

Le 16^{ème} problème de Hilbert et la congruence de Gudkov-Rokhlin

Guillaume PIGNON–YWANNE

0 Introduction

Ce document constitue le rapport d'un stage effectué dans le cadre du M1 de Mathématiques de l'ENS Ulm. Ce stage s'est déroulé de mi-avril à mi-juillet 2021 sous la direction de Jean-Yves Welschinger, à l'Institut Camille Jordan (université Lyon 1). Son objectif était de comprendre la congruence de (Gudkov)-Rokhlin, en géométrie algébrique réelle.

Lors du deuxième congrès international des mathématiciens en 1900, David Hilbert présente à la communauté mathématique une liste de problèmes ouverts, dont il préconise l'étude lors du siècle suivant. Son 16^{ème} problème est l'un des rares qui, malgré de nombreuses avancées, demeure encore ouvert à ce jour.

Sa première partie concerne l'étude de la disposition relative des branches des courbes algébriques réelles projectives planes non-singulières, maximales en un certain sens. Si diverses contraintes topologiques ont été découvertes, il est très difficile de savoir dans quelles mesures elles sont suffisantes.

Les résultats majeurs ont été obtenus par l'école russe durant le milieu du 20^{ème} siècle (principalement par Petrov (1933), Arnold (1971), puis Rokhlin (1972)). Si le problème est de nature algébrique, il est apparu qu'une piste particulièrement fructueuse relevait de la topologie des variétés, et plus précisément de certaines variétés de dimension 4, apparaissant en considérant des revêtements ramifiés de $\mathbb{C}P^2$.

L'un des résultats les plus importants connus à ce jour a été conjecturé par Gudkov, puis démontré par Rokhlin, en 1972. Sa démonstration est particulièrement riche, car elle utilise des outils provenant de nombreux domaines mathématiques distincts.

Ce document est structuré en deux parties. La première consiste en une introduction détaillée au 16^{ème} problème de Hilbert, pensée pour un lecteur non initié. La seconde est bien plus technique, et consiste en une ébauche de la démonstration de la congruence de Gudkov-Rokhlin.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Introduction au 16ème problème de Hilbert	3
1.1	Présentation du problème	3
1.1.a	Présentation générale	3
1.1.b	Lieu des zéros projectifs	4
1.1.c	Inégalité de Harnack et courbes maximales	5
1.1.d	Ovales, non ovales et déformations	6
1.1.e	Deux formulations du 16 ^{ème} problème de Hilbert	7
1.2	Les théorèmes importants	8
1.2.a	Des contraintes	8
1.2.b	Existence de M-courbes	9
1.3	Résolution complète en degré ≤ 6	9
2	Esquisse de preuve de la congruence de Gudkov-Rokhlin	10
2.1	Bric à brac de notions classiques	10
2.2	Signature d'une variété	12
2.2.a	Définition et premières propriétés	12
2.2.b	Signature et nombre d'intersection	13
2.3	Signature d'une involution	14
2.3.a	Définition et premières propriétés	14
2.3.b	Signature et nombre d'intersection	15
2.4	Un théorème topologique de Rokhlin	16
2.4.a	Enoncé du théorème	16
2.4.b	Auto-intersection et caractéristique d'Euler	17
2.4.c	Signature de certaines formes bilinéaires symétriques	18
2.4.d	Démonstration du théorème de Rokhlin	20
2.5	La démonstration de la congruence de Gudkov-Rokhlin	21
3	Bibliographie	23

1 Introduction au 16ème problème de Hilbert

L'objectif de cette section est d'introduire le 16^{ème} problème de Hilbert à un lecteur non initié.

On énoncera précisément le problème, avant d'énoncer divers résultats classiques. On terminera par une résolution complète, issue de ces résultats, en petit degré.

Cette section est principalement inspirée des *survey* historiques [18], [20] ainsi que du livre [26].

1.1 Présentation du problème

1.1.a Présentation générale

Commençons par rappeler quelques notions algébriques.

Définition 1.1.1. (*Polynôme, lieu des zéros affines, homogénéité, point singulier*)

Un **monôme** ayant pour variables X_0, \dots, X_n est un terme de la forme $X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ pour $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. L'entier $\alpha_0 + \dots + \alpha_n$ est nommé **degré** du monôme.

Un polynôme X à plusieurs variables X_0, \dots, X_n à coefficients dans un corps K est une combinaison linéaire à support fini et à coefficients dans $K \setminus \{0\}$ de monômes distincts. On notera $K[X_1, \dots, X_n]$ l'ensemble des polynômes ayant pour variables X_1, \dots, X_n , muni d'une structure de K -algèbre.

Le **lieu des zéros affines** de $X \in K[X_1, \dots, X_n]$ est : $X_K = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n, P(x_1, \dots, x_n) = 0\}$.

Le **degré** de X , noté $\deg(X)$ est le maximum des degrés de ses monômes.

Un point $[x_0 : \dots : x_n] \in K^n$ est dit **point singulier** de X si

$$X(x_0, x_1, x_2) = \frac{\partial X}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2) = \frac{\partial X}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) = \frac{\partial X}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Un polynôme n'ayant aucun point singulier sera dit **non singulier**.

Les lieux des zéros des polynômes définissent une classe naturelle de sous-ensembles de K^n . La géométrie algébrique est, dans une certaine mesure, la discipline mathématique consistant à étudier la géométrie de telles courbes. Nous nous restreignons ici au cas de la géométrie algébrique *réelle*, qui consiste à considérer simplement le cas où $K = \mathbb{R}$, muni de la topologie usuelle. Une question naturelle est alors de *classifier*, en un sens à définir, les lieux réels de tels polynômes.

On sait classifier depuis bien longtemps les courbes obtenues en petit degré (dans le plan, on trouve les droites, coniques, cubiques, quartiques, ...). Quand on raisonne en degré non borné, la topologie des courbes algébriques devient bien plus complexe. Elle est en fait *arbitrairement complexe*, au sens suivant :

Théorème 1.1.2. (*Nash-Tognoli*) *Toute variété différentielle compacte sans bords est difféomorphe à l'intersection des lieux réels projectifs d'une famille finie de polynômes réels*¹.

La question posée par Hilbert demande de classifier la topologie de certaines courbes de degré d fixé, à déformation près. Comme nous allons le voir, le problème est déjà très difficile lorsqu'on étudie les courbes non singulières dans le plan.

David Hilbert considère alors deux simplifications :

1. Considérer plutôt les zéros de polynômes homogènes dans le plan projectif.
2. Ne considérer que les courbes *maximales* de degré pair.

La suite de ce paragraphe consiste essentiellement à expliquer et justifier ces simplifications.

1. La notion de lieu projectif sera définie en 1.1.5

1.1.b Lieu des zéros projectifs

Comme souvent en géométrie algébrique, il s'avère ici plus agréable de travailler dans des espaces projectifs, comme définis ci-dessous :

Définition 1.1.3. (*Espace projectif, coordonnées homogènes*)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et K un corps (supposé commutatif). Le **n -ième espace projectif** associé à K , noté $P^n K$, est défini comme l'ensemble des droites de K^n . C'est le quotient de $K^{n+1} \setminus \{0\}$, par l'action de K^* via multiplication sur chaque terme. Si K est un corps topologique, on munit $P^n K$ de la topologie quotient.

Soit $x \in P^n K$, correspondant à la classe d'un point quelconque $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$. On notera $x = [x_0 : \dots : x_n]$, et une telle écriture sera nommée **coordonnées homogènes** de x .

L'injection $(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mapsto [1 : x_1 : \dots : x_n] \in P^n K$ permet de voir $P^n K$ comme un complété de K^n par des points à l'infini.

Il n'est a priori pas clair que la notion de lieu des zéros d'un polynôme dans un espace projectif ait un sens. C'est en fait possible dès que le polynôme est homogène, au sens suivant :

Définition 1.1.4. (*Polynôme homogène*)

Si tous les monômes constituant un polynôme X sont de même degré, le polynôme X sera dit **homogène**. On notera $K^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ l'ensemble des polynômes homogènes ayant pour variables X_0, \dots, X_n .

Proposition–Définition 1.1.5. (*Lieu des zéros projectifs*)

Soit $X \in K^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$.

On peut définir son **lieu des zéros projectifs** par : $X_{KP^n} = \{[x_0 : \dots : x_n], P(x_0, \dots, x_n) = 0\}$.

Démonstration. Il faut vérifier que cela ne dépend pas des coordonnées homogènes choisies.

Si on a deux choix $[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n]$, on dispose de $\lambda \in K$ tel que pour tout i , $x_i = \lambda y_i$.

Par homogénéité, $P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{\deg(P)} P(x_0, \dots, x_n)$, et $P(y_0, \dots, y_n) = 0 \iff P(x_0, \dots, x_n) = 0$ \square

Afin de remplacer l'étude des lieux de zéros algébriques par celle de lieux de zéros projectifs, il nous faut savoir associer des polynômes homogènes aux polynômes affines, en rajoutant une variable. On le fait de la manière suivante :

Proposition 1.1.6. *On dispose de deux applications essentiellement inverses l'une de l'autre :*

- **L'homogénéisation** : $X \in K[X_1, \dots, X_n] \mapsto X^* = X_0^{\deg(X)} X(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0) \in K^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$
- **La deshomogénéisation** : $X \in K^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n] \mapsto X_* = X(1, X_1, \dots, X_n) \in K[X_1, \dots, X_n]$

Si on connaît la géométrie du lieu des zéros d'un polynôme homogène dans $P^n K$, on peut en déduire les zéros du polynôme deshomogénéisé dans K^n en regardant l'intersection avec la première carte affine standard : $U_0 = \{[1 : x_1 : \dots : x_n] \in P^n K, x_0 \neq 0\}$.

Le premier avantage à considérer les espaces projectifs est topologique :

Proposition 1.1.7. *Si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les espaces projectifs $P^n K$ sont compacts.*

Démonstration. On peut les réaliser comme quotient de la sphère unité, compacte, par l'action libre par antipodie du groupe fini $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

Ainsi, tous les lieux de zéros projectifs seront des espaces compacts.

Le second avantage est algébrique : les espaces projectifs se comportent *mieux* quant à l'intersection de courbes. On évite ainsi les problèmes de *parallélisme* qui existent dans les espaces affines.

