Le théorème du point fixe de Lawvere

Guillaume PIGNON–YWANNE

Article : Diagonal arguments and cartesian closed categories (1969)

Introduction

En mathématiques, on trouve souvent des arguments dits "diagonaux" :

Introduction

En mathématiques, on trouve souvent des arguments dits "diagonaux" :

- **Cantor**, 1891 : $\mathbb{R}$ est indénombrable

Introduction

En mathématiques, on trouve souvent des arguments dits "diagonaux" :

- **Cantor**, 1891 : $\mathbb{R}$ est indénombrable
- **Cantor**, 1891 : $E \ncong \mathcal{P}(E)$

Introduction

En mathématiques, on trouve souvent des arguments dits "diagonaux" :

- **Cantor**, 1891 : $\mathbb{R}$ est indénombrable
- **Cantor**, 1891 : $E \ncong \mathcal{P}(E)$
- **Russel**, 1901 : L'ensemble des ensembles n'est pas un ensemble
- **Gödel**, 1931 : Incomplétude de l'arithmétique
- **Turing**, 1936 : Le problème de l'arrêt est indécidable

Introduction

En mathématiques, on trouve souvent des arguments dits "diagonaux" :

- **Cantor**, 1891 : $\mathbb{R}$ est indénombrable
- **Cantor**, 1891 : $E \ncong \mathcal{P}(E)$
- **Russel**, 1901 : L'ensemble des ensembles n'est pas un ensemble
- **Gödel**, 1931 : Incomplétude de l'arithmétique
- **Turing**, 1936 : Le problème de l'arrêt est indécidable

Question :

Peut-on unifier ces résultats ?

Introduction

En mathématiques, on trouve souvent des arguments dits "diagonaux" :

- **Cantor**, 1891 : $\mathbb{R}$ est indénombrable
- **Cantor**, 1891 : $E \ncong \mathcal{P}(E)$
- **Russel**, 1901 : L'ensemble des ensembles n'est pas un ensemble
- **Gödel**, 1931 : Incomplétude de l'arithmétique
- **Turing**, 1936 : Le problème de l'arrêt est indécidable

Question :

Peut-on unifier ces résultats ?

Réponse :

Lawvere, 1969 : *Oui !*

Introduction

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Question :

- *Où se cache la diagonale ?*
- *Pourquoi est-ce un théorème de point fixe ?*
- *Qu'est-ce qu'un point-fixe dans une catégorie quelconque ?*

Table des matières

Un premier exemple :

Théorème :

$\mathbb{R}$ *est indénombrable*

Proof.

Un premier exemple :

Théorème :

$\mathbb{R}$ *est indénombrable*

Proof.

- On sait : $\mathbb{R} \cong [0,1] \cong \{0,1\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$

Un premier exemple :

Théorème :

$\mathbb{R}$ *est indénombrable*

Proof.

- On sait : $\mathbb{R} \cong [0,1] \cong \{0, 1 \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$
- Supposons (Absurde) qu'il existe $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \{0, 1 \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$ surjective.

Un premier exemple :

Théorème :

$\mathbb{R}$ *est indénombrable*

Proof.

- On sait : $\mathbb{R} \cong [0,1] \cong \{0,1\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$
- Supposons (Absurde) qu'il existe $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \{0,1\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ surjective.

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\ldots$
n=0	1	7	5	2	9	$\ldots$
n=1	6	9	2	2	8	$\ldots$
n=2	1	7	6	6	2	$\ldots$
n=3	9	9	3	7	9	$\ldots$
n=4	9	0	6	6	7	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Un premier exemple :

Proof.

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\dots$
n=0	1	7	5	2	9	$\dots$
n=1	6	9	2	2	8	$\dots$
n=2	1	7	6	6	2	$\dots$
n=3	9	9	3	7	9	$\dots$
n=4	9	0	6	6	7	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Idée : On conserve les termes diagonaux, et on les modifie !

Un premier exemple :

Proof.

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\dots$
n=0	1	7	5	2	9	$\dots$
n=1	6	9	2	2	8	$\dots$
n=2	1	7	6	6	2	$\dots$
n=3	9	9	3	7	9	$\dots$
n=4	9	0	6	6	7	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Idée : On conserve les termes diagonaux, et on les modifie !

On ajoute 1 mod 10 : $x = (1, 9, 6, 7, 7, \dots) \mapsto y = (2, 0, 7, 8, 8, \dots)$

Un premier exemple :

Proof.

