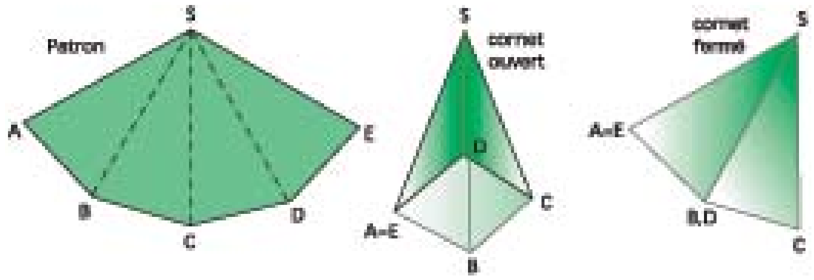
قضیهٔ دَم

نویسنده: اتین گی [۱]

مترجم: ارسلان شادمان

ویراستاران: فرج‌الله محمودی، شهناز عباسپور

یک خط‌کش، یک مداد، مقداری مقوا، قیچی و چسب: برای فراهم ساختن خوشحالی ریاضیدانان و ایجاد مسائل زیبا، به چیزی جز این ابزار نیاز نیست. بررسی این مسائل، غالباً پس از انجام و به شکل غیرمنتظره، در مشاغل دیگر سودمند خواهد بود.



شکل ۱. ساخت یک هرم از مقوا. بدون قاعدهٔ ABCDA، این جسم انعطاف‌پذیر است.
این سه شکل از چپ به راست، الگو، قیف باز و قیف بسته را نشان می دهند.

[۱] Ghys, Etienne: *Le théorème du soufflet*,
in: L'explosion des mathématiques, SMF et SMAI, Paris, 2002, p. 23-27

یک هرم مقوایی بسازیم. برای این کار، از یک برگ مقوا یک قطعه را طبق الگوی SABCDE مانند شکل ۱ ببریم، سپس آن را در امتداد خط‌های نقطه‌چین تا کنیم و اضلاع AS و ES را به هم بچسبانیم.

نتیجهٔ این کار نوعی قیف است که رأس آن S و قسمت لبهٔ آن چهار ضلعی ABCD است. این شیء انعطاف‌پذیر [۱] است. اگر آن را در دست بگیریم، چهار ضلعی ABCD تغییر شکل می‌دهد و کم یا بیش باز می‌شود: آنچه ساخته‌ایم استحکام زیادی ندارد. برای آن که هرم تکمیل شود، باید یک مربع مقوایی نیز بسازیم و آن را به چهار ضلعی مورد بحث بچسبانیم تا قاعدهٔ هرم تشکیل شود. با این عمل، هرم مورد نظر استحکام می‌یابد و به اصطلاح صُلب یا استوار [۲] می‌شود. اگر آن را در دست بگیریم و سعی کنیم به آرامی آن را تغییر شکل دهیم، قادر نخواهیم بود مگر آن که وجوه مقوائی را تغییر دهیم. همان‌گونه که همه بارها ملاحظه کرده‌ایم، یک مقوای مکعبی دارای استحکام است. آیا این مسأله برای یک چند وجهی در حالت کلی نیز که ممکن است هزاران وجه داشته باشد، صحّت دارد؟ آیا ژئود [۳] در محلهٔ ویلّتِ [۴] پاریس، استحکام دارد؟ پرسش اخیر به خوبی نشان می‌دهد که مسألهٔ انعطاف‌پذیری یا استحکام فقط یک مسألهٔ نظری نیست.

مسأله‌ای که امروز هم مطرح است و به عهد باستان برمی‌گردد

مسألهٔ استحکام اشیائی از این قبیل، بسیار قدیمی است. احتمالاً اقلیدس نیز با این مسأله آشنا بوده است. ریاضیدان بزرگ فرانسوی، آدرین ــ ماری لُژاندر [۵] در اواخر قرن ۱۸ به این مسأله علاقمند شده و دربارهٔ آن با همکارش ژوزف ــ لویی لاگرانژ [۶] صحبت کرده است. لاگرانژ هم به نوبهٔ خود در ۱۸۱۳ به اوگوستَن ــ لویی کوشیِ [۷] جوان توصیه کرد این مسأله را بررسی کند. اولین نتیجهٔ چشمگیر بارون اُ. ــ ل. کوشی، که بعداً به یکی

---

۱ flexible

۲ rigide

۳ La géode

۴ Villette

۵ Adrien-Marie Legendre

۶ Joseph-Louis Lagrange

۷ Augustin-Louis Cauchy

از بزرگترین ریاضیدانان قرن خود تبدیل شد، در این زمینه بود.