Théorème 1.1.8. *Deux droites non confondues dans $\mathbb{R}P^2$ ou $\mathbb{C}P^2$ s'intersectent en un unique point.*

Démonstration. On se donne deux droites : $D_1 : X_0 + aX_1 + bX_2 = 0$, et $D_2 : X_0 + cX_1 + dX_2 = 0$.

Si $ad - bc \neq 0$, on trouve un espace de dimension 1 de solution pour $X_0 = 1$, qui correspondent à un point de \mathbb{R}^2 . Si $ad - bc = 0$, on trouve une droite solution avec $X_0 = 0$, et elle est non nulle dès que $(a, b) \neq (c, d)$. \square

La situation est en fait bien plus générale :

Théorème 1.1.9. (Bézout) Soit K un corps algébriquement clos. Deux courbes projectives C_1, C_2 définies par des polynômes de degré respectifs d_1, d_2 s'intersectent en exactement $d_1 \cdot d_2$ points.

Remarque. La notion de multiplicité d'intersection de deux courbes quelconques, a priori non transverses, n'est pas évidente. Pour $K = \mathbb{C}$, on peut utiliser une idée géométrique, issue de la théorie de l'intersection, qui sera développée dans le cas réel en 2.2.10. Pour un corps quelconque, il faut utiliser des outils purement algébriques. On se référera à [14].

1.1.c Inégalité de Harnack et courbes maximales

On se concentre maintenant sur le cas considéré par Hilbert, qui consiste à étudier les courbes² $X_{\mathbb{R}P^2} \subset \mathbb{R}P^2$ pour $X \in \mathbb{R}^{hom}[X_0, X_1, X_2]$. Pour simplifier les notations, on notera aussi ces courbes $X_{\mathbb{R}}$.

L'espace $\mathbb{R}P^2$ s'appelle **plan projectif réel**. C'est une variété différentielle compacte, sans bord, non orientable et de dimension 2. Sa caractéristique d'Euler est 1.

Proposition 1.1.10. Soit $X \in \mathbb{R}^{hom}[X_0, X_1, X_2]$ non singulier.

Alors son lieu des zéros projectifs $X_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^2$ est difféomorphe à une union disjointe de cercles.

Démonstration. On sait par des résultats de classification (cf appendix de [10]) que toute variété différentielle compacte sans bords de dimension 1 est difféomorphe à une union disjointe de cercles.

La lissité de $X_{\mathbb{R}}$ ainsi que le calcul de sa dimension s'obtiennent en utilisant le théorème des fonctions implicites (et l'hypothèse de non singularité). \square

Exemple 1.1.11. Les coniques (courbes planes définies par des polynômes de degré 2) dans \mathbb{R}^2 sont des ellipses, paraboles ou hyperboles. Une fois plongées dans le plan projectif, elles sont difféomorphes à un cercle.

En degré 1, on a donc au plus une composante connexe. En degré fixé, on sait en fait quantifier exactement le nombre maximal de composantes connexes :

Théorème 1.1.12. (Harnack, 1876) Une courbe $X_{\mathbb{R}}$ de degré d contient au plus $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ composantes connexes.

Ce résultat fut originellement prouvé dans [1] à l'aide d'outils algébriques (principalement par le théorème de Bézout). On donne ici les éléments d'une preuve géométrique, due à Hurwitz [2] et Klein [3] (vers 1892), car elle est assez représentative des idées développées par la suite : *La topologie éclaire l'algèbre*.

Démonstration. Comme très souvent en géométrie algébrique réelle, il est utile de sortir de \mathbb{R} et de regarder le lieu complexe $X_{\mathbb{C}} = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{C}P^2, X(x_0, x_1, x_2) = 0\}$

Comme X est non singulier, $X_{\mathbb{C}}$ est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann³ compacte connexe. Par la formule de Plücker, son genre est $g = (d-1)(d-2)/2$.

Puisque X est à coefficients réels, la conjugaison complexe $\theta : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ stabilise $X_{\mathbb{C}}$. Elle induit une conjugaison antiholomorphe (i.e. localement conjuguée à la conjugaison complexe sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$).

On conclut à l'aide du lemme suivant :

Lemme 1.1.13. Soit Σ une surface de Riemann de genre g et $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ involution antiholomorphe, $F = \text{Fix}(T)$, et s le nombre de composantes connexes de F . Alors $s \leq g + 1$

Il s'obtient à l'aide de constructions géométriques sur Σ/T . \square

L'inégalité de Harnack justifie la définition suivante :

2. La terminologie relative au 16^{ème} problème de Hilbert veut qu'on appelle "courbe" le lieu réel $X_{\mathbb{R}}$, conformément à l'intuition. La géométrie algébrique plus moderne préfère souvent utiliser le terme "courbe" pour désigner le polynôme la définissant.

3. C'est une variété différentielle de dimension réelle 2, munie d'une structure holomorphe.

Définition 1.1.14. (*M-courbe*)

Une courbe $X_{\mathbb{R}}$ de degré d ayant $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ composantes connexes sera appelée une **M-courbe**⁴.

Remarque. On verra plus tard une généralisation de cette inégalité via l'inégalité de Smith-Thom, (cf. 2.4.4).

La topologie des M-courbes à homéomorphismes est claire : C'est une union disjointe de $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ cercles. Le 16ème problème de Hilbert pose la question de l'étude de la **position relative** de ces cercles dans $\mathbb{R}P^2$.

1.1.d Ovales, non ovales et déformations

Tout d'abord, la notion de "cercles" dans $\mathbb{R}P^2$ est moins intuitive que la notion usuelle dans \mathbb{R}^2 . Nous verrons que les difficultés disparaissent cependant en considérant les M-courbes de degré pair.

Proposition–Définition 1.1.15. (*Ovale, intérieur, non ovale*)

Pour $A \subset \mathbb{R}P^2$ homéomorphe à un cercle, $\mathbb{R}P^2 \setminus A$ possède au plus 2 composantes connexes.

- Si $\mathbb{R}P^2 \setminus A$ possède deux composantes connexes, on dit que A est **ovale**. Ces deux composantes, nommées **intérieur** et **extérieur**, sont homéomorphes respectivement à un disque et à un ruban de Möbius.
- Si $\mathbb{R}P^2 \setminus A$ est connexe, on dit que A est **non ovale**. Dans ce cas, $\mathbb{R}P^2 \setminus A$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2

De plus, si $\gamma : S^1 \rightarrow A$ est un homéomorphisme, le caractère ovale ou non ovale de A se lit sur la classe du lacet $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On rappelle que, par le théorème de Jordan, les "cercles" de \mathbb{R}^2 séparent le plan en deux composantes connexes : l'une est homéomorphe à un disque et l'autre à un plan privé d'un point. Comme $\mathbb{R}P^2$ privé d'un point est homéomorphe à un ruban de Möbius, la notion d'ovale ressemble aux cercles dans le plan.

Cependant, il existe des espaces non ovaux, comme par exemple la droite à l'infini $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$.

Comme annoncé, l'étude des M-courbes contraint grandement le type des composantes :

Proposition 1.1.16. Soit $X \in \mathbb{R}^{hom}[X_0, X_1, X_2]$ non singulier de degré d pair.

Alors toutes les composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$ sont des ovaux.

Démonstration. Si d est pair, on définit à bon droit⁵ :

$$D^+ = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2, X(x_0, x_1, x_2) > 0\} \text{ et } D^- = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2, X(x_0, x_1, x_2) < 0\}$$

Par continuité de X , tout chemin joignant D^+ et D^- rencontre $X_{\mathbb{R}}$. Deux points $x \in D^+$ et $y \in D^-$ appartiennent donc à deux composantes connexes différentes.

Une conséquence de la non-singularité de X est le lemme suivant :

Lemme 1.1.17. Soit A une composante connexe de $X_{\mathbb{R}}$. Alors, localement, A sépare D^+ et D^- .

Chaque composante connexe $A \subset X_{\mathbb{R}}$ sépare deux composantes connexes de $\mathbb{R}P^2 \setminus A$, et est donc ovale. \square

Remarque. Si le degré est impair, toutes les composantes de $X_{\mathbb{R}}$ sont des ovaux, sauf une. La situation est bien plus complexe à classifier.

Nous allons maintenant introduire une définition adéquate de la notion de déformation.

Définition 1.1.18. (*Paire topologique, type topologique d'une paire*)

Une **paire topologique** est un couple (E, F) où E est un espace topologique et $F \subset E$.

4. M est à lire au sens de **maximal**.

5. C'est possible car l'action de \mathbb{R}^* sur $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ stabilise $A^{\pm} = \{x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, X(x_0, x_1, x_2) \gtrless 0\}$

Si (E, F) et (E, G) sont deux paires topologiques, un **homéomorphisme plongé**⁶ entre F et G est un homéomorphisme $h : E \rightarrow E$ tel que $h(F) = G$.

Si \mathcal{T} est une collection de sous parties d'un espace topologique fixé E , un **type topologique de (E, \mathcal{T})** est un élément de \mathcal{T} / \sim où $F \sim G$ s'il existe h un homéomorphisme plongé entre F et G .

Nous sommes maintenant en mesure de formuler le 16^{ème} problème de Hilbert :

1.1.e Deux formulations du 16^{ème} problème de Hilbert

Problème. Décrire le type topologique des paires $(\mathbb{R}P^2, X_{\mathbb{R}})$ pour $X_{\mathbb{R}}$ une M -courbe de degré d .

Comme nous allons le voir, lorsqu'on étudie les M -courbes en degré pair, cette question topologique devient un problème essentiellement combinatoire.

Voici un exemple typique de situation :

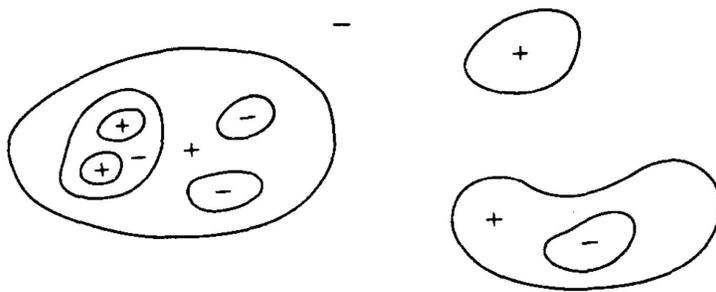


FIGURE 1 – Une courbe plane en degré pair dont toutes les branches sont des ovales

La figure incite à considérer la *position relative* des branches, c'est-à-dire à compter les inclusions d'ovales. On représente ainsi toute configuration d'ovale par un ordre partiel :

Définition 1.1.19. (*Ordre partiel, empilement*)

Soient A, B deux composantes ovales d'une courbe $X_{\mathbb{R}}$. Comme B est ovale, on peut définir son intérieur : $B_{int} \subset \mathbb{R}P^2$, homéomorphe à un disque.

