

DES SYSTÈMES DYNAMIQUES VERS LES FEUILLETAGES

Le domaine d'action de la théorie des systèmes dynamiques s'est progressivement étendu. Alors qu'il ne s'agissait à l'origine que d'étudier les équations différentielles, on s'est intéressé successivement aux actions de groupes, de pseudo-groupes, aux feuilletages et aux itérations d'une application. Cette extension des concepts est naturelle comme nous essaierons de l'expliquer. Nous indiquerons ensuite quelques thèmes de recherche actuels.

Etienne GHYS

Les systèmes dynamiques classiques

La théorie des systèmes dynamiques tire son origine d'un constat d'échec : la plupart des équations différentielles, même « simples », ne peuvent être résolues « explicitement ». Pour remédier à cette situation, H. Poincaré a eu l'idée de remplacer l'étude analytique explicite des solutions d'une équation différentielle par une étude qualitative de celles-ci. Pour illustrer cette idée, nous allons décrire un des premiers théorèmes obtenus : le **théorème de Poincaré-Bendixson**.

Supposons que l'on s'intéresse à un champ de vecteurs (voir encadré 1) X sur la sphère de dimension 2, c'est-à-dire à une équation différentielle sur le plan qui se « compactifie bien » à l'infini. Si l'on note ϕ_t le flot associé à X , il est naturel de s'intéresser au comportement asymptotique des solutions $\phi_t(x)$ lorsque le temps t tend vers l'infini. Dans ce but, on introduit, pour chaque point x de la sphère, un ensemble limite $\omega(x)$ qui est l'ensemble des points sur

lesquels l'orbite $\phi_t(x)$ s'accumule lorsque t tend vers l'infini. En termes de mécanique, $\omega(x)$ décrit le « régime permanent ».

Essentiellement, le théorème de Poincaré-Bendixson affirme que la structure de cet ensemble limite est très simple. En fait, si X ne s'annule qu'en un nombre fini de points, $\omega(x)$ ne peut être que de trois types : un point singulier, une orbite périodique ou un cycle de singularités (voir figure 1).

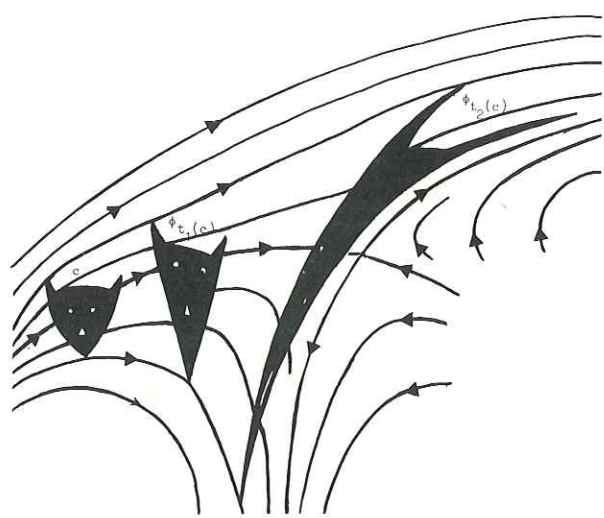
H. Poincaré s'est immédiatement rendu compte que ce théorème ne pouvait être vrai que sur la sphère de dimension deux. Il est en effet facile de construire un champ de vecteurs sur le tore de dimension deux dont les orbites sont des « hélices » qui s'enroulent de manière dense sur le tore (voir figure 2). Dans ce cas, $\omega(x)$ est le tore tout entier et n'est donc pas de l'un des trois types précédents.

Ceci motive l'un des principaux problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. Quelle est l'influence de la topologie de l'espace ambiant sur la structure des ensembles limites des champs de vecteurs ?

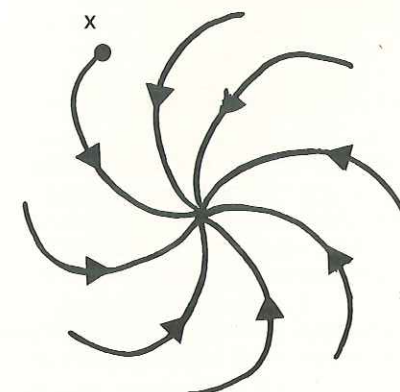
1. CHAMPS DE VECTEURS ET FLOTS

Un champ de vecteurs X dans le plan associe à chaque point x de ce plan un vecteur $X(x)$ (de façon infiniment différentiable par exemple). Une courbe $\gamma(t)$, paramétrée par le « temps » t , est une courbe intégrale (ou orbite ou trajectoire) de X si son vecteur vitesse coïncide toujours avec le vecteur correspondant $X(\gamma(t))$. Les théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles établissent que par chaque point passe une unique trajectoire qui peut cependant n'être définie que localement. Dans de nombreux cas ces trajectoires sont en fait globales ; on dit alors que X est complet. C'est toujours le cas si X , au lieu d'être défini sur le plan, est défini sur une variété de configurations telle que la sphère ou le tore.