اوگوستن ـ لویی کوشی (۱۸۵۷ ـ ۱۷۸۹) یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان زمان خود.
(کلیشهٔ آرشیوهای مدرسهٔ پولی‌تکنیک [۱])

کوشی، به چند وجهی‌های محدّب[۲] علاقمند شد، یعنی به چند وجهی‌هایی که هیچ یالی به سوی داخل ندارند. مثلاً هرمی که با مقوا ساختیم یا توپ فوتبال محدب هستند در حالی که شییء سمت راست در شکل ۲ چنین نیست.

شکل ۲.یک چند وجهی محدب و یک چند وجهی ستاره‌ای غیرمحدب

قضیه‌ای که کوشی ثابت کرد این است: هر چند وجهی محدب استوار است.

---

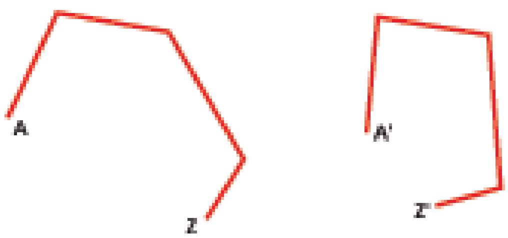
[۱] Cliché Archives de l’École Polytechnique

[۲] convexe

معنای این قضیه آن است که اگر یک چند وجهی محدب بسازیم به نحوی که وجوه آن تغییر شکل ندهند (مثلاً فلزی باشند) و به وسیلهٔ لولاهایی در طول یال‌هایشان به هم چسبیده باشند، آنگاه هندسهٔ سرتاسری[۱] آن مانع جابه‌جایی بست‌های آن خواهد شد. جسم قیفی شکلی که ساخته بودیم انعطاف‌پذیر بود ولی این مطلب از اعتبار قضیه نمی‌کاهد زیرا در مورد قیف، یک وجه آن ناقص بود و این همان وجهی بود که به هرم استحکام بخشید.

پرداختن به ریاضیات به معنای آن است که آنچه را می‌گوییم و ادعا می‌کنیم ثابت کنیم! و اما اثباتِ کوشی بسیار شکوهمند است (هر چند عده‌ای بعداً تذکر داده‌اند که اثباتِ او کامل نیست). متأسفانه در این مقالهٔ کوتاه نمی‌توان اندیشهٔ اثبات او را بیان کرد، با این وجود مایلم یکی از لم‌های آن یعنی مرحله‌ای از اثبات قضایای او را مطرح کنم.

روی زمین یک زنجیر مرکب از تعدادی میلهٔ فلزی را که یکی پس از دیگری به هم چسبیده باشد، مطابق شکل ۳ در نظر بگیرید. در هر یک از زاویه‌های خط چند ضلعی، دو میلهٔ ضلع زاویه را طوری حرکت دهیم که زاویهٔ مورد نظر کوچک شود. در این صورت، ابتدا و انتهای زنجیر به هم نزدیک می‌شوند. آیا این مطلب به نظر شما بدیهی است؟ سعی کنید آن را ثابت کنید ...



شکل ۳ـ اگر زوایایی را که پاره‌خط‌ها بین خود می‌سازند، کاهش دهیم، دو سر این رشته پاره‌خط به هم نزدیک می‌شوند.

مدتی طولانی، عدهٔ کثیری از ریاضیدانان این سؤال را مطرح کردند که آیا چند وجهی‌های غیرمحدب نیز به همان اندازه استوارند؟ آیا می‌توان یک روش اثبات برای

[۱] géométrie globale

استوار بودن چند وجهی‌ها پیدا کرد که از فرض محدب بودن استفاده نکرده باشد؟ ریاضیدانان دوست دارند احکامی را بیان کنند که در آنها همهٔ فرض‌ها برای رسیدن به نتیجهٔ حکم مفید باشند. در مورد این مثال خاص، مدت ۱۶۰ سال تلاش لازم بود تا آن که جواب شناخته شد.