On dit que A est **contenu** dans B si $A \subset B_{int}$, et on note $A \leq B$

On note \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$. La relation \leq définit un ordre partiel sur \mathcal{C} .

De plus, pour $O \in \mathcal{C}$, l'ensemble des prédécesseurs $\{O' \text{ ovale}, O' \leq O\}$ est totalement ordonné⁷.

Un sous-ensemble d'ovales totalement ordonné sera nommé **empilement**.

Le résultat important est le suivant :

Proposition 1.1.20. Soient $X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}}$ deux M -courbes de degré pair. Alors $(\mathbb{R}P^2, X_{\mathbb{R}})$ et $(\mathbb{R}P^2, Y_{\mathbb{R}})$ ont le même type topologique si et seulement si elles définissent le même ordre partiel.

Démonstration. Il est essentiellement clair de voir que les homéomorphismes plongés préservent l'ordre. Pour l'autre sens, il faut utiliser des résultats difficiles d'existence d'homéomorphismes en topologie plane (comme le théorème de Jordan-Schönflies). \square

On peut enfin reformuler le 16^{ème} problème de Hilbert comme suit :

Problème. Décrire la position relative des branches des M -courbes de degré pair fixé.

6. Cette appellation est non standard. Si on introduit la catégorie des paires topologiques $PTop$, définie par :

- Ses objets sont les paires (E, F) où E espace topologique et $F \subset E$
- Pour (E, F) et (E', G) des objets, les morphismes $f \in Hom_{PTop}((E, F), (E', G))$ sont les applications continues $f : E \rightarrow E'$ telle que $f(F) \subset G$.

On constate que les isomorphismes (au sens catégorique) dans $PTop$ correspondent aux homéomorphismes plongés

7. Un tel ordre partiel est nommé arbre en théorie des ensembles

1.2 Les théorèmes importants

L'objectif de cette section est de proposer, à titre culturel, une liste de résultats majeurs portant sur le 16^{ème} problème de Hilbert. Ils seront présentés par ordre essentiellement chronologique.

1.2.a Des contraintes

Dans cette section, on fixe $X_{\mathbb{R}}$ une M -courbe de degré $d = 2k$ pair, dont l'ensemble des branches est noté \mathcal{C} .

Dans l'objectif de classer les M -courbes, il faut a fortiori établir des contraintes quant à leur topologie.

Une première obstruction quant à la disposition des ovales est due à Hilbert lui-même :

Théorème 1.2.1. (Hilbert, 1891) *Il ne peut exister dans \mathcal{C} deux empilements disjoints de cardinal total supérieur à $k + 1$.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que c'est le cas. On se donne deux points x, y à respectivement à l'intérieur de la dernière composante de chaque empilement. Soit L la droite passant par x et y , qui intersecte chaque composante des deux empilements en deux points, soit plus de $1 + k$ points d'intersections.

Une fois homogénéisé, le polynôme $X \upharpoonright L$ est un polynôme réel à une variable, de degré k , il possède donc au plus k racines. Or, chaque point de $L \cap X_{\mathbb{R}}$ est une racine ; c'est absurde. \square

Remarque. *On peut obtenir d'autres versions de ce résultat en travaillant avec des courbes de degré supérieur, et en appliquant le théorème de Bézout. On trouvera plus de détails dans [18].*

Pour énoncer les résultats suivants, nous allons avoir besoin d'une nouvelle notion.

Définition 1.2.2. (Ovale positif, négatif)

Soit $O \in \mathcal{C}$. On dit que O est **positif** si le cardinal maximal d'un empilement contenu dans O est pair.

Si non, on dit que O est **négatif**.

Cette terminologie est justifiée par la remarque suivante :

Remarque. *Un ovale $O \in \mathcal{C}$ est positif si X est positif sur un voisinage l'intérieur de O .*

On notera dans la suite P le nombre d'ovales positifs, et N le nombre d'ovales négatifs. Comme on considère des M -courbes, on a toujours $P + N = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$.

Les deux théorèmes ci-après fournissent un contrôle de $P - N$.⁸

Théorème 1.2.3. (Petrovski, 1933). *Pour $X_{\mathbb{R}}$ une courbe (quelconque) de degré $2k$, on a :*

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq P - N \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1$$

Ce résultat est à mettre en lien avec la conjecture de Ragsdale [4] :

Conjecture 1.2.4. (Ragsdale, 1906) *Pour $X_{\mathbb{R}}$ une courbe (quelconque) de degré $2k$, on a :*

$$P \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1 \text{ et } N \leq \frac{3}{2}k(k+1)$$

Cette conjecture ne fut réfutée qu'en 1980 par O.Viro, puis par I.Itenberg en 1993 (cf. [22]), et les travaux de E.Brugalé en 2006 (cf. [23]) montrent que le bon ordre de grandeur asymptotique est de l'ordre de $7/4$ et non $3/2$.

Voici enfin la congruence de Gudkov-Rokhlin, dont nous esquisserons la preuve dans la seconde partie :

Théorème 1.2.5. (Rokhlin, 1972) *Pour une M -courbe de degré $2k$,*

$$P - N \equiv k^2 [8]$$

Ce résultat répond positivement à une conjecture de Gudkov. Il généralise un théorème dû à Arnold, qui montre, sous des hypothèses plus faibles, la congruence modulo 4.

8. La quantité $P - N$ apparaît car c'est la caractéristique d'Euler de D^+ .

1.2.b Existence de M-courbes

Dans le but d'obtenir une classification complète, il faut encore disposer de méthodes pour construire des M-courbes satisfaisant ces propriétés.

Le premier résultat d'existence est dû à Harnack :

Théorème 1.2.6. (Harnack, 1876) *Il existe une M-courbe en tout degré d .*

La méthode utilisée, qui est également celle des résultats suivants, consiste à perturber légèrement des courbes singulières. Le cas $d = 4$ illustre cette méthode.

Sa construction ne détermine pas entièrement l'arrangement des ovales obtenus. Motivés par le cas $d = 6$, les auteurs ont cherché à construire des courbes satisfaisant certaines configurations fixées.

Théorème 1.2.7. 1. (Hilbert, 1891) *Pour tout k , il existe une M-courbe de degré $d = 2k$ possédant un empilement de hauteur $k - 1$ et $2(k - 1)^2$ ovales les uns à côté des autres.*

2. (Wiman, 1923) *Pour tout k , il existe une M-courbe de degré $d = 2k$ possédant $\frac{1}{2}(k - 1)(k - 2)$ paires d'ovales imbriqués l'un dans l'autre et k^2 ovales les uns à côté des autres.*

On remarque que la première construction sature, en un certain sens, l'inégalité 1.2.1

Remarque. *Si le nombre de M-courbes possible de degré $2k$ augmente a priori exponentiellement en k , le nombre de courbes que l'on sait construire est, d'après [20], essentiellement constant.*

1.3 Résolution complète en degré ≤ 6

Nous allons montrer comment appliquer les résultats vus ci-dessus afin de résoudre le problème de Hilbert en petit degré.

Pour $d \in \mathbb{N}$, on notera $g(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

— En degré $d \in \{1, 2\}$, on a $g = 0$: Une M-courbe possède donc exactement une branche. N'importe quelle courbe lisse possédant des zéros réels convient.

Par exemple, une droite $aX_1 + bX_2 - c$ en degré 1 et un cercle $X_1^2 + X_2^2 - 1$ en degré 2 conviennent.

— En degré $d = 3$, une M-courbe contient 2 branches.

Une courbe elliptique $X_1^3 + aX_1 + bX_2^3 - X_1^2X_2$ de discriminant $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ positif convient.

— En degré 4, le théorème 1.2.1 nous indique qu'il y a soit 4 ovales solitaires, soit un empilement de deux ovales et deux ovales solitaires.

Dans le premier cas, on aurait $P = 4$ et $N = 0$, ce qui contredit la congruence de Grudkov-Rokhlin.

Le second cas est réalisable en perturbant légèrement un produit de deux ellipses transverses :

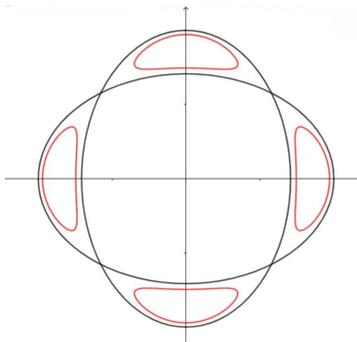


FIGURE 2 – Une M-courbe de degré 4

En noir : Les zéros de $X_{\text{noir}} = (2X_1^2 + X_2^2 - 1)(X^2 + 2X_2^2 - 1)$.

En rouge : Les zéros de $X_{\text{rouge}} = X_{\text{noir}} + \varepsilon$ pour un petit ε (ici 0.05).

— Le degré 6 est le plus intéressant. Une M -courbe contient alors 11 ovals. Par le théorème de Hilbert 1.2.1, il n'existe pas d'empilement de taille ≥ 3 , et il existe au plus un empilement de taille 2.

Si tous les ovals appartenaient à des empilements de taille 1, on aurait $P = 11$ et $N = 0$, ce qui contredit l'inégalité de Petrovski.

On dispose donc nécessairement d'un empilement de taille 2. Il existe alors un oval qui en contient N , avec $P-1$ ovals non emboîtés en dehors de celui-ci. La congruence de Grudkov-Rokhlin laisse 3 possibilités : $(P, N) \in \{(10, 1), (6, 5), (1, 10)\}$.

Par les résultats donnés en 1.2.7, les situations $(10, 1)$ et $(1, 10)$ sont atteignables.

Hilbert et ses contemporains pensaient que c'était les seules configurations possibles.

