des données. Étant donné une matrice stochastique a_{ij} (c'est-à-dire $a_{ij} > 0$ et $\sum_j a_{ij} = 1$), on peut considérer a_{ij} comme la proportion de l'entité i qui interagit avec j. On trace n intervalles $\mathrm{I}_1, ..., \mathrm{I}_n$ autour du cercle, dont les longueurs $l_1, ..., l_n$ doivent être déterminées, et des bandes qui relient I_i et I_j avec des largeurs $a_{ij}l_i$. La condition de compatibilité peut être exprimée par $l_j = \sum_i a_{ij}l_i$. L'existence d'une solution est garantie par le théorème de Perron et Frobenius. ©

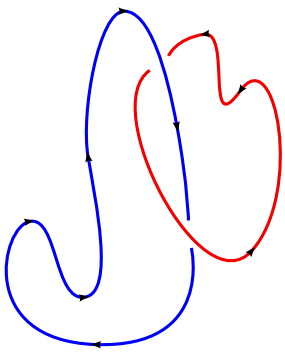
Kontsevitch est de retour : un invariant universel

Cette promenade est-elle un lacet homotope à un point ? Nous sommes revenus à notre point de départ : Maxim Kontsevitch. Ce chapitre n'est pas une conclusion mais une ouverture sur un vaste domaine et montre qu'en mathématiques, il est possible de revenir à des idées très anciennes avec une perspective complètement nouvelle. Je voudrais présenter une brève introduction à un merveilleux développement de la théorie des nœuds qui implique les diagrammes de cordes, dans un article de Kontsevitch qui date de 1993 [178].

178. Kontsevich (M.), Vassiliev's knot invariants, *Adv. Soviet Math.*, nº 16, 1993, p. 137-150.

Un nouveau point de vue sur l'enlacement

Soient γ_1 et $\gamma_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$ deux courbes fermées orientées disjointes. Nous savons que l'enlacement de γ_1 et γ_2 est le degré topologique de l'application *zodiacus* de Gauss, du produit des deux courbes vers la sphère unité. La formule de Kontsevitch exprimera le même nombre que le degré topologique d'une application *d'une variété orientée de dimension* 1 *(qui est donc une réunion de cercles) vers un cercle*. Le grand avantage est que ce nouveau point de vue nous permet de définir beaucoup plus d'invariants.



Considérons l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, t) comme le produit de la droite complexe $\mathbb{C}$ (de coordonnées $z = x + \mathrm{i}y$) et $\mathbb{R}$ (de coordonnée t). Supposons que nos courbes γ_1 et γ_2

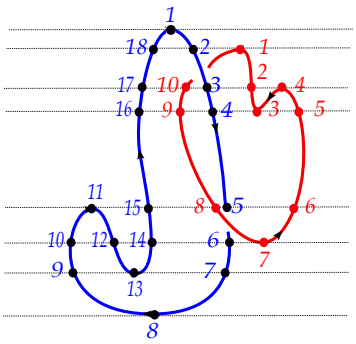
soient de *Morse*. Cela signifie simplement que la projection sur la coordonnée t a un nombre fini de points critiques et que la dérivée seconde n'est pas nulle en ces points critiques. Supposons que les valeurs critiques des coordonnées t soient toutes distinctes.

Considérons maintenant l'ensemble des paires de points sur γ_1 et γ_2 qui ont la même coordonnée t. Il s'agit formellement de l'ensemble

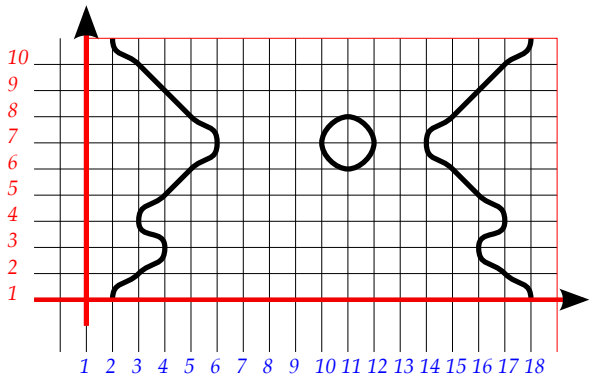
$$X = \left\{(s_1, s_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \,|\, t(\gamma_1(s_1)) = t(\gamma_2(s_2))\right\}.$$

Il s'agit d'une courbe lisse du 2-tore. La seule chose (facile) à vérifier est que c'est bien le cas au voisinage des points critiques.

Regardons cet exemple. Il y a 8 valeurs critiques, qui décomposent la première courbe en 18 brins et la seconde en 10 brins.



La sous-variété X est représentée dans la figure suivante.



