Nombres quadratiques, nombres de Liouville

Exercice 1. [Formules de calcul des réduites]
Soit $x = [a_0, a_1 \dots]$ une fraction continue finie ou infinie à coefficients réels et (p_n/q_n) la suite de ses réduites

(a) Montrer que, pour $n \geq 0$, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$

(b) Montrer que, pour $n \geq 1$, $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$

(c) Montrer que les suites $(p_{2n}/q_{2n})_{n\geq 0}$ et $(p_{2n+1}/q_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

(d) Montrer que, pour $k \geq 1$,
$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]$$

(e) Si $x = [a_0, \dots, a_n]$ est une fraction continue finie, on note, pour $1 \leq r \leq n$, le k-ième reste $r_k = [a_k, \dots, a_n]$. Montrer que :
$$x = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}$$

(f) Donner un analogue de (e) dans le cas où le développement de x est infini.

(g) En déduire une preuve de l'unicité du développement des réels en fractions continues infinies entières.

Exercice 2. [Encadrement]
Soient $\alpha < \beta < \alpha'$ trois réels positifs distincts tel que les développements en fractions continues de α et α' coïncident jusqu'à l'ordre n, pour un $n \geq 0$.

Montrer qu'il en est de même pour β.

Exercice 3. [Nombres de Liouville]

On a établi au TD1 le résultat suivant :

Theorème. *Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > 1$. Il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout rationnel $p/q \neq \alpha$,*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^d}.$$

On dira qu'un nombre réel α est de Liouville si sa mesure d'irrationalité est infinie, i.e., pour tout $d \geq 1$, il existe une infinité d'entiers (p, q) tels que $|\alpha - \frac{p}{q}| < 1/q^d$.

On note $L \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres de Liouville. Le résultat ci-dessus implique que L est composé de nombres transcendants.

(a) Montrer qu'un réel x est de Liouville ssi il existe des suites (p_n, q_n) telles que, pour tout $n \geq 1$, $q_n \geq 2$, $p_n/q_n \neq x$ et $|x - p_n/q_n| < \frac{1}{q_n^n}$

(b) Montrer que L est de mesure nulle

(c) $(*)$ Montrer que L est dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Soit $\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{10^{n!}}$. Montrer que $\alpha \in L$

(e) En construisant explicitement beaucoup de nombres de Liouville, montrer que l'ensemble des tels nombres a la puissance du continu (i.e. est en bijection avec $\mathbb{R}$)

Exercice 4. [Fractions continues périodiques et nombres quadratiques]

(a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique d'entiers positifs et $x = [a_0, a_1, \dots]$.
Montrer qu'il existe des entiers a, b, c, d tels que

$$x = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(b) En déduire que si le développement en fraction continue d'un réel α est périodique à partir d'un certain rang, celui-ci est quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme de degré deux à coefficients rationnels.

On cherche maintenant à montrer la réciproque de ce résultat. Soit α vérifiant l'équation

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

avec A, B, C entiers, $A \neq 0$.

On note $[a_0, \cdots, a_n, \cdots]$ le développement en fraction continue de α, et p_n/q_n les convergentes, $r_n = [a_{n+1}, \cdots]$ les restes.

(c) Démontrer que r_n est solution de l'équation

$$P_n(r_n) := A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0$$

avec

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 \\ B_n & = & 2Ap_{n-1}p_{n-2} + B(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2Cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n & = & Ap_{n-2}^2 + Bp_{n-2}q_{n-2} + Cq_{n-2}^2 \end{array}$$

(d) En déduire que $C_n = A_{n-1}$ et que $B_n^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC$ pour tout $n \geq 1$.

(e) Définissons δ_{n-1} par $p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \delta_{n-1}/q_{n-1}$. Que peut-on dire sur δ_{n-1} ?

(f) En déduire en remplaçant p_{n-1} dans son expression que

$$|A_n| < 2|A\alpha| + |A| + |B|$$

En déduire que $(r_n)_{n\geq 0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

(g) En déduire que $(r_n)_{n\geq 0}$ est périodique. Conclure

Exercice 5. [Calculs explicites de développements de nombres quadratiques]

(a) Calculer le développement en fraction continue de $\sqrt{7}$

(b) Soit $x = [\overline{a_0, \dots, a_{T-1}}] > 1$ un irrationnel quadratique, et x^c son conjugué de Galois. On suppose que $-1 < x^c < 0$.
Montrer que $\frac{-1}{x^c} = [\overline{a_{T-1}, \dots, a_0}]$.
Indication : On montrera que, si α irrationnel quadratique et $(u, v) \in \mathbb{Q}$:

$$(u\alpha + v)^c = u\alpha^c + v \text{ et } \frac{1}{\alpha^c} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^c$$

(c) Soit $\alpha = \sqrt{d}$ pour d un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que α est de la forme $\alpha = [a_0, \overline{a_1, a_2, \cdots, a_2, a_1, 2a_0}]$

(d) Que dire de la réciproque ?