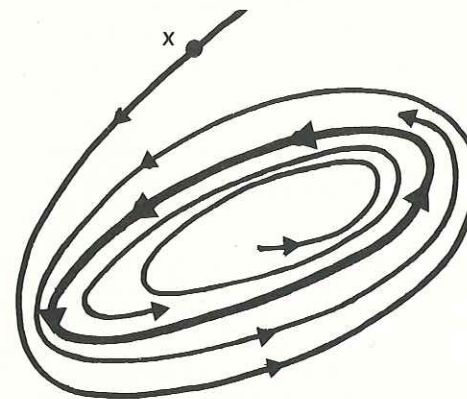
Considérons un champ de vecteurs complet X . Si x est un point et t un nombre réel, on note $\phi_t(x)$ la valeur au temps t de la trajectoire qui est en x à l'origine des temps. Pour chaque nombre réel t , la transformation associant $\phi_t(x)$ à x est bijective, différentiable ainsi que son inverse ; on dit que ϕ_t est un difféomorphisme. Le théorème de Cauchy sur les équations différentielles permet alors de montrer facilement que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, c'est-à-dire que l'on est en présence d'un « groupe à un paramètre ». Il est clair que l'étude des orbites de X est équivalente à celle du groupe à un paramètre réel des difféomorphismes ϕ_t auquel on a donné le nom suggestif de « flot » associé au champ X .



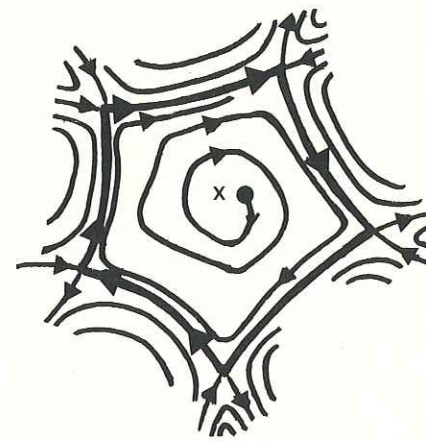
Le flot d'un champ de vecteurs.



Une singularité.



Une orbite périodique.



Un cycle de singularités.

Figure 1

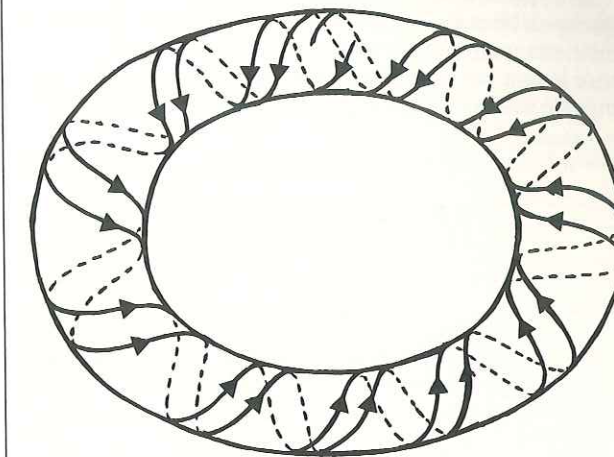


Figure 2 — Orbites hélicoïdales s'enroulant de manière dense sur le tore.

Champs de Morse-Smale

Dans le cas des champs de vecteurs sur une surface, le théorème de Poincaré-Bendixson est cependant « presque vrai » dans la mesure où il est vrai pour un ouvert dense de champs de vecteurs. Précisons ce résultat. Si Σ est une surface compacte, l'ensemble $\mathfrak{X}(\Sigma)$ des champs de vecteurs sur Σ (par exemple continûment différentiables) est naturellement muni d'une topologie (c'est un espace de Banach). Il se trouve que, même si $\omega(x)$ peut être compliqué pour un champ individuel, il existe un ouvert dense U dans $\mathfrak{X}(\Sigma)$ tel que si X est un champ de U , tous ses ensembles limites sont des singularités ou des orbites périodiques de X . Notons que le « cycle de singularités » n'apparaît pas dans U ; il s'agit d'un cas exceptionnel qui disparaît par petite perturbation (voir figure 3).

Il est sans espoir de pouvoir décrire tous les champs de vecteurs sur un espace donné, même qualitativement. On est alors amené à une autre question de la théorie : est-il possible de décrire le comportement qualitatif d'une partie générique, i.e. suffisamment grande, de l'ensemble des champs de vecteurs ? Cette approche est due à R. Thom et a été reprise avec succès par S. Smale.