Il existe une orientation canonique sur X. Choisissons un petit intervalle I dans X, loin des valeurs critiques. Cet intervalle s'applique difféomorphiquement sur un intervalle I_1 dans γ_1 et sur un autre intervalle I_2 dans γ_2. Un intervalle non critique dans γ_1 (ou dans γ_2) est muni de deux orientations, provenant d'une part de l'orientation de γ_1 (ou γ_2) et d'autre part de la coordonnée t. Je dirai qu'un tel intervalle est *positif* si ces deux orientations concordent et *négatif* dans le cas contraire. Orientons I en utilisant t croissant si I_1 et I_2 sont tous deux positifs ou tous deux négatifs, en utilisant t décroissant sinon.

Vérifier que cela définit bien une orientation sur X.

Un point dans X définit deux points $\gamma_1(s_1)$ et $\gamma_2(s_2)$ qui se projettent sur des points *distincts* dans le plan complexe $x + iy$. L'argument de la différence définit une application $\pi : X \to \mathbb{S}^1$. Il s'agit d'une application entre des variétés orientées à 1 *dimension*.

J'affirme que le degré de π est l'enlacement de γ_1 et γ_2.

Démontrons cette affirmation. L'enlacement est le degré topologique de l'application

$$\varpi : (s_1, s_2) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \mapsto \frac{\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)}{\|\gamma_1(s_1) - \gamma_2(s_2)\|} \in \mathbb{S}^2$$

entre des surfaces orientées. La sphère unité $\mathbb{S}^2$ contient l'*équateur horizontal* $\mathbb{S}^1$ (où $t = 0$). L'hypothèse selon laquelle γ_1 et γ_2 sont de Morse avec des valeurs critiques distinctes implique que ϖ soit transverse à $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$. L'image réciproque $\pi^{-1}(\mathbb{S}^1)$ est X, par définition. La différentielle de ϖ identifie le fibré normal de X, dans le 2-tore, avec le fibré normal de l'équateur, dans la sphère. Notre convention d'orientation sur X est telle que cette identification soit positive.

Nous voulons comparer les deux degrés topologiques de ϖ et π. Prenons une valeur régulière $v \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$ de π et soit u un point de sa préimage. Notons que v est aussi une valeur régulière de ϖ. Le signe du jacobien de la différentielle de π en u est le même que le signe du jacobien de ϖ en u. Donc les degrés de ϖ et π sont égaux. ⊡

Nous obtenons maintenant une nouvelle formule pour l'enlacement, en utilisant des indices de type Cauchy. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Kontsevitch.

Théorème. *Découpons γ_1 et γ_2 par des plans horizontaux qui passent par les points critiques de la coordonnée t de γ_1 ou γ_2. Entre deux plans consécutifs, γ_1 et γ_2 définissent un certain nombre de brins qui sont positifs ou négatifs. Choisissons l'un des brins correspondant à γ_1, défini par un graphe $(\zeta_1(t), t)$ (pour $t_- \leqslant t \leqslant t_+$). Choisissons un brin $(\zeta_2(t), t)$ pour la courbe γ_2 (également pour $t_- \leqslant t \leqslant t_+$). Calculons la* quantité de rotation

$$\varepsilon \frac{1}{2i\pi} \int_{t_-}^{t_+} \frac{d(\zeta_1(t) - \zeta_2(t))}{\zeta_1(t) - \zeta_2(t)},$$

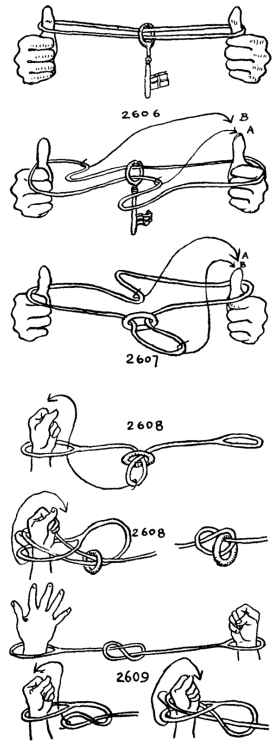
où ε est $+1$ si les deux brins choisis ont le même signe et -1 sinon.

Additionnons tous ces nombres pour toutes les paires possibles de plans horizontaux consécutifs et pour toutes les paires d'un brin pour γ_1 et d'un brin pour γ_2. Le résultat est l'enlacement $\mathrm{Enl}(\gamma_1, \gamma_2)$.

Dans l'exemple précédent, les 8 valeurs singulières définissent 7 intervalles qui contiennent 2, 2, 2, 2, 4, 4 et 2 brins bleus, ainsi que 0, 2, 4, 2, 2, 0 et 0 brins rouges. Il y a donc

$$2 \times 0 + 2 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 0 + 2 \times 0 = 24$$

paires entre les brins, ce qui correspond au nombre d'intervalles dans X.



