TD1 : Groupes topologiques

Les parties en rouge sont celles qui diffèrent du TD tel qu'initialement distribué

Exercice 1. [Groupes topologiques issus de $\mathbb{R}$]

(1) Montrer que les sous-groupes fermés de $(\mathbb{R}, +)$ sont $\mathbb{R}$ ou de la forme $a \cdot \mathbb{Z}$ pour un $a \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que les morphismes continus de groupes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont exactement de la forme $x \mapsto a \cdot x$, pour $a \in \mathbb{R}$

(3) Quels sont les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ vers le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$?

(4) Quelles sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? De $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$?
Rappel : Il a été vu en cours que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est connexe*

Exercice 2. [Quelques sous-groupes topologiques usuels]

Soit G un groupe topologique, H un sous-groupe de G, et $M \subset G$ une partie quelconque

(1) On suppose G séparé. Montrer que $C_G(M) := \{g \in G, \forall m \in M, g \cdot m = m \cdot g\}$ est fermé.
Cet ensemble s'appelle le centralisateur de M dans G

(2) On suppose H fermé. Montrer que $N_G(H) = \{g \in G, g^{-1}Hg = H\}$ est également fermé.
Cet ensemble s'appelle le normalisateur de H dans G

(3) Montrer l'adhérence de H est encore un sous-groupe de G.
On utilisera le critère suivant : $\bar{H} = \{x \in G, \forall x \in U \text{ ouvert }, U \cap H \neq \emptyset\}$

Exercice 3. [Produits et quotients de groupes topologiques]

(1) Soit G un groupe topologique, et H sous-groupe de G
Montrer que H est un groupe topologique, et que la projection $G \to G/H$ est ouverte.

(2) Soit N sous-groupe distingué de G. Montrer que G/N est un groupe topologique.
Indication : $G/N \times G/N \cong (G \times G)/(N \times N)$

(3) Montrer que N est fermé si et seulement si G/N est séparé.

(4) Montrer qu'un produit de groupes topologiques, muni de la topologie produit, est un groupe topologique.

Exercice 4. [Un groupe topologique très naturel]

Soit Sym($\mathbb{N}$) l'ensemble des bijections $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, muni de la composition. On le munit de la distance définie, pour $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, par $d(\sigma, \tau) = 2^{-v(\sigma,\tau)}$, où

$$v(\sigma, \tau) = inf(\{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \neq \tau(n)\} \cup \{\infty\})$$

(1) Montrer que σ définit bien une distance, et qu'elle est de plus ultramétrique

(2) Montrer que Sym($\mathbb{N}$) est alors un groupe topologique.

(3) Montrer que Sym($\mathbb{N}$) n'est pas localement compact ☹
Indication : Commencer par montrer qu'il n'est pas compact

Exercice 5. [Un peu d'espaces totalement discontinus]

(1) Montrer qu'un ensemble muni de la topologie discrète est totalement discontinu. Montrer qu'un ensemble muni de la topologie grossière est connexe

(2) Montrer que, dans un espace totalement discontinu, les singletons sont fermés.

(3) Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, est totalement discontinu.

(4) Montrer qu'un produit d'espaces totalement discontinus est totalement discontinu.

(5) Montrer que l'espace de Cantor réel $K = \{\sum_n b_n/3^n, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\}$ est totalement discontinu.
On montrera que K est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit

Exercice 6. [Bases de voisinages clopen]

Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit X un espace compact Haussdorf totalement discontinu. Alors les ouverts fermés forment une base de voisinage de X.*

On fixe X un espace compact Haussdorf totalement discontinu.

(1) Soit F un fermé de X. Montrer que si on écrit $F = U \cup V$ union d'ouverts de X, alors U et V sont ouverts fermés.

(2) Soit F un fermé de X contenant un point x. Montrer qu'il existe U ouvert-fermé tel que $x \in U \subset F$.

(3) Soit $x, y \in X$. Montrer qu'il existe un ouvert fermé F_y contenant x et non y.

(4) Soit U un ouvert de X, et $x \in X$. En appliquant la question précédente à tout $y \in X \setminus U$, construire un ouvert fermé F tel que $x \in F \subset U$

Bonus : Quelle sont les hypothèses sur X utilisées dans chaque question ?