IDR : Introduction à la cohomologie étale

Guillaume PIGNON–YWANNE

Mai 2023

Introduction

L'objectif de ce document est d'être compréhensible par des mathématicien·ne·s non spécialistes du domaine, qu'iels soient étudiant·e·s en fin de licence de mathématiques "généraliste", ou aient suivi une formation additionnelle éloignée de la géométrie algébrique. Pour éviter de se noyer dans des détails techniques, il est écrit de manière par moment assez informelle.

L'auteur est votre ami - et il tente de vous prendre par la main, et de vous emmener dans le merveilleux monde de la géométrie algébrique et de la cohomologie étale. Âmes sensibles, suivez moi.

Motivation

L'objectif de cette Introduction au Domaine de Recherche est d'introduire, à un lecteur non initié, les bases de la cohomologie étale, et de suggérer des pistes d'applications de cette dernière.

Historiquement, la cohomologie étale a été introduite par Alexander Grothendieck afin de démontrer les conjectures de Weil, qui sont essentiellement liées à des problèmes de comptages de nombre de solutions d'équations algébriques sur des corps finis. Pour ce faire, il a suivi sa philosophie générale :

> *"Pour résoudre des problèmes, il faut les laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales"*
>
> Citation d'Alexander Grothendieck, telle que rapportée par Jean-Pierre Serre.

Comme souvent en géométrie algébrique, les questions les plus intéressantes sont des questions de *définition*. Il faut avant tout étudier les bonnes notions, afin de pouvoir se poser les bonnes questions, et espérer y répondre.

Ce document se veut partir de concepts supposés connus en géométrie différentielle et en topologie algébrique, pour expliquer comment les adapter dans le monde de la géométrie algébrique - où les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sont remplacées par des polynômes, les espaces topologiques ne sont pas séparés, et les points correspondent à des corps.

Nous motivons la cohomologie étale comme un analogue algébrique de la cohomologie *standard* (disons singulière), en topologie algébrique. En particulier, la cohomologie étale d'une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ (sous les bonnes hypothèses) n'est autre que la cohomologie singulière de la variété *analytique* complexe associée - L'information algébrique d'un espace suffit à comprendre sa topologie.

Plan

En première partie, nous introduisons les définitions usuelles des variétés algébriques et des schémas, inspirés par une reformulation de la notion de variété différentielle dans un langage faisceautique.

En seconde partie, nous introduisons la (pré)-topologie étale sur ces variétés, qui, au prix de quelques complications techniques, apporte d'autres informations par rapport à la topologie (plus naturelle) de Zariski.

En troisième partie, nous introduisons le groupe fondamental étale, qui est le pendant du groupe fondamental en géométrie algébrique. Nous explorons ses liens avec le groupe de Galois absolu.

En quatrième et dernière partie, nous définissons (enfin) la cohomologie étale, via le prisme de la cohomologie de Čech. Nous concluons sur quelques exemples d'applications.

Je tiens à remercier Nataniel Marquis et Nicolas Tholozan pour leur relecture de cet IDR, et pour les discussions très enrichissantes qui en ont découlé.

1 Variétés algébriques et schémas **2**
1.1 Qu'est-ce qu'une variété différentielle ? . . . 2
1.2 Variétés algébriques affines . . . 3
1.3 Faisceaux . . . 4
1.4 Variétés différentielles 2.0 . . . 6
1.5 Variétés algébriques . . . 8
1.6 Schémas . . . 9

2 Topologies des variétés algébriques **12**
2.1 La notion de site . . . 12
2.2 Topologie étale . . . 13

3 Groupe fondamental étale **15**
3.1 Revêtements, groupe fondamental et groupe de Galois absolu . . . 15
3.2 Groupe fondamental étale . . . 16

4 Cohomologie étale **19**
4.1 La cohomologie de Čech . . . 19
4.2 Cohomologie étale . . . 20
4.3 Cohomologie ℓ-adique et applications . . . 21

TODO : -> Look at Tholozan modifications
-> Look at the proof in Milne's book to know exactly what ETALE covering we need to put. Put maybe a remark to say what the right setup should be. Example of étale sheaves ? Do not hesitate to put colimit alongside coverings (as is what really happens)
-> Clarify the comparision between choice of topological point and choice of separable closure. Credit where credit is due : `http://math.stanford.edu/~conrad/210BPage/handouts/Galpi1.pdf`

1 Variétés algébriques et schémas

L'objectif de la géométrie algébrique est l'usage d'outils outils *géométriques* pour répondre à des problématiques *algébriques* - telles que la résolution d'équations polynomiales.

Ainsi, on définit un type d'espaces géométriques, appelés *variétés algébriques* - et qu'on généralisera ensuite en schémas, qui permettent simultanément l'étude d'équations d'origine très *géométrique* (telle que celle du cercle, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$), et d'équations d'origine très *arithmétique* (comme des équations diophantiennes sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, ou des équations *à la Weil* sur les corps finis).

Afin de motiver leur définition, nous commençons par reformuler la définition des variétés différentielles pour aboutir à des énoncés plus facilement transposables dans le monde algébrique.

1.1 Qu'est-ce qu'une variété différentielle ?

Pour tout ce qui touche à la géométrie différentielle, on ne saura suffisamment recommander l'excellent livre de J.M.Lee, [Lee12]. *Plus personnellement, j'apprécie tout particulièrement les notes de cours d'A.Oancea, cf.* [Oan16].

Dans ce paragraphe, nous parlerons "d'espace affine" pour qualifier $\mathbb{R}^n$, pour un certain n. Ceci nous permettra de cacher les problématiques liées à la définition de la dimension[1], qui ne feraient qu'encombrer notre exposition.

Nous partons de la définition suivante :

Définition 1.1. *Une* ***variété différentielle*** *est un espace topologique (séparé et à base dénombrable)*[2] *X localement homéomorphe à un ouvert de l'espace affine, via des homéomorphismes $\mathcal{C}^\infty$-compatibles.*[3]

[1] L'approche usuelle est de donner une définition a posteriori et *locale* de la dimension, et de vérifier ensuite qu'elle a du sens globalement grâce à un théorème d'invariance du domaine

[2] Ces conditions techniques n'ayant pas d'importance dans l'exposition, on aura tendance à les passer sous silence

[3] Au sens que, sur les intersections de cartes, les compositions $\varphi \circ \psi^{-1}$ soient de classe $\mathcal{C}^\infty$

La notion de variété différentielle permet de définir *globalement* des concepts de calcul différentiel et intégral (formes différentielles, champs de vecteurs, ...), qui sont des pourtant des notions a priori locales. Pour ce faire, on définit une variété comme un *recollement* d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, et y on étend ces concepts en les définissant localement via les cartes, puis en expliquant comment les recoller.

Dans le cadre des variétés algébriques, nous recollerons des espaces de solutions d'équations polynomiales, qui auront une géométrie plus sophistiquée que les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Nous aurons besoin de plus de *briques élémentaires.*

On peut assez bien les comprendre à partir de la définition suivante des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.[4]

Définition 1.2. *Une* ***sous-variété de*** $\mathbb{R}^n$ *est un sous-espace* $M \subset \mathbb{R}^n$ *qui s'écrit localement comme lieu des zéros d'une submersion* $U \to \mathbb{R}^k$*, pour* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.*

Ici, on voit apparaître les variétés comme lieu de zéros d'une *équation*, idée qui sera cruciale dans la suite. Nous définissons (artificiellement) le concept de variété *affine*, comme espace défini par les zéros d'une submersion.

Définition 1.3. *Une* ***variété différentielle affine*** *est un fermé de l'espace affine défini comme lieu des zéros d'une submersion.*

Notons que toute variété différentielle affine est naturellement munie d'une structure de variété différentielle. On aboutit à la définition équivalente suivante :

Définition 1.4. *Une* ***variété différentielle*** *est un espace topologique (séparé et à base dénombrable)* X *localement homéomorphe à une variété différentielle affine, via des isomorphismes* $\mathcal{C}^\infty$*-compatibles.*

Définissons maintenant plus précisément l'équivalent algébrique de ces variété affines.

1.2 Variétés algébriques affines

La terminologie suit le chapitre 1 du célèbre et redouté Hartshorne [Har77][5].

Nous travaillons sur un corps fixé k, pour l'instant quelconque, mais qui sera bientôt supposé algébriquement clos.

Une variété algébrique affine est un fermé de l'espace affine définie comme lieu de zéros de *polynômes.*

Définition 1.5. *Un* ***ensemble algébrique affine*** *sur* k *est un un espace de la forme :*

$$V(f_1, \dots, f_n) \coloneqq \{(x_1, \dots, x_m) \in k^m, f_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = f_n(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

pour une famille finie de polynômes $f_1, \dots, f_n \in k[X_1, \dots, X_m]$*.*

Une ***variété affine*** *est un ensemble algébrique affine* ***irréductible****, c'est-à-dire qui ne s'écrit pas comme union propre de deux ensembles algébriques affines.*

Remarque 1.6. *Pour faire le lien avec le cas différentiel, on remarque que, si* $k = \mathbb{R}$*, l'application polynomiale* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *induite par un polynôme* $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ *est une submersion si et seulement si l'équation*

$$0 = f(x_1, \dots, x_m) = \partial_{X_1} f(x_1, \dots, x_m) = \dots = \partial_{X_m} f(x_1, \dots, x_m)$$

n'a pas de solution sur $\mathbb{R}^m$*, où* $\partial_{X_i} f$ *désigne la dérivée formelle de* f *en la variable* X_i*.*

Cette condition a un sens sur n'importe quel corps k *et, si elle est vérifiée, on dit que l'ensemble algébrique associé est* ***lisse*** *(ou* ***non singulier****).*

Si $k = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, tout ensemble algébrique affine lisse est donc naturellement munie d'une structure de variété différentielle affine : son* ***analytifié****.*[6]

Les ensembles algébriques affines définissent définissent une topologie naturelle sur k^n.

Proposition–Définition 1.7. *Les ensembles algébriques affines définissent les fermés d'une topologie*[7] *sur* k^n*, appelée* ***topologie de Zariski****.*

On munit dans la suite toute variété algébrique affine de la topologie de Zariski induite par l'inclusion.

[4] Cette définition est équivalente à celle formée par l'image d'un plongement, et à la définition paramétrique - à l'aide des théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale

[5] Il paraît que R.Hartshorne préfère la prononciation "Hart's Horn", mais l'usage en a décidé autrement

[6] Quand nous aurons appris à recoller, nous pourrons également analytifier les variétés algébriques lisses (non nécessairement affines) en des variétés différentielles, non nécessairement affines. Un énoncé plus précis sera donné en 3.7.

[7] Il faut vérifier que cette famille contienne k^n et l'ensemble vide ; et soit stable par intersection quelconque et par union finie. La preuve est élémentaire, sauf la stabilité par intersection quelconque, qui repose sur le caractère noethérien de l'anneau $k[X_1, \dots, X_m]$ (c'est le théorème de la base de Hilbert)

La topologie de Zariski est à première vue assez mauvaise, en particulier si on la compare avec l'intuition qu'on a de la topologie standard sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.8. *Voici quelques propriétés de la topologie de Zariski :*

- *Sur k^1, les fermés sont exactement les sous-ensembles finis.*
- *Une variété algébrique affine n'est jamais séparée*[8] *(sauf si elle est finie)*
- *Si $k = \mathbb{R}$, les ensembles définis par des inégalités (par exemple la boule unité $\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$) ne sont pas ouverts (ni fermés).*

En revanche, la topologie de Zariski capture assez finement des propriétés d'irréductibilité et de dimension.