Quelques tours de magie pour vous convaincre que l'enlacement n'existe pas. Extrait du merveilleux « livre des nœuds d'Ashley » (1944), qui contient 7 000 images représentant 3 800 nœuds. ©

L'invariant universel de Kontsevitch d'un nœud à valeurs dans l'algèbre des cordes

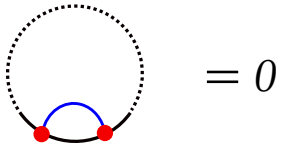
Pour conclure, j'esquisse la définition d'un invariant associé à un nœud à valeurs dans les séries formelles à coefficients dans les diagrammes de cordes. Il s'agit d'une idée brillante de Kontsevitch, tirée de son célèbre article de 1993.

Soit $\mathrm{Cordes}(n)$ l'ensemble des diagrammes de cordes à n cordes. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, il s'agit d'ensembles de $2n$ points sur un cercle orienté, groupés par paires, à des homéomorphismes du cercle préservant l'orientation près. Notons $\mathbb{C}[\mathrm{Corde}]$ l'espace vectoriel ayant pour base la réunion Corde de toutes les $\mathrm{Cordes}(n)$. Ses éléments sont donc des sommes finies $\sum_{w \in \mathrm{Corde}} \lambda_w \cdot w$, où $\lambda_w = 0$ pour tous les w

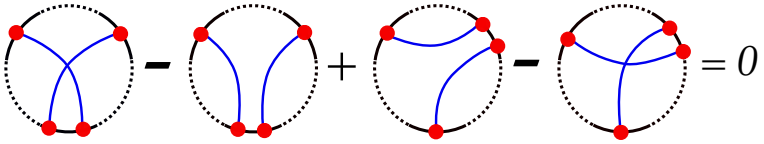
sauf un nombre fini. Considérons $\mathbb{C}$[Corde] comme un espace vectoriel *gradué*, la graduation étant donnée par n.

Notons $\mathscr{A}$ le quotient de $\mathbb{C}$[Corde] par le sous-espace engendré par deux relations, ce qui peut paraître artificiel à première vue :

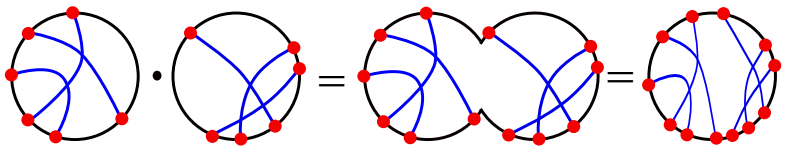
— la *relation à un terme*. Cela signifie que tout diagramme de cordes obtenu à partir de la figure ci-dessous en la complétant de *n'importe quelle manière* dans la partie pointillée du cercle est déclaré égal à 0 dans $\mathscr{A}$. Autrement dit, tout diagramme contenant une corde solitaire est égal à 0 dans $\mathscr{A}$;



— la relation *à quatre termes*. De manière analogue, la partie pointillée du cercle peut être complétée de n'importe quelle manière (mais bien sûr de la même manière dans les quatre constituants de la relation).



Cet espace vectoriel $\mathscr{A}$ est en fait une *algèbre* graduée $\oplus_{n\geqslant 0}\mathscr{A}_n$. Deux diagrammes de cordes peuvent être multipliés de la manière suivante :



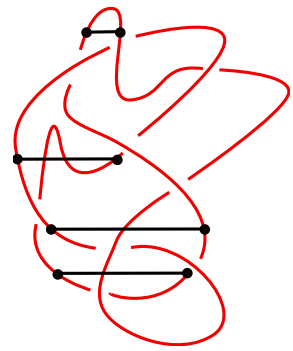
La relation à quatre termes est exactement ce qu'il faut pour s'assurer que cette opération est bien définie, indépendamment du lieu de la *somme connexe*.

Considérons la complétion $\widehat{\mathscr{A}}$, où nous ajoutons des sommes formelles infinies $\sum_{w\in\text{Corde}} \lambda_w \cdot w$ sans condition sur les nombres λ_w. Appelons $\widehat{\mathscr{A}}$ l'*algèbre de cordes*.

Je peux maintenant définir l'*invariant universel de Kontsevitch d'un nœud, à valeurs dans* $\widehat{\mathscr{A}}$. Soit γ un nœud dans l'espace de dimension 3 (supposé être de Morse). Découpons-le par des plans horizontaux qui passent par les points critiques des coordonnées t. Cela permet de décomposer le nœud en un nombre fini de brins, qui peuvent être positifs ou négatifs, en fonction de l'orientation du nœud.

