

Développement en fractions continues

Dans toute cette feuille, les coefficients des fractions continues sont des entiers naturels, et non nuls hormis a_0 .

Exercice 1. [Quelques calculs]

(a) Calculer la valeur de

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}$$

à la main, puis en utilisant les relations de récurrence des réduites.¹

(b) Donner les développements en fractions continues de $8/7$, $5/3$, $541/87$, et $-1503/92$ (Pour cette dernière, on s'autorisera $a_0 \in \mathbb{Z}$).

(c) Démontrer que le développement en fraction continue d'un rationnel est toujours fini.

(d) Quelle est la relation entre la fraction continue de p/q et celle de q/p ?

Exercice 2. [Calcul des réduites et convergence]

On fixe une suite, a priori infinie, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_+^*$.

On rappelle que la n -ième *réduite* est la fraction $[a_0, \dots, a_n]$ et que la n -ième *convergente* est son expression sous forme de fraction irréductible p_n/q_n .

On rappelle que $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$ et $q_1 = a_1$, et que, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n = (-1)^n$$

et, pour tout $n \geq 2$,

$$q_n p_{n-2} - q_{n-2} p_n = (-1)^{n-1} a_n.$$

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$q_n \geq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

(b) Montrer que la suite des convergentes (p_n/q_n) converge vers un réel α tel que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

(c) Montrer que, si (a_n) ne stationne pas en zéro, α est irrationnel.

(d) Le développement de π en fractions continues de π commence par $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots]$. Donner les 6 premières décimales de π .

1. Qui sont au besoin rappelées dans l'exercice 2

Exercice 3. [Quelques fractions continues infinies simples]

(a) Soit ϕ le nombre d'or, c'est-à-dire la racine positive de $X^2 - X - 1$. Donner le développement complet de ϕ . Calculer ses réduites : Que peut-on en dire ?

Quel est le développement de l'autre racine de $X^2 - X + 1$?

(b) En regardant $\sqrt{2} + 1$, calculer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

(c) A l'aide d'une astuce similaire, calculer le développement de $\sqrt{5}$.

(d)(*) Développer $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$.

On verra au TD2 qu'un développement en fraction continue infini est périodique a.p.c.r ssi il représente un irrationnel algébrique de degré 2

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la valeur de la fraction continue $[n, n, \dots]$

Exercice 4. [Théorème de Liouville et mesure d'irrationalité]

Le but de cet exercice est d'établir certains énoncés classiques d'approximations diophantiennes, sans utiliser la théorie des fractions continues. Dans les prochains TDs, on verra comment les fractions continues permettent d'obtenir facilement des résultats plus puissants

Soit x un nombre réel.

(a) Montrer qu'il existe une infinité de paires $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|x - p/q| < 1/q^2$

Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > 1$, c'est-à-dire une racine réelle d'un certain polynôme irréductible P à coefficients rationnels. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Liouville, à savoir qu'il existe une constante $A > 0$ telle que pour toutes fractions p/q ,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^d}.$$

(b) Peut-on sauver le résultat dans le cas où $d = 1$?

(c) Montrer qu'on peut supposer P à coefficients entiers.

(d) Démontrer le théorème en établissant une majoration de $|P(\alpha) - P(p/q)|$ pour tout p, q .

(e) En déduire que la constante de Liouville $\alpha = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{n^2}}$ est transcendante.

Bonus : Construire de la même manière une infinité indénombrable de nombres transcendants.

On dit qu'un réel α est *approximable à l'ordre $d \in \mathbb{R}_+^*$* si l'équation $|\alpha - p/q| < p/q^d$ admet une infinité de solutions², et la *mesure d'irrationalité* de α est le réel :

$$\mu(\alpha) = \sup\{d > 0, \alpha \text{ est approximable à l'ordre } d\}$$

(f) Montrer que $\mu(\alpha) = \inf \left\{ s > 0, \exists A > 0, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^s} \right\}$

(g) Résumer les résultats précédents en terme de mesure d'irrationalité

Bonus : Montrer que l'ensemble des réels de mesure d'irrationalité infinie est dense dans \mathbb{R} (Un tel réel est appelé nombre de Liouville).

Il est pourtant de mesure nulle, et de dimension de Hausdorff nulle

Exercice 5. [Minoration des écarts aux convergentes]

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\left| \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

(b) En déduire que pour tout irrationnel α , on a

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

2. Si α est rationnel, on impose également $p/q \neq \alpha$