Il faut encore préciser ce qu'on entend par « décrire le comportement qualitatif ». Pour ce faire, on introduit la définition fondamentale suivante : deux champs X et Y sont topologiquement équivalents s'il existe un

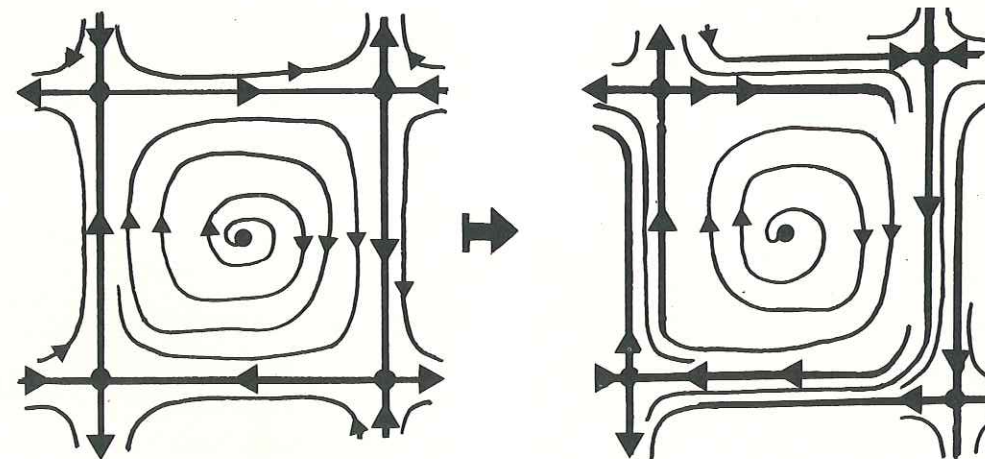


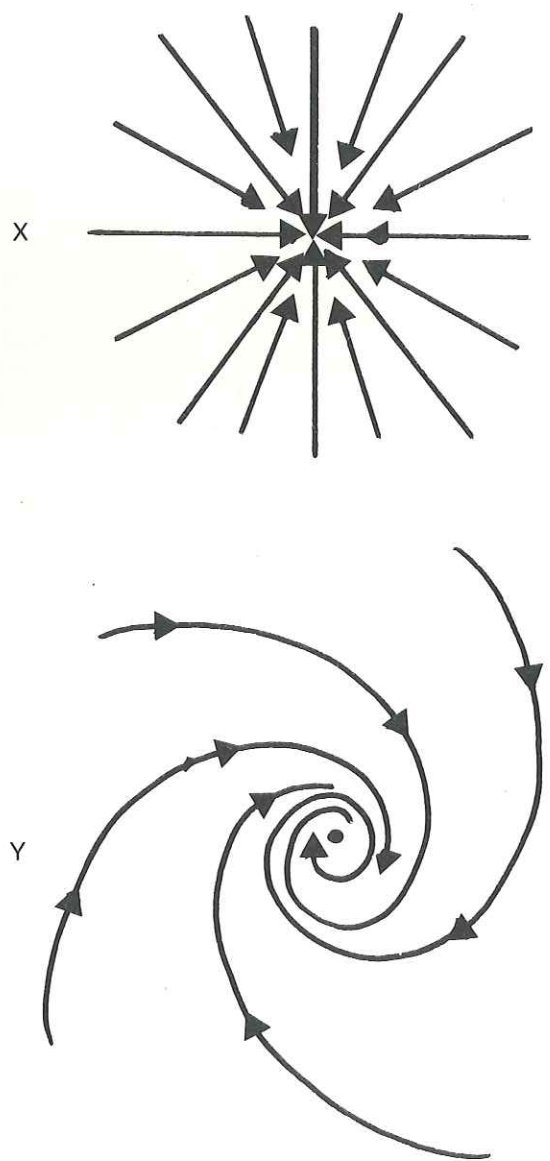
Figure 3 — Disparition d'un cycle de singularités par une petite perturbation.

homéomorphisme entre les espaces qui les supportent qui envoie les orbites de X sur celles de Y, tout en respectant les orientations naturelles de ces orbites (voir encadré 2). Décrire le comportement qualitatif signifie alors classer les champs de vecteurs à une équivalence topologique près.

2. HOMÉOMORPHISMES ET DIFFÉOMORPHISMES

Une bijection est un homéomorphisme si elle est continue ainsi que son inverse ; c'est un difféomorphisme si elle est différentiable ainsi que son inverse. Un homéomorphisme préserve toutes les relations de nature qualitative alors qu'un difféomorphisme préserve aussi les structures infinitésimales et appartient donc au « monde du quantitatif ».

Considérons par exemple les deux champs de vecteurs suivants dans le plan :



L'allure qualitative est la même : toutes les orbites de X et de Y convergent vers l'origine. Les champs X et Y sont topologiquement équivalents. L'allure différentiable n'est pas la même : les orbites de X convergent vers l'origine avec une direction limite, ce qui n'est pas le cas pour Y.