Remarque 1.9. *La topologie de Zariski est malheureusement la seule topologie raisonnable*[9] *non discrète à mettre sur k^n, en particulier si k est non topologique. L'un des objectifs de la suite de ce papier sera de définir une* ***prétopologie*** *alternative, nommée topologie étale, qui, par certains aspects, ressemble plus à la topologie usuelle. Elle ne sera pas une "vraie" topologie.*

Maintenant que toutes nos variétés affines sont munies d'une topologie, on peut se tenter à la définition suivante :

Définition 1.10. *Une* ***variété algébrique*** *est un espace topologique localement homéomorphe à une variété algébrique affine, tels que les homéomorphismes soient algébriquement compatibles.*

Cette définition aura du sens, mais, à ce stade, nous n'avons pas encore expliqué la condition de compatibilité.
On pourrait être tenté d'imiter la définition des variétés différentielles de la manière suivante :

Essai de définition. *Une variété algébrique X est un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert $X = \bigcup_i U_i$ ainsi que d'homéomorphismes $\varphi_i : U_i \to V_i$ vers des variétés algébriques affines $V_i \subset k^{n(i)}$, tels que les applications $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ soient des isomorphismes de variété algébrique affine.*

Nous n'avons pas encore défini la notion de morphismes entre variétés algébriques affines (ça viendra en 1.23), mais nous pouvons imaginer à ce stade qu'ils sont donnés par des fonctions polynomiales.

Le problème est que, si φ est une fonction polynomiale, φ^{-1} n'a essentiellement aucune chance d'en être une, ni même une fraction rationnelle (Le problème se pose dès $X \mapsto X^2$).

Il va nous falloir être plus subtils, en parlant de **faisceaux**.

1.3 Faisceaux

Tout livre d'algèbre homologique ou de géométrie algébrique qui se respecte se doit de parler de faisceaux - et la formulation est à peu près toujours la même. On pourra par exemple lire [Wed16], [Har77] *- ou la bible moderne de la géométrie algébrique : le Stacks Project* [Sta23, Chapter 006A] *qui est particulièrement claire et précise à ce sujet.*

Si l'approche faisceautique est assez artificielle sur $\mathbb{R}$, elle est très fructueuse en géométrie complexe[10]*. On se réfèrera par exemple à* [Voi02].

Puisque l'objectif de ce document est de définir la cohomologie étale, il faudra nécessairement parler de site et de faisceaux sur un site. Pour ces raisons, nous donnons d'emblée une définition très catégorique de la notion de faisceau, que nous explicitons juste ensuite, et qui ne doit nullement effrayer le lecteur. Cette approche a par ailleurs l'avantage de motiver la terminologie de *préfaisceau*, très chère aux amateurs du lemme de Yoneda.

Le leitmotiv à retenir est le suivant : *Un faisceau est la donnée, pour tout ouvert d'un espace topologique fixé, de fonctions définies sur cette ouvert, qui, si elles coïncident sur les intersections, peuvent se recoller en des fonctions définies des ouverts plus grands.*

Définition 1.11. *Soit X un espace topologique. On définit $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie dont :*

- *Les objets sont les ouverts de X*
- *Les morphismes sont donnés par les inclusions de tels ouverts*

[8] Elle vérifie tout de même l'axiome de séparation T1

[9] A l'exception peut-être de la topologie de Boole, où les ensembles algébriques affines seraient ouverts et fermés

[10] Les faisceaux usuels (fonctions holomorphes et méromorphes, formes différentielles holomorphes, ...) ayant la bonne idée de ne pas tous être acycliques

*Un **préfaisceau** en groupe abéliens (resp. anneaux, R-modules, ...) sur X est un foncteur $\mathcal{F} : \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ (resp. $\mathrm{Ring}, \mathrm{Mod}_R, \dots$).*[11]*. Un **morphisme** de préfaisceaux est une transformation naturelle.*
*Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau, $\mathcal{F}(U)$ est usuellement appelé ensemble des **sections** de $\mathcal{F}$ sur U, et $\mathcal{F}(X)$ est appelé ensemble des **sections globales** de $\mathcal{F}$.*

Un préfaisceau est donc la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$, d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$, et pour toute inclusion $V \subset U$, d'un morphisme de restriction $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, trivial si $U = V$ et compatible aux compositions.
Un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, est la donnée, pour tout ouvert U, d'un morphisme $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, qui commutent aux restrictions.

Notation 1.12. *On pense heuristiquement à $\mathcal{F}(U)$ comme des fonctions définies sur U.*
Si $V \subset U$, on notera donc $f|_V := \rho_{U,V}(f) \in \mathcal{F}(V)$, pour $f \in \mathcal{F}(U)$.

Il reste à établir la condition de recollement.

Définition 1.13. *On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un **faisceau** si, pour tout ouvert U de X, pour tout recouvrement ouvert $U = \bigcup_i U_i$, et pour toute famille $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que, pour tout i, j :*

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

Alors il existe un unique $f \in \mathcal{F}(U)$ tel que, pour tout i, $f|_{U_i} = f_i$.
*Un **morphisme** de faisceaux est simplement un morphisme de préfaisceaux.*

Il faut lire : Tout ensemble de sections qui coïncident localement se recollent uniquement.

Remarque 1.14. *La condition se reformule en demandant l'exactitude de la suite :*

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod \rho_{V,U_i}} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{*} \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

où la seconde flèche est définie par : $(f_i)_{i \in I} \mapsto \prod_{i,j} f_i|_{U_i \cap U_j} - f_j|_{U_i \cap U_j}$.

Exemple 1.15. *Voici quelques exemples classiques de faisceaux :*

- *Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le préfaisceau $\mathcal{C}^\infty_X$ défini, pour tout ouvert U de X, par*
$$\mathcal{C}^\infty_X(U) := \{ f : U \to \mathbb{R}, f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ en tout } x \in U \}$$
est un faisceau.
- *Si X est une variété différentielle et $E \to X$ est un fibré vectoriel, le préfaisceau des sections (au sens de la géométrie différentielle) de E donné par $U \mapsto \Gamma(U, E|_U)$ est un faisceau.*[12] *Si E est le fibré tangent TX, ses sections globales coïncident avec l'ensemble des champs de vecteurs sur X.*
- *Si X est un espace topologique et A est un groupe abélien, le préfaisceau $U \mapsto A^{|\pi_0(U)|}$ (où $|\pi_0(U)|$ est le nombre de composantes connexes de U), est un faisceau. On l'appelle **le faisceau constant associé à A**.*

Dans la suite, nous allons redéfinir la notion de variété différentielle à partir uniquement du faisceau $\mathcal{C}^\infty$. La définition des variétés algébriques suivra une approche similaire.
On conclut ce paragraphe par la notion de fibre d'un faisceau.

Définition 1.16. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau en groupes abéliens (resp. anneaux, R-modules, ...) sur X, et $x \in X$.*
*La **fibre** de $\mathcal{F}$ en x est :*
$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$
Où la limite est prise dans la catégorie Ab (resp. $\mathrm{Ring}, \mathrm{Mod}_R, \dots$), sur tous les voisinages ouverts de x.

Informellement, $\mathcal{F}_x$ est l'ensemble des sections définies sur un **voisinage** de x.

Remarque 1.17. *Une définition plus explicite est la suivante :*
$$\mathcal{F}_x = \{ (U, s), U \text{ ouvert de } X \text{ tel que } x \in U \text{ et } s \in \mathcal{F}(U) \} \big/ \sim \tag{1}$$
Où $(U, s) \sim (V, s')$ si et seulement si $s|_{U \cap V} = s'|_{U \cap V}$.

[11] On demande usuellement une catégorie abélienne à l'arrivée, mais ce n'est même pas obligatoire - les faisceaux en ensemble donnent lieu à la notion de topos

[12] Le faisceau ci-dessus est un cas particulier de celui-ci pour $E = X \times \mathbb{R}$ le fibré trivial de rang 1

1.4 Variétés différentielles 2.0

Cette section s'inspire du livre de T.Wedhorn [Wed16], qui s'est lancé dans la rare mais instructive épopée de reformuler un cours de géométrie différentielle dans le langage des faisceaux et de la cohomologie.[13]

L'objectif de cette section est de faire accepter au lecteur la définition suivante.

Définition 1.18. *Une* ***variété différentielle*** *de dimension n est un espace (séparé et à base dénombrable) localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$, où $\mathcal{O}_X$ est un faisceau de $\mathbb{R}-$algèbres, localement isomorphe à $(U, \mathcal{C}^\infty_U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}^\infty_U$ est le faisceau défini dans l'exemple 1.15.*

Le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ sera alors noté $\mathcal{C}^\infty_X$, et on pensera, pour U ouvert de X, aux éléments de $\mathcal{C}^\infty_X(U)$ comme à des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur U et à valeurs réelles.

Remarque 1.19. *Comme dans la section 1.1, on pourrait définir une variété différentielle comme un espace localement annelé localement isomorphe à une variété différentielles affine, munie du faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ induit par l'espace ambiant. C'est ce qu'il faudra faire dans le cas algébrique, mais alourdirait l'exposition ici.*

Dans cette définition, on remarque que la condition de compatibilité entre les trivialisations locales n'apparaît pas. Elle est en fait cachée dans la définition, assez subtile, de morphisme d'espace (localement) annelé - que nous définissons maintenant.

On rappelle qu'un anneau est dit **local** s'il admet un unique idéal maximal[14]. Dans ce cas, son quotient par l'idéal maximal est un corps, appelé son **corps résiduel**.

Définition 1.20. *Un* ***espace annelé*** *est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux commutatifs, souvent noté $\mathcal{O}_X$, appelé* ***faisceau structural****. $(X, \mathcal{O}_X)$ est dit* ***localement annelé*** *si les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ en tout $x \in X$ sont des anneaux locaux.*

Un ***morphisme*** *d'espaces annelés est la donnée d'une application continue $f : X \to Y$ ainsi que, pour tout ouvert U de X, d'un morphisme d'anneau $f(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$, qui commutent aux restrictions.*[15]

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont localement annelés, f est un morphisme d'espaces localement annelés si les applications induites sur les fibres $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,f^{-1}(y)}$ envoient l'unique idéal maximal de la source dans l'idéal maximal du but.[16]

Vérifions maintenant que la nouvelle définition 1.18 est équivalente à la définition standard.[17]

On commence par associer une structure d'espace localement annelé à toute variété différentielle X - au sens usuel.

Preuve. (cf. [Wed16], Prop 4.18). Soit X une variété différentielle, (U_α) son atlas et la donnée d'homéomorphismes structuraux $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$. Définissons le faisceau $\mathcal{C}^\infty_X$. Sur un ouvert de carte, il est naturel de poser :

$$\mathcal{C}^\infty_X(U_\alpha) := \left\{ f : U_\alpha \to \mathbb{R}, f \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ est } \mathcal{C}^\infty \right\} \tag{2}$$

Sur un ouvert U quelconque, on définit ce qu'il se passe par "recollement" des ouverts de cartes plus petits : [18]

$$\mathcal{C}^\infty_X(U) := \{ f : U \to \mathbb{R}, \forall \alpha, (f \circ \varphi_\alpha^{-1})|_{V_\alpha} : V_\alpha \to \mathbb{R} \text{ est } \mathcal{C}^\infty \}$$

Cette définition coïncide avec la précédente sur U ouvert de carte car, si U_α, U_β sont deux cartes, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Il est ensuite facile de vérifier que c'est un faisceau, le caractère $\mathcal{C}^\infty$ étant purement local.

Pour $x \in X$, $\mathcal{C}^\infty_{X,x}$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies sur un ouvert[19] arbitrairement petit autour de x. C'est un anneau local, dont l'idéal maximal est constitué de l'ensemble des telles fonctions s'annulant en x. □

[13] Je le recommande très chaleureusement aux individus intéressé·e·s souhaitant découvrir la géométrie complexe et/ou la géométrie algébrique - et assez peu aux pur·s géomètres différentiels.

