Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

SYSTÈMES DYNAMIQUES. — *Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie.* Note de **Yves Carrière** et **Etienne Ghys,** présentée par Alain Connes.

On étudie les relations d'équivalence sur un groupe de Lie engendrées par l'action d'un sous-groupe dénombrable. En particulier, on donne des conditions pour qu'une telle relation soit moyennable.

DYNAMICAL SYSTEMS. — Amenable equivalence relations on Lie groups.

We study the equivalence relations on Lie groups that are generated by the action of a countable subgroup. In particular, we describe some necessary conditions for the amenability of such a relation.

1. Rappelons tout d'abord quelques définitions (*voir*, par exemple [2]). Soient $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable standard et R une relation d'équivalence sur X. On dit que R est *une relation d'équivalence discrète* (*resp. finie*) *standard* si, d'une part le graphe de R est mesurable dans $X \times X$ et, d'autre part, la classe d'équivalence $R[x]$ de tout point x de X est dénombrable (resp. finie). Dans une telle situation, une mesure μ sur $(X, \mathscr{A})$ est dite *quasi-invariante* si le saturé par R de tout élément de $\mathscr{A}$ de mesure nulle est aussi de mesure nulle. On dit alors que R est une *relation d'équivalence discrète* (*resp. finie*) *mesurée* sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Cette relation est *ergodique* si, pour tout ensemble E de $\mathscr{A}$, saturé par R, on a $\mu(E)=0$ ou $\mu(X-E)=0$. Enfin, R est dite *conservative* s'il n'existe pas d'élément de $\mathscr{A}$ qui rencontre chaque classe d'équivalence en au plus un point. Si un groupe dénombrable opère mesurablement sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, les orbites de cette action définissent une relation discrète standard et on peut alors parler de mesure quasi-invariante, d'action ergodique ou conservative.

Si S est un ensemble dénombrable, une *moyenne* sur S est une application linéaire $m: l^{\infty}(S) \to \mathbf{R}$ telle que $m(f) \geqq 0$ pour $f \geqq 0$ et $m(1)=1$. On dit que la relation d'équivalence discrète mesurée R sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est *moyennable* s'il est possible d'associer à μ-presque tout point x de X une moyenne m_x sur $R[x]$ de sorte que les deux propriétés suivantes soient vérifiées. D'une part, pour μ-presque tout x, on a $m_x = m_y$ pour tout y R-équivalent à x. D'autre part, si $F: \text{Graphe}(R) \to \mathbf{R}$ est une fonction mesurable définie sur le graphe de R, la fonction $f: X \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = m_x(F(x, -))$ est elle aussi mesurable. Il s'avère qu'une relation discrète mesurée R est moyennable si et seulement si elle est *hyperfinie* [2], c'est-à-dire s'il existe une suite croissante R_n de relations finies mesurées sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ telle que, pour μ-presque tout x, on a $R[x] = \bigcup R_n[x]$.

Si, par exemple, une relation d'équivalence discrète mesurée R est engendrée par l'action d'un groupe dénombrable Γ, alors la moyennabilité du groupe Γ entraîne la moyennabilité de la relation R. La réciproque est fausse, même si l'on suppose l'action de Γ *essentiellement libre*, c'est-à-dire si la mesure de l'ensemble des points fixes de l'action est nulle. Cette réciproque est cependant valable dans le cas d'une action essentiellement libre qui *préserve une mesure de probabilité* (*voir* [8]). Notre but est d'obtenir des réciproques partielles de ce genre lorsque l'action considérée ne préserve plus de mesure finie.

2. L'exemple le plus simple de groupe non moyennable étant le groupe libre $L(a, b)$ à deux générateurs a et b, nous commençons par étudier dans quelles conditions une action de ce groupe peut engendrer une relation d'équivalence moyennable.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\varphi: (\gamma, x) \in L(a, b) \times X \to \gamma . x \in X$ *une action mesurable et essentiellement libre de* $L(a, b)$ *sur l'espace mesurable* $(X, \mathscr{A})$ *laissant quasi-invariante une mesure*

0249-6321/85/03000677 \$ 2.00

μ. *Si les automorphismes de* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *correspondant aux éléments a et b sont conservatifs, alors la relation d'équivalence mesurée sur* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *engendrée par* φ *n'est pas moyennable.*

Démonstration. — Soit $A \subset L(a, b)$ l'ensemble des éléments de $L(a, b)$ dont l'écriture comme mot réduit en a et b se termine par une puissance non triviale de a. On définit B de façon similaire.