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\dots$
n=0	1	7	5	2	9	$\dots$
n=1	6	9	2	2	8	$\dots$
n=2	1	7	6	6	2	$\dots$
n=3	9	9	3	7	9	$\dots$
n=4	9	0	6	6	7	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Idée : On conserve les termes diagonaux, et on les modifie !

On ajoute 1 mod 10 : $x = (1, 9, 6, 7, 7, \dots) \mapsto y = (2, 0, 7, 8, 8, \dots)$

Affirmation : $y \notin f(\mathbb{N})$

Un premier exemple :

Proof.

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\dots$
n=0	1	7	5	2	9	$\dots$
n=1	6	9	2	2	8	$\dots$
n=2	1	7	6	6	2	$\dots$
n=3	9	9	3	7	9	$\dots$
n=4	9	0	6	6	7	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Idée : On conserve les termes diagonaux, et on les modifie !

On ajoute 1 mod 10 : $x = (1, 9, 6, 7, 7, \dots) \mapsto y = (2, 0, 7, 8, 8, \dots)$

Affirmation : $y \notin f(\mathbb{N})$

En effet, si (Absurde) $y = f(n)$, alors $y_n = f(n)_n = x_n$.
Or, par définition, $y_n \equiv 1 + x_n \mod 10$. Absurde. $\square$

Remarques sur l'exemple

Faisons maintenant quelques remarques :

Remarque 1 :

On n'utilise aucune propriété de $\mathbb{R}$ *!*

Remarques sur l'exemple

Faisons maintenant quelques remarques :

Remarque 1 :

On n'utilise aucune propriété de $\mathbb{R}$ *!*
On l'a remplacé par $[\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$

On étudie en fait l'existence d'une surjection $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y^{\mathbb{N}}$

Remarques sur l'exemple

Faisons maintenant quelques remarques :

Remarque 1 :

On n'utilise aucune propriété de $\mathbb{R}$ *!*
On l'a remplacé par $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$

On étudie en fait l'existence d'une surjection $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y^{\mathbb{N}}$

Remarque 2 :

On a ici fait un "shift" modulo 10 : $y_n = \varphi(x_n)$ *où* $\varphi : [\![0,9]\!] \to [\![0,9]\!]$

Remarques sur l'exemple

Faisons maintenant quelques remarques :

Remarque 1 :

On n'utilise aucune propriété de $\mathbb{R}$ *!*
On l'a remplacé par $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$

On étudie en fait l'existence d'une surjection $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y^{\mathbb{N}}$

Remarque 2 :

On a ici fait un "shift" modulo 10 : $y_n = \varphi(x_n)$ *où* $\varphi : [\![0,9]\!] \to [\![0,9]\!]$
Quelle autre transformation aurait-on pu utiliser ?

Remarques sur l'exemple

Faisons maintenant quelques remarques :

Remarque 1 :

On n'utilise aucune propriété de $\mathbb{R}$ *!*
On l'a remplacé par $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$

On étudie en fait l'existence d'une surjection $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow Y^{\mathbb{N}}$

Remarque 2 :

On a ici fait un "shift" modulo 10 : $y_n = \varphi(x_n)$ *où* $\varphi : [\![0,9]\!] \to [\![0,9]\!]$
Quelle autre transformation aurait-on pu utiliser ?

Réponse :

N'importe quel $\varphi : [\![0,9]\!] \to [\![0,9]\!]$ *sans point fixe !*

Remarques sur l'exemple

On a en fait prouvé :

Théorème :

Soit Y un ensemble tel qu'il existe un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$.
Alors il n'existe pas de surjection $f : \mathbb{N} \to Y^{\mathbb{N}}$

Remarques sur l'exemple

On a en fait prouvé :

Théorème :

Soit Y un ensemble tel qu'il existe un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$.
Alors il n'existe pas de surjection $f : \mathbb{N} \to Y^{\mathbb{N}}$

Théorème :

Soit Y un ensemble tel qu'il existe une sujection $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y^{\mathbb{N}}$
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe

Remarques sur l'exemple

On a en fait prouvé :

Théorème :

Soit Y un ensemble tel qu'il existe un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$.
Alors il n'existe pas de surjection $f : \mathbb{N} \to Y^{\mathbb{N}}$

Théorème :

Soit Y un ensemble tel qu'il existe une sujection $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y^{\mathbb{N}}$
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe

Il reste à remplacer $\mathbb{N}$ par un ensemble quelconque !
On aura ainsi le théorème avec $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$

Remarques sur l'exemple

Revenons au tableau :

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\dots$
n=0	1	7	5	2	9	$\dots$
n=1	6	9	2	2	8	$\dots$
n=2	1	7	6	6	2	$\dots$
n=3	9	9	3	7	9	$\dots$
n=4	9	0	6	6	7	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Remarque 3 :

Ici, on a : $A_{n,k} = f(n)_k$ *où* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$

Remarques sur l'exemple

Revenons au tableau :

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$\dots$
n=0	1	7	5	2	9	$\dots$
n=1	6	9	2	2	8	$\dots$
n=2	1	7	6	6	2	$\dots$
n=3	9	9	3	7	9	$\dots$
n=4	9	0	6	6	7	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Remarque 3 :

Ici, on a : $A_{n,k} = f(n)_k$ *où* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$

Astuce : *On décurryfie* $f : \mathbb{N} \to \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ *en* $\hat{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, \dots, 9\}$

Alors $A_{n,k} = \hat{f}(n, k)$

Remarques sur l'exemple

Revenons au tableau :

n \ f(n)	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	...
n=0	1	7	5	2	9	...
n=1	6	9	2	2	8	...
n=2	1	7	6	6	2	...
n=3	9	9	3	7	9	...
n=4	9	0	6	6	7	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Remarque 3 :

Ici, on a : $A_{n,k} = f(n)_k$ *où* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$

Astuce : *On décurryfie* $f : \mathbb{N} \to \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ *en* $\hat{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, \dots, 9\}$

Alors $A_{n,k} = \hat{f}(n, k)$

La diagonale est : $d(n) := f(n, n)$, *i.e;* $d = f \circ \Delta$ *!*

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Proof.

Soit f une telle surjection. On sort du chapeau : $\mathcal{A} = \{x, x \notin f(x)\}$
Comme f est surjective, on écrit $\mathcal{A} = f(y)$

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Proof.

Soit f une telle surjection. On sort du chapeau : $\mathcal{A} = \{x, x \notin f(x)\}$
Comme f est surjective, on écrit $\mathcal{A} = f(y)$ On constate :

$$y \in \mathcal{A} \iff y \notin f(y) \iff y \notin \mathcal{A}$$

$\square$

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Proof.

On suppose $f : E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E)$ surjective

1. Écrire $\mathcal{P}(E) = \{0,1\}^E$, donc $f : E \to \{0,1\}^E$
2. On prend une application sans point fixe - *not* : $\{0,1\} \to \{0,1\}$

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Proof.

On suppose $f : E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E)$ surjective

1. Écrire $\mathcal{P}(E) = \{0,1\}^E$, donc $f : E \to \{0,1\}^E$
2. On prend une application sans point fixe - *not* : $\{0,1\} \to \{0,1\}$
3. On décurryfie : $\hat{f} : E \times E \to \{0,1\}$

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Proof.

On suppose $f : E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E)$ surjective

1. Écrire $\mathcal{P}(E) = \{0,1\}^E$, donc $f : E \rightarrow \{0,1\}^E$
2. On prend une application sans point fixe - $not : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$
3. On décurryfie : $\hat{f} : E \times E \rightarrow \{0,1\}$
4. On pose $\Delta : E \rightarrow E \times E$ la diagonale, et on regarde :

$$d_{\neg} = not \circ \hat{f} \circ \Delta : x \in E \mapsto not(f(x)(x)) \in \{0,1\}$$

Théorème de Cantor

Le théorème pour E quelconque est en fait une conséquence triviale du théorème de Cantor :

Théorème :

Il n'existe pas de surjection $E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E) = 2^E$

Proof.

On suppose $f : E \twoheadrightarrow \mathcal{P}(E)$ surjective

1. Écrire $\mathcal{P}(E) = \{0,1\}^E$, donc $f : E \to \{0,1\}^E$
2. On prend une application sans point fixe - $not : \{0,1\} \to \{0,1\}$
3. On décurryfie : $\hat{f} : E \times E \to \{0,1\}$
4. On pose $\Delta : E \to E \times E$ la diagonale, et on regarde :

$$d_\neg = not \circ \hat{f} \circ \Delta : x \in E \mapsto not(f(x)(x)) \in \{0,1\}$$

Claim : $d_\neg \notin im(f)$

Théorème de Cantor

Proof.