Choisissons un nombre entier n. Considérons l'espace des $2n$-uplets de points distincts $(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$ sur le nœud tels que

$$t(p_1) = t(q_1) < t(p_2) = t(q_2) < \ldots < t(p_n) = t(q_n).$$



Il s'agit d'une sous-variété X_n de dimension n dont le bord est le tore de dimension $2n$, orienté canoniquement par l'orientation du cercle. Remarquons que tout élément de X_n définit un diagramme de cordes à n cordes.

Il existe une application naturelle ϖ de X_n dans $(\mathbb{C}^\star)^n$. En effet, si p et q sont deux points distincts de γ ayant la même coordonnée t, leur différence est un nombre complexe non nul. On associe donc le n-uplet $(q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n) \in (\mathbb{C}^\star)^n$ à $(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$.

Considérons maintenant la n-forme différentielle (complexe)

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \varpi^\star \left(\frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \ldots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \right)$$

sur X_n. En l'intégrant sur chaque composante connexe de X_n, en la multipliant par l'élément correspondant de Corde(n) et en la sommant sur toutes les composantes de X_n, on obtient un élément de $\mathscr{A}_n$. La somme formelle de tous ces éléments, pour toutes les valeurs de n, définit un élément de $\widehat{\mathscr{A}}$: c'est l'*invariant de Kontsevitch de* γ, noté $Z(\gamma)$, qui est un élément de $\widehat{\mathscr{A}}$.

À strictement parler, ce n'est pas encore un invariant ! Il s'avère que ce n'est un invariant que si le nœud γ est déformé parmi les nœuds de Morse, en préservant le nombre de points critiques. Il s'agit déjà d'un fait non trivial.

Une déformation générale de γ pourrait introduire une *bosse*.

Cependant, le changement dans cette introduction d'une bosse peut être complètement décrit. Soit Z(H) l'invariant de la bosse dans la marge.

On peut montrer que si la coordonnée t d'un nœud γ a $2c$ points critiques, le quotient

$$I(K) = Z(K)/Z(K)^{c/2} \in \widehat{\mathscr{A}}$$

est un véritable invariant du nœud γ, pour toute isotopie (c'est-à-dire toute déformation du nœud) évitant la création de points doubles.

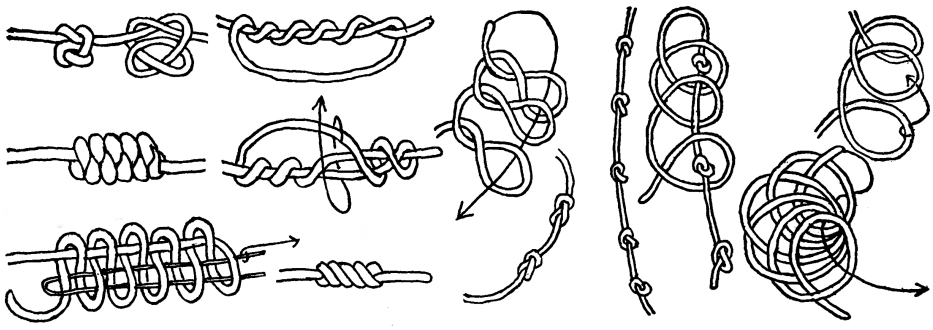
Il me reste à justifier la division par $Z(K)^{c/2}$ dans l'algèbre $\widehat{\mathscr{A}}$. Ce n'est pas difficile puisqu'il est facile de voir que $Z(K)^{c/2}$ est de la forme $1 + a$ avec a de degré > 1, de sorte que l'inverse de $1 + a$ est $1 - a + a^2 - a^3 - \cdots$.

Je n'ai absolument rien démontré. Je n'ai pas expliqué en quel sens cet invariant est universel. En fait, on ne sait pas si deux nœuds sont équivalents si et seulement s'ils ont le même invariant : ce serait fantastique.

Pour une présentation détaillée, je recommande vivement cet article [179] et ce livre [180].

179. Chmutov (S.) et Duzhin (S.), The Kontsevich integral, *Acta Appl. Math.*, n° 66(2), 2001, p. 155-190.

180. Chmutov (S.), Duzhin (S.) et Mostovoy (J.), *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press, 2012.



D'autres extraits du livre des nœuds d'Ashley. ©

Caspar David Friedrich,
Corbeaux sur un arbre. ©

Postface

Notre promenade est terminée. Nous nous sommes promenés dans de nombreuses forêts mathématiques. Nous avons en effet vu beaucoup d'arbres et notre voyage n'était certainement pas une trajectoire géodésique. Mon lecteur aura, je l'espère, envie de voyager davantage et d'explorer de nouveaux territoires de manière beaucoup plus détaillée, voire plus sérieuse.

Puisque notre promenade était une sorte de lacet qui a commencé avec le romantique *Voyageur contemplant une mer de nuages* de Caspar David Friedrich, il convient peut-être d'admirer maintenant les *Corbeaux sur un arbre* du même artiste, qui date de 1822. À cette époque, Gauss rêvait d'une géométrie non euclidienne.

