

# UNE VARIÉTÉ QUI N'EST PAS UNE FEUILLE

ETIENNE GHYS

(Received 12 January 1984)

## 1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici à la question générale suivante: "Une variété (paracompacte) donnée peut elle être une feuille d'un feuilletage d'une variété compacte?"

Un certain nombre de résultats positifs ont été obtenus dans cette direction. Essentiellement, toute variété dont la topologie n'est pas trop complexe peut être réalisée comme feuille dans une variété compacte. (Voir [10], [2], [8], . . .). Si l'on n'impose plus à la variété ambiante d'être compacte, mais d'être l'espace  $\mathbb{R}^3$ , alors toute surface non compacte et orientable est une feuille d'un feuilletage simple (cf. [1]).

On peut aussi chercher une feuille possédant une propriété supplémentaire, par exemple celle d'être une feuille propre ou d'avoir un type de quasi-isométrie fixé. On dispose alors de résultats négatifs, tout au moins en codimension 1 (voir [3], [9]).

Nous proposons ici un résultat négatif, valable pour les feuilletages de codimension 1.

**THÉORÈME.** *Pour tout  $d \geq 3$ , il existe une variété non compacte de dimension  $d$  (de classe  $C^\infty$  et paracompacte) qui n'est homéomorphe à aucune feuille d'aucun feuilletage de codimension 1 et de classe  $C^c$  d'une variété compacte.*

L'idée générale de la démonstration est très simple. Une feuille d'un feuilletage d'une variété compacte doit "spiraler" sur un ensemble limite non trivial. Ceci impose une certaine "récurrence" dans la topologie de la feuille. Nous allons donc produire une variété dont la topologie sera sans cesse différente lorsque l'on tend vers l'infini. Cette variété ne sera pas une feuille.

Décrivons précisément cette variété, que nous noterons  $W$ . Fixons-nous, une fois pour toutes, un entier  $d \geq 3$ . Pour tout  $n \geq 1$ , considérons une variété compacte  $V_n$  de dimension  $d$ , dont le groupe fondamental est isomorphe à  $\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$  où  $p_n$  désigne le  $(n+1)^{\text{ème}}$  nombre premier. Si  $d = 3$ , il suffit de choisir un espace lenticulaire et si  $d > 3$ , il est bien connu que tous les groupes de présentation finie sont isomorphes au groupe fondamental d'une variété compacte de dimension  $d$ . La variété  $W$  qui sera l'exemple que nous avons en vue, sera une somme connexe infinie des  $V_n$ . Précisément, soit  $B_{1,1}$  une boule incluse dans  $V_1$  et soit, pour tout  $i \geq 2$ , deux boules disjointes  $B_{i,1}$  et  $B_{i,2}$  dans  $V_i$ . On pose alors  $W_1 = V_1 - B_{1,1}$  et  $W_i = V_i - (B_{i,1} \cup B_{i,2})$  pour  $i \geq 2$ . La variété  $W$  est alors obtenue à partir de la somme disjointe des  $W_i$  en identifiant pour tout  $i \geq 1$ , le bord de  $B_{i,1}$  et celui de  $B_{i,0}$  à l'aide d'un certain difféomorphisme.

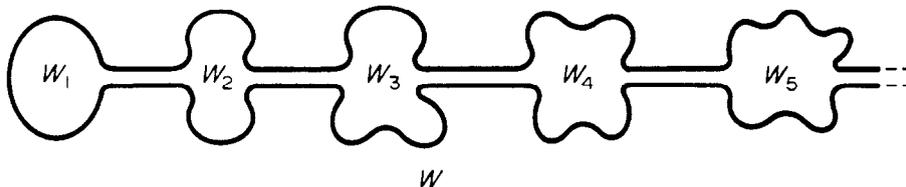


Fig. 1.

Je remercie D. Sullivan qui a simplifié mon exemple original ainsi que V. Sergiescu pour sa lecture détaillée de ce travail.