$$f : E \to \{0,1\}^E \text{ et } d_\neg = not \circ \hat{f} \circ \Delta : E \to \{0,1\}$$

Claim : $d_\neg \notin im(f)$

On suppose (Absurde) $d_\neg = f(x)$, pour $x \in E$

Proof.

$$f : E \to \{0,1\}^E \text{ et } d_\neg = not \circ \hat{f} \circ \Delta : E \to \{0,1\}$$

Claim : $d_\neg \notin im(f)$

On suppose (Absurde) $d_\neg = f(x)$, pour $x \in E$

- $d_\neg(x) = f(x)(x)$

Théorème de Cantor

Proof.

$$f : E \to \{0,1\}^E \text{ et } d_\neg = not \circ \hat{f} \circ \Delta : E \to \{0,1\}$$

Claim : $d_\neg \notin im(f)$

On suppose (Absurde) $d_\neg = f(x)$, pour $x \in E$

- $d_\neg(x) = f(x)(x)$
- $d_\neg(x) = not\left(\hat{f}\,(\Delta(x))\right) = not\left(\hat{f}(x,x)\right) = not\,(f(x)(x))$

Or, *not* est sans point fixe. Absurde $\square$

Théorème de Cantor

Proof.

$$f : E \to \{0,1\}^E \text{ et } d_\neg = not \circ \hat{f} \circ \Delta : E \to \{0,1\}$$

Claim : $d_\neg \notin im(f)$

On suppose (Absurde) $d_\neg = f(x)$, pour $x \in E$

- $d_\neg(x) = f(x)(x)$
- $d_\neg(x) = not\left(\hat{f}\,(\Delta(x))\right) = not\left(\hat{f}(x,x)\right) = not\,(f(x)(x))$

Or, *not* est sans point fixe. Absurde $\square$

Remarque :

En fait, $d_\neg = x \mapsto \mathbb{1}_{x \notin f(x)}$ *!*

Le théorème de Lawvere

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Avant d'établir le théorème, il faut définir :

1. Ce qu'est un morphisme surjectif
2. Ce qu'est un point fixe

Le théorème de Lawvere

Définition

Soit $A \in ob(\mathcal{C})$ *un objet d'une catégorie cartésienne* $\mathcal{C}$*.*

- *Un* point *de* A *est un morphisme* $x : 1 \to A$

Le théorème de Lawvere

Définition

Soit $A \in ob(\mathcal{C})$ un objet d'une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$.

- *Un* point *de A est un morphisme $x : 1 \to A$*
- *Un morphisme $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ est* surjectif par points *si :*

$$"\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)"$$

$$\forall y : 1 \to B, \exists x : 1 \to A \; tq \; y = f \circ x$$

Le théorème de Lawvere

Définition

Soit $A \in ob(\mathcal{C})$ *un objet d'une catégorie cartésienne* $\mathcal{C}$.

- *Un* point *de A est un morphisme* $x : 1 \to A$
- *Un morphisme* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *est* surjectif par points *si :*

$$\forall y : 1 \to B, \exists x : 1 \to A \text{ } tq \text{ } y = f \circ x$$

- *Un* point *x de A est* point fixe *d'un morphisme* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ *si :*

$$f \circ x = x$$

La preuve de Lawvere

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme par points surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Proof.

On suppose (Absurde) qu'il existe une surjection f : $A \twoheadrightarrow Y^A$ et un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme par points surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Proof.

On suppose (Absurde) qu'il existe une surjection f : $A \twoheadrightarrow Y^A$ et un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$

Rappel :

Par définition d'une catégorie cartésienne fermée :

$$\forall X, Y, Z \in ob(\mathcal{C}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Z) \approxeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, Z^Y\right)$$

La preuve de Lawvere

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme par points surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Proof.

On suppose (Absurde) qu'il existe une surjection f : $A \twoheadrightarrow Y^A$ et un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$

Rappel :

Par définition d'une catégorie cartésienne fermée :

$$\forall X, Y, Z \in ob(\mathcal{C}), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Z) \approxeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, Z^Y\right)$$

On pose $\hat{f} : A \times A \to Y$ la version décurryfiée de f.

La preuve de Lawvere

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme par points surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Proof.

