TD2 : Espaces totalement discontinus, groupes localement compacts

Exercice 1. [Exemples d'espaces totalement discontinus]
On rappelle qu'un espace topologique X est dit totalement discontinu si ses composantes connexes sont des points (ou, de manière équivalente ; ses seules sous-parties connexes sont des points)

(1) Montrer qu'un ensemble muni de la topologie discrète est totalement discontinu.

(2) Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$, est totalement discontinu.
Soit $S \subset \mathbb{Q}$ quelconque. Soit $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui ne majore ni ne minore S. Alors $S = S \cap]-\infty, c[\sqcup]c, +\infty[$ ouverts disjoints de S. Donc S pas connexe
Si $x < y \in \mathbb{Q}$, on a des ouverts disjoints contenant resp x et y, donnés par $]-\infty, c[\cap \mathbb{Q}$ et $]c, +\infty[$ pour $x < c < y$ irrationnel. Donc x, y n'appartiennent pas à la même composante connexe

(3) Montrer que l'espace de Cantor réel $K = \{\sum_n b_n/3^n, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}\}$ est totalement discontinu.
Méthode 1 : Soit $x, y \in K$. On veut montrer que les deux points appartiennent à des composantes connexes disjointes.
Il existe $n >> 1$ et un intervalle de longueur 3^{-n} qui n'appartient pas à K entre x et y (avec des inégalités, ou avec l'écriture en base 3, au moment où elles diffèrent). On prend c dans cet intervalle. Alors $K \cap [0, c]$ et $K \cap [c, 1]$ sont des ouverts disjoints
Méthode 2 : On a $K \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit, via les applications de shift évidentes. En effet, la convergence est donnée pointwise. Or, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu comme produit d'espace totalement discontinu (On prends deux points, s'ils étaient dans la même composante connexe, on projette sur une différence, c'est pas connexee, or image de connexe est connexe)

(4) Montrer que, dans un espace totalement discontinu, les singletons sont fermés.
$\{x, y\}$ n'est pas connexe, donc union de deux ouverts $U_x \cap \{x,y\} \sqcup U_y \cap \{x,y\}$. U_x est un ouvert qui touche x mais pas y. On l'applique pour tout $y \neq x$

(5) (Bonus) Trouver un espace topologique connexe X muni d'un point $x \in X$ tel que $X \setminus \{x\}$ est totalement discontinu
Tipi de Cantor

Exercice 2. [Bases de voisinages clopen]
Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit X un espace compact totalement discontinu. Alors les ouverts fermés forment une base de voisinage de X.*

On fixe X un espace compact[1] totalement discontinu

(1) Soit F un fermé de X. Montrer que si on écrit $F = U \cup V$ union d'ouverts disjoints de X, alors U et V sont ouverts fermés dans F.
Un fermé d'un fermé est fermé

(2) Soit F un fermé de X contenant un point x. Montrer qu'il existe U ouvert-fermé de F tel que $x \in U \subset F$.
X est totalement discontinu, donc F n'est pas connexe. Il nest discontinu, on l'écrit comme union de deux ouverts stricts, qui sont aussi fermés car fermés d'un fermé. L'ouvert contenant x convient

1. Haussdorf

(3) Soit $x, y \in X$. Montrer qu'il existe un ouvert fermé F_y contenant x et non y.
Par séparation, on a $x \in U_x$ et $y \in U_y$ ouverts disjoints. Le complémentaire de U_y est un fermé ne contenant pas y. On applique la question 1

(4) Soit U un ouvert de X, et $x \in X$. Construire un ouvert fermé F tel que $x \in F \subset U$
Pour tout $y \in X \setminus U$, on se donne F_y comme dans la question 3. Ainsi, $X = U \cup \bigcup_{y \in X \setminus U} F_y$, et l'union peut être rafinée en un recouvrement finie par des ouverts fermés. L'union est encore alors ouverte fermée $X = U \cup \bigcup_{i=1}^{n} F_{y_i}$. X est fermé, donc le complémentaire de cette union est ouverte fermée, et convient.