Supposons que φ définit une relation d'équivalence moyennable et soit m_x la famille des moyennes données par la définition. Soit $u: X \to [0, 1]$ la fonction définie par $u(x) = m_x(1_{A.x})$ où $1_{A.x}$ désigne la fonction indicatrice de la partie $A.x$ de $L(a, b).x = R[x]$. Les propriétés de la famille m_x montrent que u est mesurable.

Il est clair que les ensembles $A b^i$ sont disjoints deux à deux. L'action φ étant essentiellement libre, on en déduit que, μ-presque partout, $0 \leqq \sum m_x(1_{A b^i . x}) \leqq 1$. Comme, par ailleurs $u(b^i . x) = m_{b^i . x}(1_{A b^i . x}) = m_x(1_{A b^i . x})$, on a, pour μ-presque tout x :

$$0 \leqq \sum u(b^i . x) \leqq 1.$$

Posons alors $\alpha(x) = \mathrm{Max}(u(b^i . x))$. L'inégalité précédente montre que l'ensemble $\{x \in X \mid \alpha(x) > 0 \text{ et } u(x) = \alpha(x)\}$ est un ensemble mesurable qui ne rencontre chaque orbite de l'automorphisme associé à b que sur un ensemble fini.

Si l'on suppose que cet automorphisme est conservatif, ce dernier ensemble est de mesure nulle. Son saturé, qui n'est autre que $\{x \in X \mid \alpha(x) > 0\}$ est donc lui aussi de mesure nulle. Par conséquent, la fonction u est nulle μ-presque partout.

Si l'on renverse les rôles de a et b et si l'on considère la fonction v définie par $v(x) = m_x(1_{B.x \cup \{x\}})$, on voit de même que v est nulle μ-presque partout si l'automorphisme associé à a est conservatif. Mais ceci est impossible car $A.x$ et $B.x \cup \{x\}$ forment une partition de $R[x]$ et on a donc $u(x) + v(x) = 1$ μ-presque partout. ■

3. Considérons un sous-groupe dénombrable Γ d'un groupe de Lie G. L'action de Γ sur G par translation à gauche préserve la mesure de Haar de G et définit donc une relation d'équivalence discrète mesurée. A. Connes et D. Sullivan conjecturent que celle-ci est moyennable si et seulement si la composante connexe de l'identité de l'adhérence de Γ dans G est résoluble (la condition suffisante est évidente). Le théorème suivant répond à cette question lorsque Γ est libre.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\Gamma \subset G$ *un sous-groupe dénombrable d'un groupe de Lie qui contient un sous-groupe libre non discret à deux générateurs. Alors la relation d'équivalence engendrée par* Γ *sur* G *n'est pas moyennable.*

Démonstration. — Il est facile de vérifier que si Γ_0 est un sous-groupe de Γ et si la relation engendrée par Γ est moyennable, alors il en est de même de celle engendrée par Γ_0. Il nous suffit donc de démontrer que si $L(a, b) \subset G$ est un sous-groupe non discret, il engendre une relation non moyennable. Supposons donc, par l'absurde, que celle-ci est moyennable.

Reprenons les notations de la démonstration du théorème 1. On dispose d'une fonction mesurable $u: G \to [0, 1]$ telle que $0 \leqq \sum u(b^i x) \leqq 1$. En particulier, si $u(x) > 1/2$, alors $u(b^i x) < 1/2$ pour tout i non nul. En renversant les rôles de a et de b et en utilisant $v = 1 - u$, on obtient que si $u(x) < 1/2$ alors $u(a^i x) > 1/2$ pour tout i non nul.

Considérons alors les deux ensembles mesurables P et Q de G définis par :

$$P = \{x \in G, u(x) < 1/2\} \quad \text{et} \quad Q = \{x \in G, u(x) > 1/2\}.$$

On a $AP \subset Q$ et $BQ \subset P$. Puisque $L(a, b)$ n'est pas discret, il existe une suite d'éléments de $L(a, b)$ différents de l'élément neutre qui tend vers l'élément neutre de G. On peut supposer que cette suite a_n est constituée d'éléments de A. Puisque l'action de Γ sur G préserve évidemment n'importe quelle métrique invariante à gauche sur G, un corollaire classique du théorème de densité de Lebesgue montre que $\lim \mu(a_n \mathrm{P} \cap \mathrm{P}) = \mu(\mathrm{P})$. Puisque $a_n \mathrm{P} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{G} - \mathrm{P}$, on en déduit que $\mu(\mathrm{P}) = 0$.