On suppose (Absurde) qu'il existe une surjection f : $A \twoheadrightarrow Y^A$ et un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$

On pose $\hat{f} : A \times A \to Y$ la version décurryfiée de f.
On pose $\Delta_A : A \to A \times A$ la diagonale. et

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

La preuve de Lawvere

Théorème du point fixe de Lawvere (1969) :

Dans une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{C}$, s'il existe des objets (A, Y) et un morphisme par points surjectif $f : A \twoheadrightarrow (A \Rightarrow Y)$.
Alors tout morphisme $\varphi : Y \longrightarrow Y$ possède un point fixe.

Proof.

On suppose (Absurde) qu'il existe une surjection f : $A \twoheadrightarrow Y^A$ et un morphisme sans point fixe $\varphi : Y \to Y$

On pose $\hat{f} : A \times A \to Y$ la version décurryfiée de f.
On pose $\Delta_A : A \to A \times A$ la diagonale. et

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

Claim : "$d_\neg \notin im(f)$"

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

Problème : $im(f) \subset Y^A$ alors que $d_\neg \in Hom_\mathcal{C}(A, Y)$

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

Problème : $im(f) \subset Y^A$ alors que $d_\neg \in Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$

Lemme

Dans une catégorie cartésienne, $1 \times A \overset{iso}{\simeq} A$ *(cf. TD1)*

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

Problème : $im(f) \subset Y^A$ alors que $d_\neg \in Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$

Lemme

Dans une catégorie cartésienne, $1 \times A \overset{iso}{\simeq} A$ *(cf. TD1)*

Donc $Hom_{\mathcal{C}}(A, Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(1 \times A, Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(1, Y^A)$

On pose $\tilde{d}_\neg \in Hom_{\mathcal{C}}(1, Y^A)$ l'application associée à $d_\neg$

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

Problème : $im(f) \subset Y^A$ alors que $d_\neg \in Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$

Lemme

Dans une catégorie cartésienne, $1 \times A \overset{iso}{\simeq} A$ *(cf. TD1)*

Donc $Hom_{\mathcal{C}}(A, Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(1 \times A, Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(1, Y^A)$

On pose $\tilde{d_\neg} \in Hom_{\mathcal{C}}(1, Y^A)$ l'application associée à $d_\neg$

Claim : "$\tilde{d_\neg} \notin im(f)$"

Hypothèse : $f : A \longrightarrow Y^A$ est surjective par point
$\tilde{d_\neg}$ est un point de Y^A

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

$$d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$$

Problème : $im(f) \subset Y^A$ alors que $d_\neg \in Hom_\mathcal{C}(A, Y)$

Lemme

Dans une catégorie cartésienne, $1 \times A \overset{iso}{\simeq} A$ *(cf. TD1)*

Donc $Hom_\mathcal{C}(A, Y) \simeq Hom_\mathcal{C}(1 \times A, Y) \simeq Hom_\mathcal{C}(1, Y^A)$

On pose $\tilde{d_\neg} \in Hom_\mathcal{C}(1, Y^A)$ l'application associée à $d_\neg$

Claim : "$\tilde{d_\neg} \notin im(f)$"

Hypothèse : $f : A \longrightarrow Y^A$ est surjective par point
$\tilde{d_\neg}$ est un point de $Y^A \implies$ On écrit $\tilde{d_\neg} = f \circ a$ pour $a : 1 \longrightarrow A$

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

1. $\varphi : A \longrightarrow A$ sans point fixe, f surjective par point
2. $d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$ et $\tilde{d}_\neg : 1 \longrightarrow Y^A$ associé
3. $a : 1 \longrightarrow A$ tq $\tilde{d}_\neg = f \circ a$

On veut calculer $d_\neg \circ a : 1 \longrightarrow Y$

Fait : $d_\neg = \widehat{\tilde{d}_\neg} = \widehat{f \circ a}$

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

1. $\varphi : A \longrightarrow A$ sans point fixe, f surjective par point
2. $d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$ et $\tilde{d}_\neg : 1 \longrightarrow Y^A$ associé
3. $a : 1 \longrightarrow A$ tq $\tilde{d}_\neg = f \circ a$

On veut calculer $d_\neg \circ a : 1 \longrightarrow Y$

Fait : $d_\neg = \widehat{\tilde{d}_\neg} = \widehat{f \circ a}$

On a : $d_\neg \circ a = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A \circ a = \varphi \circ \hat{f} \circ (a, a) = \varphi \circ \widehat{f \circ a} \circ a = \varphi \circ d_\neg \circ a$

La preuve de Lawvere

Proof.