En fait, le théorème décrit précédemment est plus fort : il donne une réponse complète à la question posée plus haut dans le cas des champs sur les surfaces. On définit une famille de champs dont le comportement qualitatif est simple et bien compris, appelés « **champs de Morse-Smale** » et M. Peixoto montre que ces champs de Morse-Smale forment un ouvert dense dans l'espace des champs sur la surface considérée. Ce faisant, il montre qu'une propriété, introduite par L. Pontriaguine, est générique : celle de **stabilité structurelle**. Un champ de vecteurs X est dit « structurellement stable » s'il existe un voisinage V de X dans $\mathfrak{X}(\Sigma)$ tel que tous les champs de V sont topologiquement équivalents à X. En termes moins précis, une petite perturbation de X ne change pas son comportement qualitatif. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de M. Peixoto : *l'ensemble des champs de Morse-Smale est générique dans $\mathfrak{X}(\Sigma)$ et contient précisément les champs structurellement stables.*

Flots géodésiques

Ces résultats, valables sur les surfaces, laissent espérer des résultats analogues sur les variétés de dimension supérieure (pour la notion de variété, voir encadré 3). Il n'en est rien. D'une part, les champs structurellement stables ne sont plus génériques en général et, d'autre part, certains champs stables peuvent être « compliqués » (i.e., ne pas être de Morse-Smale). La théorie des systèmes dynamiques entre alors dans une phase plus complexe et certainement moins « ambitieuse » : il ne s'agit plus de décrire tous les champs, ni même un ensemble générique, mais plutôt telle ou telle catégorie spécifique de champs.

Un exemple important de champ compliqué et stable est le flot géodésique d'une surface à courbure négative que nous décrivons maintenant. Si un point matériel se déplaçant dans l'espace n'est soumis à aucune force mais est astreint à rester sur une surface Σ , il est bien connu que ce point se déplace sur les géodésiques de cette surface. Rappelons que ces géodésiques sont les courbes tracées sur la surface qui sont, localement, les plus courtes joignant un point à un autre. L'état du point matériel à un instant donné est décrit par un point du « fibré unitaire tangent à Σ » ; il s'agit de l'ensemble des vecteurs de longueur 1 qui sont tangents à Σ . Ce fibré unitaire, noté $T_1\Sigma$, est une variété de dimension 3 (deux degrés de liberté pour la position sur Σ et un degré de liberté pour la direction du vecteur tangent). La dynamique du point matériel est alors décrite par le flot géodésique ϕ_t sur $T_1\Sigma$ défini de la façon suivante. Si v est un vecteur unitaire tangent à Σ en x , on considère la géodésique γ issue de x et pointant dans la direction de v . On pose alors $\phi_t(v) = w$ où w est le vecteur unitaire tangent à γ au point y de γ situé à une distance algébrique t de x , le long de γ (voir figure 4). On remarquera que ce flot géodésique ne dépend

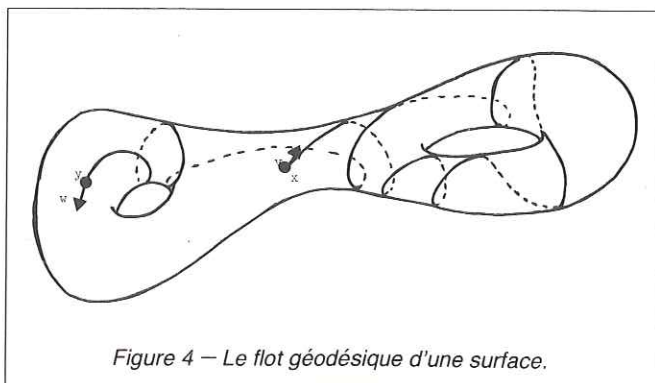


Figure 4 — Le flot géodésique d'une surface.

que de la métrique intrinsèque de la surface Σ et non de la façon dont celle-ci est plongée dans l'espace euclidien. En d'autres termes le flot géodésique est attaché à la « métrique riemannienne » de la surface.

On se rend assez rapidement compte du fait que le comportement local des géodésiques sur une surface dépend essentiellement de sa courbure. Si la courbure est positive (i.e., si la surface ressemble localement à une sphère), les géodésiques ont tendance à se « rassembler ». Au contraire si la courbure est négative (si la surface ressemble à une selle de cheval), les géodésiques ont tendance à se disperser.

Le résultat remarquable de D.A. Anosov est le fait que le flot géodésique d'une surface compacte à courbure négative est structurellement stable. Ce résultat est d'autant plus surprenant que ce flot est extrêmement compliqué et très loin des Morse-Smale ; les ensembles limites peuvent être le fibré unitaire tout entier, un cercle (géodésique fermée) ou des ensembles fermés autrement plus compliqués, liés aux ensembles de Cantor.

