Sphère de Riemann et structure globale des applications de Möbius

Dans la suite, on considère des fractions continues généralisées. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont des suites réelles (voire complexes), on note

$$\tau_0(z) = b_0 + z \text{ et } \tau_n(z) = \frac{a_n}{b_n + z}$$

$$K_n(a,b) = \tau_0 \circ \cdots \circ \tau_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ldots}}$$

Si la suite des $K_n(a,b)$ converge, on notera $K(a,b)$ la limite.
Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, on définit l'homographie h_M associée à M sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$:

$$h_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si} \quad z \in \mathbb{C},\ cz+d \neq 0. \\ \infty & \text{si} \quad z \in \mathbb{C},\ cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{si} \quad z = \infty \end{cases}$$

Ceci définit un morphisme de groupe $SL_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$

Exercice 1. [Transformées de Möbius et fractions continues généralisées]
Dans cet exercice, on essayera autant que possible d'uiliser la notation matricielle
Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites complexes, et τ_n, K_n définis comme ci-dessus.

(a) On écrit $\tau_0 \circ \cdots \circ \tau_n(z) = \frac{A_{n-1}z + A_n}{B_{n-1}z + B_n}$. Ecrire une formule de récurrence pour A_n, B_n.
Calculer $A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1}$.
On prendra $A_{-1} = 1, B_{-1} = 0, A_0 = b_0, B_0 = 1$.

(b) Montrer que, si $\forall n, a_n \neq 0$, on peut écrire $K_n(a,b) = K_n(a', b')$, où $a'_n = 1$

(c) Montrer que toute homographie est la composée de deux applications de la forme $z \mapsto \frac{a}{b+z}$.

Exercice 2. [$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathbb{C}}$]
On rappelle que $P^1(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^2) \setminus \{(0,0)\}/(\mathbb{C}^*)$ où on quotiente par l'action diagonale. L'image d'un point $(x,y) \in (\mathbb{C}^*)^2$ est notée $[x:y]$. On parle de *coordonnées homogènes.*

(a) Donner un isomorphisme naturel entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Comment interpréter l'action par homographies de $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$? En déduire que l'action est au moins 2-transitive.
Pour cette raison, le groupe de Möbius est parfois appelé espace des transformations linéaires

Exercice 3. [L'action du groupe de Möbius]
On note $\mathcal{M}$ le groupe de Möbius, i.e. le groupe des applications $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ pour $ad - bc \neq 0$.

(a) Montrer que ce groupe est isomorphe à $PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, où l'action de $\mathbb{C}^*$ est diagonale.

(b) Montrer que cette l'action de $\mathcal{M}$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est 3-transitive, i.e. qu'elle envoie n'importe quel triplet de points distrincts sur un autre tel triplet.
Pour simplifier les calculs, on enverra un point quelconque sur (0, 1, ∞)

(c) Calculer le stabilisateur d'un triplet.

Exercice 4. [La projection stéréographique]

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon 1 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, centrée en $(0,0,0)$. Son point le plus haut est noté $N=(0,0,1)$.

La projection stéréographique d'un point $P \neq N$ de $\mathbb{S}^2$ sur le plan de hauteur nulle de $\mathbb{R}^3$ est définie comme le point d'intersection de la droite (NP) avec ce plan. La projection stéréographique de N est définie comme $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$.

(a) Montrer que l'antécédent d'un point $z = x+iy \in \widehat{\mathbb{C}}$ est donné par

$$f(z) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

La réciproque est $(X,Y,Z) \mapsto (\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z})$

(b) Soient $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ deux points de $\widehat{\mathbb{C}}$. Montrer que

$$||f(z) - f(z')||_{S^3} = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}} := 2 * d_{chord}(z,z')$$

Où $||\cdot||_{S^2}$ désigne la restriction de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$ à la sphère.
Bonus : Quelles sont les distances raisonnables sur la sphère ?

(c) En déduire que $z \mapsto 1/z$ est une isométrie pour la distance chordale.

(d) (**) Quelles sont les isométries pour la distance chordale ?
Indication : Montrer que pour $z \neq w$,

$$\frac{d_C(h_M(z), h_M(w))}{d_C(z,w)} = \frac{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}{\sqrt{(|az+b|^2+|cz+d|^2)(|aw+b|^2+|cw+d|^2)}}.$$

Conclure en supposant que h_M est une isométrie cordale, en passant à la limite avec $z \to 0$ et $w \to \infty$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. [1]

Exercice 5. [Convergence uniforme et convergence en trois points]

Rappelons que le groupe $\mathcal{M}$ des applications de Möbius est muni de la métrique σ_0 de convergence uniforme associée à la distance cordale. Soit h_n une suite d'homographies telle que la suite $h_n(z)$ converge pour au moins trois valeurs différentes de z, et avec trois limites distinctes. On veut montrer qu'alors h_n converge dans $\mathcal{M}$ (ce qui démontre au passage la complétude de $\mathcal{M}$).

(a) On suppose d'abord que la suite converge en 0, 1 et ∞ et la limite de la suite en chacun de ces points est elle-même. En définissant

$$f_n(z) = \frac{z - h_n(0)}{h_n(1) - h_n(0)}$$

montrer que $f_n \circ h_n$ provient d'une matrice de la forme

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}), \quad \text{avec } a_n = c_n + d_n,\ Re(d_n) \geq 0.$$

(b) Montrer que $d_n \to 0$ en regardant $f_n \circ h_n(\infty)$.

(c) En déduire que h_n converge dans $\mathcal{M}$ vers l'identité.

(d) Montrer le théorème dans le cas général.

---

1. In fine, M est une isométrie cordale si et seulement si elle est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$