ژئودِ ویلت در شهرک علمی پاریس، چند وجهی محدبی است مرکب از ۱۷۳۰ وجه مثلثی. استحکام چند ضلعی‌های مفصل‌دار به طرح یک مسئله زیبای ریاضی موکول می‌شود که سرانجام در سال ۱۹۹۷ به نتیجه رسیده (کلیشهٔ کاسماس / ر. برژرو[1]).

در ۱۹۷۷ ریاضیدان کانادایی رابرت کونلی[2] به آفرینش شگفتی دست یافت. او توانست یک چند وجهی (البته بسیار پیچیده) بسازد که انعطاف‌پذیر باشد. پرواضح است که چند وجهی او نمی‌توانست محدب باشد و گرنه با نظریهٔ کوشی در تعارض قرار می‌گرفت! مدتی پس از آن، شیوهٔ ساخت کونلی به‌وسیلهٔ افرادی، از جمله به‌ویژه توسط کلاوس اِشتِفِن[3] اندکی ساده‌تر شد. در شکل ۴ الگویی ارائه می‌کنم تا خواننده بهتر بتواند طبق آن به ساختن «چند وجهی انعطاف‌پذیر»[4] اشتفن بپردازد. مقوا را ببرید و آن را در امتداد خطوط رسم شده تا کنید. خط‌های پُر یال‌های به سوی بیرون و خط‌های نقطه‌چین یال‌های به سوی درون هستند. سپس کناره‌های آزاد را به شکل مشخص به هم بچسبانید.

---

[1] R. Bergerot

[2] Robert Connely

[3] Klaus Steffen

[4] flexidron

به این ترتیب یک نوع عروسک کاغذی درست می‌شود و خواهید دید که واقعاً (اندکی) انعطاف‌پذیر است.

آیا حجم یک چند وجهی با تغییر شکل تغییر می‌کند؟

زمانی که این شیئ جدید ساخته شد، ریاضیدانان از آن به وجد آمدند. یک نمونهٔ فلزی آن ساخته شد و در تالار چایخوری مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی [۱] (IHES) در شهرِ بور کنار رودخانهٔ ایوت [۲] نزدیک پاریس، قرار داده شد. مردم با تکان دادن این شئی سرگرم می‌شدند، البته این شیئی چندان زیبا نیست ولی کمی ورجه وورجه می‌کند. در تاریخچهٔ این ماجرا نقل شده است که به فکر دنیس سالیوان [۳] خطور کرد که دود سیگارِ را به داخل چند وجهی انعطاف‌پذیر کونلی بدمد ولی متوجه شد که با تکان دادن آن اصلاً دود از آن خارج نشد. بر اساس این تجربه، سالیوان دریافت که با تغییر شکل چند وجهی انعطاف‌پذیر کونلی، حجم آن تغییر نمی‌کند! آیا این قصه حقیقت دارد؟ هر چه باشد، راست یا دروغ، کونلی و سالیوان پنداره‌ای مطرح کردند که می‌گوید **هنگامی که یک چند وجهی تغییر شکل دهد، حجمش ثابت می‌ماند.** این ویژگی را می‌توان در حالت خاص برای چند وجهی انعطاف‌پذیر کونلی و برای چند وجهی انعطاف‌پذیر اشتفن ثابت کرد (البته برای این کار باید محاسبات پیچیده و بیهوده‌ای انجام داد). پندارهٔ مورد بحث نه تنها برای این مثال‌ها بلکه راجع به همهٔ چند وجهی‌هاست، از جمله برای چند وجهی‌هایی که هیچگاه در عمل ساخته نشده‌اند. کونلی و سالیوان این پنداره را «پندارهٔ دَم» نامیدند: با فشار دادن دَم در کنار آتش هوا بیرون می‌جهد، به عبارت دیگر، از حجم دَم کاسته می‌شود (در واقع عمل دَم همین است). واضح است که یک دم واقعی نمی‌تواند در پندارهٔ کونلی ـ سالیوان صدق کند، زیرا دم واقعی از چرم ساخته می‌شود و وجوه آن مرتب در حال تغییر شکل‌اند، و این برخلاف چند وجهی‌های مورد بحث ماست که وجه‌های آن مستحکم می‌باشند.