Gudkov, en 1974, dans [18] a été le premier à construire une courbe satisfaisant $(P, N) = (6, 5)$. Cette construction ne peut pas être construite par une méthode de perturbations à la Harnack-Hilbert-Wiman

La situation en degré 7 a été résolue par O.J.Viro en 1980 dans [21].

En degré ≥ 8 , le problème est encore ouvert.

2 Esquisse de preuve de la congruence de Gudkov-Rokhlin

L'objectif de cette section est de présenter les grandes étapes de la démonstration de la congruence de Gudkov-Rokhlin.

Comme nous allons le voir, la démonstration de ce résultat, pourtant de nature algébrique, repose avant tout sur un résultat topologique portant sur la signature de certaines variétés de dimension 4.

Si tous les objets intervenant dans les énoncés des théorèmes sont introduits, ce n'est pas toujours le cas dans les démonstrations. Certaines démonstrations, marquées d'une étoile * sont particulièrement difficiles et peu détaillées. Leur compréhension n'est jamais nécessaire pour la suite.

On supposera connues les notions de variété différentielle, d'espace tangent, et de produit tensoriel de modules. Dans cette section, le terme variété désignera, sauf mention explicite du contraire, une variété différentielle connexe et sans bord.

2.1 Bric à brac de notions classiques

On commence par rappeler les définitions de l'homologie singulière et de la cohomologie singulière d'un espace topologique.

Définition 2.1.1. (*Homologie singulière*)

Soient X un espace topologique et \mathcal{R} un anneau commutatif unitaire.

*Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1}, \sum_i x_i = 1\}$, le **n -ième simplexe standard**. On notera $\mathcal{F}_n(X)$ l'ensemble des applications continues $\Delta_n \rightarrow X$.*

On pose ensuite $C_n(X, \mathcal{R})$ le \mathcal{R} -module libre engendré par $\mathcal{F}_n(X)$ de X à coefficients dans \mathcal{R} .

Les applications de bord : $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$, définies par

$$\partial_n \sigma(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{n-1})$$

vérifient $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, et munissent les modules C_ d'une structure de complexe de chaînes.*

*Les **groupes d'homologie singulière** associés à X et à coefficients dans \mathcal{R} sont :*

$$H_n(X, \mathcal{R}) = \{\sigma \in C_n(X, \mathcal{R}), \partial_n \sigma = 0\} / \{\sigma \in C_n(X, \mathcal{R}), \exists \delta \in C_{n+1}(X, \mathcal{R}), \sigma = \partial_{n+1} \delta\}$$

Toute application continue $f : X \rightarrow Y$ induit une application $C_n(f, \mathcal{R}) : C_n(X, \mathcal{R}) \rightarrow C_n(Y, \mathcal{R})$ par pré-composition, qui passe au quotient en homologie et induit $f_ = H_n(f, \mathcal{R}) : H_n(X, \mathcal{R}) \rightarrow H_n(Y, \mathcal{R})$.*

La caractéristique d'Euler d'un espace topologique X gentil⁹ est définie par :

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{R}}(H_n(X, \mathbb{R}))$$

Remarque. Par le théorème des coefficients universels, on peut calculer la caractéristique d'Euler dans n'importe quel corps de coefficients.

On définit maintenant la notion *duale* de l'homologie singulière.

Définition 2.1.2. (*Dualité, cohomologie singulière*)

Pour \mathcal{A} un \mathcal{R} -module, on notera $\mathcal{A}^* = \text{Hom}_{\mathcal{R}\text{-mod}}(\mathcal{A}, \mathcal{R})$. Tout morphisme de \mathcal{R} -module $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit un morphisme $f^\top : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ défini par $f^\top \varphi = \varphi \circ f$.

Les \mathcal{R} -modules $C^n(X, \mathcal{R}) = C_n(X, \mathcal{R})^*$, munis des applications $d^n = \partial_n^\top$ vérifient $d^n \circ d^{n+1} = 0$, et font de $(C^*(X, \mathcal{R}), d^*)$ un complexe de cochaînes.

Les **groupes de cohomologie singulière** associés à X et à coefficients dans \mathcal{R} sont alors :

$$H^n(X, \mathcal{R}) = \{\varphi \in C^n(X, \mathcal{R}), d^n \varphi = 0\} / \{\varphi \in C^n(X, \mathcal{R}), \exists \psi \in C^{n-1}(X, \mathcal{R}), \varphi = d^{n-1} \psi\}$$

Si les groupes de cohomologie sont a priori moins naturels, ils ont l'avantage de posséder une structure additionnelle : celle d'algèbre graduée.

Définition 2.1.3. (*Cup-produit*)

Le **cup-produit** est une application $\smile : H^k(X, \mathcal{R}) \times H^l(X, \mathcal{R}) \rightarrow H^{k+l}(X, \mathcal{R})$ définie sur une base par :

$$([c] \smile [d]) (\sigma) = c(\sigma|_{0,1,\dots,k}) \cdot d(\sigma|_{p,p+1,\dots,k+l}) \in \mathcal{R}$$

Elle est bilinéaire et commutative au sens gradué : $[c] \smile [d] = (-1)^{\deg(c) \cdot \deg(d)} [d] \smile [c]$.

Si M est une variété, il sera très utile de connaître le groupe d'homologie $H_{\dim(M)}(M, \mathbb{Z})$. Cela se fait au prix d'une hypothèse supplémentaire.

Définition 2.1.4. (*Orientation, classe fondamentale*)

Une variété M^n compacte connexe est dite **orientable** si $H_n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Une **orientation** de M est le choix d'un générateur $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z})$, nommé **classe fondamentale**. C'est également le choix d'un isomorphisme $f_{[M]} : H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Une **variété orientée** M est la donnée d'une variété orientable M munie du choix d'une orientation.

Une application lisse $T : M \rightarrow M$ **préserve l'orientation** si l'application $T_* : H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M, \mathbb{Z})$ induite en homologie vérifie $T_*[M] = [M]$.

Voici quelques remarques quant au transfert d'orientation par des constructions usuelles :

Remarque. Si M est une variété compacte orientée, leurs espaces tangents sont canoniquement orientés car l'inclusion $M \hookrightarrow TM$ induit un isomorphisme en homologie.¹⁰

Remarque. Si M, N sont deux variétés compactes orientées de même dimension n , l'isomorphisme : $H_n(M, \mathbb{Z}) \oplus H_n(N, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(M \sqcup N)$ induit une orientation canonique de $M \sqcup N$.

On termine en rappelant quelques notions d'algèbre bilinéaire, qui seront fondamentales dans la suite :

Proposition–Définition 2.1.5. (*Unimodularité, orthogonalité, signature*)

Soit E un \mathcal{R} -module libre de dimension finie, et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathcal{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

On dit que φ est **unimodulaire** si l'application $x \in E \mapsto (\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y))$ induit un isomorphisme $E \rightarrow E^*$.

Deux espaces $F, G \subset E$ sont dit **orthogonaux** pour φ si $\forall x, y \in F \times G, \varphi(x, y) = 0$.

Si $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ on dispose d'une décomposition $E = E_+ \oplus E_-$ telle que :

9. Par exemple une variété topologique, ou un CW-complexe fini

10. Tout fibré vectoriel sur M se rétracte par déformation sur M

- E_+ et E_- sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.
- $\forall x \in E_+, \varphi(x, x) \geq 0$.
- $\forall x \in E_-, \varphi(x, x) \leq 0$.

Cette décomposition n'est pas unique, mais les dimensions $p = \dim(E_+)$ et $q = \dim(E_-)$ le sont. La **signature** de φ , notée $\tau(\varphi)$, est définie par : $\tau(\varphi) = p - q$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la signature d'une variété.

2.2 Signature d'une variété

2.2.a Définition et premières propriétés

Proposition–Définition 2.2.1. (*Forme d'intersection*)

Soit M une variété compacte orientée de dimension 4. L'application induite par le cup-produit :

$$\lambda_M : [\varphi], [\psi] \in H^2(M, \mathbb{Z})/Tors \times H^2(M, \mathbb{Z})/Tors \mapsto f_{[M]}^{-1}([\varphi] \smile [\psi]) \in \mathbb{Z}$$

est une forme bilinéaire symétrique unimodulaire, nommée parfois **forme d'intersection**¹¹, ou encore cup-produit par abus de langage.

La **signature** de M , notée $\tau(M)$, est alors la signature de l'extension de cette forme à $H^2(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Remarque. On rappelle que tout \mathbb{Z} -module de type fini est de la forme $E = \mathbb{Z}^r \times \prod_i \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$.

L'espace $E/Tors$ est alors \mathbb{Z}^r .

Démonstration. La bilinéarité est claire, et la symétrie provient de la commutativité du cup-produit (car on travaille en dimension paire). L'unimodularité découle de l'isomorphisme de Poincaré, ainsi que de l'égalité $\dim_{\mathbb{Z}}(H_i(M, \mathbb{Z})) = \dim_{\mathbb{Z}}(H^i(M, \mathbb{Z}))$ valable pour tout espace topologique (c'est une conséquence de la formule des coefficients universels). \square

Cette forme caractérise très fortement la variété. Voici par exemple un résultat de classification :

Théorème 2.2.2. (*Donaldson, 1982*) Deux variétés différentielles compactes de dimension 4 qui sont simplement connexes et possèdent la même forme d'intersection sont homéomorphes.¹²

Remarque. La signature dépend de l'orientation choisie. Si on note \overline{M} la variété orientée M munie de l'orientation opposée, on a $\tau(\overline{M}) = -\tau(M)$.

Remarque. On peut également définir un analogue à cette forme bilinéaire dans d'autres théories cohomologiques. On peut par exemple voir cette forme comme étant :

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

où α, β vivent dans un certain espace de $2k$ -formes différentielles sur M (le $2k$ -ième groupe de cohomologie de De Rham de M).

On termine cette section en donnant la signature de quelques variétés :

Exemple 2.2.3. $\tau(S^4) = 0$ car $H^2(S^4) = \{0\}$.

- $\tau(S^2 \times S^2) = 0$. Ce sera prouvé en 2.2.11 via la théorie de l'intersection.
- $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$. Via la théorie de l'intersection, ce sera une conséquence du théorème de Bézout.¹³

Remarque. La notion de signature a en fait du sens dès que la dimension de la variété est multiple de 4. Tous les résultats énoncés dans la suite de ce document se généralisent aisément à ce cadre.

