

Équivalences et convergence de fractions continues

Exercice 1. [Une formule d'Euler et développements de e, π]

Le but de cet exercice est de démontrer une formule due à Euler : pour une suite complexe $(c_n)_{n \geq 2}$:

$$1 + c_2 + c_2c_3 + c_2c_3c_4 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{c_2}{1 + c_2 - \frac{c_3}{1 + c_3 - \frac{c_4}{1 + c_4 - \dots}}}}$$

Et d'étudier certaines applications.

(a) Prouver par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour toutes suite complexes (a_0, \dots, a_{n+1}) et (b_1, \dots, b_n) :

(1) $\frac{-b_1}{1+b_1} \frac{-b_2}{1+b_2} \dots \frac{-b_n}{1+b_n} \neq -1$

(2) $\sum_{k=0}^n \prod_{j=0}^k a_j = \frac{a_0}{1+} \frac{-a_1}{1+a_1} \dots \frac{-a_n}{1+a_n}$

Indication : Calculer $\frac{a_0}{1 - \frac{a_1}{1+a_1+x}}$ pour $x \neq -1$

(b) Montrer que

$$\arctan(x) = \frac{x}{1 - \frac{\frac{-x^2}{3}}{1 + \frac{-x^2}{3} - \frac{\frac{-3x^2}{5}}{1 + \frac{-3x^2}{5} - \frac{\frac{-5x^2}{7}}{1 + \frac{-5x^2}{7} - \dots}}}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 - x^2 + \frac{(3x)^2}{5 - 3x^2 + \frac{(5x)^2}{7 - 5x^2 + \dots}}}}$$

On rappelle que deux écritures $K(a_n, b_n)$ et $K(a_n^*, b_n^*)$ sont équivalentes s'il existe une suite r_n telle que $r_0 = 1, r_n \neq 0, a_n^* = r_n r_{n-1} a_n$ et $b_n^* = r_n b_n$ pour tout $n \geq 1$.

(c) En déduire que $\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}}$

(d) Montrer que

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + x - \frac{\frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{3}x}{1 + \frac{1}{3}x - \frac{\frac{1}{4}x}{1 + \frac{1}{4}x - \dots}}}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + x - \frac{x}{2 + x - \frac{2x}{3 + x - \frac{3x}{4 + x - \dots}}}}}$$

(e) En déduire que

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \dots}}}$$

Exercice 2. [Théorème de Worpitzky]

Théorème. Soit a_n une suite complexe telle que, pour tout n , $|a_n| \leq 1/4$. Alors la suite $K(a_n|1)$ converge.¹

- (a) Soient $K(a_n, b_n)$ une fraction continue. On suppose qu'il existe une suite réelle $p_n \geq 1$ telle que

$$\left| \frac{a_1}{b_1} \right| \leq \frac{p_1 - 1}{p_1} \text{ et } \left| \frac{a_n}{b_n b_{n-1}} \right| \leq \frac{p_n - 1}{p_n p_{n-1}}$$

Montrer que $K(a_n|b_n)$ converge.

Indication : On appliquera le théorème de Pringsheim à une suite équivalente pour $r_n = p_n/b_n$

- (b) En déduire le théorème de Worpitzky
(c) Montrer que, de plus, la limite est comprise dans le disque de centre $4/3$ et de rayon $2/3$. On montrera que toutes les réduites sont contenues dans ce disque
(d) Montrer que $K(1|b_n)$ converge si $\frac{1}{|b_{2n-1}|} + \frac{1}{|b_{2n}|} \leq 1$ pour $n \geq 1$

Exercice 3. [Images de domaines par des homographies]

Soit h une homographie.

- (a) Pour $h(z) = (z - i)/(z + i)$, montrer que l'image par h du demi-plan défini par $\Im(z) \geq 0$ est le disque unité.
(b) Expliquer pourquoi l'image par une homographie d'un domaine déterminé par une inégalité de la forme $a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z) \geq c$ est soit un domaine de cette forme, soit un disque.
Indication : Penser aux bords.
(c) Pour b complexe avec $\operatorname{Re}(b) > 0$, montrer que l'image du domaine $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ par l'homographie $z \mapsto 1/(z + b)$ est la boule de centre $1/2\operatorname{Re}(b)$ et de rayon $1/2\operatorname{Re}(b)$.
(d) En déduire que pour la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $\operatorname{Re}(b_1) > 0$ et $\operatorname{Re}(b_n) \geq 0$ pour tout n , si la fraction continue $K(1|b_n)$ converge, sa limite appartient à la boule de centre $1/(2\operatorname{Re}(b_1))$ et de rayon $1/(2\operatorname{Re}(b_1))$

Exercice 4. [Stabilité explicite]

Si f est une homographie, on note

$$L(f) = \sup_{z \neq w} \frac{d_{\mathbb{C}}(f(z), f(w))}{d_{\mathbb{C}}(z, w)}$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites d'homographies.

On note $F_n = f_1 \cdots f_n$, $G_n = g_1 \cdots g_n$ et $h_n = G_n F_n^{-1}$.

- (a) Montrer que $\sigma_0(h_n^{-1}, h_{n+1}^{-1}) = \sigma_0(F_n g_{n+1}, F_n f_{n+1})$ pour tout n .
(b) En déduire que la suite des h_n converge si la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma_0(g_{n+1}, f_{n+1})}{\prod_{i=1}^n L(f_i)}$$

converge, et que pour la limite h , on a $\sigma_0(G_n, h F_n) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$.

On remarquera que $\sigma_0(h \circ f, h \circ g) \leq L(h) \cdot \sigma_0(f, g)$

- (c) Donner explicitement une suite de rayons (r_n) tels que, pour toute suite (g_n) d'homographies avec $\sigma_0(f_n, g_n) \leq r_n$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(G_n(z))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(F_n(z))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

★ Joyeux Noël ★

1. On rappelle la convention : $K(a_n|1) = \frac{a_1}{1 + \frac{a_2}{1 + \dots}}$