[14] Un idéal de A est dit **maximal** s'il est maximal pour l'inclusion, parmi les idéaux propres de A. Si I est un idéal de A, il est maximal ssi A/I est un corps

[15] Autrement dit, c'est un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_Y \to f^*\mathcal{O}_X$, où le tiré en arrière est défini par $(f^*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$

[16] On dit que c'est un morphisme d'anneaux locaux.

[17] Le·a lecteur·ice pourra être au choix rassuré·e ou terrifié·e de voir la première preuve de ce document. Ce sera essentiellement la seule

[18] On pourrait également définir $\mathcal{C}^\infty_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{R}, \forall x \in U, \exists \alpha$ tel que $x \in U_\alpha$ et $f \circ (\varphi_\alpha^{-1})|_{V_\alpha}$ est $\mathcal{C}^\infty \}$. Cette définition s'éloigne de la définition standard, mais est plus proche de celle qu'on obtiendrait en déroulant la remarque 1.21

[19] On peut même choisir un ouvert de carte

On se convainc également que tout morphisme de variétés différentielles $f : X \to Y$ induit un morphisme d'espace localement annelés, en définissant les morphismes $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_Y(U) \mapsto \varphi \circ f \in \mathcal{C}^\infty_X(f^{-1}(U))$ pour tout ouvert U de Y.

La remarque suivante, qui généralise la procédure d'extension des ouverts de cartes aux ouverts quelconques réalisée ci-dessus, peut être ignorée en première lecture.

Remarque 1.21. *Il est assez usuel de vouloir définir un faisceau sur une base d'ouverts, et d'espérer que la définition s'étende en général. C'était assez facile ici, mais on le fait usuellement avec le lemme suivant :*

Lemme. *Soit X un espace topologique, et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau défini sur $\mathcal{B}$, c'est à dire qu'on ne teste la propriété 1.13 que sur les ouverts de la base.*
Alors le préfaisceau, défini pour U ouvert de X par :

$$\mathcal{F}^{ext}(U) := \left\{ (s_x)_{x \in U} \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, \forall x \in U, \exists x \in V \subset U \text{ pour un } V \in \mathcal{B} \text{ et } \sigma \in \mathcal{F}(V) \text{ tel que } \forall y \in V, s_y = [(V, \sigma)] \right\}$$

est un faisceau sur X, où $[(V,\sigma)]$ désigne la classe d'équivalence au sens de (1).

Preuve. C'est une version explicite de [Sta23, Lemma 009N].[20] □

Cette construction définit même une équivalence de catégories (avec la restriction) entre les faisceaux sur X et les faisceaux définis sur $\mathcal{B}$.

Établissons maintenant comment reconstruire une structure d'atlas à partir du faisceau $\mathcal{C}^\infty$.

Preuve. (cf. [Wed16], ex. 4.5.2) Soit $(X, \mathcal{C}^\infty_X)$ une variété au sens de 1.18 et $\varphi_\alpha : (U_\alpha, \mathcal{C}^\infty_X|_{U_\alpha}) \cong (V_\alpha, \mathcal{C}^\infty_{V_\alpha})$ des isomorphismes d'espaces localement annelés avec des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Sur les intersections, ils induisent des isomorphismes d'espaces localement annelés $(V_\alpha, \mathcal{C}^\infty_{V_\alpha}) \cong (V_\beta, \mathcal{C}^\infty_{V_\beta})$ entre des ouverts de $\mathbb{R}^n$, vus comme espaces localement annelés. Pour simplifier les notations, on pose $X = V_\alpha$ et $Y = V_\beta$.

Notons $\varphi : X \to Y$ l'homéomorphisme, et, pour tout U ouvert de Y, $\psi_U : \mathcal{C}^\infty_Y(U) \to \mathcal{C}^\infty_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre donnée par le morphisme d'espaces localement annelés. Nous allons voir que les ψ_U sont nécessairement de la forme $f \mapsto f \circ \varphi$[21], et que φ est un $\mathbb{C}^\infty$-difféomorphisme.

Les ψ_U induisent au niveau des fibres des morphismes d'anneaux locaux $\psi_x : \mathcal{C}^\infty_{Y,x} \to \mathcal{C}^\infty_{X,\varphi^{-1}(x)}$, pour tout $x \in X$.
On note $\mathfrak{m}_x$ l'unique idéal maximal de $\mathcal{C}^\infty_{Y,x}$ et $\mathfrak{m}_{\varphi^{-1}(x)}$ l'unique idéal maximal de $\mathcal{C}^\infty_{X,\varphi^{-1}(x)}$.

Par la description obtenue dans la preuve précédente, on sait que $\mathcal{C}^\infty_{Y,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$, où l'isomorphisme est donné par l'évaluation en x ; et de même pour $\varphi^{-1}(x)$. Puisque ψ_x est un morphisme d'anneaux locaux, $\psi_x(\mathfrak{m}_x) \subset \mathfrak{m}_{\varphi^{-1}(x)}$, et ψ_x induit donc un morphisme sur les corps résiduels.

On résume la situation par le diagramme commutatif de $\mathbb{R}$-algèbres suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty_Y(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "f \mapsto f_x"] & \mathcal{C}^\infty_X\left(\varphi^{-1}(U)\right) \arrow[d, "g \mapsto g_{\varphi^{-1}(x)}"] \\
\mathcal{C}^\infty_{Y,x} \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "\mathrm{eval}_x"] & \mathcal{C}^\infty_{X,\varphi^{-1}(x)} \arrow[d, "\mathrm{eval}_{\varphi^{-1}(x)}"] \\
\mathcal{C}^\infty_{Y,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \cong \mathcal{C}^\infty_{X,\varphi^{-1}(x)}/\mathfrak{m}_{\varphi^{-1}(x)}
\end{tikzcd}$$

La flèche du bas étant un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, c'est nécessairement l'identité. La commutativité du diagramme impose, que pour $f \in \mathcal{C}^\infty_Y(U)$, $f(x) = \psi_U(f)(\varphi^{-1}(x))$; i.e. $\psi_U(f) = f \circ \varphi$. C'est le résultat annoncé.

Il reste à vérifier que φ est $\mathcal{C}^\infty$ - on le vérifie en prenant pour f les projections sur les différentes coordonnées (car une fonction $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si tous les φ_i le sont[22]). En appliquant le même argument aux $(\varphi_\alpha)^{-1}$, on voit que φ^{-1} est également $\mathcal{C}^\infty$ - c'est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, i.e. un isomorphisme dans la catégorie usuelle des variétés différentielles. □

[20] De nombreuses références, excellentes par ailleurs, définissent sans pincettes aucune des faisceaux sur des bases. Le Stacks Project, est, à ma connaissance, la seule référence vraiment précise et exhaustive à ce sujet

[21] Attention - un tel résultat est faux pour des espaces annelés plus généraux (cf [Wed16], Problem 4.5.)

[22] C'était le seul argument véritablement analytique de cette IDR

Remarque 1.22. *Ces deux constructions sont même fonctorielles, et inverses l'une de l'autre. Elles définissent un isomorphisme de catégories.*

Le point de vue des espaces localement annelés admet de nombreux avantages. En voici deux :

- Il évite les soucis techniques liés aux concepts d'*atlas maximal*, ou de *classe d'équivalence d'atlas.* Via l'équivalence ci-dessus, deux atlas sont équivalents si et seulement si ils définissent le même faisceau structural.
- Il se généralise très facilement à des types d'espaces plus généraux. Il suffit de préciser ce qu'on impose localement, et les conditions de recollement sont données gratuitement par le formalisme (quoique de manière peu explicite en général).

Nous sommes maintenant armés pour définir les variétés algébriques.

1.5 Variétés algébriques

Définissons tout d'abord le faisceau structural des variétés algébriques affines.

Les fonctions les plus générales vers k que nous pouvons définir sur de tels objets sont les *fractions rationnelles* - là où elles sont bien définies, i.e. là où le dénominateur ne s'annule pas. On pose la définition suivante :

Définition 1.23. *Soient X, Y deux ensembles algébriques affines sur k, et U un ouvert (Zariski) de X.*

Une application $f : U \to k$ est ***régulière*** *si elle s'écrit localement au voisinage de tout point $x \in U$ comme une* ***fraction rationnelle*** *dont le dénominateur ne s'annule pas au voisinage de x.*[23]

On note $\mathcal{O}_X(U)$ l'ensemble des ***fonctions régulières*** *définies sur U.*

Un ***morphisme d'ensembles algébriques affines*** *sur k est une application $\varphi : X \to Y$ telle que, pour toute application régulière définie sur un ouvert $h : V \subset Y \to k$, la précomposition $\varphi \circ h : \varphi^{-1}(V) \to k$ est régulière.*[24]

Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{O}_X$ est un faisceau sur X, la régularité étant une condition locale.

Remarque 1.24. *Les sections globales d'une variété algébrique affine $(X, \mathcal{O}_X)$ sont exactement les restrictions de fonctions polynomiales. En particulier, si $X = V(f_1, \dots, f_m)$, $\mathcal{O}_X(X) \cong k[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_m)$.*[25]

Nous pouvons enfin définir les variétés algébriques.

Définition 1.25. *Une* ***variété algébrique*** *sur k est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ qui admette un recouvrement ouvert fini $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ tels que les $(U_i, (\mathcal{O}_X)|_{U_i})$ soient isomorphes à des variétés algébriques affines sur k, munies du faisceau des fonctions régulières.*

Exemple 1.26. *Voici quelques exemples de variétés algébriques non affine :*

- *L'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$. On le construit comme dans le cas réel ou complexe en recollant les $n+1$ ouverts standards $U_k = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n], x_k \neq 0\}$, chacun isomorphes (comme variétés algébriques) à k^n.*

  Les sections de son faisceau structurel font apparaître des polynômes homogènes à $n+1$ variables.
- *Le plan privé de l'origine $U = k^2 \setminus \{(0,0)\}$, sur k algébriquement clos. On remarque*[26] *que toute application régulière $U \to k$ peut se prolonger à k^2 tout entier*[27] *; donc $\mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_{k^2}(U) = \mathcal{O}_{k^2}(k^2)$. Or, comme nous allons le voir, on peut reconstruire uniquement une variété affine à partir de ses sections globales.*

Nous expliquons maintenant comment reconstruire une variété affine à partir de ses sections globales. Une telle procédure associe donc à un objet **algébrique** (k-algèbre), un espace **géométrique** (variété algébrique affine).

Pour cela, on en regardant l'ensemble des idéaux maximaux de l'algèbre, appelé **spectre maximal**, qu'on munit d'une structure d'espace localement annelé.

Sur un corps algébriquement clos, cette construction n'apporte rien de fondamentalement nouveau. Elle réalise en revanche un saut conceptuel qui sera essentiel vers la notion de schéma.

[23] Explicitement, si il existe un ouvert $x \in U' \subset U$ et des fonctions polynomiales $g, h : U' \to k$ tels que $f|_{U'} = \frac{g|_{U'}}{h|_{U'}}$

[24] Par le même argument que sur les variétés différentielles, on peut vérifier que tout morphisme d'espaces localement annelés entre variétés algébriques affines est de cette forme

[25] Le quotient par $(f_1, \dots, f_m)$ est lié au fait que deux polynômes qui diffèrent d'un élément de cet idéal définissent la même fonction polynomiale sur $V(f_1, \dots, f_m)$

[26] Moralement, le lieu de non définition d'une application régulière est de *codimension* 1

[27] L'hypothèse k algébriquement clos est nécessaire (Sinon, regarder $k = \mathbb{R}$ et $\frac{1}{X^2+Y^2}$). Dans le *monde des schémas*, ça sera vrai sur tout corps

Définition 1.27. *Soit A une $k-$algèbre de type fini. Soit* $\mathrm{Spm}(A)$ *l'ensemble des idéaux maximaux de A. On le munit de la topologie de **Zariski**, dont les fermés sont $V(I) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(A), I \subset \mathfrak{m}\}$ pour I idéal de A.*

On rappelle que les $k-$algèbres de type fini sont exactement de la forme $k[X_1, \dots, X_n]/J$, pour J un idéal.