L'inclusion $\mathrm{BQ} \subset \mathrm{P}$ montre alors que $\mu(\mathrm{Q})$ est aussi nul. En d'autres termes, la fonction u doit être presque sûrement constante égale à 1/2. Mais ceci contredit le fait que $0 \leqq \sum u(b^i x) \leqq 1$. ■

4. Si Γ est un sous-groupe non moyennable d'un groupe de matrices, un théorème de J. Tits [7] affirme que Γ contient un sous-groupe libre. Nous améliorons ici ce résultat dans le cas des sous-groupes de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, ce qui nous permet de démontrer la conjecture de A. Connes et D. Sullivan dans cette situation particulière.

THÉORÈME 3. — *Soit Γ un sous-groupe non discret et non résoluble de* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. *Alors Γ contient un sous-groupe libre non discret. Le théorème* 2 *entraîne alors que la relation d'équivalence engendrée par Γ n'est pas moyennable.*

Démonstration. — D'après [4], un sous-groupe Γ non discret et non résoluble de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ contient au moins un élément γ_1 elliptique d'ordre infini. Soient λ et $\bar{\lambda}$ les valeurs propres de γ_1 (on a $|\lambda| = 1$). Supposons tout d'abord qu'il existe un automorphisme σ de $\mathbf{C}$ tel que $|\sigma(\lambda)| \neq 1$. Cet automorphisme permet alors de construire un plongement i de Γ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ tel que $i(\gamma_1)$ soit hyperbolique, c'est-à-dire tel que la transformation projective de $\mathrm{P}^1(\mathbf{C})$ associée à $i(\gamma_1)$ ait exactement deux points fixes, l'un attractant et l'autre répulsif. Il est facile de voir que, si Γ n'est pas résoluble, il existe un élément γ_2 de Γ tel que $i(\gamma_2)$ est aussi hyperbolique mais a ses points fixes disjoints de ceux de $i(\gamma_1)$. Dans ces conditions, si n est un entier assez grand, les éléments $i(\gamma_1)^n$ et $i(\gamma_2)^n$ engendrent un sous-groupe libre de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ (*voir* [3]). Par conséquent, γ_1^n et γ_2^n engendrent un sous-groupe libre de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ qui n'est certainement pas discret car γ_1 est elliptique d'ordre infini. Ceci termine la démonstration lorsqu'il existe un tel automorphisme σ. Dans le cas contraire, on utilise le lemme suivant de J. Tits [7] : si k est un corps de génération finie et si λ est un élément de k d'ordre infini, alors il existe un plongement j de k dans un corps localement compact k' muni d'une valeur absolue w, tel que $w(j(\lambda)) \neq 1$. ■

5. Les relations d'équivalence discrètes standard apparaissent de manière naturelle dans l'étude ergodique des feuilletages : la relation d'équivalence induite par un feuilletage $\mathscr{F}$ sur une transversale totale T est une relation discrète. La propriété d'être moyennable ne dépend pas du choix de T et on peut donc parler de feuilletage moyennable. Si la variété ambiante est compacte, cette relation peut être engendrée par l'action d'un pseudo-groupe Γ de type fini d'homéomorphismes locaux de T. Les orbites de ce pseudo-groupe, munies de la métrique des mots relative à un système de générateurs, sont alors « quasi-isométriques » aux feuilles de $\mathscr{F}$ (*voir* [1] pour ces notions). Rappelons qu'une variété riemannienne L est dite « Fölner » s'il existe une suite de sous-variétés compactes à bord K_n telle que $\mathrm{vol}(\partial \mathrm{K}_n)/\mathrm{Vol}(\mathrm{K}_n)$ tende vers zéro. La notion correspondante pour une orbite est la suivante : si S est une partie finie d'une orbite de Γ, on note $\partial \mathrm{S}$ l'ensemble des éléments x de S tels que, pour l'un au moins des générateurs γ_i de Γ, on a $\gamma_i(x) \notin \mathrm{S}$. Une orbite est alors dite « Fölner » s'il existe une suite de parties finies S_n de cette orbite telle que $\mathrm{card}(\partial \mathrm{S}_n)/\mathrm{card}\, \mathrm{S}_n$ tende vers zéro.

Le théorème suivant montre que, dans certains cas, la moyennabilité d'un feuilletage est une propriété métrique de ses feuilles; il répond positivement à une question de R. Brooks posée dans [1].