Ce tableau a été choisi comme frontispice pour une traduction en anglais d'un de mes livres de mathématiques préférés [181], qui traite également des arbres, bien que très différents de ceux que nous avons vus au cours de notre promenade. La prochaine destination de mon lecteur ?

181. Serre (J.-P.), *Arbres, amalgames*, SL_2, 3e éd., Société mathématique de France, Paris, 1983.

Caspar David Friedrich, *Mann und Frau in Betrachtung des Mondes* (« Homme et Femme contemplant la Lune ») (1818-1824). ©

Remerciements

Les mathématiques seraient très tristes si elles ne pouvaient pas être partagées avec d'autres. De bons amis et collègues ont proposé de lire les versions préliminaires de ce livre.

Thierry Barbot a été l'un de mes premiers doctorants. Il est aujourd'hui un spécialiste renommé des systèmes dynamiques et de la géométrie lorentzienne. Il a spontanément proposé de commenter une première version du manuscrit.

Thierry Barbot.

J'ai rencontré Grant Cairns il y a longtemps, lorsque nous étions tous deux étudiants. Nous avons écrit deux articles ensemble. Il n'est pas spécifiquement un expert des singularités mais il s'intéresse à tous les aspects des mathématiques. Il aime les promenades.

Grant Cairns.

J'ai hésité à demander l'avis de Pierre de la Harpe, car je connais bien ses critères de qualité. Ses observations franches ont été pleinement appréciées.

Pierre de la Harpe.

Jos Leys est un artiste et un géomètre et nous avons beaucoup collaboré, notamment pour la réalisation de films mathématiques. Beaucoup d'images parmi les plus sophistiquées lui sont dues.

Jos Leys.

Patrick Popescu-Pampu est l'un des meilleurs experts de la théorie des singularités et il aime l'histoire des mathématiques. Nous sommes tous deux des collaborateurs d'Henri Paul de Saint-Gervais.

Patrick Popescu Pampu.

Mon collègue Bruno Sévennec connaît tout en mathématiques. Il a détecté un grand nombre d'erreurs.

Bruno Sévennec.

Christopher-Lloyd Simon a accepté de jouer le rôle de l'hypothétique « étudiant motivé » qui tente de déchiffrer ces notes. Le cobaye s'est transformé en collaborateur. Ses suggestions ont permis d'améliorer de manière significative les principaux résultats du manuscrit.

Christopher-Lloyd Simon.

Une version de ce texte était disponible sur les sites arXiv et *AMS Open Math Notes* en novembre 2016. Depuis, deux autres anciens élèves ont examiné le livre en détail et m'ont envoyé des remarques très intéressantes.

Serge Cantat s'intéresse d'habitude à la géométrie algébrique et à la dynamique dans le domaine complexe.

Serge Cantat.

Michele Triestino s'intéresse plutôt aux probabilités, à la théorie ergodique et à la physique théorique, fondamentalement absentes de cette promenade !

Michele Triestino.

J'ai eu le privilège d'enseigner un cours de troisième cycle sur ce sujet à l'IMPA à Rio de Janeiro en janvier et février 2017. Parmi les étudiants qui ont assisté aux cours, je voudrais mettre en valeur sept d'entre eux, qui ont commencé une traduction en portugais et en espagnol : Aguiar Alina Sotolongo, Azul Fatalini, Carlos A. Gomes, Esteban Arreaga, Filipe Bellio da Nobrega, Gregory Cosac et Thiago Dourado. Dali Shen, postdoctorant à l'IMPA, m'a également envoyé une longue liste de remarques. J'ai également reçu des commentaires de Jean Barge, Brian Davey, Maxim Kontsevitch, Manuel Ojanguren et Jean-Pierre Serre. C'est un grand plaisir de les remercier tous.

Je n'oublierai pas le lecteur anonyme qui m'a envoyé des chocolats parce qu'il avait aimé le livre. Il s'est présenté comme Paul Ynomial, rue du Nœud de trèfle, à Ker Lann.

Je ne devrais probablement pas ajouter le commentaire évident que je suis bien sûr responsable de toutes les erreurs restantes.

J'ai également le plaisir de remercier trois institutions importantes. Le Centre national de la recherche scientifique m'a soutenu depuis de nombreuses années. L'*Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, à Rio de Janeiro, a fourni une excellente atmosphère scientifique et suffisamment de calme pour rédiger la première version de ce livre. L'unité de mathématiques pures et appliquées de l'École normale supérieure de Lyon est mon institution d'origine depuis longtemps.

