TD2 : Espaces totalement discontinus, groupes localement compacts

Exercice 1. [Exemples d'espaces totalement discontinus]
On rappelle qu'un espace topologique X est dit totalement discontinu si ses composantes connexes sont des points (ou, de manière équivalente ; ses seules sous-parties connexes sont des points)

(1) Montrer qu'un ensemble muni de la topologie discrète est totalement discontinu.
(2) Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, est totalement discontinu.
(3) Montrer que l'espace de Cantor réel $K = \{\sum_n b_n/3^n, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\}$ est totalement discontinu.
(4) Montrer que, dans un espace totalement discontinu, les singletons sont fermés.
(5) (Bonus) Trouver un espace topologique connexe X muni d'un point $x \in X$ tel que $X \setminus \{x\}$ est totalement discontinu

Exercice 2. [Bases de voisinages clopen]
Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit X un espace compact totalement discontinu. Alors les ouverts fermés forment une base de voisinage de X.*

On fixe X un espace compact[1] totalement discontinu
Attention : les question 1, 2 ne permettent pas de déduire la question 3. Utiliser l'exo 1 du TD3 à la place

(1) Soit F un fermé de X. Montrer que si on écrit $F = U \cup V$ union d'ouverts de X, alors U et V sont ouverts fermés dans F.
(2) Soit F un fermé de X contenant un point x. Montrer qu'il existe U ouvert-fermé tel que $x \in U \subset F$.
(3) Soit $x, y \in X$. Montrer qu'il existe un ouvert fermé F_y contenant x et non y.
(4) Soit U un ouvert de X, et $x \in X$. Construire un ouvert fermé F tel que $x \in F \subset U$

Remarque : Quelle sont les hypothèses sur X utilisées dans chaque question ?

Exercice 3. [Exemples de groupes localement compacts]

(1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique localement compact
Bonus : Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni de la topologie produit ; montrer que $GL(V)$ est localement compact si et seulement si V est de dimension fini
(2) Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique compact connexe
(3) Montrer qu'un sous-groupe fermé d'un groupe topologique localement compact est encore un groupe topologique localement compact
(4) Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas localement compact

1. donc Haussdorf

(5) (Bonus) Est-ce qu'un produit de groupes localement compacts est localement compact ?

Exercice 4. [Un groupe topologique]
Soit Sym($\mathbb{N}$) l'ensemble des bijections $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, muni de la composition. On le munit de la distance définie, pour $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, par $d(\sigma, \tau) = 2^{-v(\sigma,\tau)}$, où

$$v(\sigma, \tau) = inf(\{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \neq \tau(n)\} \cup \{\infty\})$$

(1) Montrer que σ définit bien une distance, et qu'elle est de plus ultramétrique

(2) Montrer que Sym($\mathbb{N}$) est alors un groupe topologique.
On montrera la continuité de la composition, puis la continuité de $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$

(3) Montrer que Sym($\mathbb{N}$) est totalement discontinu

(4) Montrer que Sym($\mathbb{N}$) n'est pas localement compact
Indication : Commencer par montrer qu'il n'est pas compact

(5) (Bonus) : Montrer que la distance v n'en fait pas un espace complet, mais qu'il existe une autre distance, qui induit la même topologie, et qui fait de Sym($\mathbb{N}$) un espace complet.
Attention : La complétude est une propriété métrique, et non topologique ! Bonus : Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{Q}$ qui en fasse un espace complet

Exercice 5. [Compactifié de Stone Cech]
On nomme filtre de $\mathbb{N}$ un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que :

— Si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subset Y$, alors $Y \in \mathcal{F}$

— $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies

— $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Un ultrafiltre est un filtre $\mathcal{F}$ tel que, pour tout $Y \subset \mathbb{N}$; $Y \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{N} \setminus Y \in \mathcal{F}$. On note $\beta\mathbb{N}$ l'ensemble des ultrafiltres de $\mathbb{N}$.
On munit $\beta\mathbb{N}$ de la topologie engendrée par les ouverts $B(U) = \{\mathcal{F} \text{ ultrafiltre }, U \in \mathcal{F}\}$, pour U sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

(1) Montrer que $\beta\mathbb{N}$ est séparé

(2) Construire une injection canonique $\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$

(3) Soit E un sous-ensemble de $P(\mathbb{N})$ stable par intersections finies et ne contenant pas $\emptyset$. Montrer que E est contenu dans un filtre

(4) Montrer que $\beta\mathbb{N}$ est compact.
On admettra que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre (repose sur l'axiome du choix)

Remarque : $\beta\mathbb{N}$ est totalement discontinu (en fait mieux que ça, il est *extrêmement discontinu* ; i.e. l'adhérence de tout ouvert est ouverte).