THÉORÈME 4. — *Soit* (M, $\mathcal{F}$) *un feuilletage d'une variété compacte possédant une mesure transverse invariante* μ *et dont* μ*-presque toutes les feuilles sont sans holonomie. Alors* $\mathcal{F}$ *est moyennable pour* μ *si et seulement si* μ*-presque toutes ses feuilles sont « Fölner ».*

Esquisse de démonstration. — La preuve de la condition suffisante est donnée dans [1]. Nous montrons en fait que si un pseudo-groupe Γ essentiellement libre, de type fini, de transformations préservant une probabilité μ sur (X, $\mathcal{A}$), engendre une relation moyennable, alors presque toutes ses orbites sont « Fölner ». Lorsque Γ est un groupe, on retrouve ainsi le résultat cité précédemment, à savoir que Γ est moyennable. Soit R_n une suite croissante de relations finies mesurées sur (X, $\mathcal{A}$, μ) telles que $\Gamma(x)=\bigcup R_n[x]$ pour μ-presque tout x. On montre d'abord le fait suivant : si $f: X \to \mathbf{R}$ est μ-intégrable et si $\bar{f}: X \to \mathbf{R}$ est définie par :

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{\operatorname{Card} R_n[x]}\sum_{y \in R_n[x]} f(y), \qquad \text{alors} \quad \int f\,d\mu=\int \bar{f}\,d\mu.$$

Considérons maintenant la suite de fonctions u_n définie par :

$$u_n(x)=\operatorname{Card}\partial R_n[x]/\operatorname{Card} R_n[x]$$

et notons ∂R_n la réunion des $\partial R_n[x]$ pour x parcourant X. D'après la propriété précédente, on a $\int u_n\,d\mu=\int 1_{\partial R_n}\,d\mu=\mu(\partial R_n)$ qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini car ∂R_n est une suite décroissante d'intersection de mesure nulle. Le lemme de Fatou montre alors que lim inf $u_n(x)$ est nulle presque partout, ce qui implique que μ-presque toutes les orbites sont « Fölner ». ■

Une large famille de feuilletages possédant une mesure transverse pour laquelle presque toute feuille est sans holonomie est fournie par les feuilletages riemanniens, c'est-à-dire ceux pour lesquels le pseudo-groupe transverse est un pseudo-groupe d'isométries. Le théorème suivant résulte de ce qui précède et de [5].

THÉORÈME 5. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage riemannien sur une variété compacte, ergodique pour le volume transverse invariant. Alors,* $\mathcal{F}$ *est moyennable pour ce volume si et seulement si toutes ses feuilles sont « Fölner ». De plus, si* $\mathcal{F}$ *est de codimension* 2, *cette dernière condition est encore équivalente à ce que le pseudo-groupe transverse de* $\mathcal{F}$ *soit un sous-pseudo-groupe d'un groupe résoluble d'isométries.*

Nous conjecturons qu'un feuilletage riemannien est moyennable si et seulement si son groupe structural (*cf.* [5]) est résoluble, et à croissance polynomiale si et seulement si son groupe structural est nilpotent (la croissance polynomiale implique la moyennabilité [6]).

Remise le 25 mars 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. BROOKS, Some Riemannian and dynamical invariant of foliations, in *Differential geometry*, Proceed. Maryland, 1981-1982, *Progress in Math.*, 32, Birkhäuser, p. 56-72.
[2] A. CONNES, J. FELDMAN et B. WEISS, *Erg. Th. et Dynam. Sys.*, 1, 1981, p. 431-450.
[3] P. DE LA HARPE, *L'enseignement Mathématique*, 29, 1983, p. 129-144.
[4] T. JÖRGENSEN, *Quart. J. Math. Oxford*, 28 (2), 1977, p. 209-212.
[5] P. MOLINO, *Akad. Van Weten Proceedings*, 85, 1982, p. 45-76.
[6] C. SERIES, *Israel J. Math.*, 34, n° 3, 1979, p. 245-258.
[7] J. TITS, *J. Algebra*, 20, 1972, p. 250-270.
[8] R. ZIMMER, *Ergodic theory and semi-simple groups*, Birkhäuser, Monographs in Mathematics, 81, 1984.

Université des Sciences et Techniques de Lille-I,
U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées, E.R.A. au C.N.R.S. 07590, 59655 *Villeneuve d'Ascq.*