## 2. LA VARIÉTÉ $W$ N'EST PAS "RÉCURRENTÉ"

Nous exprimerons le fait que la topologie de  $W$  est toujours différente lorsque l'on tend vers l'infini par deux lemmes.

LEMME 2.1. *Pour tout  $i \geq 1$ , il est impossible de trouver deux sous-variétés à bord de  $W$  qui soient disjointes et homéomorphes à  $W_i$ .*

*Démonstration.* Les suites exactes de Mayer-Vietoris montrent immédiatement que:

$$(1) H_1(W_i, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$$

$$(2) H_1(W, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$$

Supposons qu'il existe dans  $W$  deux sous-variétés à bord  $X_1$  et  $X_2$  disjointes et homéomorphes à  $W_i$  pour un certain  $i$ . Soit  $Y$  l'adhérence de  $W - (X_1 \cup X_2)$ . L'intersection  $Y \cap (X_1 \cup X_2)$  est une réunion de sphères de dimension  $d-1$ .

La suite exacte de Mayer-Vietoris, appliquée à  $W = Y \cup (X_1 \cup X_2)$  donne alors:

$$0 \rightarrow H_1(X_1 \cup X_2, \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(W, \mathbb{Z})$$

En particulier,  $H_1(X_1 \cup X_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  s'injecte dans  $H_1(W, \mathbb{Z})$ . Ceci est évidemment impossible puisque  $H_1(W, \mathbb{Z})$  ne contient qu'une seule copie de  $\mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  ■

Le second lemme montre lui aussi que les "blocs"  $W_i$  sont intrinsèquement localisés dans  $W$ . Le groupe fondamental de  $W$  est le produit libre infini  $G = \bigstar_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ . Si  $k \geq 1$ , nous noterons  $\Gamma_k$  le sous-groupe normal de  $G$  engendré par  $\bigstar_{i=1}^k \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  et  $\Delta_k$  le sous-groupe  $\bigstar_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  de  $G$ .

LEMME 2.2. *Tout automorphisme de  $G$  préserve  $\Gamma_k$ . De plus  $\Gamma_k \cap \Delta_k$  se réduit à l'élément neutre de  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $x_i$  un générateur de  $\mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z} \subset G$ . Si  $\phi$  est un automorphisme de  $G$ , alors  $\phi(x_i)$  est un élément de torsion d'ordre  $p_i$  dans  $G$ . D'après un corollaire classique du théorème de Kurosh, tout élément de torsion d'un produit libre est conjugué d'un élément de torsion de l'un des facteurs. Par conséquent  $\phi(x_i)$  est conjugué d'un élément de  $\mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ . Il est alors clair que  $\phi$  préserve  $\Gamma_k$ .

La seconde partie est élémentaire; si  $A$  et  $B$  sont deux groupes et  $N(A)$  est le sous-groupe normal de  $A \star B$  engendré par  $A$ , on a une suite exacte scindée:

$$0 \rightarrow N(A) \rightarrow A \star B \rightrightarrows B \rightarrow 0$$

de sorte que l'intersection de  $B$  et de  $N(A)$  se réduit à l'élément neutre ■

Avant de pouvoir appliquer ces deux lemmes à la démonstration du théorème, il va nous falloir rappeler quelques résultats relatifs à la structure qualitative des feuilletages de codimension 1. C'est le but du paragraphe suivant.

## 3. STRUCTURE DES OUVERTS SATURÉS

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $C^{\infty}$  et de codimension 1 sur une variété compacte  $M$ . Supposons pour simplifier que  $\mathcal{F}$  est transversalement orientable et fixons nous un feuilletage  $\mathcal{N}$  de dimension 1, transverse à  $\mathcal{F}$  (voir [7]).