Pour démontrer la stabilité structurelle de ce flot, D.A. Anosov n'utilise pas la structure précise de la variété ambiante. En fait, il montre qu'un flot vérifiant certaines propriétés est stable et que le flot géodésique d'une surface à courbure négative vérifie ces propriétés. Très grossièrement, ces propriétés sont illustrées sur la figure 5 ; dans l'espace

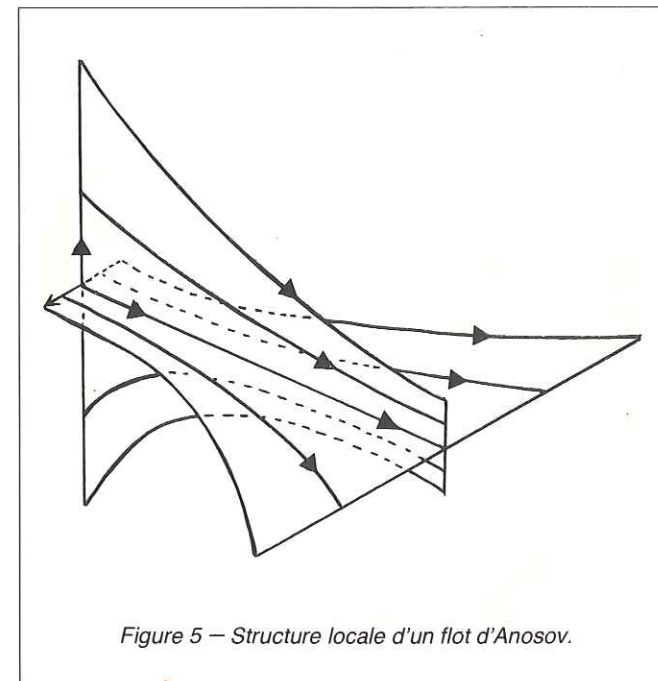


Figure 5 — Structure locale d'un flot d'Anosov.

tangent à la variété ambiante, certains vecteurs (stables) sont contractés par le flot alors que d'autres (instables) sont au contraire dilatés.

La famille des flots d'Anosov est l'une des familles de systèmes dynamiques dont on peut faire une étude précise. Outre la stabilité structurelle, les propriétés ergodiques (i.e. le comportement du flot vis-à-vis d'une mesure sur l'espace) des orbites ont été très étudiées. Le problème général de la détermination des variétés de dimension 3 qui admettent de tels flots reste ouvert bien que de nombreux progrès aient été réalisés ces dernières années.

Il est maintenant clair que l'étude de ces flots d'Anosov peut servir de guide à celle des flots plus généraux dont certains exemples ont parfois des « attracteurs étranges ». V. Arnold a d'ailleurs eu l'idée que certaines équations aux dérivées partielles pourraient avoir des comportements du type Anosov. Il considère pour cela le groupe des difféomorphismes de la sphère (terrestre) qui préservent l'aire. Un calcul de la « courbure » de cette « variété » de dimension infinie le mène au résultat que ce groupe est

« essentiellement à courbure négative ». Il observe alors que l'équation qui gouverne les « géodésiques » de ce groupe est précisément l'équation aux dérivées partielles du type de Navier-Stokes bien connue qui régit le mouvement de l'atmosphère. Avec ce genre de modèle très simplifié, V. Arnold peut « conclure heuristiquement » que la météorologie consiste à étudier les orbites d'un flot d'Anosov en dimension infinie...

Les diverses généralisations de la notion de système dynamique

Comme il est courant en mathématiques, l'évolution de la théorie qualitative des champs de vecteurs s'est faite parallèlement à une généralisation progressive des objets étudiés, dépassant le cadre strict des champs de vecteurs.

La première généralisation a été, en fait, une particularisation ! Plutôt que d'étudier un groupe à un paramètre réel de difféomorphismes ϕ_t , on est tenté de « discrétiser » le temps et de considérer en fait un « flot » ϕ_n dont le paramètre n est un entier relatif. Puisque, dans ce cas $\phi_n = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_1$ (n fois), l'étude de la « cascade » ϕ_n (dans la terminologie d'Anosov) n'est rien d'autre que l'étude des itérations d'un difféomorphisme ϕ_1 d'une variété M .

A strictement parler, l'étude d'un difféomorphisme se ramène à celle d'un flot grâce au procédé dit de suspension. Si ϕ est un difféomorphisme d'une variété M , on considère le produit $M \times [0, 1]$ de M par un intervalle. En identifiant $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ à l'aide de ϕ , on construit une nouvelle variété M_ϕ équipée naturellement d'un champ X_ϕ qui est la suspension de ϕ (voir figure 6). Il est clair que l'étude des itérations de ϕ est équivalente à celle du flot de X_ϕ .