Remarque : Quelle sont les hypothèses sur X utilisées dans chaque question ?
Respectivement : Rien, Totalement discontinu, TD + Haussdorf, TD + Haussdorf + Compact

Exercice 3. [Exemples de groupes localement compacts]

(1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique localement compact
C'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$; les boules ouverte autour de id forment une base de voisinage relativement compacte
Bonus : Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni de la topologie produit ; montrer que $GL(V)$ est localement compact si et seulement si V est de dimension fini
Par le théorème de Ritz, les boules fermées sont compactes en dimension finie

(2) Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique compact connexe Fermé car $f^{-1}(Id)$ où $f(A) = A^t A$.
Compact car borné : $SO_n(\mathbb{R}) \subset \{M, ||M||^2 = n\}$, où $||A|| = tr(A^t A)$ est une norme
Connexité : Diagonalisable en base orthonormée en un truc avec une identité et des matrices de rotation

(3) Montrer qu'un sous-groupe fermé d'un groupe topologique localement compact est encore un groupe topologique localement compact
Un fermé d'un espace localement compact est encore localement compact

(4) Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas localement compact Il est extrêmement discontinu. S'il était localement compact, par Danzig, il y aurait des sous-groupes ouverts voisinages de zéro. Il n'y en a clairement pas

(5) (Bonus) Est-ce qu'un produit de groupes localement compacts est localement compact ?
Nope :

Exercice 4. [Un groupe topologique]

Soit $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ l'ensemble des bijections $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, muni de la composition. On le munit de la distance définie, pour $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, par $d(\sigma, \tau) = 2^{-v(\sigma,\tau)}$, où

$$v(\sigma, \tau) = inf(\{n \in \mathbb{N}, \sigma(n) \neq \tau(n)\} \cup \{\infty\})$$

(1) Montrer que σ définit bien une distance, et qu'elle est de plus ultramétrique
Soient σ, τ, φ trois permutations. On veut montrer que $v(\sigma, \varphi) \geq min(v(\sigma, \tau), v(\tau, \varphi))$. On suppose sans perte de généralité que $v(\sigma, \tau) = n \geq v(\tau, \varphi) = k$; i.e. $\tau = \sigma$ avant n, et $\tau = \varphi$ avant k. Alors $\sigma = \varphi$ avant k.

(2) Montrer que $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ est alors un groupe topologique.
On montrera la continuité de la composition, puis la continuité de $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$
Soit $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$ qui CVS. Alors $\sigma_n \circ \tau_n$ CVS
On suppose $\sigma_n \to \sigma$. On va montrer que $\sigma_n^{-1} \to \sigma^{-1}$. Soit $\tau = \sigma_n \circ \sigma^{-1} \to id$ Si $\tau^{-1} \to id$, alors $\sigma \circ \sigma_n^{-1} \to id$, ce qui conclut. On peut donc supposer $\sigma_n \to id$. Alors clairement $\sigma_n^{-1} \to id$

(3) Montrer que $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ est totalement discontinu
C'est un espace métrique à métrique discrète. Les boules ouvertes de rayon pas dans le groupe de valeur sont aussi fermées, donc de complémentaire ouvert.

(4) Montrer que $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ n'est pas localement compact
Indication : Commencer par montrer qu'il n'est pas compact

(5) (Bonus) : Montrer que la distance v n'en fait pas un espace complet, mais qu'il existe une autre distance, qui induit la même topologie, et qui fait de $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ un espace complet.
Attention : La complétude est une propriété métrique, et non topologique ! Bonus : Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{Q}$ qui en fasse un espace complet

Exercice 5. [Compactifié de Stone Cech]
On nomme filtre de $\mathbb{N}$ un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que :

— Si $X \in \mathcal{F}$ et $X \subset Y$, alors $Y \in \mathcal{F}$

— $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies

— $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Un ultrafiltre est un filtre $\mathcal{F}$ tel que, pour tout $Y \subset \mathbb{N}$; $Y \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus Y \in \mathcal{F}$. On note $\beta\mathbb{N}$ l'ensemble des ultrafiltres de $\mathbb{N}$.
On munit $\beta\mathbb{N}$ de la topologie engendrée par les ouverts $B(U) = \{\mathcal{F} \text{ ultrafiltre }, U \subset \mathbb{N}\}$, pour U sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

(1) Montrer que $\beta\mathbb{N}$ est séparé

(2) Construire une injection canonique $\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$

(3) Soit E un sous-ensemble de $P(\mathbb{N})$ stable par intersection et ne contenant pas $\emptyset$. Montrer que E est contenu dans un filtre

(4) Montrer que $\beta\mathbb{N}$ est compact.
On admettra que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre (repose sur l'axiome du choix)

Remarque : $\beta\mathbb{N}$ est totalement discontinu (en fait mieux que ça, il est *extrêmement discontinu* ; i.e. l'adhérence de tout ouvert est ouverte)

Correction : cf. here (A.Deloro)