Structure locale des applications de Möbius

On note $\mathcal{M}$ le groupe des homographies.

Exercice 1. [Transformations paraboliques, loxodromiques, hyperboliques]
Le but de cet exercice est de montrer que $tr(M)^2$ détermine la classe de conjugaison de h_M (si h_M diffère de l'identité), et d'étudier ces différentes classes.

(a) Montrer que, si $tr(M)^2 \in [0, 4[$, alors M est conjuguée à une rotation $z \mapsto e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$). On dit alors que h_M est **elliptique**

(b) Montrer que si $tr(M)^2 = 4$ est, h_M est conjuguée à $z \mapsto z + 1$.
On dit alors que h_M est **parabolique**

(c) Montrer que si $tr(M)^2 \in [4, +\infty[$, alors h_M est conjuguée à une application $z \mapsto kz$ où $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On dit que h_M est **hyperbolique**.

(d) Montrer que si $tr(M)^2$ est un complexe non réel, M est conjuguée à une application $z \mapsto kz$ où k est un complexe non réel, $|k| \neq 0, 1$.
On dit que h_M est **loxodromique**.

(e) Montrer que deux matrices réelles qui sont conjuguées sur $\mathbb{C}$ sont en fait conjuguées sur $\mathbb{R}$.
Bonus : Quelle est la généralité de ce résultat ?

On considère maintenant le comportement de la suite $u_{n+1} = h_M(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{C}$ fixé.

(f) Montrer que si h_M est parabolique, la suite converge vers l'unique point fixe de h_M.

(g) Montrer que si h_M est loxodromique ou hyperbolique, la suite converge vers un des deux points fixes de h_M, et que le point fixe en question est indépendent du u_0 choisi au départ (sauf si c'est déja l'autre point fixe).

(h) Montrer que si h_M est elliptique, la suite est soit stationnaire, soit périodique (et à valeurs dans un cercle-droite), soit dense dans un cercle-droite.

Exercice 2. [Un critère de points fixes]
Soient $f, h \in \mathcal{M}$ deux homographies. On note $[f, h] = f \circ h \circ f^{-1} \circ h^{-1}$
Démontrer que f et h ont un point fixe commun dans $\widehat{\mathbb{C}}$ si et seulement si $\text{tr}[f, h] = 2$

Indication : On utilisera l'identité suivante :

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, alors $tr([g, h]) = 2 + b^2\gamma^2 + b(a - d)\gamma(\alpha - \delta) - (a - d)^2\gamma\beta$

et on discutera selon si g est parabolique ou non.

Exercice 3. [Isométries pour la distance cordale, v2]

Cet exercice fournit une preuve alternative à la dernière question de l'exercice 4 du TD4

On cherche dans cet exercice à déterminer quelles sont les homographies qui sont des isométries pour la distance cordale, définie sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par

$$d_C(z, w) = 2\frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$

On pose h_M l'homographie associée à M avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est holomorphe sur son domaine de définition.
Bonus : A votre avis, comment définit-on une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$? A quoi correspondent-elles ?

(b) On note h'_M la dérivée, au sens complexe, de h_M. Montrer que, si h_M est une isométrie, alors

$$\frac{|h'_M(z)|}{1+|h_M(z)|^2} = \frac{1}{1+|z|^2}$$

(**) La réciproque est-elle vraie ?

(c) Montrer que, dans ce cas, pour tout $z, 1+|z|^2 = |az+b|^2 + |cz+d|^2$

(d) En déduire que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Autrement dit, ${}^t\overline{M}M = I_2$, et $M \in SU(2)$.

(e) On définit l'algèbre des quaternions par $\mathcal{H} = \{a + bi + cj + dj, (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\}$, où i, j, k vérifient les relations :

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1, & ij = k, & ji = -k, \\ j^2 = -1, & jk = i, & kj = -i, \\ k^2 = -1, & ki = j, & ik = -j, \end{array}$$

Montrer que $M \in SU(2)$ ssi $h_M(j) = j$, dans le sens où $(aj + b) = j \cdot (cj + d)$.

Exercice 4. [Distance chordale et norme L^2]

On munit $SL_2(\mathbb{C})$ de la norme L^2 : $|| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} || = \sqrt{|a^2| + |b^2| + |c^2| + |d^2|}$.

On se propose de montrer que, pour tout $g = h_M \in \mathcal{M}$, $\sigma(g, id) \leq \sqrt{6}||g - I_2||$.

(a) (*) Montrer qu'il existe une matrice $B \in SU(2)$ telle que, avec $h = h_B$, hgh^{-1} fixe ∞.

(b) Montrer que, pour tout $M \in SL_2(\mathbb{C}), ||BM|| = ||M||$, et $||B^{-1}MB - I_2|| = ||M - I_2||$

(c) Montrer que $\sigma(hgh^{-1}, I_2) = \sigma(g, I_2)$.

On peut donc supposer que g fixe ∞. Si g est loxodromique ou hyperbolique, on suppose de plus (on peut le faire, quitte à changer h), qu'∞ est son point répulsif.

On écrit alors $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, où $\alpha\delta = 1$ et $|\alpha| \leq 1 \leq |\delta|$.

(d) A l'aide d'une inégalité triangulaire bien choisie, montrer que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$,

$$d_{chord}(z, gz) \leq \frac{2|z||1 - \alpha/\delta|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\alpha z/\delta|^2}} + 2|\beta/\delta|$$

(e) A l'aide d'une inégalité arithmético-géométrique, montrer que

$$\frac{2|z||1 - \alpha/\delta|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\alpha z/\delta|^2}} + 2|\beta/\delta| \leq |\alpha - \delta| + 2|\beta|$$

(f) Conclure.

Bonus : Déduit de l'exercice ci-dessus et de l'exercice 5 du TD4 que la topologie induite par σ sur $\mathcal{M}$ coïncide avec la topologie quotient $SL_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$.