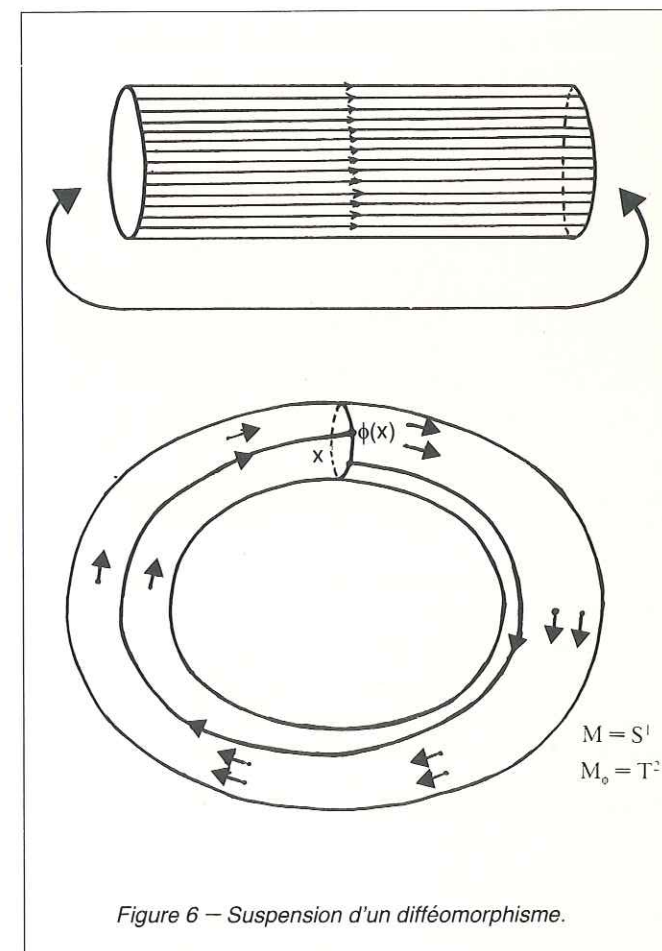


Figure 6 — Suspension d'un difféomorphisme.

L'intérêt de cette notion est cependant d'indiquer une généralisation plus fructueuse, lorsque le temps n'est ni un réel, ni un entier, mais un élément d'un groupe Γ quelconque. Un système dynamique général ne sera rien d'autre qu'une action du groupe Γ sur une variété M , i.e. un homomorphisme Ψ de Γ dans le groupe des difféomorphismes de M . De telles actions Ψ et Ψ' seront topologiquement conjuguées s'il existe un homéomorphisme h de M tel que $\Psi' = h \circ \Psi \circ h^{-1}$. Les définitions fondamentales de la théorie classique s'étendent sans difficulté, par exemple celle de la stabilité structurelle.

Avec une telle notion de système dynamique généralisé, on peut se demander si le théorème de Poincaré-Bendixson peut s'étendre dans certaines situations. Ce problème a été effectivement étudié, en particulier, lorsque le groupe qui agit est relativement simple, par exemple \mathbb{R}^2 . Citons le théorème de E. Lima : *si \mathbb{R}^2 opère sur la sphère de dimension 3, alors il existe au moins une orbite qui est un cercle (mouvement « périodique ») ou un point (« position d'équilibre »).*

Pour d'autres groupes, la situation est différente. Par exemple le cas du groupe affine GA de la droite réelle, i.e. des applications $x \rightarrow ax + b$ ($a > 0$) a été étudié récemment. Les actions de GA sur les variétés de dimension 3 s'avèrent extrêmement riches et manifestent des propriétés de rigidité assez surprenantes. Il est intéressant de constater que ces actions de GA sont intimement liées aux flots d'Anosov en dimension 3.

Feuilletages

En fait, l'étude qualitative des actions de groupe a montré rapidement un phénomène surprenant ; le paramètre, c'est-à-dire la structure de groupe n'intervient que très peu. La propriété importante est la structure locale d'une action, ce qui a mené à dégager la notion générale de feuilletage introduite par C. Ehresmann et développée pour la première fois par G. Reeb dans sa thèse : « Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées », Hermann, Paris (1952).

Un feuilletage est un système dynamique général « non paramétré ». Précisément, une variété M est feuilletée si elle est réunion disjointe de sous-variétés immergées de même dimension p , appelées feuilles (analogues aux orbites ou trajectoires) avec la condition de trivialité locale suivante : pour tout point x de M , il existe une carte locale θ d'un voisinage U de x sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ telle que θ envoie les composantes connexes des intersections des feuilles avec U sur les « plaques » $\mathbb{R}^p \times \{*\}$. L'entier p est la dimension du feuilletage et $n-p$ est sa codimension (voir figure 7). Par exemple, un feuilletage de dimension 1 est un champ de droites, ou, plus précisément, les courbes intégrales d'un tel champ.

Un grand nombre des propriétés des systèmes dynamiques classiques se généralisent aux feuilletages. Un exemple typique de théorème « à la Poincaré-Bendixson » est le théorème de Novikov : *tout feuilletage de codimension 1 sur la sphère de dimension 3 possède une feuille compacte homéomorphe à un tore de dimension 2, ce qui est l'analogie d'un mouvement périodique.* Plus précisément, ce tore borde une « composante de Reeb », c'est-à-dire un tore plein feuilleté comme indiqué sur la figure 8.