11. Cette terminologie sera justifiée en 2.2.b.

12. La caractérisation à difféomorphisme près est un problème ouvert.

13. C'est en fait le seul exemple non trivial en dimension 4. En effet, toute variété compacte connexe orientée et de dimension 4 est *cobordante* à la somme connexe de copies $\mathbb{C}P^2$ et de $\overline{\mathbb{C}P^2}$, et que la signature est invariante par cobordisme (cf. 2)

2.2.b Signature et nombre d'intersection

L'objectif de cette section est essentiellement de justifier l'appellation "forme d'intersection".

Un résultat fondamental de la topologie algébrique des variétés est le suivant :

Théorème 2.2.4. (*Isomorphisme de Poincaré*) Soit M^{k+l} une variété compacte orientée.

Pour tout anneau commutatif unitaire \mathcal{R} , on dispose d'un isomorphisme

$$D : H^k(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_l(M, \mathbb{Z})$$

Ainsi, si M^4 est une variété compacte orientée, le cup-produit induit, via dualité de Poincaré, une forme bilinéaire symétrique unimodulaire $\lambda_M : H_2(M, \mathbb{Z}) \times H_2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(M, \mathbb{Z})$.

Nous allons voir en quoi la forme bilinéaire induite sur $H_2(M)$ compte le nombre d'intersection orienté entre des sous-variétés de M .

Définition 2.2.5. (*Transversalité*)

Soit W une variété compacte, M, N deux sous variétés de W telles que $\dim(M) + \dim(N) = \dim(W)$.

L'intersection de M et N est dite **transverse** en un point $x \in M \cap N$ si $T_x M \oplus T_x N = T_x W$.

On dit que M et N sont **transverses** si elles s'intersectent transversalement en tout point $x \in M \cap N$.¹⁴

Proposition 2.2.6. Si M et N sont transverses, alors $M \cap N$ est fini.

Démonstration. Par transversalité, on peut construire autour de tout point $x \in M \cap N$ un ouvert U_x tel que $U_x \cap M \cap N = \{x\}$ (on le voit en regardant dans une carte locale). On conclut par compacité. \square

Définition 2.2.7. (*Nombre d'intersection orienté - Le cas transverse*)

Soit W une variété compacte, M, N deux sous variétés transverses de W telles que $\dim(M) + \dim(N) = \dim(W)$. On suppose de plus M, N et W orientées.

En tout point $x \in M \cap N$, on a l'égalité sur les espaces tangents : $T_x M \oplus T_x N = T_x W$, où ces deux espaces possèdent une orientation naturelle.

Si la somme $T_x M \oplus T_x(N)$ respecte l'orientation de $T_x(W)$, on pose $\#(M, N)_x = 1$.

Dans le cas contraire, on pose $\#(M, N)_x = -1$.

Le **nombre d'intersection orienté** de M et N dans W est défini comme :

$$I(M, N) = \sum_{x \in M \cap N} \#(M, N)_x \in \mathbb{Z}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème important suivant, qui établit une correspondance entre la forme d'intersection et le nombre d'intersection :

Théorème 2.2.8. Soit W^4 une variété compacte orientée et M^2, N^2 deux sous-variétés orientées transverses dans W . Les inclusions $i^M, i^N : M, N \hookrightarrow W$ envoient les classes fondamentales de M et N sur des classes $i_*^M([M]), i_*^N([N]) \in H_n(W, \mathbb{Z})$. Alors :

$$I_W(M, N) = \lambda_W(i_*^M([M]), i_*^N([N]))$$

Démonstration. cf. [25]. \square

On constate à ce stade que la quantité $\lambda_W(i_*^M([M]), i_*^N([N]))$ est encore bien définie si M et N ne sont pas transverses. Nous allons étendre la définition du nombre d'intersection au cas où les variétés sont en position quelconque, de sorte à ce que l'égalité ci-dessus soit encore valide.

L'idée est que la classe d'homologie $[M]$ n'est pas modifiée si on *déforme* légèrement M . Si les variétés considérées ne sont pas transverses, nous allons donc regarder le nombre d'intersection de variétés, obtenues par légère déformation, qui le sont.

Commençons par élargir la définition au cas où $M \not\subset W$.

14. La différentielle de l'inclusion $i : M \hookrightarrow W$ induit $di : T_x M \rightarrow T_x W$. On identifiera, par abus de notation, $T_x M$ et $T_x N$ à des sous-espaces de $T_x W$.

Définition 2.2.9. (*Nombre d'intersection orienté - Le cas d'applications transverses*)

Soit M, W des variétés compactes orientées, N sous-variété de W , et une application lisse $f : M \rightarrow W$.

On dit que f est **transverse** à N si $\forall x \in f^{-1}(Z), \text{Im}(d_x f) + T_{f(x)}(N) = T_{f(x)}(W)$.

Si la somme directe $\text{Im}(d_x f) \oplus T_{f(x)}(N)$ respecte l'orientation de $T_{f(x)}(W)$, on pose $\#(f, N)_x = 1$.

Dans le cas contraire, on pose $\#(f, N)_x = -1$.

Le **nombre d'intersection orienté** de f et N dans W est :

$$I_W(f, N) = \sum_{x \in f(M) \cap N} \#(f, N)_x \in \mathbb{Z}$$

L'intérêt d'étendre la définition aux applications est qu'on peut considérer des déformations par homotopie.

Proposition–Définition 2.2.10. (*Nombre d'intersection - Le cas non transverse*)

Soit M, W des variétés compactes orientées, N sous-variété de W , et une application lisse $f : M \rightarrow W$.

Alors :

1. Il existe une application lisse $g : M \rightarrow W$, homotope à f , telle que g est transverse à N .
2. Le nombre $I_W(g, N)$, ne dépend pas du choix de g .

On note $I_W(f, N)$ ce nombre. Si i est l'inclusion $M \subset W$, on le notera également $I_W(M, N)$.

Démonstration. cf. [19]. □

Remarque. Le théorème 2.2.8 est encore vrai si on ne suppose plus M et N transverses (cf. [25]).

Pour calculer la signature d'une variété donnée, il est le plus souvent pratique de calculer le nombre d'intersection sur une base de $H_2(M, \mathbb{Z})$ représentée par des classes fondamentales de sous-variétés.

En voici un exemple :

Exemple 2.2.11. Par la formule de Künneth, $H_2(S^2 \times S^2)$ est engendré par $A = [S^2 \times \{*\}]$ et $B = [\{*\} \times S^2]$. On calcule $I_{S^2 \times S^2}(A, A) = I_{S^2 \times S^2}(B, B) = 0$ et $I_{S^2 \times S^2}(A, B) = 1$, donc $\tau(S^2 \times S^2) = 0$.

On utilisera dans la suite principalement le cas où $M = N$ et f est l'inclusion.

On parle alors d'**auto-intersection**.

2.3 Signature d'une involution

2.3.a Définition et premières propriétés

Nous introduisons ici une généralisation du concept de signature aux involutions lisses sur des variétés.

Proposition–Définition 2.3.1. (*Signature d'une involution*) Soit M une variété compacte orientée et $T : M \rightarrow M$ une involution lisse préservant l'orientation.

La **signature** de T , notée $\tau(T)$, est la signature de la forme bilinéaire unimodulaire :

$$b_T : [\varphi], [\psi] \in H^2(M, \mathbb{R}) \times H^2(M, \mathbb{R}) \mapsto f_{[M]}^{-1}([\varphi] \smile T_*[\psi]) \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Le caractère unimodulaire provient du même argument qu'en 2.2.a □

Remarque. Si $T = \text{Id}_M$, on retrouve la définition de la signature de M .

Voici une autre méthode de calcul de $\tau(T)$:

Proposition 2.3.2. T induit une involution de \mathbb{R} -espaces vectoriels $T^* : H^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})$.

Ses sous-espaces propres $E_1, E_{-1} \subset H^2(M, \mathbb{R})$ associés aux valeurs propres ± 1 vérifient :

$H^2(M, \mathbb{R}) = E_1 \oplus E_{-1}$, et la décomposition est orthogonale pour b_{Id} .

Proposition 2.3.3. *On note τ_1 et τ_{-1} la signature de la restriction de b_{Id} à E_1 et E_{-1} respectivement. Alors $\tau(T) = \tau_1 - \tau_{-1}$ (et $\tau(M) = \tau_1 + \tau_{-1}$).*

Démonstration. Sur E_1 , $b_T = b_{Id}$, et $b_T = -b_{Id}$ sur E_{-1} . Il suffit de regarder une décomposition de chaque sous-espace en partie positive et négative pour conclure. \square

La signature d'une involution semble être plus difficile à calculer, car elle s'interprète a priori moins bien comme produit d'intersection. Il n'en est en fait rien.

2.3.b Signature et nombre d'intersection

L'objectif de cette section est de présenter une esquisse de démonstration du résultat suivant, qui sera fort utile par la suite :

Théorème 2.3.4. *Soit M une variété compacte, orientée, munie d'une involution lisse $T : M \rightarrow M$ préservant l'orientation. On note $F = \text{Fix}(T)$ l'ensemble des points fixes de T , et on suppose $\dim(F) = \frac{1}{2}\dim(M)$. Alors :*

$$\tau(T) = I_M(F, F)$$

Ce résultat a été en premier lieu établi comme un corollaire du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer (cf. [12]), en interprétant les deux quantités comme l'indice de certains opérateurs différentiels elliptiques. Il a été redémontré de manière purement géométrique par Jänich et Ossa, dans [15]. C'est l'approche présentée ici.

Démonstration. * La démonstration est très technique. Elle fait essentiellement appel à des constructions géométriques par recollement de variétés. On en donne ici un bref aperçu.

Proposition 2.3.5. *Plus précisément, on se donne M une variété compacte orientée de dimension 4 munie d'une involution lisse préservant l'orientation T . Si M_0, M_1 sont deux sous-variétés T -invariantes de dimension 4 de M à bord telles que $M_0 \cap M_1 = \partial M_0 = \partial M_1$ et $M_0 \cup M_1 = M$.*

Alors $\tau(T) = \tau(T \upharpoonright M_0) + \tau(T \upharpoonright M_1)$.