Pour munir $\mathrm{Spm}(A)$ d'un faisceau d'anneau, il nous faudra supposer que k est **algébriquement clos** - ce que nous faisons dans la suite du paragraphe. La construction repose sur le théorème suivant.

Theorème 1.28. *Nullstellensatz (Hilbert, 1893)*[28]*. Soit k un corps algébriquement clos. Alors :*

- *Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. Alors $\mathrm{Spm}(k[X_1, \dots, X_n]/I) \cong V(I)$ comme espaces topologiques.*[29]
- *Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]/I$, c'est-à-dire un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$ contenant I. Alors $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}$ est canoniquement isomorphe à k.*

Preuve. cf. [Har77], 1.3A. □

Remarque 1.29. *Ce théorème implique, pour k un corps algébriquement clos et $f_1, \dots, f_n \in k[X_1, \dots, X_m]$:*

$$V(f_1, \dots, f_n) \neq \varnothing \text{ si et seulement si } \exists g_1, \dots, g_n \in k[X_1, \dots, X_m], f_1 \cdot g_1 + \dots + f_n \cdot g_n = 1$$

Ce théorème affirme donc que, sur un corps algébriquement clos, tout système non trivial d'équations polynomiales à plusieurs variables a des solutions.

Si A est une k-algèbre de type fini, le second point du Nullstellensatz permet d'associer à tout point $x \in A$ à une fonction $\mathrm{Spm}(A) \to k$, qui est polynomiale à travers l'identification du premier point.

On peut maintenant établir la définition suivante :

Définition 1.30. *Soit U un ouvert Zariski de* $\mathrm{Spm}(A)$*, pour A une k-algèbre de type fini. On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathrm{Spm}(A) \to k$ est **régulière** si elle s'écrit localement autour de tout $x \in U$: $f|_{U'} = \frac{g|_{U'}}{h|_{U'}}$, pour $x \in U' \subset U$ et $g, h \in A$, vus comme fonctions $U \to k$.*

Ceci définit une structure d'espace localement annelé sur $\mathrm{Spm}(A)$. On a en fait :

Proposition 1.31. *Si $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$,* $\mathrm{Spm}(A) \cong V(I)$ *comme espaces localement annelés.*

En particulier, si X est une variété algébrique affine, on a un isomorphisme $X \cong \mathrm{Spm}(\mathcal{O}_X(X))$[30] comme espaces localement annelés- et on reconstruit X à partir de ses sections globales.

Ceci permet d'ailleurs de redéfinir une variété algébrique comme un espace localement annelé localement isomorphe à $\mathrm{Spm}(A)$, pour A une k-algèbre (réduite[31]) de type finie - cette remarque est cruciale à l'introduction des schémas.

1.6 Schémas

Nous définissons maintenant les schémas, qui, introduits par A.Grothendieck en 1958, forment la version moderne des variétés algébriques[32]*. Cette section peut être ignorée (ou du moins survolée) en première lecture, à la condition de remplacer schéma par variété algébrique, et* Spec *par* Spm *- et avec un peu de gymnastique mentale.*
Ma référence personnelle à ce sujet est le polycopié d'A.Ducros [Duc].

Si la théorie des variétés algébriques fonctionne très bien sur les corps algébriquement clos, elle est un peu trop *rigide* en général, et on lui préfère des objets plus souples - appelés schémas.

Nous évoquons ici deux problèmes de la théorie développée jusqu'à présent.

- Elle nécessite de travailler sur un corps fixé, alors qu'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ permet de définir simultanément des variétés algébriques affines sur tout les corps (voire même sur des anneaux), qui ont des liens intéressants entre elles.

[28] Ce théorème admet une pléthore de formulations équivalentes, et est d'une importance théorique phénoménale. Nous présentons ici, par manque de place, le strict minimum qui permette la construction

[29] Ce sera aussi vrai comme espaces localement annelés, cf. 1.31

[30] On peut vérifier que $\mathcal{O}_X$ est toujours à valeurs dans les k-algèbres de type fini

[31] i.e., sans éléments nilpotents. On vérifie en effet que si X variété affine, $\mathcal{O}_X(X)$ est une algèbre réduite - cela repose sur le fait que $V(I) \cong V(\sqrt{I}))$ pour tout idéal I, où $\sqrt{I}$ désigne le radical de I (l'ensemble des éléments dont une certaine puissance est dans I)

[32] D'autres notions encore plus récentes existent, comme les champs algébriques, voire les schémas dérivés, ou pire encore ...

- Elle cache toute notion de nilpotence. En théorie des *déformations* par exemple, on aime bien étudier l'algèbre $K[\varepsilon] := K[X]/(X^2)$, mais son spectre maximal est simplement isomorphe à celui de K - on *perd* l'information apportée par les éléments nilpotents.

Comme le lecteur s'y est probablement déjà habitué, on définira un schéma comme un espace localement annelé, localement isomorphe à un *schéma affine* - encore faut-il définir les schémas affines. Ils sont construits comme des ensembles d'idéaux premiers (et non maximaux[33]) d'anneaux quelconques (et non simplement de k-algèbres (réduites) de type fini).

Définition 1.32. *Soit A un anneau commutatif. On note* $\mathrm{Spec}(A)$ *l'ensemble de ses idéaux premiers*[34].
On la munit de la topologie de ***Zariski****, dont les fermés sont* $V(I) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(A), I \subset \mathfrak{m}\}$ *pour* I *idéal de* A.

Pour définir le faisceau des fonctions régulières, il va nous falloir voir les éléments de A comme des fonctions définies sur $\mathrm{Spec}(A)$. C'est plus technique que pour les variétés algébriques, mais l'idée est la même.

Tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$ induit canoniquement une application $\pi_x : A \to A/x \to \mathrm{Frac}(A/x) := \kappa(x)$, où $\kappa(x)$ est appelé le **corps résiduel** de x. Notons que le corps $\kappa(x)$ dépend du point x en général ! Ainsi, on voit les points $f \in A$ comme des *fonctions* de $\mathrm{Spec}(A)$ à valeurs dans un corps, via $x \mapsto \pi_x(f)$.[35]

Définition 1.33. *Si* U *ouvert de* $\mathrm{Spec}(A)$, *on pose* $S(U) = \{f \in A, \forall x \in U, \pi_x(f) \neq 0\}$.
On définit $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ *le faisceau associé au préfaisceau*[36] $U \mapsto S(U)^{-1}A$ *- où on rappelle que les éléments de* $S(U)^{-1}A$ *sont exactement les* $\frac{g}{h}$ *pour* $g \in A$ *et* $h \in S(U)$.
Un ***schéma affine*** *est un espace localement annelé de la forme* $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$
Un ***schéma*** *est un espace localement annelé* $(X, \mathcal{O}_X)$ *localement isomorphe à un schéma affine.*
Un ***morphisme de schéma*** *est un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas.*

TODO : Bouger cet exemple, qui est pas vraiment un truc de schémas

Exemple 1.34. *Si* k *est un corps, on définit* ***l'espace affine*** *de dimension* n *sur* k : $\mathbb{A}^n_k := \mathrm{Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$.
En tant qu'ensemble, il contient k^n, *via les idéaux premiers de la forme* $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$, *mais aussi de nombreux autres points. Par exemple,* $(X^2 + 1) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X])$, *alors qu'il ne correspond pas à un vrai point de* $\mathbb{R}$.[37]

Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneau, il induit un morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, donné par l'image réciproque de tout idéal premier (qui est encore un idéal premier[38]). On peut vérifier que c'est un morphisme d'espaces localement annelés. La construction Spec est donc fonctorielle - et c'est en fait un *très bon* foncteur.

Proposition 1.35. *Le foncteur* Spec *induit une équivalence de catégories entre :*

1. *La catégorie opposée des anneaux commutatifs*
2. *La catégorie des schémas affines.*

Sa réciproque est donnée par le foncteur des sections globales : $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$.

Nous concluons cette section avec quelques résultats qui seront utiles pour la suite.

Exemple 1.36. *Si* k *est un corps, il admet un unique idéal premier (l'idéal* (0)*), donc, topologiquement,* $\mathrm{Spec}(k)$ *est simplement un point. D'ailleurs, les points sont exactement les spectres de corps*[39].
Attention, ces points ne sont pas tous isomorphes ! En effet, les faisceaux les distinguent - $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{Spec}(k)) \cong k$.

Si on tient à travailler sur une base fixée (disons sur un corps donné), c'est encore possible.

[33] Pour une raison qui sera expliquée dans la note 37

[34] Un idéal I de A est dit **premier** si c'est un idéal propre de A et que, pour tout $x, y \in A$, $xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$. Si I idéal de A, il est premier ssi A/I est un intègre

[35] C'est une manière de penser à tout anneau comme à un anneau de fonctions, heuristique déjà rencontrée dans le paragraphe sur les faisceaux !

[36] Ce n'est pas un faisceau - mais on peut associer à tout préfaisceau un faisceau, via une procédure appelée **faisceautisation**, que nous ne détaillons pas ici

[37] Même si k est algébriquement clos, il y a de nombreux autres points - dont l'interprétation géométrique n'est pas évidente a priori. Ils correspondent à des idéaux premiers mais non maximaux

[38] En général, cette propriété est fausse si on remplace "premier" par "maximal" - sauf sur les k-algèbres de type fini sur k algébriquement clos, où c'est une conséquence du Nullstellensatz.

[39] Car un anneau commutatif qui n'a qu'un idéal premier est nécessairement un corps

Définition 1.37. *Soit X un schéma. Un* ***schéma sur X*** *est un schéma Y muni d'un morphisme $Y \to X$.*
Un morphisme de X-schémas est un morphisme de schémas $Y \to Z$ tel que le diagramme au-dessus de X commute.
La catégorie ainsi obtenue est appelée ***catégorie des*** *$X-$schémas, et notée Sch/X.*
Cette catégorie admet des produits fibrés.

Remarque 1.38. *Si A est un anneau fixé,* Spec *induit alors une équivalence de catégorie entre les schémas sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *et la catégorie opposée des A-algèbres. Les produits fibrés correspondent alors au produit tensoriel sur A.*

Sur un corps algébriquement clos, la théorie des schémas coïncide avec celle des variétés algébriques.

Theorème 1.39. *Soit k un corps algébriquement clos. Il y a une équivalence de catégories entre :*

1. *Les schémas irréductibles*[40] *réduits et de type fini*[41] *sur* $\mathrm{Spec}(k)$
2. *Les variétés algébriques sur k*

Nous avons (enfin) défini les objets nécessaires pour aborder le coeur du sujet.

[40] i.e. qui ne sont pas union de deux fermés propres
[41] i.e. qui s'écrivent localement $\mathrm{Spec}(A)$, pour A une k-algèbre réduite de type fini

2 Topologies des variétés algébriques

Comme motivé dans l'introduction, dans le cas des variétés algébriques lisses sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous espérons pouvoir établir des notions purement algébriques qui retrouvent des informations sur la *topologie* de la variété analytique associée. Cela semble très difficile, car elle est très éloignée de la topologie de Zariski.