Étienne Ghys
Lyon, le 23 septembre 2017

Illustrations

Licence *Creative Commons* CC0

Le texte et les illustrations sans le symbole © ont été produits par Étienne Ghys qui a renoncé à tous les droits d'auteur et droits connexes ou voisins. Vous pouvez les copier, les modifier et les distribuer, même à des fins commerciales, sans demander d'autorisation.

La licence CC0 vaut aussi pour les images de Jos Leys (josleys.com) des pages suivantes : 9, 9, 53, 120, 120, 124, 125, 132, 132, 150, 158, 160, 161, 161, 164, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 178, 184, 187, 188, 188, 189, 190, 192, 193, 194, 194, 195, 208, 226, 227, 232, 235, 288, 293.

Cette licence s'applique aux illustrations qui proviennent du site archive.org :

p. 8, 83. Gauss (C. F.), *Werke, Band III*, Göttingen, 1876, archive.org/details/werkecarlfo3gausrich.

p. 46. Newton (I.), *The Method of Fluxions and Infinite Series* (trad. J. Colson), Londres, 1736, archive.org/details/methodfluxionsaoonewtgoog.

p. 50. Newton (I.), *La méthode des fluxions et des suites infinies* (trad. Buffon), Paris, 1740, archive.org/details/bub_gb_2QHI2lyyUX4C.

p. 62, 67. Cramer (G.), *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750, archive.org/details/bub_gb_gtKvSzJPOOAC.

p. 91. Serret (P.), *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, Paris, 1860, archive.org/details/thorienouvellegooserrgoog.

p. 93. Serret (J.-A.) *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, 1886, archive.org/details/coursdecalculdio1serrgoog.

p. 94. Lamouroux (J.), *Exposition méthodique des genres de l'ordre des polypiers*, Paris, 1821, archive.org/stream/expositionmthooolamo.

p. 120. Hondius (H.), *Instruction en la science de perspective*, La Haye, 1625, archive.org/details/instrvctionenlasoohond.

p. 231. Noad (H. M.), *The Student's Text-book of Electricity*, Londres, 1867, archive.org/details/studentstextbooo1noadgoog.

p. 298. Ashley (C.), *The Ashley Book of Knots*, 1944, archive.org/details/TheAshleyBookOfKnots.

Proviennent de Wikipédia :

p. ii. Friedrich (C. D.), *Der Wanderer über dem Nebelmeer*, 1818, Kunsthalle de Hambourg, commons.wikimedia.org/wiki/File:Caspar_David_Friedrich_-_Wanderer_above_the_sea_of_fog.jpg.

p. 23. Portrait de Catalan par É. Delperée, Musée Wittert, commons.wikimedia.org/wiki/File:Eugene_charles_catalan.jpg.

p. 24. Mingantu, *Méthode rapide pour obtenir les divisions exactes d'un cercle*, XVIIIe siècle, commons.wikimedia.org/wiki/File:Mingantu%27s_Catalan_numbers.JPG.

p. 40. Photo d'Ernst Schröder, commons.wikimedia.org/wiki/File:Ernst_schroeder.jpg.

p. 40. Hipparque, fr.wikipedia.org/wiki/Hipparque_(astronome).

p. 43. Gravure représentant Plutarque, tirée de *Vies des hommes illustres* (trad. J. Amyot), 1559, commons.wikimedia.org/wiki/File:Plutarch.gif.

p. 49. Portait de Newton d'après G. Kneller, Université de Cambridge, commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg.

p. 65. Portrait de Cramer, bibliothèque de Genève, commons.wikimedia.org/wiki/File:Gabriel_Cramer.jpg.

p. 81. Portrait de d'Alembert par M.-Q. de La Tour, 1753, musée du Louvre, wikiart.org/fr/quentin-de-la-tour/jean-le-rond-d-alembert.

p. 95. Billet de 10 francs suisses, commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler-10_Swiss_Franc_banknote_(front).jpg.

p. 99. Photo de G. H. Hardy, commons.wikimedia.org/wiki/File:Godfrey_Harold_Hardy_1.jpg.

p. 102. Lithographie représentant Cauchy par Grégoire et Deneux, 1840, commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin_Cauchy.jpg.

p. 117 Gravure extraite de *Voyage of the Beagle*, 1845, commons.wikimedia.org/wiki/File:Darwin%27s_finches_by_Gould.jpg.

p. 119 Gravure représentant Möbius, commons.wikimedia.org/wiki/File:August_Ferdinand_M%C3%B6bius.jpg.

p. 125. Symbole du recyclage, commons.wikimedia.org/wiki/File:Recycling_symbol.svg.

p. 130. Anneaux olympiques, commons.wikimedia.org/wiki/File:Olympic_rings_with_transparent_rims.svg.

p. 141. Photo de Max Noether, université de Heidelberg, commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether_2514.JPG.

p. 145. Photo de Cremona, commons.wikimedia.org/wiki/File:Luigi_Cremona.jpg.