Le résultat est clair si $\partial M_0 = \partial M_1 = \emptyset$.

Nous n'avons pas défini la signature pour les variétés à bords. La bonne notion est en fait celle issue du produit d'intersection. La dualité de Poincaré-Lefschetz (généralisation de la dualité de Poincaré pour les variétés à bords) montre que cela revient à regarder le cup-produit sur les groupes d'homologie relative $H_k(M, \partial M, \mathbb{Z})$.

L'idée de la démonstration est d'obtenir une décomposition T^* -invariante et orthogonale pour le cup-produit :

$$H_{2n}(M, \mathbb{R}) \cong i(H_{2n}(M_0, \partial M_0, \mathbb{R})) \oplus j(H_{2n}(M_1, \partial M_1, \mathbb{R})) \oplus G$$

telle que la signature de la restriction à G soit nulle (et i, j sont les inclusions).

Proposition 2.3.6. *Si T est sans points fixes, alors $\tau(T) = 0$*

On raisonne en deux étapes :

Etape 1. *(Construction de Dold)*

Soit $T : M \rightarrow M$ une involution lisse sans point fixes et préservant l'orientation sur une variété différentielle compacte orientée M . Alors il existe une variété à bords Y telle que $\partial Y = M \sqcup (M/T \sqcup M/T)$.

De plus, Y est munie d'une involution lisse qui coïncide avec T sur M et échange les deux copies de M/T .

On se référera à [8] pour la démonstration historique.

Etape 2. *Soit Y^5 une variété compacte à bord, munie d'une involution lisse T qui stabilise ∂Y et préserve son orientation. Alors $\tau(T \upharpoonright \partial Y) = 0$.*

Démonstration. On le voit en cohomologie de De Rham. L'application $\alpha, \beta \mapsto \int_{\partial Y} \alpha \wedge \beta$ est nulle par le théorème de Stokes sur $Im(i_* : H^2(Y) \rightarrow H^2(\partial M))$, qui est un sous-espace de dimension moitié. \square

Nous sommes maintenant en mesure de conclure.

On se donne s une section lisse du fibré normal à $X_{\mathbb{R}} \subset X$, qui soit transverse le long de $X_{\mathbb{R}}$. En tout point de $s^{-1}(0)$, on identifie la situation locale avec l'inclusion $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2$ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$.

Par additivité de la signature, on sépare le comportement proche des points de $s^{-1}(0)$, et loin de ces derniers (pour une métrique Riemannienne quelconque).

La signature de la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}P^2$ est -1 , et que celle sur $\overline{\mathbb{C}P^2}$ est 1 . La signature *au voisinage* d'un point $x \in s^{-1}(0)$ est donc ± 1 , en fonction de l'orientation locale choisie.

Pour traiter les points *loin* des zéros de s dans M , on la recolte avec la partie à l'infini de $\mathbb{C}P^2$, de telle sorte à ce que T soit sans point fixe. La contribution à la signature s'annule donc. \square

2.4 Un théorème topologique de Rokhlin

Comme annoncé précédemment, la démonstration de la congruence de Gudkov-Rokhlin repose sur un résultat portant sur les variétés de dimension 4. L'objectif de ce paragraphe est d'énoncer, puis de démontrer ce résultat.

2.4.a Enoncé du théorème

Dans la suite du document, nous nommerons *théorème de Rokhlin* le résultat suivant :¹⁵

Théorème 2.4.1. *Soit T une involution lisse et J -antiholomorphe sur M une variété compacte simplement connexe¹⁶ de dimension 4 munie d'une structure presque-complexe, telle que (M, T) soit une M -variété. Alors :*

$$\chi(Fix(T)) \equiv \tau(M)[16]$$

La suite de ce paragraphe est consacré à définir les objets employés.

Définition 2.4.2. (*Structure presque complexe*)

Soit M une variété compacte de dimension $d = 2k$.

Une **structure presque complexe** sur M est la donnée en tout point $x \in M$ d'une application $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$ vérifiant $J_x \circ J_x = -Id_{T_x M}$, telle que la donnée de J_x dépend de manière lisse du point x .

Une telle application fait de tous les $T_x M$ des \mathbb{C} -espaces vectoriels, en considérant J_x comme étant la multiplication par $i \in \mathbb{C}$.

Remarque. Une structure complexe induit une orientation.

Définition 2.4.3. (*Application J -antiholomorphe*)

Soit $T : M \rightarrow M$ involution lisse, et J une structure presque complexe sur M , variété compacte.

L'application T est dite **J -antiholomorphe** si, en tout point $x \in M$, sa dérivée $f = d_x T : T_x M \rightarrow T_x M$ est \mathbb{C} -antilinéaire, c'est-à-dire qu'elle satisfait $f(J_x \cdot v) = -J_x f(v)$ ¹⁷

Définissons maintenant la notion de M -variété.

Intuitivement, une variété M , munie d'une involution lisse T , est une M -variété si l'ensemble des points fixes de T est *aussi riche topologiquement* que la variété M tout entière.

15. Usuellement, on désigne plutôt par "théorème de Rokhlin" un résultat portant sur la signature des variétés spinorielles. Nous n'utiliserons pas ce résultat.

16. L'hypothèse de simple connexité est superflue. Elle simplifie légèrement la preuve, et suffit pour déduire la congruence de Gudkov-Rokhlin.

17. Par abus de notation, on peut noter $f(i \cdot v) = -i \cdot f(v)$

Par le théorème 2.3.4, $\chi(F) = I_M(F, F)$. On peut réaliser ce nombre d'intersection via une homotopie de l'inclusion qui reste contenue dans un petit voisinage tubulaire de $F \subset U \subset M$, difféomorphe au fibré normal. Donc $I_M(F, F) = I_U(F, F) = I_N(F, F) = -I_{TF}(F, F) = \chi(F)$. C'est le résultat voulu. \square

2.4.c Signature de certaines formes bilinéaires symétriques

Le dernier résultat important qui nous manque est un résultat purement algébrique portant sur la signature de certaines formes bilinéaires symétriques sur \mathbb{Z} .

Définition 2.4.7. (*Espace quadratique, type I, type II*)

Un **espace quadratique** est une paire (E, φ) où E est un \mathbb{Z} -module libre de dimension finie, et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$ est une forme bilinéaire symétrique unimodulaire.

On dit que (E, φ) est **pair**, ou de **type II**, si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \in 2 \cdot \mathbb{Z}$.

Dans le cas contraire, on dit que (E, φ) est **impaire**, ou de **type I**.

Le théorème que nous allons établir dans cette section le suivant :

Proposition 2.4.8. *Soit (E, φ) un espace quadratique de type II. Alors $\tau(\varphi) \equiv 0[8]$.*

Ce résultat ne dispose pas, à ma connaissance, de démonstration complètement élémentaire. Nous suivons ici la démarche de Serre (cf. [16]), qui est purement algébrique. On pourra trouver une approche via la théorie des formes modulaires dans [24].

Nous allons établir ce résultat comme corollaire d'un fait plus général. Définissons un second invariant sur les espaces quadratiques :

Proposition–Définition 2.4.9. (*Élément canonique, σ*)

Soit (E, φ) une espace quadratique. Alors il existe $y \in E$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x, x) \equiv \varphi(x, y)[2]$.

Un tel y est appelé **élément canonique** de φ .

De plus, $\sigma(\varphi) := \varphi(y, y)[8]$ ne dépend pas du choix de l'élément canonique y .

Démonstration. On regarde la forme induite $\bar{\varphi} : \bar{E} \times \bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\bar{E} = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On calcule : $\forall x, y \in \bar{E}, \bar{\varphi}(x + y, x + y) = \bar{\varphi}(x, x) + \bar{\varphi}(y, y) + 2\bar{\varphi}(x, y) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\varphi}(y)$, donc $\bar{\varphi} \in \bar{E}^*$.

Or, φ est unimodulaire, donc $\bar{\varphi}$ l'est également. Il existe alors x tel que $[y \mapsto \bar{\varphi}(x, y)] = [x \mapsto \bar{\varphi}(x, x)]$.

On se donne maintenant deux éléments canoniques $y_1, y_2 \in E$. Puisque $\forall x \in E, \varphi(y_1 - y_2, x) \in \bar{E}$, on a $y_1 - y_2 \in \bar{E}$, et $y_2 = y_1 + 2z$ pour un certain $z \in E$.

On calcule : $\varphi(y_2, y_2) = \varphi(y_1, y_1) + 4\varphi(y_1, z) + 4\varphi(z, z) = \varphi(y_1, y_1) + 8\varphi(z, z) \equiv \varphi(y_1, y_1)[8]$ \square

Remarque. φ est de type II si et seulement si $0 \in E$ est élément canonique.

Nous allons montrer qu'en fait σ coïncide avec la signature :

Proposition 2.4.10. *Soit (E, φ) un espace quadratique. Alors :*

$$\sigma(\varphi) \equiv \tau(\varphi)[8]$$

Commençons par introduire quelques notions utilisées dans la preuve.

Définition 2.4.11. (*Défini, indéfini*)

Soit (E, φ) un espace quadratique.

Il est dit **défini positif** si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$, et **défini négatif** si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \leq 0$.

On dit qu'il est **défini** s'il est défini positif ou négatif. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **indéfini**.

Définition 2.4.12. (*Somme orthogonale d'espaces quadratiques*)

Soient (E, φ_E) et (F, φ_F) deux espaces quadratiques.

La forme naturelle $\varphi_E \oplus \varphi_F : (x_E + x_F, y_E + y_F) \in (E \oplus F) \times (E \oplus F) \mapsto \varphi_E(x_E, y_E) + \varphi_F(x_F, y_F) \in \mathbb{R}$ fait de $(E \oplus F, \varphi_E \oplus \varphi_F)$ un espace quadratique, nommé **somme directe orthogonale** de (E, φ_E) et (F, φ_F) .

On constate aisément que $\sigma(\varphi_E \oplus \varphi_F) \equiv \sigma(\varphi_E) + \sigma(\varphi_F)[8]$ et $\tau(\varphi_E \oplus \varphi_F) = \tau(\varphi_E) + \tau(\varphi_F)$.