Comme nous allons le voir, nous pouvons définir des *prétopologies* intéressantes, comme la (pré-)topologie étale, qui sera au coeur de la suite. Cela se fait au prix de quelques complications techniques.

2.1 La notion de site

Une très bonne référence est le chapitre 7 du Stacks project : [Sta23, Chapter 00UZ].
La terminologie de site, prétopologie, topologie de Grothendieck, sieves, ... varie selon les auteurs. Nous faisons au plus simple et ignorons les soucis liés au fait qu'il faut mieux regarder les topologies engendrées par ces prétopologies
Définissons maintenant la notion de site.[42] Un site est, moralement, une catégorie munie d'une topologie. L'idée de la définition est de généraliser la notion de **recouvrement ouvert**.

Dans ce chapitre, le lecteur peut remplacer *schéma* par *espace topologique* sans perdre grand chose.

Proposition 2.1. *Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est une* ***immersion ouverte*** *si elle induit un isomorphisme (de schémas) entre X et $f(X)$.*

Ainsi, on peut voir tout ouvert Zariski d'un schéma X comme une paire $(Y, f : Y \to X)$ où f est une immersion ouverte. Le caractère ouvert de $f(Y)$ se lit maintenant comme une **propriété** du morphisme de schémas f.
Un recouvrement ouvert de X peut maintenant se voir comme un ensemble de schémas (Y_i) et d'immersions ouvertes $f_i : Y_i \to X$ tels que $X = \bigcup_i f_i(Y_i)$. Cette idée mène à la définition suivante.

Définition 2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admette des produits fibrés.*[43]
Une ***prétopologie*** *sur $\mathcal{C}$ est la donnée, pour tout objet U de $\mathcal{C}$, d'une famille de* ***recouvrements*** $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ *vérifiant certains axiomes, explicités dans 2.5.*
Une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une prétopologie J est appelée un ***site****, et notée $(\mathcal{C}, J)$.*

Les deux exemples ci-dessous sont fondamentaux. Ils définissent des structures de sites naturelles à partir de topologies déjà connues.

Exemple 2.3. *Soit X un espace topologique, et $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$, définie en 1.11.*
On la munit d'une structure de site en disant qu'une famille $\{f_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ est un recouvrement ssi $X = \bigcup f_i(Y_i)$.

Par définition de $\mathrm{Ouv}(X)$, les Y_i ne sont autre que des ouverts de X, et les f_i reflètent les inclusions. On retrouve donc la notion usuelle de recouvrement ouvert.

Exemple 2.4. *Soit X un schéma, et Sch/X la catégorie des schémas sur X.*
On dit qu'une famille de morphismes de X-schémas : $\{f_i : Y_i \to Z\}$ est un recouvrement Zariski si tous les f_i sont des immersions ouvertes, et que $Z = \bigcup_i f_i(Y_i)$.
Le site obtenu, noté X_{Zar}, est appelé le ***site Zariski*** *de X.*

La remarque suivante explicite les axiomes d'une prétopologie. Elle peut être ignorée en première lecture. On retiendra cependant que, dans le cas de Ouv(X), ils correspondent exactement aux axiomes d'un espace topologique.

Remarque 2.5. *Les axiomes miment, dans un langage plus catégorique, les axiomes usuels, en remplaçant la notion d'intersection par celle de produit fibré.*

- L'espace total est ouvert : *Pour tout isomorphisme $f : V \simeq U$ dans $\mathcal{C}$, $\{f : V \simeq U\}$ est un recouvrement.*
- Stabilité par union : *Si $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ sont des recouvrements, et, pour tout i, les $\{h_{i,j} : U_{i,j} \to U_i\}_{j\in J_i}$ en sont aussi, alors la famille $\{f_i \circ h_{i,j} : U_{i,j} \to U\}_{i\in I, j\in U_i}$ est un recouvrement.*
- Stabilité par intersection : *Si $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ est un recouvrement et $g : V \to U$ est un morphisme, alors la famille des tirés en arrière $\{g^* f_i : U_i \times_U V \to V\}_{i\in I}$ donnés par le diagramme ci-dessous est un recouvrement.*

[42] Historiquement, cette notion a été introduite par A.Grothendieck, justement pour définir la topologie étale
[43] Cela permet de former des "intersections", et sera toujours le cas dans la suite

$$\begin{tikzcd} U_i \times_U V \arrow[r, "g^* f_i"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & V \arrow[d, "g"] \\ U_i \arrow[r, "f_i"] & U \end{tikzcd}$$

L'exemple 2.4 se généralise *mutatis mutandis* à d'autres propriétés de morphismes de schémas (tant qu'elles vérifient des propriétés de stabilité par composition et par changement de base).
Pour définir la topologie étale, il nous suffit de savoir ce qu'est un *morphisme étale*.

2.2 Topologie étale

Une référence exhaustive (quoique très technique) est le livre de Milne [Mil80].

Pour définir une propriété de morphismes de schémas, on définit le plus souvent ce qu'il se passe localement, aux niveau des ouverts affines - et donc au niveau des morphismes d'anneaux associés, via l'équivalence de catégorie 1.35. Ici, c'est plus compliqué, car le caractère étale est une notion qui vient fondamentalement de la **géométrie**, et non de l'algèbre. Cela en fait une notion particulièrement difficile à définir et à manipuler.
On retiendra surtout l'heuristique suivante, en vue d'une analogie avec la topologie (algébrique) :

Idée : Un morphisme **étale** de schémas $X \to Y$ est un **homéomorphisme local** sur son image.[44]

Donnons tout de même la définition suivante, qui, si elle est assez obscure, a l'avantage d'être manipulable en pratique. Pas de panique, la motivation viendra ensuite.

Définition 2.6. *Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est* ***étale*** *si f est plat*[45]*, localement de présentation Type fini !?finie*[46]*, et que, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est isomorphe à une union disjointe de points de la forme* $\mathrm{Spec}(k)$*, où k est une extension finie séparable de* $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{Y,y})$.[47]
Il est de plus ***fini*** *s'il est de type fini et si toutes les fibres $f^{-1}(x)$ sont finies.*[48]

Où on rappelle qu'une extension finie de corps k'/k est **séparable** si le polynôme minimal sur k de tout élément de k' est à racines simples. (Cette condition est automatique en caractéristique zéro, ou sur des corps finis).
Nous définissons dès maintenant le site associé - en remplaçant "immersion ouverte" par "étale" dans 2.4.

Définition 2.7. *Soit X un schéma et* Sch/X *la catégorie des schémas sur X. On dit qu'une famille $\{f_i : Y_i \to Z\}_{i \in I}$ est un recouvrement* ***étale*** *si tous les f_i sont des morphismes étales, et que $Z = \bigcup_i f_i(Y_i)$.*
Le site obtenu, noté $X_{ét}$, est appelé le (gros)[49] ***site étale*** *de X.*

Si $X \to Y$ est fini étale, toutes les fibres $f^{-1}(y)$ sont, topologiquement, un ensemble fini. La condition de platitude implique que les fibres comportent toutes le même nombre de points - au moins sur une composante connexe.

Exemple 2.8. *Une immersion ouverte est étale, mais non nécessairement finie (car non nécessairement de type fini). En effet, les immersions ouvertes les plus simples sont de la forme* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \mathrm{Spec}(A)$*. Si S est infini, a priori $S^{-1}A$ n'est pas de type fini comme A-algèbre (à moins d'une condition supplémentaire de quasi-compacité)*

On pense donc à un morphisme fini étale comme à un homéomorphisme local à fibres finies constantes, c'est-à-dire, au moins pour des espaces connexes séparés, à un **revêtement fini**.[50] La section suivante tirera de merveilleuses conséquences de cette interprétation, en faisant le lien avec le cas topologique.

Nous allons voir qu'un morphisme fini étale peut véritablement être vu comme un revêtement, en un sens assez technique. Pour cela, il nous faut parler de *voisinage étale*.

Définition 2.9. *Un* ***voisinage étale*** *d'un point x d'un schéma X est la donnée d'un schéma et d'un de ses points (Y, y), ainsi que d'un morphisme étale $f : Y \to X$ tel que $f(y) = x$.*

[44] Les ouverts Zariski sont souvent trop gros pour que les morphismes étales soient des isomorphismes Zariski-locaux. Ce seront des vrais isomorphismes étale localement, cf. 2.11

[45] Cette condition, assez technique, est automatique sur si $Y = \mathrm{Spec}(k)$. On peut la lire comme "Les fibres se ressemblent localement"

[46] i.e. s'écrit localement $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, pour $B \simeq A[X_1, \ldots, X_n]/I$ comme A−algèbre

[47] $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{Y,y})$ coïncide avec le corps résiduel $\kappa(y)$ de 1.33, vu dans un voisinag affine

[48] La terminologie standard est plutôt *quasi-fini*. Dans cet article, on utilisera fini pour quasi-fini (ces conditions sont en fait équivalentes sur des anneaux noethériens, ce qui sera le cas partout)

[49] Pour des raisons techniques, on veut parfois imposer que les morphismes structuraux vers X soient également étales. Le site obtenu est alors le *petit* site étale - mais ce choix ne modifie pas la théorie

[50] On attire l'attention sur le fait que chaque mot de cette phrase est important

Remarque 2.10. *Si on remplace étale par immersion ouverte, on retrouve bien la notion usuelle de voisinage. Quand on définit une propriété "localement", on pourra désormais le faire Zariski-localement (au sens usuel des espaces topologiques), ou étale-localement, i.e. que la propriété soit vraie sur des voisinages étales.*

Un morphisme fini étale est alors un revêtement, en le sens où il ressemble étale-localement à une projection.[51]

Proposition 2.11. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini étale. Alors, pour $y \in Y$, il y a un voisinage étale (U,x) de Y tel que, le morphisme $X \times_Y U \to U$ soit isomorphe à la projection $U \sqcup U \sqcup \cdots \sqcup U \to U$ au dessus de U.*

On peut montrer que, si (U,x) était un voisinage Zariski, le produit fibré $X \times_Y U$ serait canoniquement $f^{-1}(U)$.

Nous concluons cette section avec quelques exemples fondamentaux de morphismes étales.

Pour ce faire, nous établissons un lien avec la lissité. On dira ici qu'un morphisme de schémas est **lisse** s'il s'écrit localement $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, où $B = A[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ pour $f_1, \ldots, f_m$ des morphismes **lisses**, au sens de 1.6.[52]. On a alors la caractérisation suivante :

Proposition 2.12. *Un morphisme de schémas fini est lisse si et seulement si il est étale.*[53]

Exemple 2.13. *Voici quelques (non)-exemples de morphismes étales.*

- *Le morphisme $\mathbb{A}_k^n \to \operatorname{Spec}(k)$ induit par $k \hookrightarrow k[X_1, \ldots X_n]$ est lisse, mais n'est pas fini dès que $n \geq 1$, car la fibre en l'unique point de $\operatorname{Spec}(k)$ est infinie.*
- *Le morphisme $\operatorname{Spec}(k') \to \operatorname{Spec}(k)$, induit par une extension de corps $k \hookrightarrow k'$ est étale si et seulement si k' est une extension finie séparable de k.*[54]

  Cet exemple suggère un lien entre théorie de ***Galois*** *et théorie des* ***revêtements****.*
- *Pour $n \geq 2$, le morphisme $\mathbb{A}_1^k \to \mathbb{A}_1^k$ induit par $T \mapsto T^n$ est fini, mais non lisse (et donc non étale) car la dérivée partielle $\partial_T T^n = n \cdot T^{n-1}$ s'annule en $T = 0$, qui est aussi un point d'annulation de T^n. C'est le seul point problématique.*
- *Si $X = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \smallsetminus \{0\} \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T, T^{-1}])$*[55] *est le plan complexe épointé, les applications induites par $T \mapsto T^n$ sont des morphismes fini étales (car lisses) pour tout n.*

  Ce seront en fait essentiellement les seuls morphismes finis étales au dessus de ce plan épointé.