On peut alors se poser des questions analogues à celles posées précédemment : quelle est l'influence de la topologie d'une variété sur la structure des feuilletages qu'elle supporte ? Existe-t-il des feuilletages structurellement stables ? etc.

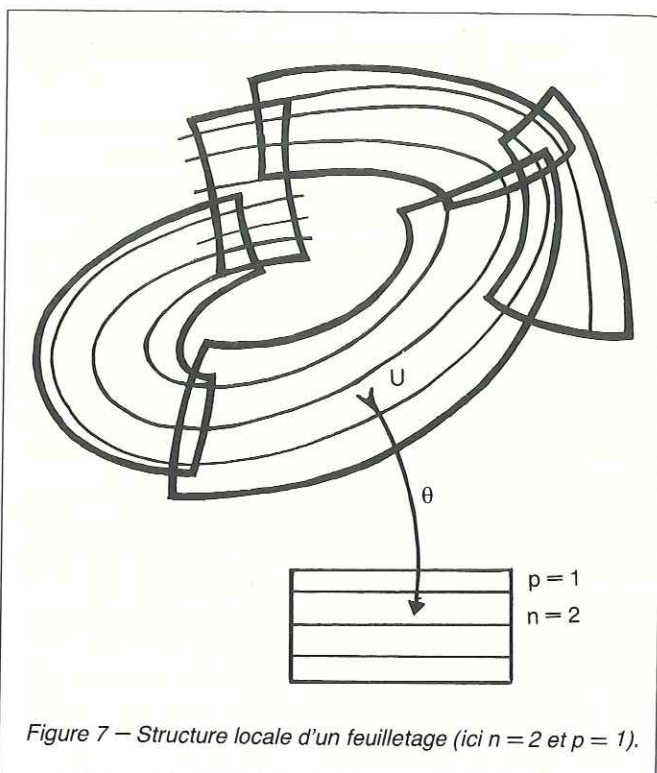


Figure 7 — Structure locale d'un feuilletage (ici $n=2$ et $p=1$).

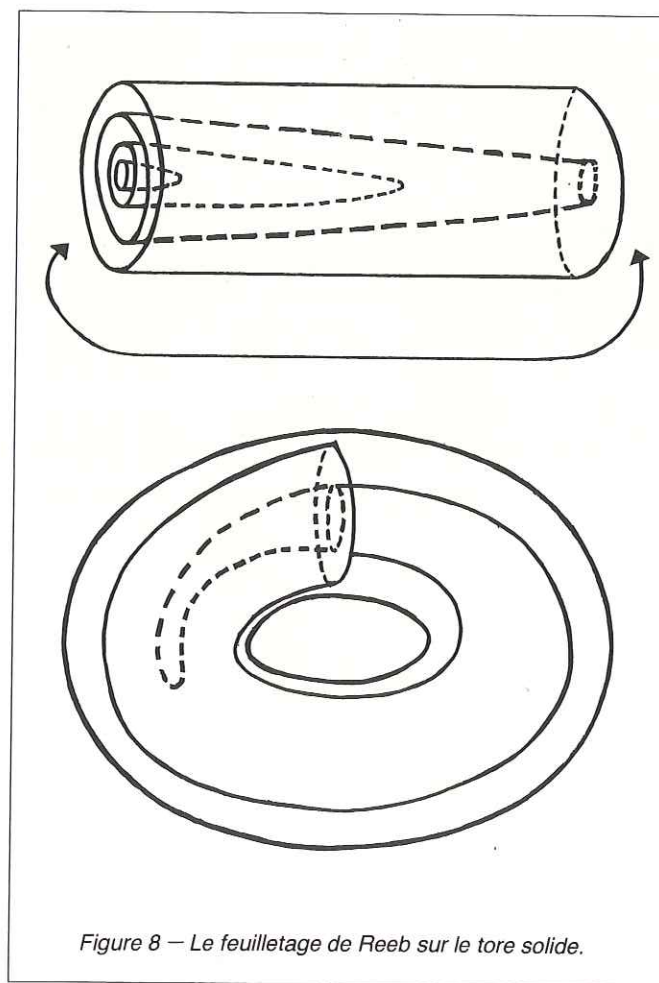


Figure 8 — Le feuilletage de Reeb sur le tore solide.

Puisque les feuilles d'un feuilletage ne sont pas paramétrées, on est amené à étudier sa « dynamique transverse ». Pour ce faire, on considère une collection T_i de sous-variétés de dimension $n-p$ qui sont transverses aux feuilles et dont la réunion coupe toutes les feuilles.

