Meilleures approximations rationnelles

Pour les exercices 1 et 2, toutes les fractions continues seront simples.

Exercice 1. [Approximations de type II]

Soit α un irrationnel, et (a, b) deux entiers premiers entre eux.

On dit que a/b est une approximation optimale (de second type) pour α si pour toute autre fraction c/d avec $d \leq b$, on a

$$|b\alpha - a| < |d\alpha - c| .$$

Nous allons établir le théorème suivant :

Theorème. *Si a/b est une approximation optimale de α, alors c'en est une convergente.*

(a) Montrer que ce résultat implique le théorème d'approximation vu en cours

Soit $[a_0, a_1, a_2 \cdots]$ le développement en fraction continue de α, dont on note p_n/q_n les convergentes, et a/b une approximation optimale de second type pour α.

(b) Démontrer que $a_0 \leq a/b \leq p_1/q_1$.

On suppose désormais que a/b n'est pas une convergente de α.

(c) Montrer qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que a/b est compris entre p_{n-1}/q_{n-1} et p_{n+1}/q_{n+1}.

(d) Montrer que $b > q_n$ puis que

$$|q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} |b\alpha - a| ,$$

en déduire la contradiction.

(e) (*) Que peut-on dire de la réciproque ?

Indication : On étudiera la fonction $(x, y) \mapsto |y\alpha - x|$, qui admet soit un, soit deux mimimums.

Exercice 2. [Conséquences du théorème d'approximation]

(a) Soit x un irrationnel et p/q une fraction telle que $|x - p/q| < 1/2q^2$. Montrer que p/q est une réduite de x.

Indication : En regardant $x = \sqrt{5}$, montrer que le résultat est faux si on supprime le facteur $1/2$.

(b) Soit (x, y) solution positive de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$, pour $d > 1$ entier non carré parfait. Montrer que (x/y) est une réduite de $\sqrt{d}$.

On rappelle qu'on connaît assez bien l'écriture en fractions continues de $\sqrt{d}$. Cela fournit un algorithme d'extraction des racines

(c) Soit $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots]$. Démontrer que de deux réduites consécutives de α, l'une d'entre elles au moins, par example p/q, vérifie

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{2q^2}$$

C'est un théorème de Vahlen. La constante $1/2$ *est améliorable par des expressions algébriques assez laides en q*