p. 155. Projection stéréographique de Paris, commons.wikimedia.org/wiki/File:Stereographic_projection_of_Paris.jpg.

p. 163. Rose céleste, gravure de G. Doré, fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Paradiso_Canto_31.jpg.

p. 177. Photo de Puiseux par E. Pirou, 1883, commons.wikimedia.org/wiki/File:Victor_Puiseux_par_Pirou.JPEG.

p. 181. Portrait de Weierstrass par C. Fehr, 1895, commons.wikimedia.org/wiki/File:Karl_Weierstrass_2.jpg.

p. 198. Dürer (A.), *Melencolia I*, 1514, Musée Städel, fr.wikipedia.org/wiki/Melencolia_de_Dürer#/media/File:Dürer_Melancholia_I.jpg.

p. 206. Hasegawa Kyūzō, *Cerisier*, 1592, dans un temple à Kyoto, commons.wikimedia.org/wiki/File:Cherry-tree.jpg.

p. 222. Dessin de Darwin, 1837, commons.wikimedia.org/wiki/File:Darwin_Tree_1837.png.

p. 232. Dessin de J. Ferguson, *Encyclopædia Britannica*, 1771, commons.wikimedia.org/wiki/File:Cassini_apparent.jpg.

p. 236. Portrait de Gauss par C. A. Jensen, 1840, commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg.

p. 238. Signature de Gauss, bibliothèque de l'université de Göttingen, commons.wikimedia.org/wiki/File:Carl_Friedrich_Gau%C3%9F_signature.svg.

p. 302. Friedrich (C. D.), *Rabenbaum*, vers 1822, musée du Louvre, commons.wikimedia.org/wiki/File:Caspar_David_Friedrich_-_The_Tree_of_Crows_-_WGA8264.jpg.

p. 304. Friedrich (C. D.), *Mann und Frau*, vers 1824, *Alte Nationalgalerie*, Berlin, commons.wikimedia.org/wiki/File:Caspar_David_Friedrich_-_Mann_und_Frau_in_Betrachtung_des_Mondes_-_Alte_Nationalgalerie_Berlin.jpg.

Autres sources :

p. 11. Sōami, *Paysage des quatre saisons*, XVIe siècle, *Metropolitan Museum of Art*, New York, metmuseum.org/art/collection/search/42344

p. 12. Hug (L. A.) et coll., « A new view of the tree of life », *Nature Microbiology* 1, 2016, n° 16048, nature.com/articles/nmicrobiol201648.

p. 18. HAECKEL (E.), *Anthropogenie oder Entwickelungsgeschichte des Menschen*, 5e édition, Leipzig, 1903, www.enzyklopaedie.ch/dokumente/trees_of_knowledge.html

p. 38. Image de la NASA, eoimages.gsfc.nasa.gov/images/imagerecords/4000/4526/aster_mississippi_artII_15m.jpg.

p. 283. *Yi Jing* circulaire, biroco.com/yijing/scans/ztd900.jpg.

p. 294. Diagramme de cordes, sdk.gooddata.com/gooddata-js/example/chord-chart-to-analyze-sales.

Les autres illustrations sont publiées sous des licences décrites ci-dessous.

p. 5, 66, 95, 99, 142, 187, 192, 207. Panneaux routiers, commons.wikimedia.org/wiki/Category:Road_signs_in_France.

p. 19. Portrait de Knuth par A. Drofina, www-cs-faculty.stanford.edu/ uno/knuth-drofina.tiff.

p. 21. Photo de livres par H. García-Molina, www-cs-faculty.stanford.edu/ knuth/taocp.jpg.

p. 34. Sculpture de J. Frith, 2010, frithmobiles.com.

p. 34. Gare de Neuenmarkt en Bavière, commons.wikimedia.org/wiki/File:DRG_Class_41_on_Neuenmarkt_turntable.JPG.

p. 37. Arbre aléatoire par I. Kortchemski, igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/images/stable15couleur.pdf.

p. 126. Cérémonie d'ouverture des Jeux olympiques de Rio, 2016, commons.wikimedia.org/wiki/File:2016_Summer_Olympics_opening_ceremony_1035320-olimpiadas_abertura-0001.jpg.

p. 217. Cerises, commons.wikimedia.org/wiki/File:Black_Che.jpg.

p. 250. Kanji, icon-park.com.

p. 284. Photo de Cérès par la NASA, dawn.jpl.nasa.gov/multimedia/images/image-detail.html?id=PIA20180.

p. 122. www.purdue.edu/impactearth/.

p. 131. Logo des Jeux olympiques de Rio, all-free-download.com/free-vector/download/rio-2016-olympic-logo-vector-graphic_267077.html.