Soit  $U$  un ouvert de  $M$  saturé par  $\mathcal{F}$ . Commençons par supposer que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{N}$  sont de classe  $C^2$ . On peut alors construire une métrique riemannienne sur  $M$  telle que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{N}$  sont

orthogonaux. L'injection  $i:U \rightarrow M$  fournit alors une métrique non complète sur  $U$ . Le complété de  $U$ , noté  $\hat{U}$  est une variété à bord, éventuellement non compacte, munie d'un feuilletage de codimension 1 tangent au bord. Lorsque l'on ne suppose plus  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{N}$  de classe  $C^2$ , on peut quand même définir une notion de complété  $\hat{U}$  de  $U$  (voir [7]). Ce complété s'immerge dans  $M$  par une application encore notée  $i$ . Le théorème suivant décrit la structure de  $\hat{U}$ .

**THÉORÈME 3.1.** ([5], [4], [7]). *Dans les conditions précédentes, il existe une sous-variété compacte à bord et à coins  $K$  de  $\hat{U}$  (le "noyau" de  $\hat{U}$ ) telle que  $\partial K = \partial^{tg} \cup \partial^{tr}$  avec*

- (1)  $\partial^{tg} \subset \partial \hat{U}$
- (2)  $\partial^{tr}$  est saturé par le feuilletage  $i^*\mathcal{N}$ .
- (3) le complémentaire de  $K$  dans  $\hat{U}$  est une réunion finie de sous-variétés non compactes  $B_i$  à bord et à coins homéomorphes à  $S_i \times [0, 1]$  par un homéomorphisme  $\phi_i: S_i \times [0, 1] \rightarrow B_i$  tel que  $\phi_i(\{*\} \times [0, 1])$  est une feuille de  $i^*\mathcal{N}$

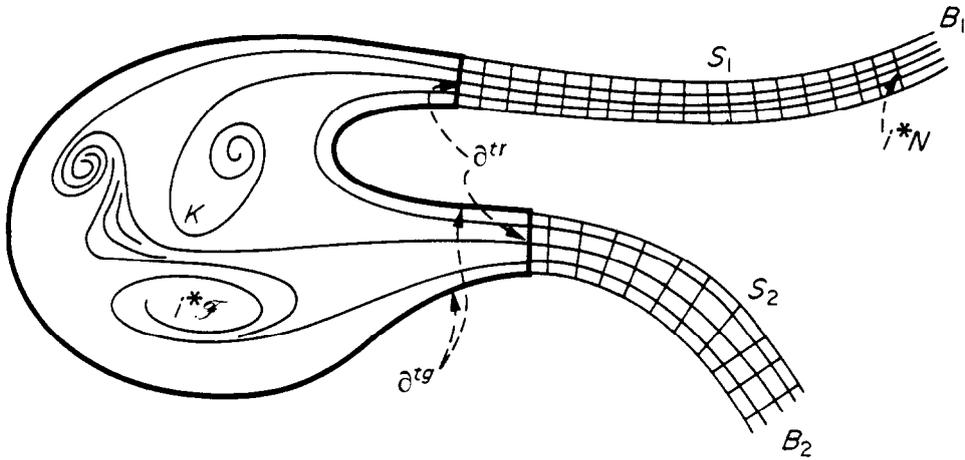


Fig. 2.

Le feuilletage  $i^*\mathcal{F}$  restreint aux  $B_i$  (appelées les "branches" de  $\hat{U}$ ) est donc défini par la suspension d'une représentation du groupe fondamental de  $S_i$  dans le groupe des homéomorphismes de l'intervalle  $[0, 1]$ .

Nous aurons également besoin d'un autre résultat de G. Hector.

**LEMME DE TRIVIALISATION 3.2.** ([6]). *Soit  $J$  un arc contenu dans une feuille de  $\mathcal{N}$ . Supposons que deux points distincts de  $J$  appartiennent à des feuilles distinctes de  $\mathcal{F}$ . Alors le saturé de  $J$  par  $\mathcal{F}$  est homéomorphe à  $L \times J$  par un homéomorphisme envoyant  $L \times \{*\}$  sur une feuille de  $\mathcal{F}$  et  $\{*\} \times J$  dans une feuille de  $\mathcal{N}$ .*

(Remarquons que le lemme de trivialisatoin de [6], est énoncé dans le cas où  $J$  est ouvert, mais sa démonstration reste valable pour un intervalle quelconque).