Le dernier exemple nous donne l'espoir d'un équivalent algébrique du groupe fondamental, qui classifie les revêtements finis. Cet espoir est en fait réalité.

Remarque 2.14. *Dans ce paragraphe, et en vue de la section suivante, on a privilégié les analogies avec le cas topologique. Si on préfère penser à un schéma comme à une variété (différentielle, resp. complexe), les revêtements sont automatiquement munis d'une structure additionnelle (difféomorphisme local, resp. biholomorphisme local). Le résultat 2.11 peut alors être vu comme un théorème des fonctions implicites. Il y a d'ailleurs un merveilleux point de vue sur les morphismes étales via les espaces tangents, que nous ne détaillons pas ici.*

[51] C'est en général faux *Zariski-localement* car les ouverts Zariski sont *trop gros* (ex : La topologie de $\mathbb{A}_k^1$ est la topologie cofinie)

[52] C'est une version (très) informelle du critère jacobien de lissité - pour être sérieux, il faudrait rajouter de nombreuses hypothèses techniques

[53] En général, un morphisme étale est un morphisme lisse entre espaces de même dimension (ce qui est automatique dans le cas fini)

[54] On le voit clairement avec la définition 2.6 - mais on peut également le lire sur notre critère de lissité en se rappelant qu'une extension est séparable si et seulement si tout polynôme minimal est de dérivée non nulle

[55] Cette identification est essentiellement une conséquence du Nullstellensatz

3 Groupe fondamental étale

Cette section est essentiellement indépendante de la suivante, qui parlera de cohomologie étale. Dans ces deux dernières sections, nous serons moins rigoureux, et présenterons uniquement les grandes idées.

On rappelle qu'il y a essentiellement deux approches au groupe fondamental en topologie - l'une via les lacets, et l'autre via la classification des revêtements[56]. Il est difficile de faire fonctionner algébriquement la définition via les lacets (car il y a trop peu de *chemins algébriques*) ; en revanche, nous avons déjà défini un analogue algébrique des revêtements finis. C'était le plus gros du travail.

3.1 Revêtements, groupe fondamental et groupe de Galois absolu

La présentation s'inspire fortement des notes d'exposé [Chu].

A toute fins utiles, et en vue du prochain paragraphe, on "rappelle" brutalement le théorème de classifications des revêtements d'un espace topologique ainsi que le théorème fondamental de la théorie de Galois.

Rappel. *Soit X un espace topologique, qu'on suppose connexe par arc, localement connexe par arcs, et localement simplement connexe*[57]*. Soit $x \in X$.*

*Un **revêtement** de X est un espace topologique Y muni d'une application continue $p : Y \to X$ qui ressemble localement à $U \times F \to U$, pour F un espace discret. On dit que le revêtement est connexe par arc si Y l'est.*

*Si c'est le cas, F est appelé la **fibre**, et s'identifie à $p^{-1}(x)$ - elle ne dépend pas de x.*

*Un **morphisme de revêtements** est une application $f : Y \to Z$ tel que le diagramme au dessus de X commute.*

*Le **revêtement universel** de X est un revêtement connexe $p : \widetilde{X} \to X$ depuis un espace simplement connexe. Un tel espace existe, et est unique à isomorphisme (de revêtement) près.*

Il y a des équivalences de catégories entre :

- *Les revêtements finis connexes par arcs de X*
- *Les ensembles finis F munis d'une action transitive de $\pi_1(X,x)$*
- *La catégorie opposée des sous-groupes d'indice fini de $\pi_1(X,x)$*

Où $(1 \to 2)$ est donné par la fibre, munie de l'action naturelle de monodromie du groupe fondamental ; $(2 \to 3)$ est donné par le stabilisateur d'un point, et $(3 \to 1)$ est donné par $H \mapsto \widetilde{X}/H$.

*On dit qu'un revêtement est **Galoisien** s'il correspond à un sous-groupe distingué via $(1 \to 3)$.*

Enfin, si un revêtement Galoisien $p : Y \to X$ correspond à un sous-groupe distingué H, les automorphismes de revêtement de p sont en bijection avec $\pi_1(X,x)/H$.

A fortiori, le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ s'identifie au groupe des automorphismes de revêtement de $(\widetilde{X}, p)$.

On passe maintenant à la théorie de Galois.

Rappel. *Soit k un corps, et $\overline{k}$ une clôture séparable de k.*[58]

On lui associe un groupe profini[59]*, $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, défini par :*

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) = \varprojlim_{k'/k} \mathrm{Gal}(k'/k)$$

Où la limite est prise sur les extensions finies séparables, dans la catégorie des groupes topologiques, où $\mathrm{Gal}(k'/k)$ désigne l'ensemble des endomorphismes k-linéaires de k', munis de la topologie discrète.

Il y a des équivalences de catégories entre :

- *Les extensions finies séparables de k (plongées dans $\overline{k}$)*
- *La catégorie opposée des ensembles finis X munis d'une action transitive de G*
- *Les sous-groupes ouverts de G*

[56] On pourra consulter le merveilleux site https://analysis-situs.math.cnrs.fr/ pour un développement parallèle des deux approches

[57] La première condition simplifie l'exposition, et les deux autres garantissent l'existence du revêtment universel

[58] En caractéristique zéro, on peut lire *algébrique* à la place de séparable.

[59] i.e. un groupe topologique qui s'obtient comme limite projective de groupes finis discrets

Où $(1 \to 3)$ *est donné par* $k' \mapsto Gal(k'/k)$, $(3 \to 1)$ *est donné par* $H \mapsto \overline{k}^H$ *et* $(3 \to 2)$ *est donné par* $H \mapsto G/H$.
On dit qu'une extension est ***Galoisienne*** *si elle correspond à un sous-groupe distingué.*[60]

Nous étudions maintenant le groupe fondamental étale, qui unifie de manière assez remarquable les deux notions ci-dessus, qui, si elles se ressemblent typographiquement ; sont de nature très diverse.

3.2 Groupe fondamental étale

Cette section s'inspire de [Chu],[Mil80]. *On pourra consulter l'article intéressant* [nLa23].

Nous allons essayer de définir le groupe fondamental étale comme groupe d'automorphismes du *revêtement universel*, en remplaçant les revêtements finis par les morphismes finis étales. Il y a tout de même une différence notable avec le cas topologique : En géométrie algébrique, il n'y a **pas**, en général, de revêtement universel, même pour des schémas sympathiques.

Sur l'exemple du cercle (cf. 2.13), on voit en effet que, si les applications de "n-enroulements" sont finies étales, le "revêtement universel", donné par l'exponentielle, ne l'est pas - car c'est un objet fondamentalement analytique.

On résout ce problème en imaginant le revêtement universel comme une *limite* des revêtements finis.

Commençons par préciser une conséquence du théorème de classification des revêtements.

Corollaire 3.1. *Soit* X *un espace topologique*[61], *et* $x \in X$. *Soit* Rev_{conn} *la catégorie des revêtements connexes par arc de* X, *et* $\mathrm{Ens}^{\pi_1}(X,x)$ *la catégorie des ensembles avec action de* $\pi_1(X,x)$.
Le foncteur fibre : $(Y,p) \in \mathrm{Rev}_{conn}(X) \mapsto p^{-1}(x) \in \mathrm{Ens}^{\pi_1(X,x)}$ *est représentable par le revêtement universel.*

Preuve. On sait que ce foncteur est pleinement fidèle (puisque c'est une équivalence de catégories).
Soit $(\widetilde{X},\pi)$ le revêtement universel et (Y,p) un revêtement connexe quelconque. On calcule :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rev}_{conn}(X)}(\widetilde{X},Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\pi_1(X,x)}}(\pi^{-1}(x),p^{-1}(x)) \cong p^{-1}(x)$$

car l'action de $\pi_1(X,x)$ sur $\pi^{-1}(x)$ est libre et transitive. □

Le groupe fondamental est ainsi le groupe des *automorphismes* de l'espace *représentant le foncteur fibre.*

Étudions la situation dans le cas étale. On commence par dire quelques mots de la notion de *point géométrique.*

Pour l'instant, nous n'avons vu que les points au sens topologique, i.e. Zariski. Puisque la théorie que nous développons ici est fondamentalement étale, nous avons besoin d'une autre notion de point, compatible à cette notion. On regardera cette notion en lien avec celle de voisinage, cf. 2.9.
Moralement, un point topologique est un morphisme depuis un point. Ici, nous demandons de la structure additionnelle : un point géométrique est alors un morphisme de schéma depuis un point - *géométrique.*

Définition 3.2. *Soit* X *un schéma. Un* ***point géométrique*** *de* X *est un morphisme* $\bar{x} : \mathrm{Spec(k)} \to X$, *pour* k *un corps algébriquement clos.*

Tout point géométrique admet un <u>support</u>, donné par l'image topologique du point. Inversement, tout point $x \in X$ induit un point géométrique $\mathrm{Spec}(\overline{\kappa(x)}) \to X$, de support x.
Cette notion de point géométrique est plus appropriée pour définir la notion de fibre.

Définition 3.3. *Soit* X *un schéma (connexe, localement noethérien)*[62] *muni d'un point géométrique* $\bar{x} : \mathrm{Spec}(k) \to X$
On note $\mathrm{Fét}/X$ *la catégorie des schémas munis d'un morphisme fini étale vers* X, *où les morphismes sont simplement les morphismes au-dessus de* X.[63]

A un tel schéma Y, *on associe* $F_{\bar{x}}(Y) := \mathrm{Hom}_X(\bar{x},Y)$ *sa* ***fibre***[64] *en* $\bar{x}$. *Cela définit un foncteur* $\mathrm{Fét}/X \to \mathrm{Ens}$.

Ce foncteur n'est pas représentable en général. En revanche, il est ***pro-représentable***, *c'est à dire qu'il existe des morphismes finis étales (qu'on peut d'ailleurs choisir surjectifs depuis des schémas connexes)* $X_i \to X$, *tels que, pour tout* $Y \to X$ *fini étale :*

$$F_{\bar{x}}(Y) \cong \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fét}/X}(X_i,Y) \tag{3}$$

[60] Je m'excuse pour cette définition à rebrouse poil de la théorie
[61] Supposé comme d'habitude connexe par arc, localement connexe par arcs, et localement simplement connexe
[62] Ces hypothèses techniques seront implicites par la suite
[63] Un tel morphisme est nécessairement étale
[64] Ce n'est pas la fibre ensembliste usuelle car x n'est pas un vrai point - c'est d'ailleurs ça qui la rend intéressante. Elle contient plus d'information - qu'on peut voir comme la donnée d'une action du π_1

On définit alors $\pi_1^{ét}(X,x) := \varprojlim_i \mathrm{Aut}_X(X_i)$*, muni de la topologie colimite. C'est un groupe profini.*

Remarque 3.4. *On remarque que l'action par composition de* $\mathrm{Aut}_X(X_i)$ *sur* $\mathrm{Hom}_X(\bar{x}, Y)$ *induit une action du groupe fondamental étale* $\pi_1^{ét}(X, \overline{x})$ *sur le foncteur fibre* $F_{\bar{x}}$*.*

Informellement, on peut penser aux X_i comme à des revêtements *de plus en plus grands*, qui "convergent" vers le revêtement universel. Calculons maintenant le groupe fondamental étale d'un point.