Définition 2.4.13. (*Espaces isomorphes, stablement isomorphes*)

Deux espaces quadratiques (E, φ_1) et (F, φ_F) sont dits **isomorphes** s'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$ telle que $\forall x, y \in E, \varphi_F(f(x), f(y)) = f(\varphi_1(x, y))$. Dans ce cas, on note $(E, \varphi_1) \cong (F, \varphi_F)$.

Deux espaces quadratiques (E, φ_1) et (F, φ_F) sont dit **stablement isomorphes** s'il existe un espace quadratique (G, φ_G) tel que $(E \oplus G, \varphi_1 \oplus \varphi_G)$ et $(F \oplus G, \varphi_F \oplus \varphi_G)$ sont isomorphes.

Remarque. Si (E, φ_E) et (E, φ_F) sont stablement isomorphes, alors $\sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_F)$ et $\tau(\varphi_1) = \tau(\varphi_F)$.

On pose les espaces quadratiques de dimension 1 : $I_+ = (\mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x \cdot y)$, et $I_- = (\mathbb{Z}, (x, y) \mapsto -x \cdot y)$. Il est clair que $\tau(I_+) \equiv \sigma(I_+) \equiv 1[8]$, et $\tau(I_-) \equiv \sigma(I_-) \equiv -1[8]$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de classification des \mathbb{Z} -espaces quadratiques.

Théorème 2.4.14. *Toute espace quadratique (E, φ) défini impair est stablement isomorphe à une somme directe orthogonale $I_+ \oplus \dots \oplus I_+ \oplus I_- \oplus \dots \oplus I_-$.*

Par les remarques précédentes, ce théorème suffit pour conclure.

Démonstration. On admettra le lemme suivant :

Lemme 2.4.15. *Soit (E, φ) un espace quadratique indéfini impair. Alors il existe $z \in E$ tel que $\varphi(z, z) = 0$.*

Une fois ce lemme admis, la démonstration est élémentaire.

Démonstration.

Etape 1. *Si (E, φ) est indéfini et impair, alors il existe (F, ψ) tel que $(E, \varphi) \cong (F, \psi) \oplus I_+ \oplus I_-$.*

On fixe par le lemme précédent un élément $z \in E$ tel que $\varphi(z, z) = 0$.

Quitte à diviser z , on peut supposer que z n'est pas de la forme $\lambda \cdot z'$ pour $\lambda \geq 2$ et $z' \in E$. Cela assure que la forme $\varphi_z : x \in E \mapsto \varphi(x, z) \in E^*$ est surjective, et on peut exhiber un élément $y \in E$ tel que $\varphi(y, z) = 1$.

Par le caractère impair, on dispose de $t \in E$ tel que $\varphi(t, t) \notin 2 \cdot \mathbb{Z}$. Quitte à remplacer y par $t + (1 - \varphi(y, t)) \cdot y$, on peut supposer de plus que $\varphi(y, y)$ est impair. On écrit $\varphi(y, y) = 2m + 1$.

On pose enfin $e_1 = y - m \cdot z$ et $e_2 = y - (m + 1) \cdot z$.

Le module $\langle e_1, e_2 \rangle$ qu'ils engendrent est isomorphe à $I_+ \oplus I_-$.

On pose F l'ensemble des éléments orthogonaux à e_1 et e_2 , munie de la forme induite par φ , qui convient.

Etape 2. *Si (E, φ) est défini positif, alors il existe (F, ψ) tel que $E = F \oplus I_+ \oplus I_-$.*

Si (E, φ) est défini positif, alors $(E, \varphi) \oplus I_-$ est impair et indéfini.

Le lemme précédent donne : $E \oplus I_- \cong F \oplus I_+ \oplus I_-$, et $E \cong F \oplus I_+$.

On a dispose d'un résultat analogue clair dans le cas défini négatif.

Il suffit d'appliquer ces résultats par récurrence pour conclure. □

Donnons maintenant quelques mots de la démonstration du lemme 2.4.15.

Ce résultat, d'apparence élémentaire, est en fait difficile. La démarche suivie par Serre est la suivante :

Lemme 2.4.16. *Le résultat est vrai en remplaçant \mathbb{Z} par un corps p -adique \mathbb{Q}_p .*

C'est un résultat très technique.

On conclut par une application d'un principe *local-global* :

Théorème 2.4.17. (*Hasse-Minkovski*) *Soit (E, φ) un espace quadratique sur \mathbb{Q} .*

Alors $\exists x \in E, \varphi(x, x) = 0$ si et seulement si pour tout p premier, $\exists x \in E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, \varphi_p(x, x) = 0$ où φ_p est l'extension de φ à $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ obtenue par extension des scalaires.

Puisque $\varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x)$, on peut passer de \mathbb{Q} à \mathbb{Z} . Les deux résultats ci-dessus permettent de conclure. \square

On se réfèrera à [16] pour les détails de la démonstration.

2.4.d Démonstration du théorème de Rokhlin

Nous avons maintenant à notre disposition presque tous les résultats nécessaires pour comprendre la démonstration du théorème de Rokhlin.

On en rappelle l'énoncé :

Théorème 2.4.18. (Rokhlin, 1972) *Soit T une involution J -antiholomorphe sur M une variété simplement connexe de dimension 4 munie d'une structure presque-complexe, telle que (M, T) soit une M -variété. Alors :*

$$\chi(\text{Fix}(T)) \equiv \tau(M)[16]$$

Démonstration. Par la proposition 2.3.3, on a : $\tau(M) + \tau(T) = 2\tau_1$.

Par le théorème 2.4.5, on sait que $\tau(T) = \chi(\text{Fix}(T))$, donc $\tau(M) - \chi(\text{Fix}(T)) = 2\tau_1$.

Il suffit donc de prouver :

Proposition 2.4.19. *Dans le contexte ci-dessus, $\tau_1 \equiv 0[8]$*

Pour ce faire, nous allons réaliser τ_1 comme la signature d'un espace quadratique de type II, et appliquer la proposition 2.4.8.

Lemme 2.4.20. *L'involution induite $T^* : H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$ induit une décomposition en somme directe de ses sous-espaces propres : $H^2(M, \mathbb{Z}) = E_1 \oplus E_{-1}$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que $E = E_1 + E_{-1}$.

Par le théorème de Smith-Thom 2.4.4, on sait que l'application $T_* : H_2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est Id (car (M, T) est une M -variété).

Par dualité de Poincaré, c'est encore le cas de $T^* : H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Or, comme M est simplement connexe, on a $H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^2(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par la formule des coefficients universels et la dualité de Poincaré. Donc, pour $x \in H^2(M, \mathbb{Z})$, les éléments x et T_*x ont la même parité (selon toutes leurs composantes).

On peut alors écrire $x = \frac{1}{2}(x + T_*x) + \frac{1}{2}(x - T_*x) \in E_1 + E_{-1}$. C'est l'écriture souhaitée. \square

Lemme 2.4.21. *La restriction du cup-produit à E_1 est unimodulaire et paire.*

Démonstration. (*) L'unimodularité découle du fait que le cup-produit est unimodulaire sur tout $H_2(M, \mathbb{Z})$. La structure presque complexe de M munit son fibré tangent d'une structure complexe.

Sa première classe de Stiefel-Whitney ω_1 est donc nulle.

Sa seconde classe $\omega_2 \in H^2(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^2(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la réduction modulo 2 de sa première classe de Chern $c_1 \in H^2(M, \mathbb{Z})$.

La seconde classe de Wu s'écrit $\nu_2 = \omega_1 \smile \omega_1 + \omega_2 = \omega_2$. L'élément $c_1 \in H^2(M, \mathbb{Z})$ est ainsi un relevé de la classe de Wu, et élément canonique du cup-produit (au sens de 2.4.9).

L'application T , qui est J -antiholomorphe, renverse l'orientation du fibré tangent. On a donc $T_*c_1 = -c_1$, donc $c_1 \in E_{-1}$.

On calcule, pour $x \in E_1$: $\overline{x \smile x} = \overline{x} \smile \nu_2 = \overline{x} \smile c_1 = 0$ car E_1 et E_{-1} sont orthogonaux (où la barre horizontale désigne la réduction modulo 2).

Donc : $\forall x \in E_1, x \smile x = 0$. C'est le résultat voulu. \square

Puisque τ_1 est la signature de l'extension à \mathbb{R} de la restriction du cup-produit à E_1 , on a bien la proposition 2.4.19. Cela conclut la preuve du théorème. \square

Il ne reste plus qu'à démontrer ce qui a été annoncé depuis le début : la congruence de Gudkov-Rokhlin est une conséquence du théorème de Rokhlin ci-dessus.

2.5 La démonstration de la congruence de Gudkov-Rokhlin

On rappelle le résultat :

Théorème 2.5.1. (*Gudkov-Rokhlin*) *Pour une M-courbe de degré $2k$, on a :*

$$P - N \equiv k^2[8]$$

Démonstration. On fixe $X \in \mathbb{R}^{hom}[X_0, X_1, X_2]$ de degré $2k$.

On pose $X_{\mathbb{C}} = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{C}P^2, X(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ et $Z_{\mathbb{C}} = \{[x_0, x_1, x_2, t] \in \mathbb{C}P^3, X(x_0, x_1, x_2) + t^{2k} = 0\}$.

Le groupe U_{2k} des racines $2k$ -ièmes de l'unité agit sur $Z_{\mathbb{C}}$ via $\alpha \cdot [x_0, x_1, x_2, t] = [x_0, x_1, x_2, \alpha \cdot t]$.

On pose $\omega = \exp(i\pi/k)$, générateur de U_{2k} .

Lemme 2.5.2. $Y = Z_{\mathbb{C}}/U_k$ est connexe et munie d'une structure de variété complexe de degré réel 4.

Démonstration. On applique un théorème de Holmann [9] : si un groupe fini G agit via des automorphismes holomorphes sur une variété complexe, alors le quotient est muni d'une structure complexe compatible. \square

La conjugaison complexe sur $\mathbb{C}P^3$ induit une involution antiholomorphe $T^- : Y \rightarrow Y$.

On note $Y_{\mathbb{R}}^-$ son ensemble de points fixes. On a :

$$Y_{\mathbb{R}}^- = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{C}P^3, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \cup \omega \cdot \mathbb{R}, X(x_0, x_1, x_2) + x_3^{2k} = 0\}$$

Le résultat important est le suivant :

Théorème 2.5.3. $X_{\mathbb{R}}$ est une M-courbe si et seulement si (Y, T^-) est une M-variété.