**4. DÉBUT DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME**

Par l'absurde, nous supposons qu'il existe une variété feuilletée compacte  $(M, \mathcal{F})$  dont une feuille  $L$  est homéomorphe à  $W$ .

**LEMME 4.1.** *On peut supposer que  $(M, \mathcal{F})$  est transversalement orientable.*

*Démonstration.* Dans le cas contraire, on peut relever  $\mathcal{F}$  dans le revêtement des orientations transverses. Ce revêtement sera trivial au-dessus de  $L$  puisque le groupe

fondamental de  $L$ , isomorphe à  $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} * \dots$ , ne possède pas de sous-groupes d'indice 2. Le feuilletage relevé dans ce revêtement possède donc lui aussi une feuille homéomorphe à  $W$ . ■

LEMME 4.2. *La feuille  $L$  est sans holonomie.*

*Démonstration.* Le groupe fondamental de  $L$  est engendré par des éléments de torsion. Le lemme est alors une conséquence du fait que le groupe des germes d'homéomorphismes de  $\mathbb{R}$  fixant 0 et préservant l'orientation est un groupe sans torsion. ■

LEMME 4.3. *La feuille  $L$  est une feuille propre.*

*Démonstration.* Soit  $C$  un compact de  $L$ . Puisque  $L$  est sans holonomie, il existe un plongement  $j$  de  $C \times [-1, +1]$  dans  $M$  tel que  $j(C \times \{*\})$  soit contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$  et que  $j(C \times \{0\})$  soit contenu dans  $L$ . Si la feuille  $L$  coupe  $j(C \times [-1, +1]) - j(C \times \{0\})$ , on trouve donc deux copies disjointes de  $C$  dans  $L$ . Puisque  $C$  est arbitraire, on peut choisir un compact  $C$  homéomorphe à  $W_1$ . Le lemme 2.1 montre alors que  $L$  ne coupe  $j(C \times [-1, +1])$  qu'en  $j(C \times \{0\})$ . La transversale  $j(*, t)$  ne coupe donc  $L$  qu'en un point et  $L$  est alors une feuille propre. ■

Bien que le théorème de stabilité de Reeb ne s'étende pas aux feuilles propres sans holonomie en général, (cf [4], [8]), nous sommes dans une situation où il est facile de l'étendre:

LEMME 4.4.  *$L$  possède un voisinage saturé homéomorphe à  $L \times ]-1, +1[$  par un homéomorphisme  $\phi$  envoyant  $L \times \{*\}$  sur une feuille de  $\mathcal{F}$  et  $\{*\} \times ]-1, +1[$  dans une feuille de  $\mathcal{N}$ . (Nous appellerons un tel voisinage un "voisinage produit").*

*Démonstration.* Soit  $\tau: ]0, 1[ \rightarrow M$  une transversale positive ne rencontrant  $L$  qu'en  $\tau(0)$ . Soit  $U$  le saturé de  $\tau(]0, 1[)$ . Puisque  $U$  est un ouvert saturé, nous pouvons appliquer le théorème 3.1. Une des feuilles du bord de  $\hat{U}$  est homéomorphe à  $L$  et celle-ci est sans holonomie. D'après le théorème de stabilité de Reeb adapté aux variétés à bord et à coins, il existe un voisinage de  $(\partial^{in} \cap L)$  dans  $K$  feuilleté en produit. Par ailleurs, le feuilletage dans les "branches"  $B_i$  est défini par une représentation du groupe fondamental de  $S_i$  dans le groupe des homéomorphismes croissants de  $[0, 1]$ . Puisque  $L$  n'a qu'un bout, une seule branche intersecte  $L$ , par exemple  $B_1$ . En élargissant le noyau  $K$ , on peut toujours supposer que  $S_1$  est homéomorphe à  $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \subset W \simeq L$ . Le groupe fondamental de  $S_1$  est encore engendré par des éléments de torsion et la représentation d'holonomie dans la branche  $B_1$  est donc triviale. Par conséquent  $B_1$  est feuilleté en produit  $S_1 \times [0, 1]$  et  $B_1 \cap L \simeq S_1$  possède donc un système fondamental de voisinages dans  $B_1$  feuilletés en produit. En raccordant ces voisinages produits avec ceux que nous avons trouvés dans  $K$ , nous obtenons des voisinages produits de  $L$  dans  $\hat{U}$ . Procédant de même avec une transversale négative  $\tau'$ , on obtient un voisinage produit de  $L$  dans le complété d'un autre ouvert saturé. Ces deux voisinages produits fournissent évidemment un voisinage produit de  $L$  dans  $M$ . ■