Theorème 3.5. *(Grothendieck, SGA 1) Soit* k *un corps, et* $\bar{k}$ *une clôture algébrique fixée, vu comme point géométrique de* Spec(k)*. Alors* $\pi_1^{ét}(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(\bar{k})) \cong \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$[65]

Preuve. Par définition, les morphismes finis étales sur $\mathrm{Spec}(k)$ sont exactement de la forme $\bigsqcup_{i=1}^n \mathrm{Spec}(k_i') \to \mathrm{Spec}(k)$, pour $(k_i')_{1\le i\le n}$ extensions finies séparables de $\mathrm{Spec}(k)$.
On se donne $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'extensions finies séparables de k, tels que $k^{sep} = \bigcup_n k_n$. On vérifie que que la famille des $\mathrm{Spec}(k_n)$ pro-représente le foncteur fibre.[66] On vérifie aisément que la formule 3 fonctionne pour n'importe quel suite de pro-représentants.
Enfin, pour tout n, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{Spec}(k_n)) \simeq \mathrm{Gal}(k_n/k)$, et la limite coïncide donc. □

Nous pouvons donc voir le groupe fondamental étale comme une *généralisation* du groupe de Galois absolu, à des espaces non nécessairement ponctuels ! On remarque au passage que le choix d'un point géométrique en théorie étale correspond au choix d'une clôture séparable en théorie de Galois. On recommande [Con] pour une agréable lecture à ce sujet.

De manière peut-être encore plus surprenante - mais attendue si on a en mémoire l'exemple du plan épointé - le groupe fondamental étale retrouve le groupe fondamental en topologie, du moins pour les variétés complexes lisses.

Le groupe fondamental étale étant profini - alors que le groupe fondamental topologique est un espace discret - ils ne peuvent pas directement coïncider. Cependant, nous allons voir que c'est la seule obstruction.

Proposition–Définition 3.6. *Soit* G *un groupe. On peut lui associer un groupe profini* $\widehat{G}$*, son* ***complété profini****, tel que, pour tout groupe profini* H*,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Prof}}(\widehat{G}, H)$*.*

Il nous faut maintenant une notion d'*analytification* des schémas (ici, variété suffit) sur $\mathbb{C}$.

Proposition–Définition 3.7. *Une variété algébrique*[67] X *lisse sur* $\mathbb{C}$ *peut naturellement être munie d'une structure de variété analytique complexe, notée* X^{an}*.*

Preuve. L'argument a été donnée en 1.6 sur les espaces affines - et tout se recolle □

Nous pouvons enfin énoncer le théorème :

Theorème 3.8. *(Grothendieck, SGA1, XII.5) Soit* X *une variété complexe connexe lisse,* X^{an} *son analytifié,* $\bar{x}$ *un point géométrique de* X*, et* x^{an} *le point complexe correspondant*[68]*. Alors* $\widehat{\pi_1^{top}(X^{an}, x^{an})} \cong \pi_1^{ét}(X, \bar{x})$*.*

Preuve. (Esquisse, cf. [GR04], p.253) Si $p: Y \to X$ est un morphisme fini étale, on peut voir naturellement (Y^{an}, p^{an}) comme un biholomorphisme local qui est a fortiori un revêtement fini de X. La partie difficile est la construction inverse.
Si on suppose de plus X projective[69], cela provient d'un énoncé très important et difficile, appelé *théorème d'existence de Riemann*. Il affirme essentiellement que toute variété projective analytique complexe est *algébrisable*, au sens où elle provient de l'analytification d'une variété algébrique.
On associe ainsi à tout revêtement fini (topologique) de X^{an}, qui est muni d'une structure complexe en recollant localement celle de X^{an}, un revêtement fini étale - et on vérifie que les constructions sont inverses l'une de l'autre □

Dans ce contexte, nous disposons encore d'un théorème de structure, qui généralise les deux résultats du paragraphe ci-dessus.

Theorème 3.9. *(Grothendieck, SGA1, V.8) Soit* X *un schéma connexe et localement noethérien ; et* x *un point géométrique de* X*. Le foncteur fibre* $F_{\bar{x}}$ *induit une équivalence de catégorie entre :*

[65] cf. [Sta23, Lemma 0BNE]
[66] Attention : $\mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(k)$ n'est pas étale si l'extension est infinie !
[67] Ou un schéma X sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$
[68] C'est simplement l'analytifié du support de x
[69] i.e. sous-variété d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

- $\mathrm{Fét}\,/X$
- *Les ensembles finis munis d'une action continue de* $\pi_1^{ét}(X,\overline{x})$
- *Les sous-groupes ouverts de* $\pi_1^{ét}(X,\overline{x})$

Où $(1 \to 2)$ *est donné par la fibre, munie de l'action naturelle du groupe fondamental décrite en 3.4 ;* $(2 \cong 3)$ *découle de la théorie des groupes profinis.*

Preuve. cf. [GR04], p.115 □

4 Cohomologie étale

LA référence est [Mil80]. *J'apprécie particulièrement les notes de cours de B.Klinger* [Kli].

Nous abordons enfin la notion promise dans le titre de cet IDR.

Nous avons déjà associé à toute variété algébrique (gentille) un groupe fondamental, qui coïncidait, dans le cas des variétés complexes lisse, avec le groupe fondamental de l'analytifié. Nous allons maintenant définir une **théorie cohomologique**, qui coïncidera, dans ce cas, avec la cohomologie singulière.

Pour ce faire, nous avons besoin de la cohomologie des faisceaux.

4.1 La cohomologie de Čech

Cette section suit le Stacks Project [Sta23, Section 03AK].

La cohomologie des faisceaux est une théorie assez miraculeuse, qui permet de générer des invariants intéressants dans des circonstances très variées, après avoir avalé une jolie boîte noire de théorie générale. Nous lui faisons très peu honneur, en l'abordant sous l'angle de la cohomologie de Čech, qui a l'avantage d'être relativement explicite, mais a pour inconvénient de cacher la beauté et la puissance de la théorie.

Notre objectif est d'associer des groupes de cohomologie à tout faisceau sur un site. Commençons par étendre la définition de faisceaux aux sites. Cette définition est à lire comme une généralisation de 1.14.

Définition 4.1. *Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site. Un* ***faisceau*** *en groupes abéliens*[70] *sur $\mathcal{C}$ est un préfaisceau $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ tel que, pour tout recouvrement $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ dans $\mathcal{C}$, la suite courte de groupes abéliens :*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod \mathcal{F}(f_i)} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\quad * \quad} \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

est exacte ; où la seconde flèche est définie par : $(f_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i,j} \mathcal{F}(\pi_{1,i,j})(f_i) - \mathcal{F}(\pi_{0,i,j})(f_i)$
où $\pi_{0,i,j} : U_i \times_U U_j \to U_i$ et $\pi_{1,i,j} : U_i \times_U U_j \to U_j$ sont les projections canoniques, et $\mathcal{F}(\pi)$ sont les morphismes induits $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$ par fonctorialité.

Remarque 4.2. *Si $\mathcal{C}$ est le site $\mathrm{Ouv}(X)$ défini en 2.3, cette définition coïncide avec la définition usuelle de faisceau.*

Le diagramme[71] ci-dessus admet une extension naturelle : que se passe-t'il si on regardait les intersections (ou *produit fibrés*) de plus de deux ouverts ? La suite obtenue serait-elle encore exacte ?
Elle ne l'est pas en général, et ce défaut d'exactitude est mesuré par la cohomologie de Čech.

Définition 4.3. *Soit (C, J) un site, et $\mathcal{P}$ un préfaisceau sur $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}$ un recouvrement dans J.*
Le ***complexe de Čech*** *de $\mathcal{P}$ associé à $\mathcal{U}$ est le complexe de chaînes $\check{\mathrm{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P})$ défini par :*

$$\prod_{i\in I} \mathcal{P}(U_i) \to \prod_{I\times I} \mathcal{P}(U_{i_0} \times_U U_{i_1}) \to \prod_{I\times I\times I} \mathcal{P}(U_{i_0} \times_U U_{i_1} \times_U U_{i_2}) \to \dots$$

où les flèches désignent les sommes alternées des morphismes induits par les (n+1) applications

$$(i_0, i_1, \dots, i_n) \mapsto (i_0, i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)$$

par le même processus que précédemment, où $\widehat{i_k}$ désigne l'oubli du terme i_k.

Sa ***cohomologie***, *notée $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P})$, s'appelle* ***cohomologie de Čech*** *de $\mathcal{P}$ associée au recouvrement $\mathcal{U}$.*

Remarque 4.4. *Un préfaisceau $\mathcal{P}$ est un faisceau si et seulement si $\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \cong \mathcal{P}(U)$ pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de U. Dans la suite, on considèrera uniquement la cohomologie de Cech sur des faisceaux.*

Remarque 4.5. *Dans le contexte de 1.13, on pouvait effectuer les calculs avec un complexe de Čech modifié où tous les i_k sont supposés distincts. Ce n'est plus le cas dès qu'on travaille avec des produits fibrés généraux. Le cas extrême où tous les indices sont égaux est en fait intéressant.*

Jusqu'à présent, nous avons défini la cohomologie de Čech *relative à un recouvrement.* Nous introduisons une définition indépendante du recouvrement, obtenue considérant des recouvrements de plus en plus fins.

[70] On définit de même un faisceau en anneaux, R-modules, ...
[71] Qui est en fait issu d'un objet simplicial dans Ab

Définition 4.6. *Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site, U un objet de $\mathcal{C}$, et $\mathcal{F}$ un faisceau.*
On dit qu'un recouvrement $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in J}$ ***raffine*** *un autre $\{g_j : V_j \to U\}$ s'il existe une application $\tau : I \to J$ et des morphismes $\varphi_i : U_i \to V_{\tau(i)}$ tels que, pour tout i, $g_{\tau(i)} = \varphi_i \circ f_i$.*
Ceci munit la catégorie $\mathrm{Cov}_J(U)$ des recouvrements de U dans J d'un ordre partiel.
Pour un faisceau $\mathcal{F}$, et $n \geq 0$, on définit ainsi : [72]

$$\check{\mathrm{H}}^n(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}_J(U)} \check{\mathrm{H}}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

le n-ième groupe de cohomologie de Čech de U à coefficient dans $\mathcal{F}$.

Si la cohomologie de Čech d'un objet U est égale à celle donnée par un recouvrement $\mathcal{U}$, on dit que $\mathcal{U}$ **calcule** la cohomologie de Čech. Dans certains cas particuliers, on pourra établir l'existence d'un tel $\mathcal{U}$, et même le caractériser.

Il n'est pas très difficile se convaincre que ces groupes de cohomologie existent et sont bien définis. Ce qui est plus difficile, c'est de voir *pourquoi* ils sont utiles. Notre motivation est la suivante :

Theorème 4.7. *Soit X un espace topologique paracompact*[73]*, auquel on associe le site $\mathrm{Ouv}(X)$. Soit A un anneau, et $\underline{A}$ le faisceau constant associé (au sens de 1.15).*
Alors, pour tout $n \geq 0$, $\check{\mathrm{H}}^n(X, \underline{A}) \cong \mathrm{H}^n_{sing}(X, A)$, où le terme de droite désigne la cohomologie singulière.

L'esquisse de démonstration suivante suppose de nombreux pré-requis et peut-être ignorée en première lecture. On se réfèrera à [Sel16] pour une référence moderne et exhaustive.

Preuve. Nous esquissons la preuve dans le cas où X est une variété différentielle. Dans ce cas, il est connu (c'est un résultat de géométrie Riemannienne) que tout recouvrement ouvert de X se raffine en un *bon recouvrement*, i.e. un recouvrement fini $X = \bigcup_i U_i$ dont toutes les intersections $\bigcap_{j\in J} U_j$ pour $J \subset I$ sont vides ou difféomorphes à $\mathbb{R}^n$.