Démonstration. *

Il faut calculer les groupes d'homologie de Y et $Y_{\mathbb{R}}^-$ à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour $Y_{\mathbb{R}}^-$, on considère la projection sur les trois premières coordonnées surjective $\pi : Y_{\mathbb{R}}^- \rightarrow \overline{D^-}$

où $\overline{D^-} = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2, X(x_0, x_1, x_2) \leq 0\}$.

C'est un revêtement d'ordre 2, ramifié le long du bord $X_{\mathbb{R}} = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2, X(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

On sait alors que $H_0(Y_{\mathbb{R}}^-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_0(D^-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{N+1}$ par définition de N .

Par dualité de Poincaré, on a : $H_0(Y_{\mathbb{R}}^-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_2(Y_{\mathbb{R}}^-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ car $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps.

On calcule $H_1(Y_{\mathbb{R}}^-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à l'aide de Riemann-Hurwitz : $\chi(Y_{\mathbb{R}}^-) = 2\chi(D^-) - \chi(X_{\mathbb{R}}) = 2 + 2N - 2P$ car $X_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à une union de cercles, et $\chi(D^-) = 1 - N + P$.

On trouve : $\sum_{n \in \mathbb{N}} \dim(H_n(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = 2 + 2N + 2P$.

Le calcul pour Y est plus délicat. Par connexité et par dualité de Poincaré, il vient $H_0(Y, \mathbb{Z}) = H_4(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Le résultat suivant est non trivial :

Lemme 2.5.4. Y est simplement connexe.

Démonstration. On procède en deux étapes :

Etape 1. $Z \setminus X_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe.

On explicite $Z \setminus X_{\mathbb{C}} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3, X(x_0, x_1, x_2) = 1\}$

On considère un chemin de polynômes $f_* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{hom}[X_0, X_1, X_2]$ qui relie X à $X_0^d + X_1^d + X_2^d$.

Si on choisit bien f_* (il faut par exemple que f_* évite tous les polynômes possédant des points singuliers), on peut montrer que le type topologique de $\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3, f_t(x_0, x_1, x_2) = 1\}$ est indépendant de t , via par exemple une variante du théorème d'Ehresmann : Toute submersion surjective propre est localement triviale.

On peut ensuite montrer (cf. [11],[13]) que $\{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{C}^3, x_0^d + x_1^d + x_2^d = 1\}$ est homotopiquement équivalent à

$$\{(t_i \cdot \omega^{li})_{1 \leq i \leq 3}, \forall i, 0 \leq l_i \leq 2k - 1 \text{ et } t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_i t_i = 1\}$$

qu'on peut voir comme le *joint* (au sens de [7]) de trois copies de l'espace topologique à $2k$ éléments, muni de la topologie discrète.

Il n'est pas très difficile de voir qu'un tel espace est simplement connexe, en produisant par exemple une homotopie explicite. (cf. [7] pour un calcul complet de l'homologie et l'homotopie des joints).

Donc $Z \setminus X_{\mathbb{C}}$ est simplement connexe.

Etape 2. *En déduire que Y est simplement connexe.*

L'application $\pi : Z_{\mathbb{C}} \rightarrow Y$ est un revêtement de degré d ramifié le long de $X_{\mathbb{C}}$, et le groupe fondamental $\pi_1(Y \setminus X_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ est ainsi engendré par un lacet γ faisant le *tour* de $X_{\mathbb{C}} \subset Y$ dans une fibre normale (On le voit en regardant dans une carte de ramification).

Enfin, tout lacet δ dans Y peut, à homotopie près, éviter $X_{\mathbb{C}}$ (car c'est une sous-variété de codimension (réelle) 2). δ est donc homotope à un certain multiple du lacet γ , donc homotopiquement trivial dans Y , car on peut le rétracter sur le *centre* de la fibre. □

On obtient donc $H_1(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H_3(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$.

L'application de projection sur les trois premières coordonnées $Z_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^2$ commute avec l'action de U_k , et induit une surjection $\pi : Y \rightarrow \mathbb{C}P^2$. C'est un revêtement d'ordre 2, ramifié le long de $X_{\mathbb{C}}$

La formule de Riemann-Hurwitz donne : $\chi(Y) = 2\chi(\mathbb{C}P^2) - (2-1)\chi(X_{\mathbb{C}}) = 6 - (2-2g)$, où $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ est le genre de $X_{\mathbb{C}}$ par la formule de Plücker.

On trouve $H_2(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{2+2g}$.

On a donc : $\sum_n \dim(H_n(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = 4 + 2g$.

Donc $\sum_n \dim(H_n(Y, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \dim(H_n(Y_{\mathbb{R}}^-, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ si et seulement si $P + N = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$. C'est le résultat voulu. □

Pour une M -courbe $X_{\mathbb{R}}$, on a donc, par le théorème géométrique : $\tau(Y) \equiv \chi(Y_{\mathbb{R}}^-) \equiv 2(1 + N - P)[16]$. Nous allons établir l'égalité suivante :

Lemme 2.5.5. $\tau(Y) = 2 - 2k^2$

Démonstration. On regarde sur Y l'involution du revêtement $Z_{\mathbb{C}} \rightarrow Y$, donnée par

$$\theta : [x_0 : x_1 : x_2 : t] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2 : \omega \cdot t]$$

On constate que $Fix(\theta) = X_{\mathbb{C}} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{C}P^2, X(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

Par la proposition 2.3.3, on sait que que $\tau(Y) = 2\tau_1 - \tau(\theta)$.

Par le théorème 2.3.4, on a : $\tau(\theta) = I_Y(X_{\mathbb{C}}, X_{\mathbb{C}})$.

Or, $I_Y(X_{\mathbb{C}}, X_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2}I_{\mathbb{C}P^2}(X_{\mathbb{C}}, X_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2}deg(X)^2 = 2k^2$ par le théorème de Bézout.

Ensuite, l'application induite par le revêtement $\pi^* : H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{R}) \rightarrow \{x \in H^2(Y, \mathbb{R}), \theta^*x = x\} = E_1$ est un isomorphisme (on peut expliciter un inverse), qui commute avec le cup-produit.

Donc $\tau_1 = \tau(\mathbb{C}P^2) = 1$. □

On a donc établi : $2 - 2k^2 \equiv 2(1 + N - P)[16]$, ou encore $P - N \equiv k^2[8]$.

C'est le résultat voulu. □

Ceci achève la démonstration de la congruence de Gudkov-Rokhlin.

3 Bibliographie

Références

- [1] HARNACK. « Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven ». In : *Mathematische Annalen* 10 (1876), p. 189-198.
- [2] A. HURWITZ. « Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten ». In : *Mathematische Annalen* 39 (1891), p. 1-60.
- [3] F.KLEIN. *Riemann'sche Flächen*. 1894.
- [4] V. RAGSDALE. « On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves ». In : *American Journal of Mathematics* 28.4 (1906), p. 377-404. ISSN : 00029327, 10806377.
- [5] M. RICHARDSON et P. A. SMITH. « Periodic Transformations of Complexes ». In : *Annals of Mathematics* 39.3 (1938), p. 611-633. ISSN : 0003486X.
- [6] E. E. FLOYD. « On Periodic Maps and the Euler Characteristics of Associated Spaces ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 72.1 (1952), p. 138-147. ISSN : 00029947.
- [7] John MILNOR. « Construction of Universal Bundles, II ». In : *Annals of Mathematics* 63.3 (1956), p. 430-436. ISSN : 0003486X.
- [8] A. DOLD. « Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme ». In : 1960.
- [9] H.HOLMANN. « Quotientenräume komplexer Mannigfaltigkeiten nach komplexen Lieschen Automorphismengruppen ». In : *Math. Ann.* 139 (1960), p. 383-402.
- [10] J. MILNOR. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton University Press, 1965.
- [11] Frédéric PHAM. « Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales ». fr. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 93 (1965), p. 333-367. DOI : 10.24033/bsmf.1628.
- [12] M. F. ATIYAH et I. M. SINGER. « The Index of Elliptic Operators : III ». In : *Annals of Mathematics* 87.3 (1968), p. 546-604. ISSN : 0003486X.
- [13] COLLECTIF. « Singularities and exotic spheres ». en. In : *Séminaire Bourbaki : années 1966/67 1967/68, exposés 313-346*. Séminaire Bourbaki 10. talk :314. Société mathématique de France, 1968.
- [14] W. FULTON. *Algebraic curves*. 1969.
- [15] K. JÄNICH et E. OSSA. « On the signature of an involution ». In : *Topology* 8.1 (1969), p. 27-30. ISSN : 0040-9383. DOI : [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(69\)90027-5](https://doi.org/10.1016/0040-9383(69)90027-5).
- [16] J.P SERRE. *Cours d'arithmétique*. Sous la dir. de Presse universitaire de FRANCE. 1970. ISBN : 978-2130418351.
- [17] G.E.BREDON. *Introduction to compact transformation groups*. Sous la dir. d'Academic PRESS. T. 46. 1972.
- [18] D A GUDKOV. « The topology of real projective algebraic varieties ». In : *Russian Mathematical Surveys* 29.4 (1974).
- [19] Morris W. HIRSCH. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1976. ISBN : 978-0-387-90148-0. DOI : 10.1007/978-1-4684-9449-5.
- [20] G. WILSON. « Hilbert's sixteenth problem ». In : *Topology* 17.1 (1978), p. 53-73. ISSN : 0040-9383.
- [21] O.Y.VIRO. « Curves of degree 7, curves of degree 8, and the Ragsdale conjecture ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 254 (6 1980), p. 1306-1310.
- [22] I. ITENBERG. « Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale ». In : 1993.
- [23] E. BRUGALLÉ. « Real plane algebraic curves with asymptotically maximal number of even ovals ». In : (2004).

- [24] Max KOECHER et Aloys KRIEG. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Jan. 2007. ISBN : 978-3-540-49324-2. DOI : 10.1007/978-3-540-49325-9.
- [25] Michael HUTCHINGS. « Cup product and intersections ». In : (2011).
- [26] Frédéric MANGOLTE. *Variétés Algébriques Réelles*. 2017. ISBN : 978-2-85629-864-0.