Soit  $\Omega \subset M$  la réunion des feuilles de  $\mathcal{F}$  homéomorphes à  $W$ . D'après le lemme précédent,  $\Omega$  est un ouvert et la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\Omega$  est définie par une fibration localement triviale de base une variété séparée de dimension 1. Soit  $\Omega_1$  une composante connexe de  $\Omega$ .

LEMME 4.5. *Le complété de  $\Omega_1$  ne peut être compact.*

*Démonstration.* Dans ce cas  $\hat{\Omega}_1$  est une variété compacte à bord et le feuilletage  $\mathcal{F}$  restreint à l'intérieur de  $\hat{\Omega}_1$  est sans holonomie, toutes ses feuilles sont propres et homéomorphes à  $W$ . Le bord de  $\hat{\Omega}_1$  ne peut être vide car un feuilletage sans holonomie d'une variété fermée ne peut avoir toutes ses feuilles propres et non compactes. Si  $F$  est une feuille compacte du bord de  $\hat{\Omega}_1$ , l'holonomie de  $F$  est sans point fixe et a ses orbites propres. Par

conséquent, cette holonomie est infinie cyclique. On en déduit qu'un voisinage du bout de  $W$  est homéomorphe à un voisinage d'un bout du revêtement infini cyclique de  $F$  correspondant à l'holonomie. En d'autres termes, le bout de  $W$  serait périodique. Ceci est évidemment contraire au lemme 2.1. ■

LEMME 4.6. *L'espace des feuilles de la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\hat{\Omega}_1$  ne peut être  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Nous raisonnons toujours par l'absurde. Soit  $B_1$  une branche de  $\hat{\Omega}_1$  (il en existe puisque  $\hat{\Omega}_1$  n'est pas compact). Celle-ci est homéomorphe à  $S_1 \times [0, 1]$  par un homéomorphisme  $\phi$  envoyant  $\{*\} \times [0, 1]$  sur un intervalle situé dans une feuille de  $\mathcal{N}$  (plus précisément de  $i^* \mathcal{N}$ , mais nous omettrons  $i$  par la suite). D'après l'hypothèse du lemme, deux points distincts de  $\phi(\{*\} \times ]0, 1[)$  sont sur des feuilles distinctes de  $\mathcal{F}$ . De même, deux points distincts de  $\phi(\{*\} \times ]0, 1[)$  sont sur des feuilles distinctes de  $\mathcal{F}$ . D'après le lemme de trivialisatation 3.2, le saturé de  $\phi(\{*\} \times ]0, 1[)$  par  $\mathcal{F}$  est homéomorphe à  $L \times ]0, 1]$  par un homéomorphisme envoyant  $L \times \{1\}$  sur une feuille de  $\mathcal{F}$ . En particulier, la feuille passant par  $\phi(*, 1)$  est homéomorphe à  $L$  et donc à  $W$ . Mais ceci est impossible puisque  $\Omega_1$  est une composante connexe de l'ouvert de toutes les feuilles homéomorphes à  $W$  alors que la feuille passant par  $\phi(*, 1)$  est dans le bord de  $\hat{\Omega}$ . ■

Le dernier cas qui nous reste à étudier, celui où  $\Omega_1$  fibre sur le cercle, est le plus délicat. Le but du paragraphe suivant est de montrer qu'il ne peut intervenir.