On a posé :

1. $\varphi : A \longrightarrow A$ sans point fixe, f surjective par point
2. $d_\neg = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A : A \to Y$ et $\tilde{d_\neg} : 1 \longrightarrow Y^A$ associé
3. $a : 1 \longrightarrow A$ tq $\tilde{d_\neg} = f \circ a$

On veut calculer $d_\neg \circ a : 1 \longrightarrow Y$

Fait : $d_\neg = \widehat{\tilde{d_\neg}} = \widehat{f \circ a}$

On a : $d_\neg \circ a = \varphi \circ \hat{f} \circ \Delta_A \circ a = \varphi \circ \hat{f} \circ (a, a) = \varphi \circ \widehat{f \circ a} \circ a = \varphi \circ d_\neg \circ a$

Donc $d_\neg \circ a$ est point fixe de φ ! Absurde ! □

Applications

Paradoxe de Russel (1901) :

L'ensemble des ensembles n'est pas un ensemble

Proof.

Paradoxe de Russel (1901) :

L'ensemble des ensembles n'est pas un ensemble

Proof.

On travaille dans Set.
On suppose $\mathcal{U}$ ensemble de tous les ensembles.
On pose $\varepsilon : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow 2$

$$\varepsilon : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{U} \times \mathcal{U} & \longrightarrow & 2 \\ x, y & \longmapsto & 1_{x \in y} \end{array} \right.$$

Axiome de compréhension : $\hat{\varepsilon} : \mathcal{U} \longrightarrow 2^{\mathcal{U}}$ est surjective par points

Donc tout morphisme $2 \longrightarrow 2$ possède un point fixe : Absurde

$\square$

Incomplétude de Gödel

Incomplétude de Gödel (1931) :

Une théorie cohérente complète du premier ordre encodant l'arithmétique de Peano ne possède pas de "prédicat de prouvabilité" définissable

Proof.

On fixe $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et $\mathcal{T}$ une $\mathcal{L}$-théorie
On lui associe la "Catégorie de Lindenbaum-Tarski" :

1. $ob(\mathcal{C}) = \{A^n \times 2^m | n, m \in \mathbb{N}\}$
2. $Hom(A^n, 2)$ contient les $\mathcal{L}$-formules à n variables - à équivalence près
3. $Hom(1, 2)$ contient les $\mathcal{L}$-énoncés - à équivalence près
4. $Hom(1, A)$ contient les constantes de $\mathcal{L}$

Une théorie est **cohérente** si il existe vrai, faux : $1 \longrightarrow 2$ dans $\mathcal{C}$
Une théorie est **complète** si $Hom(1, 2) = \{vrai, faux\}$

Incomplétude de Gödel

Proof.

On suppose l'existence d'un prédicat de satisfabilité $sat : A \times A \longrightarrow 2$, i.e.

$$\vdash sat(a, \ulcorner \varphi \urcorner) \iff \varphi(a)$$

où $\ulcorner . \urcorner : Hom(A, 2) \longrightarrow Hom(1, A)$ désigne un encodage de Gödel
On réécrit ça : $\forall \varphi, \exists n, \forall a, \vdash sat(a, n) = \varphi(a)$

Incomplétude de Gödel

Proof.

On suppose l'existence d'un prédicat de satisfabilité $sat : A \times A \longrightarrow 2$, i.e.

$$\vdash sat(a, \ulcorner \varphi \urcorner) \iff \varphi(a)$$

où $\ulcorner . \urcorner : Hom(A, 2) \longrightarrow Hom(1, A)$ désigne un encodage de Gödel
On réécrit ça : $\forall \varphi, \exists n, \forall a, \vdash sat(a, n) = \varphi(a)$

Sat est donc surjectif par points !

Donc tout morphisme $2 \longrightarrow 2$ a un point fixe : "faux" n'existe pas !
On travaille un peu pour ramener la prouvabilité à la satisfiabilité □

Conclusion

Nous disposons donc d'un résultat englobant "l'argument diagonal" !

Il ne trivialise pas les théorèmes qui en résultent, mais il donne un bon cadre pour les étudier, et encapsule une bonne partie "technique".

Conclusion

Nous disposons donc d'un résultat englobant "l'argument diagonal" !

Il ne trivialise pas les théorèmes qui en résultent, mais il donne un bon cadre pour les étudier, et encapsule une bonne partie "technique".

Des recherches sont en cours pour savoir s'il encapsule des autres théorèmes de point fixe (comme celui de Brouwer)