در ۱۹۹۷، کونلی همراه با دو ریاضیدان دیگر، آی. سابیتوف [۴] و اَی. والتس [۵] سرانجام موفق به اثبات پنداره شدند. اثبات آنها پرعظمت است و یک بار دیگر نشان

---

[۱] Institut des Hautes Etudes Scientifiques

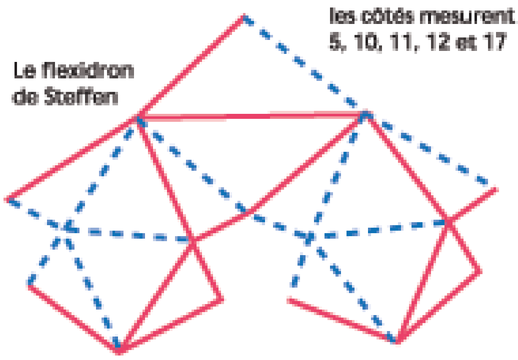
[۲] Bures-Sur-Yvette

[۳] Denis Sullivan

[۴] I. Sabitov

[۵] A. Walz

می‌دهد که بین همهٔ بخش‌های ریاضیات کنش و واکنش متقابل وجود دارد. در این مسألهٔ کاملاً هندسی، نویسندگان مقاله از روش‌های بسیار ظریف جبر مجرد نوین بهره گرفته‌اند. این اثبات را نمی‌توان به هیچوجه از کوشی توقع داشت، زیرا فنون ریاضی زمان کوشی برای آن کفایت نمی‌کردند. در اینجا می‌خواهم فرمولی را یادآوری کنم که سابقاً در دبیرستان می‌آموختند، بدین ترتیب که اگر طول اضلاع یک مثلث a، b و c باشند، به سادگی می‌توان مساحت مثلث را محاسبه کرد. برای این کار، نخست نصف محیط را به شکل $p = (a+b+c)/۲$ به‌دست می‌آوریم، سپس مساحت آن را با گرفتن ریشهٔ دوم از $p(p-a)(p-b)(p-c)$ محاسبه می‌کنیم. این دستور سودمند به نام ریاضیدان یونانی هِرون[۱] ثبت شده است و از زمان‌های بسیار دور به ما رسیده است. آیا می‌توان حجم یک چند وجهی را با در دست داشتن طول یال‌های آن محاسبه کرد؟ سه ریاضیدان معاصر مورد بحث ما ثابت کردند که جواب این مسأله مثبت است.



شکل ۴ـ الگوی چند وجهی انعطاف‌پذیر (فلکسیدرونِ) اشتفن
اضلاع به اندازه‌های ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۷ هستند

روش اثبات آنان این است که از یک چند وجهی که بر مبنای یک الگوی متشکل از تعدادی مثلث ساخته شده باشد، آغاز می‌کنند و طول اضلاع این مثلث‌ها را $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و غیره می‌نامند (تعداد مثلث‌ها ممکن است خیلی زیاد باشد). آنان به این نتیجه رسیدند که V، یعنی حجم چند وجهی مورد نظر، الزاماً در یک معادلهٔ درجه n به‌صورت

$$a_۰ + a_۱ V + a_۲ V^۲ + \cdots + a_n V^n = ۰$$

[۱] Heron

صدق می‌کند. درجهٔ این معادله یعنی n به الگوی انتخاب شده بستگی دارد و ضرایب معادله یعنی $a_۰$ و $a_۱$ و غیره توابعی صریح از طول اضلاع یعنی $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و غیره‌اند. به عبارت دیگر، اگر الگو و طول اضلاع را بشناسیم، معادله را می‌شناسیم. اگر خواننده به یاد بیاورد که یک معادلهٔ درجه ۱ دارای یک جواب و یک معادله درجه ۲ دارای دو جواب است، شاید بتواند حدس بزند که یک معادلهٔ درجه n، بیش از n جواب ندارد.