### 5. LE CAS OÙ $\Omega_1$ FIBRE SUR LE CERCLE

Soit  $x \in L$  et considérons le point de premier retour  $h(x)$  de la feuille de  $\mathcal{N}$  passant par  $x$  sur la feuille  $L$ . Nous obtenons ainsi un homéomorphisme  $h$  de  $L$  qui est la monodromie de la fibration de  $\Omega_1$  sur  $S^1$ , de fibre  $L$ . (Remarquons que le fait que  $h$  soit défini globalement est une conséquence du lemme de trivialisatation 3.2).

La méthode que nous allons suivre est la suivante: si  $\gamma$  est un lacet tracé sur  $L$  qui ne rencontre pas  $K$ , la suite  $h^n(\gamma)$  tend vers l'infini (Lemme 5.1). Ce fait, associé à la non-récurrence de  $W$ , montrera qu'un tel  $\gamma$  est homotope à 0 (lemme 5.2). L'homotopie de  $L$  se concentre donc dans le noyau  $K$  de  $\Omega_1$ . La compacité de  $K$  nous donnera alors une propriété de finitude pour le groupe fondamental de  $L$  (lemme 5.5). Il nous sera alors facile de conclure.

LEMME 5.1. *La suite  $h^n$  tend uniformément vers l'infini sur tout compact de  $L$  nerencontrant pas le noyau  $K$  de  $\Omega_1$ .*

*Démonstration.* Considérons une branche  $B_i \simeq S_i \times [0, 1]$  de  $\hat{\Omega}_1$ . Dans  $B_i$ , le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini par une suspension et les feuilles de la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $B_i$  sont donc des revêtements de  $S_i$ . Il est clair que  $h: L \cap B_i \rightarrow L \cap B_i$  est un automorphisme de ce revêtement. L'opération de  $h$  sur  $L \cap B_i$  est donc propre et sans point fixes. ■

LEMME 5.2. *Si  $\gamma$  est un lacet tracé dans  $L$  qui ne rencontre pas le noyau  $K$  de  $\Omega_1$ , alors  $\gamma$  est homotope à 0 dans  $L$ .*

*Démonstration.* Rappelons que nous avons noté  $\Gamma_k$  le sous-groupe normal de  $G = \ast_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  engendré par  $\ast_{i=1}^k \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ . Le lacet  $\gamma$  définit une classe de conjugaison dans  $G$ ; notons encore  $\gamma$  un représentant de cette classe. Cet élément  $\gamma$  de  $G$  appartient à  $\Gamma_k$  pour  $k$  suffisamment grand. Soit  $h_*$  l'automorphisme (défini à conjugaison intérieure près) induit par  $h$  sur  $G$ . D'après le lemme 2.2,  $h_*^n(\gamma) \in \Gamma_k$ .

Ceci étant, la suite  $h^n(\gamma)$  tend vers l'infini. Pour  $n$  suffisamment grand, l'élément  $h^n(\gamma)$  est donc conjugué d'un élément de  $\Delta_k = \ast_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z} \subset G$ . Puisque nous savons que  $\Delta_k \cap \Gamma_k$  se réduit à l'élément neutre,  $h^n(\gamma)$  est homotope à zéro. Il en est donc de même pour  $\gamma$ . ■

L'application du théorème de Van-Kampen classique à  $L = (L \cap K) \cup (L - (L \cap K))$

nécessiterait la connexité de  $\partial(L \cap K)$ . Le lemme suivant montre que  $\hat{c}(L \cap K)$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

**LEMME 5.3.** *Pour toute feuille  $L$  de  $\Omega_1$ , l'intersection de  $L$  avec  $\hat{c}^r K$  est une réunion finie de sous-variétés connexes et non compactes.*

*Démonstration.* Nous savons que  $\partial^r K$  est une réunion finie de sous-variétés du type  $\partial S_i \times [0, 1]$ . La trace de  $\mathcal{F}$  sur  $\partial S_i \times [0, 1]$  est définie par la suspension d'une représentation du groupe fondamental de  $\partial S_i$ . Cette représentation est sans points fixes et ses orbites sont propres. Elle est donc soit triviale soit infinie cyclique.