Si T_i et T_j sont deux de ces transversales, on considère alors les homéomorphismes h d'un ouvert de T_i sur un ouvert de T_j tels que, pour tout x , les points x et $h(x)$ sont sur

la même feuille. La collection de ces homéomorphismes locaux définit un « pseudo-groupe » d'homéomorphismes de la transversale $T = \cup T_i$. Essentiellement, un pseudo-groupe est un groupe où la composition n'est pas définie pour toute paire d'éléments. Le pseudo-groupe que nous venons d'introduire est le pseudo-groupe transverse du feuilletage considéré ; ses orbites, contenues dans T , sont les intersections des feuilles avec T . En fait, l'étude du feuilletage se ramène à celle du pseudo-groupe transverse. En définitive, nous arrivons à une notion extrêmement générale de système dynamique : un pseudo-groupe d'homéomorphismes locaux. Cette conception est due à A. Haefliger.

De même que dans le cas des flots, il n'y a pas d'espoir d'étudier très précisément les feuilletages les plus généraux ; on impose en général une condition spécifique sur le pseudo-groupe transverse. Un exemple d'une telle condition a été très étudié ces dernières années : c'est le cas où le pseudo-groupe transverse est un pseudo-groupe d'isométries pour une certaine métrique sur T . On dit alors que le feuilletage est « riemannien ». La dynamique de ces feuilletages est maintenant bien comprise grâce, en particulier, aux mathématiciens de Genève, Lille et Montpellier. Nous ne citerons que le résultat fondamental dû à P. Molino (Montpellier) : *d'une part, l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage riemannien est toujours une sous-variété plongée ; d'autre part, la collection de ces adhérences forme une fibration singulière facilement analysable ; enfin, la restriction du feuilletage à l'une de ces adhérences se décrit explicitement en termes de groupes de Lie.* En d'autres termes, ces feuilletages présentent les premiers exemples où une dynamique intéressante peut se produire mais où la situation qualitative est assez bien contrôlée.

Un autre cas de pseudo-groupe rencontré naturellement provient de l'étude dynamique d'une application $\phi : M \rightarrow M$ qui n'est pas supposée bijective. Dans ce cas, on ne peut itérer ϕ que positivement, de sorte que l'on dispose d'un système dynamique dont le temps n'est qu'un semi-groupe \mathbb{N} . Cette situation se ramène à la précédente en considérant le pseudo-groupe engendré par ϕ et les diverses « branches » de l'inverse de ϕ . Une famille d'exemples extrêmement riche a été étudiée par G. Julia et P. Fatou au début du siècle et reprise récemment. Il s'agit de l'étude dynamique des fractions rationnelles d'une variable complexe, vues comme transformations de la sphère de Riemann dans elle-même (non bijectives en général). Les travaux récents ont montré que les généralisations successives dont nous parlons ne sont pas gratuites ; des techniques communes permettent d'aborder ces fractions rationnelles et les groupes kleiniens, c'est-à-dire les actions d'un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur la sphère de Riemann (D. Sullivan, IHES, Bures-sur-Yvette).

En conclusion

Comme nous l'avons constaté, l'évolution de la notion de système dynamique a été dans le sens d'un affaiblissement continu de la définition. En fait, il semble bien plus fructueux aujourd'hui d'éviter de définir ce qu'est un système dynamique... à part de dire qu'il s'agit de composer un certain nombre d'applications, éventuellement non bijectives, non partout définies, etc. L'absence de définition stricte des objets étudiés est sans aucun doute un atout pour saisir les analogies entre des domaines qui semblent différents.

3. VARIÉTÉS

L'espace des configurations d'un système mécanique est rarement un espace euclidien \mathbb{R}^n . Par exemple, un point astreint à rester à distance constante d'un point fixe se déplace sur une sphère. La position d'un point sur une sphère est localement définie par deux coordonnées (longitude et latitude). Ceci a conduit les géomètres à introduire la notion de variété différentiable. Il s'agit d'un espace topologique M tel que pour tout point x de M on puisse trouver un voisinage U de x et un homéomorphisme θ_U de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n (une « carte »). On demande que les « changements de cartes » $\theta_U \circ \theta_V^{-1}$ soient différentiables là où ils sont définis. Une variété est un terrain de travail pour la topologie différentielle et l'analyse. On y définit facilement tous les objets usuels : espace tangent, champs de vecteurs, flots, etc.

Si M est une variété, une sous-variété N de M est un sous-ensemble qui, localement et à un difféomorphisme près, ressemble à un sous-espace linéaire \mathbb{R}^p de \mathbb{R}^n . Un exemple simple est fourni par l'équateur dans la sphère terrestre. On définit également des « sous-variétés immergées » plus générales dont un exemple type est une orbite du champ de la figure 2 sur le tore. La seule différence avec une véritable sous-variété est, dans ce cas, que l'orbite n'est pas fermée dans le tore.

POUR EN SAVOIR PLUS

- V. Arnold — *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1978.
- C. Camacho, A. Lins — *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser, 1986.
- G. Hector, U. Hirsch — *Introduction to the geometry of foliations*. Vieweg and Sohn, 1981.
- J. Palis, W. de Melo — *Geometric theory of dynamical systems ; an introduction*. Springer Verlag, 1982.