Pour ce recouvrement, le complexe de Čech s'écrit :

$$\prod_{i\in I} A \longrightarrow \prod_{\{(i_0,i_1), U_{i_0}\cap U_{i_1}\neq\varnothing\}} A \longrightarrow \prod_{\{(i_0,i_1,i_2), U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}\neq\varnothing\}} A \longrightarrow \dots$$

Sa cohomologie donne ainsi une information *combinatoire* sur la disposition relative des ouverts.

Une procédure standard, appelée *nerf*, associe à ce recouvrement un complexe simplicial $X = |\mathcal{N}(\mathcal{U})|$, donné par :

- Un sommet par ouvert de $\mathcal{U}$
- Pour tout $n \geq 1$, une n-face entre n sommets fixés ssi les ouverts correspondants ont une intersection non vide

Le complexe de Čech ci-dessus calcule donc également la cohomologie simpliciale de X (indépendemment du choix du bon recouvrement). On conclut car la cohomologie singulière d'une variété s'identifie avec la cohomologie simpliciale d'une triangulation (et que $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ est une triangulation de X). □

4.2 Cohomologie étale

Nous avons enfin tous les outils pour définir la cohomologie étale.

Définition 4.8. *Soit X un schéma, et $X_{ét}$ son site étale, tel que défini en 2.7. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $X_{ét}$.*
La ***cohomologie étale*** *de X à coefficients dans $\mathcal{F}$, est la cohomologie de Čech du faisceau $\mathcal{F}$, calculée sur $X_{ét}$.*
Si A est un groupe abélien, la cohomologie étale à coefficient dans A est la cohomologie étale du faisceau constant $\underline{A}$, tel que défini en 1.15

Remarque 4.9. *La vraie définition de la cohomologie étale fait intervenir la "vraie" cohomologie des faisceaux. Ces deux notions coïncident dans certains cas - et on se placera toujours dans ces derniers.*

Avec la machinerie technique que nous avons développée, nous pouvons calculer la cohomologie étale (et également la cohomologie de Zariski[74]) d'à peu près n'importe quel faisceau, sur un schéma quelconque. On l'a défini pour des faisceaux constant, mais on peut également penser au faisceau structural (Et sa généralisation naturelle, les faisceaux quasi-cohérents).
Voici quelques résultats.

Proposition 4.10. *Soit X un schéma qui admette*[75] *un recouvrement Zariski $\mathcal{U} = \{U_i \subset X\}_{i\in I}$ par des ouverts*

[72] On peut rendre la colimite cofiltrante en identifiant les recouvrements qui se raffinent mutuellement
[73] Toute variété topologique et tous CW-complexe, sont paracompacts
[74] On peut d'ailleurs imaginer construire d'autres sites ; il faut simplement une propriété crédible de morphismes de schémas. Par exemple, les sites $fpqc$ et $fppf$ sont très utilisés en pratique
[75] C'est le cas si X est séparé

affines, tels que, pour tout $J \subset I$ fini, l'intersection finie $\bigcap_{j\in J} U_J$ soit vide ou affine.[76] *On peut également le voir comme un recouvrement étale.* [77]

Alors le recouvrement $\mathcal{U}$ calcule la cohomologie Zariski et la cohomologie étale du faisceau structural $\mathcal{O}_X$,qui coïncident donc. On a, de plus :

- *Si X est un schéma affine, $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $i > 0$.*
- *Si X admet un tel recouvrement comportant seulement n ouverts, $\mathrm{H}^m(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $m \geq n$*
- *Si k est un corps, $\mathrm{H}^m(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) \cong \begin{cases} k & \text{if } m = 0 \\ 0 & \text{if } m \neq 0 \end{cases}$, où l'espace projectif a été défini en 1.26.*

  On définit usuellement des faisceaux, notés $\mathcal{O}(d)$, sur $\mathbb{P}^n_k$, qui sont des variantes twistées[78] *de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$, pour $d \in \mathbb{Z}$.*

  Si d est bien choisi, le groupe $\mathrm{H}^m(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(d)))$ est non nul quand $m = n$.
  En revanche, les groupes pour $m \neq n$ (et $m \neq 0$) sont toujours nuls.

Si la cohomologie à valeurs dans $\mathcal{O}_X$ est très intéressante (elle fournit par exemple un critère cohomologique pour identifier les schémas affines), elle ne ressemble pas à la cohomologie singulière des variétés complexes, qui était notre motivation originelle.
Par exemple, on aimerait plutôt que le groupe non trivial dans la cohomologie de l'espace projectif soit $\mathrm{H}^{2n}(\mathbb{P}^n_k)$.

La cohomologie étale à valeurs dans un faisceau constant permet cela - une fois qu'on a dépassé des étranges problèmes liés au choix de l'anneau de coefficient.

Proposition 4.11. *Soit X un schéma gentil*[79]*. Alors $\mathrm{H}^1_{ét}(X, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$.*

Preuve. (Idée) - Si $X = \mathrm{Spec}(k)$, on verra en 4.15 que $\mathrm{H}^1_{ét}(X, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GrpTop}}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{k}}/\mathrm{k}), \mathbb{Z})$, où les morphismes sont pris dans la catégorie des groupes topologiques, et $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète.
Or, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ étant profini, il n'admet pas de morphismes de groupe non triviaux vers $\mathbb{Z}$.[80].
Le résultat s'étend ensuite à des schémas plus généraux que le point, cf. [Kli], 15.1. □

4.3 Cohomologie ℓ-adique et applications

On commence cette section par un condition technique qui assurera, dans le cas des coefficients constants, que la cohomologie de Čech coïncide avec la "vraie" cohomologie étale (cf. [Mil80], III.2.17).

Définition 4.12. *On dira qu'un schéma X vérifie la propriété $(*)$ s'il admet un recouvrement $\mathcal{U}$ par des ouverts Zariski, tels que tout sous-ensemble fini de X est contenu dans un ouvert affine de $\mathcal{U}$.*

Remarque 4.13. *Attention, il est faux d'affirmer qu'un revêtement tel que ci-dessus calcule la cohomologie de Čech - puisque c'est un recouvrement Zariski. Sur l'exemple de la cohomologie des faisceaux constants, les cas étale et Zariski sont très différents.*

Un tel recouvrement existe pour tout schéma quasi-projectif sur un schéma affine (ce qui est une propriété assez restrictive), mais qui contient par exemple les variétés projectives.
On déduit de la preuve de 4.11 qu'il faut plutôt regarder la cohomologie étale à valeurs dans un anneau fini - comme $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. On retrouve alors les résultat tant attendu.

Theorème 4.14. *(Artin, 1966)*
Soit X une variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{C}$, et X^{an} son analytifié. Alors, pour $n, k \geq 0$, on dispose d'isomorphismes :

$$\mathrm{H}^k_{\mathrm{Sing}}(X^{an}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^k_{ét}\left(X, \underline{\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}\right)$$

On conclut ce paragraphe - et cet IDR, par quelques propriétés intéressantes *en vrac* de la cohomologie étale.

Theorème 4.15. *Soit k un corps, et $X = \mathrm{Spec}(k)$.*
Alors la cohomologie étale de X coïncide avec la cohomologie Galoisienne de k.

[76] Cette condition ressemble beaucoup à celle de bon recouvrement, dans la définition précédente
[77] Car toutes les immersions ouvertes sont étales
[78] Ce sont des faisceaux quasi-cohérents de rang 1
[79] Régulier, et qui admette un recouvrement qui vérifie $(*)$, au sens de la proposition suivante
[80] C'est clair pour un groupe fini, et ça passe à la limite projective

Preuve. La preuve est élémentaire, et ressemble à celle de 3.5 □

Ici, la cohomologie étale coïncide donc avec une notion cohomologique purement *arithmétique*. Par ailleurs, le fait que le calcul ressemble à celui du groupe fondamental étale suggère un phénomène plus général. C'est en fait le cas, et on a une variante étale du théorème d'Hurewicz.

Proposition 4.16. *(cf. [Mil13], 11.3.) Soit X un schéma connexe qui admette un recouvrement qui vérifie la propriété $(*)$, A un anneau commutatif fini*[81]*, et $\bar{x}$ un point géométrique de X. Alors :*

$$\mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(X, \underline{A}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grptop}}(\pi_1^{\acute{e}t}(X, \bar{x}), A)$$

Afin de pouvoir travailler sur autre chose que des anneaux finis, il est souvent agréable de passer à la limite.

Définition 4.17. *Soit ℓ un nombre premier, et X un schéma admettant un recouvrement vérifiant $(*)$. On définit la cohomologie **étale ℓ-adique** :*

$$\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim_{n \geq 0} \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}\left(X, \underline{\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}}\right) \text{ et } \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_\ell) := \mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

*Attention, $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ n'est **pas** la cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}_\ell}$.*[82]

La cohomologie ℓ-adique permet par exemple de définir un analogue du module de Tate pour des courbes elliptiques sur des corps finis.

Theorème 4.18. *Soit X une courbe elliptique sur $\mathbb{F}_p$, et $\ell \neq p$. Alors $\mathrm{H}^1_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 2.*

Ce type de résultat est très utile pour démontrer les conjectures de Weil. Attention, il tombe en défaut si $\ell = p$.

Un des autres grands intérêts de la cohomologie ℓ-adique est qu'elle fournit de nombreux exemples de représentations Galoisiennes.[83] Cela en fait un objet clé en théorie de Hodge p-adique.

Proposition 4.19. *Soit X une variété sur $\mathbb{Q}$, et $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ son changement de base à une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Alors les $\mathbb{Z}_\ell$-modules $\mathrm{H}^i_{\acute{e}t}\left(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_\ell\right)$ sont munis d'une action naturelle et $\mathbb{Z}_\ell$–linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.*

Preuve. Le groupe de Galois absolu agit directement sur $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$, et descend à la cohomologie par fonctorialité. □

La situation est analogue si X est une variété sur $\mathbb{Q}_p$. Si $\ell \neq p$, les représentations sont relativement bien comprises, car il n'y a jamais de *ramification*. Si $\ell = p$, en revanche, la situation se complique ...

References

[Chu] Dexter Chua. The etale fundamental group.

[Con] Brian Conrad. Absolute galois groups and fundamental groups.

[Duc] Antoine Ducros. Introduction à la théorie des schémas.

[GR04] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. Revêtements étales et groupe fondamental (sga 1), 2004.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.

[Kli] Bruno Klinger. Etale cohomology and the weil conjectures.

[Lee12] John M. Lee. *Smooth Manifolds*. Springer New York, New York, NY, 2012.

[Mil80] J. S. Milne. *Etale Cohomology (PMS-33)*. Princeton University Press, 1980.

[Mil13] James S. Milne. Lectures on etale cohomology (v2.21), 2013. Available at www.jmilne.org/math/.

[81] C'est encore valable si A est seulement un groupe fini, mais nous n'avons pas défini la cohomologie étale dans ce cas (même si elle s'adapte naturellement)

[82] La cohomologie pro-étale a d'ailleurs été (en partie) inventée pour corriger ce défaut

[83] Il est d'ailleurs conjecturé que toute représentation galoisienne raisonnable provient de la cohomologie ℓ-adique d'une certaine variété

[nLa23] nLab authors. fiber functor. https://ncatlab.org/nlab/show/fiber+functor, May 2023. Revision 6.

[Oan16] Alexandru Oancea. Notes de cours de géométrie différentielle, 2016.

[Sel16] Yehonatan Sella. Comparison of sheaf cohomology and singular cohomology, 2016.

[Sta23] The Stacks project authors. The stacks project. https://stacks.math.columbia.edu, 2023.

[Voi02] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, volume 1 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2002.

[Wed16] Torsten Wedhorn. *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2016.