p. 154. LEYS (J.), GHYS (É.) et ALVAREZ (A.), *Dimensions* [film], 2008, dimensions-math.org.

p. 157. Photo de H. Hopf, www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Hopf_2.jpeg.

p. 162. FLAMMARION (C.), *L'Atmosphère : météorologie populaire*, 1888, fr.wikipedia.org/wiki/Gravure_sur_bois_de_Flammarion.

p. 162. APIAN (P.), *Cosmographia*, 1539, commons.wikimedia.org/wiki/File:Ptolemaic_System_-_Digital_Reproduction.png.

p. 176. Pointe Puiseux, camptocamp.org/routes/58051/fr/mont-pelvoux-pointe-puiseux-pente-centrale.

p. 207. Photo de J. D. Stasheff par K. Jacobs, commons.wikimedia.org/wiki/File:Stasheff.jpg.

Je remercie les personnes et institutions suivantes de m'avoir permis d'utiliser certains de leurs documents :

p. 3. Maxim Kontsevitch : photo, ihes.fr/~maxim.

p. 6. Bibliothèque Diderot ENS Lyon : ROTH (C. F. G.), *Essai d'une distribution généalogique des sciences et des arts principaux*, 1769, bibliotheque-diderot.fr.

p. 7, 49, 51, 52, 55, 56, 59, 61. Bibliothèque de l'université de Cambridge : manuscrits de Newton, cudl.lib.cam.ac.uk/collections/newton

p. 8, 128. Musée d'art de l'université de São Paulo : BILL (M.), *Unité tripartite*, 1948-1949, imgs.fbsp.org.br/files/01BSP_GERAL_02601.jpg.

p. 35. Frédérique Bassino : *The brownian limit of separable permutations*, 2017, arxiv.org/pdf/1602.04960.pdf

p. 58. Pierre Galais et E. G. : *Hommage à Gotlib*, institutdemathologie.fr.

p. 72, 293. Université de Göttingen : cahiers de Gauss, webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/2005/gausscd/html/kapitel_tagebuch.htm.

p. 73, 285. Scot Kolodziejski : timbre et pièce à l'effigie de Gauss, musingsonmath.com/my-collection/.

p. 84. Institut de France : photo de P. Serret par E. Pirou, bibliotheque-institutdefrance.fr.

p. 107. Bibliothèque nationale de France : photo de Puiseux, gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8452909w/f1.item.r=victor%20puiseux.

p. 124. Étienne Lécroart : ruban de Möbius, e.lecroart.free.fr.

p. 126. Sylvie Pic : *Réduction du « Möbius »*, 2017, documentsdartistes.org/artistes/pic/repro.html.

p. 127, 151, 178. Laurent Bartholdi : modèles de la collection mathématique à Göttingen, sammlungen.uni-goettingen.de/sammlung/slg_1017/.

p. 133. Tadashi Tokieda : tours de magie topologique, *Numberphile*, www.youtube.com/watch?v=wKV0GYvR2X8&feature=youtu.be.

p. 134. Ton Marar : au sujet de la sculpture de Max Bill, www.icmc.usp.br/~ton.

p. 140. Barry Sobel : microscope, www.microscope-antiques.com/bullcongmain.html.

p. 156. Tony Philips : vidéo de William Thurston, www.youtube.com/watch?v=IKSrBt2kFD4.

p. 175. André Nachbin : dessin avec Riemann, nachbin.impa.br/Art.

p. 183. Olivier Joseph : lettre de Puiseux, www.facebook.com/cretindesalpes?fref=nf.

p. 185. John Milnor : photo, alchetron.com/John-Milnor-256279-W.

p. 201. Rémy Oudompheng : associaèdre, embuchestissues.wordpress.com/2009/04/08/cardboard-associahedron/.

p. 205. Robert Coquereaux : carte de vœux, www.cpt.univ-mrs.fr/~coque/.

p. 205. Eliane Loday : photo de Jean-Louis Loday, www-irma.u-strasbg.fr/annexes/conferences/loday06/lodayconf.jpg.

p. 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215. Anatoly Fomenko : peintures, sanjindumisic.com/artwork-by-anatoly-fomenko/.

p. 228. Yifan Hu : arbre de mathématiciens, yifanhu.net/GALLERY/MATH_GENEALOGY/.

p. 253. Gary Urton : quipu, www.latinamericanstudies.org/quipu.htm.

Ce livre a été préparé à l'aide de la classe LaTeX tufte-latex inspirée du travail d'Edward Tufte.

Ce livre est également disponible
en anglais, en portugais, en russe, en turc et en arabe.

Du même auteur chez Odile Jacob :
La Petite Histoire des flocons de neige, 2021.
La Petite Histoire du ballon de foot, 2023.

Du même auteur chez CNRS Éditions :
La Théorie du chaos, 2023.