Le cas où toutes ces représentations (correspondantes aux diverses branches de  $\hat{\Omega}_1$ ) sont infinies cycliques correspond à la conclusion du lemme. En effet, soit  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  un générateur de l'holonomie de  $\partial S_i$ . On a par exemple  $f(t) < t$  pour  $t \neq 0, 1$ . Dans un domaine fondamental pour  $f$ , c'est-à-dire un intervalle de type  $[f(t_0), t_0]$ , seuls un nombre fini de points correspondent à une même feuille  $L$  de  $\mathcal{F}$  puisque  $L$  est propre. Par conséquent, la trace de  $L$  sur  $\{*\} \times [0, 1] \subset \partial S_i \times [0, 1]$  est une réunion finie de  $f$ -orbites. L'intersection de  $L$  avec  $\partial S_i \times [0, 1]$  est alors une réunion finie de revêtements infinis cycliques de  $S_i$  et c'est bien ce que nous voulons montrer.

Il nous reste à montrer qu'aucune représentation ne peut être triviale, c'est-à-dire que la trace de  $\mathcal{F}$  sur  $\partial S_i \times [0, 1]$  ne peut être un produit. Dans ce cas, la feuille  $L$  coupe  $\partial S_i \times [0, 1]$  sur une réunion dénombrable de sous-variétés  $Z_l (\simeq \partial S_i)$  telles que  $h(Z_l) = Z_{l+1}$ .

Puisque  $H_{d-1}(W, \mathbb{Z}) = 0$ , toute sous-variété compacte de  $W$ , de dimension  $d-1$ , borde une sous-variété compacte à bord. Notons  $D_l$  la sous-variété compacte de  $L$  dont le bord est  $Z_l$ . On a évidemment  $h(D_l) = D_{l+1}$ . Puisque les feuilles de la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $B_i$  sont des revêtements de  $S_i$  et donc non compactes,  $D_l$  ne peut pas être contenu dans  $B_i$ . La réunion

$(L \cap B_i) \cup \left( \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} D_l \right)$  est alors une sous-variété ouverte et fermée de  $L$ ; c'est donc  $L$  tout entier.

L'action de  $h$  étant propre et sans point fixe sur  $L \cap B_i$ , et  $h(D_l)$  étant égal à  $D_{l+1}$ , on en déduit que l'action de  $h$  sur  $L$  est elle aussi propre et sans points fixes. Mais la démonstration du lemme 5.2 montrerait alors que tout lacet de  $L$  est homotope à 0, ce qui est absurde. ■

Nous utilisons maintenant la compacité de  $K$ .

**LEMME 5.4.** *Il existe un nombre fini de lacets  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  de  $L \cap K$  tels que, pour toute composante connexe de  $L \cap K$ , ceux des lacets  $h^n(\gamma_i)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , qui sont dans cette composante engendrent le groupe fondamental de cette composante en tant que sous-groupe normal. (Un lacet définit une classe de conjugaison et, en ce qui concerne le sous-groupe normal engendré, le choix d'un représentant dans cette classe n'importe pas).*

*Démonstration.* Il s'agit d'un fait général tout à fait élémentaire qui est une conséquence de la suite exacte d'homotopie d'un fibré: Si une variété  $\hat{K}$  a un groupe fondamental de type fini et fibre sur le cercle, la fibre  $L \cap \hat{K}$  possède la propriété décrite dans le lemme. ■

Une conséquence de ce fait est le lemme suivant:

**LEMME 5.5.** *Il existe un nombre fini de lacets  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \dots, \gamma_p$  de  $L$  tels que les lacets  $h^n(\gamma_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , engendrent le groupe fondamental de  $L$  en tant que sous-groupe normal.*

*Démonstration.* Dans chaque composante de  $\partial(L \cap K)$ , choisissons un point. (Nous savons qu'il existe un nombre fini de composantes d'après le lemme 5.3). Si deux de ces points appartiennent à la même composante de  $L \cap K$  (ou de  $L \cap B_i$ ), relier les par un chemin de  $L \cap K$  (ou de  $L \cap B_i$ ). On obtient ainsi un graphe fini immergé dans  $L$ . Soit  $\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_p$  un système de générateurs du groupe fondamental de ce graphe. Le théorème de Van-Kampen, le lemme 5.2, et le lemme 5.4 montrent que  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \dots, \gamma_p$  satisfont aux conditions requises. ■

5.6. *Fin de la démonstration du théorème.* Les lacets  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , appartiennent au sous-groupe normal  $\Gamma_k$  de  $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  engendré par  $\prod_{i=1}^k \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  pour un certain entier  $k$ . D'après le lemme 2.2, les lacets  $h^n(\gamma_i)$  appartiennent eux aussi à ce sous-groupe normal  $\Gamma_k$ . Les lacets  $h^n(\gamma_i)$  ne peuvent engendrer  $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  comme sous-groupe normal puisque  $\prod_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$  n'est pas dans  $\Gamma_k$ . On obtient donc la contradiction cherchée. ■

Terminons ce travail par quelques remarques.

*Remarque 5.7.* Nous avons en fait le choix des nombres premiers  $p_i$ , la seule condition étant qu'ils soient distincts. Nous produisons donc une infinité non dénombrable de variétés  $W$  qui ne sont pas feuilles.

*Remarque 5.8.* Nous ne savons pas si  $W$  peut être une feuille d'un feuilletage de codimension supérieure d'une variété compacte.

*Remarque 5.9.* Le cas où  $d = 2$  reste ouvert. La méthode utilisée ici n'est pas applicable puisqu'il n'existe pas de surfaces compactes dont le groupe fondamental est isomorphe à  $\mathbb{Z}/p_i \mathbb{Z}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. W. BOUMA et G. HECTOR: All open surfaces are leaves of a simple foliation of  $\mathbb{R}^3$ , preprint.
2. J. CANTWELL et L. CONLON: Leaf prescriptions for closed 3-manifolds, *Trans. Am. Soc.* **236** (1978) 239–261.
3. J. CANTWELL et L. CONLON: Endsets of leaves, *Topology* **21** (1982) 333–352.
4. P. DIPPOLITO: Codimension one foliations on closed manifolds, *Ann. Math.* **107** (1978) 403–453. Errata in *Ann. Math.* **110** (1979) 203.
5. G. HECTOR: Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension 1, Thèse, Strasbourg 1972.
6. G. HECTOR: Croissance des feuilletages presque sans holonomie, *Lect. Not. Math.* **652** (1978).
7. G. HECTOR et U. HIRSCH: Introduction to the geometry of foliations, Part B, *Aspects Math.* (1983).
8. T. INABA: Reeb stability for non compact leaves, *Topology* **22** (1983) 105–118.
9. A. PHILLIPS et D. SULLIVAN: Geometry of leaves, *Topology* **20** (1981) 209–218.
10. J. SONDOW: When is a manifold a leaf of some foliation? *Bull. Amer. Math. Soc.* **81** (1975) 622–624.

*Note ajoutée aux épreuves*—Après l'acceptation de cet article, l'auteur a reçu un preprint de T. Inaba, T. Nishimori, M. Takamura et N. Tsuchiya intitulé "Open manifolds which are not realizable as leaves". Ce preprint contient un résultat similaire au notre.

E.R.A. au C.N.R.S. 07590

U.E.R. de Mathématiques

Université des Sciences et Techniques de Lille I

59655-Villeneuve d'Ascq-Cedex

France