جمعبندی: اگر الگو و طول اضلاع را بشناسیم، الزاماً حجم را نخواهیم شناخت، ولی دست‌کم می‌دانیم که این حجم فقط می‌تواند یکی از مقادیر مجموعه‌ای متناهی از مقادیر باشد. لذا هنگامی که چند وجهی انعطاف‌پذیر مورد بحث تغییر شکل دهد، حجم آن نمی‌تواند به‌طور پیوسته تغییر کند (وگرنه، حجم آن به‌طورر متوالی بینهایت مقدار را می‌گرفت). پس حجم «منحصر» به یک مقدار است و به این ترتیب، پندارهٔ دَم اثبات می‌شود.

آری، مسالهٔ دم شایستهٔ توجه است!

آیا این مسأله سودمند است؟ جالب است؟ منظور از یک مسألهٔ جالب ریاضی چیست! مطمئناً این مسالهٔ مشکلی است که طرح کرده‌ایم و همان‌گونه که باید، مدت مدیدی است ریاضیدانان به آن می‌اندیشند. اکنون عناصری از پاسخ به مسأله و نشان‌هایی از «کیفیت» را بیان می‌کنیم. نخستین معیار، قدمت است: ریاضیدانان نسبت به سنّت حساسیت خاصی دارند، به مسائلی که از مدت‌ها پیش طرح شده‌اند و ریاضیدانان چند نسل متوالی به آن پرداخته‌اند و هنوز به نتیجهٔ نهایی نرسیده‌اند. هم‌چنین، یک مسالهٔ خوب باید به‌صورت ساده‌ای مطرح شود، حل آن منجر به گسترش‌های شگفت‌انگیز شود، احیاناً حوزه‌های بسیار متنوعی را به هم مربوط سازد. مسألهٔ استحکام که در این گفتار مورد بحث قرار دادیم، از نظر فوق جالب است.

این پرسش که آیا یک مسأله باید کاربردهای سودمندی در عمل داشته باشد، موضوع ظریفتری است. جواب ریاضیدانان به این سؤال بسیار متنوع است. بدون شُبهه، مسائل «عملی» که مثلاً از فیزیک سرچشمه می‌گیرند، غالب اوقات به‌عنوان انگیزه برای ریاضیات بکار می‌روند. گاهی صحبت بر سر حلِ یک مسألهٔ ملموس است، ولی در غالب موارد، ارتباط آن قدر روشن نیست: ریاضیدان از مسالهٔ ملموسِ مورد بحث، فقط به‌عنوان یک منبعِ الهام استفاده می‌کند و حل واقعی مسالهٔ نخستین، دیگر برای او انگیزهٔ واقعی نیست. مسالهٔ استحکام که در این گفتار مطرح کردیم به رستهٔ اخیر تعلق دارد. منشاء فیزیکی آن

کاملاً روشن است و مربوط به پایداری و استحکام ساختارهاست، مانند ساختارهای فلزی.

در حال حاضر، می‌توان گفت که مثال‌های کونلی هیچگونه فایده‌ای برای مهندسین ندارند. با این وجود، در آینده‌ای نامعلوم، برای دست یافتن به درک جامع‌تری از موضوع استحکامِ ساختارهای وسیع با تعداد فراوانی از عناصر جزئی (نظیر ماکرو مولکول‌ها، یا مجتمع‌های ساختمانی و غیره)، این نوع پژوهش نایاب نخواهند بود. بنابراین، بحث بر سر پژوهش‌های نظری و «فاقد بهره‌وری» است، اما این پژوهش‌ها به احتمال قوی یک روز سودمندی خود را نشان خواهند داد.

نویسنده: اتین گی
دانشسرای عالی لیون
مرکز ملی تحقیقات علمی (CNRS)[۱]
واحد پژوهشی UMR 5669

چند مرجع

- M. Berger, *Géométrie, vol. 3.* - Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes(CEDIC/Nathan Information, 1977).
- R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, "The bellows conjecture", *Beiträge Algebra Geom., 38*(1997), $n^\circ 1$, pp. 1-10.
- R. Connelly, "A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra", Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publication Mathématique n °47* (1977), pp. 333-338.
- N. H. Kuiper, "Sphères polyédriques flexibles dans E^3, d'après Robert Connelly", *Séminaire Bourbaki, 30e année(1977/78)*, exposé n° 514, pp. 147-168 (Lecture Notes in Math. 710, Springer, 1979).

Étienne Ghys
École Normale Supérieure de Lyon,
CNRS-UMR 5669

[۱] Centre National de la Recherehe Scientifique