

TD3 : Groupes profinis

Exercice 1. [Erratum du TD2]

Nous allons établir le résultat suivant :

Proposition. *Soit X un espace topologique compact, et $x \in X$. Alors, l'intersection des ouverts-fermés de X contenant x est connexe*

On fixe X un espace topologique compact, et $x \in X$.

- (1) Montrer que X est **normal**, i.e., si $F, G \subset X$ fermés d'intersection vide, on peut trouver deux ouverts de X : U et V , tels que $F \subset U$, $G \subset V$, et $U \cap V = \emptyset$.

Soit A l'intersection des ouverts fermés de X contenant x . On écrit $A = F \sqcup G$, où F, G ouverts (donc aussi fermés) de A . Sans perte de généralité, on suppose $x \in F$.

Par normalité de X , on choisit $F \subset U$ et $G \subset V$ deux ouverts de X tels que $U \cap V = \emptyset$.

- (2) Montrer que F, G sont fermés dans A . Construire un ouvert fermé I de X tel que $x \in I$ et $I \subset U \cup V$.
- (3) En écrivant $I = (I \cap U) \sqcup (I \cap V)$, montrer que $V = \emptyset$.
- (4) En déduire que tout espace topologique compact totalement discontinu a une base de voisinages ouvert-fermés

On utilisera la question 4 de l'exercice 2 du TD2

Exercice 2. [Autour de $SL_n(\mathbb{Z})$]

- (a) Soit un entier $r \geq 2$. Montrer que la réduction modulo r des coefficients induit un morphisme de groupe $f_r : SL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$
- (b) En déduire que $SL_n(\mathbb{Z})$ est résiduellement fini.
- (c) Montrer que, pour tout vecteur colonne $X = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, il existe $M \in SL_n(\mathbb{Z})$ tel que $MX = (b, 0, \dots, 0)$; où $b = \text{PGCD}(a_1, \dots, a_n)$.
Indice : Commencer par le cas $n = 2$.
- (d) Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{Z})$, il existe $P, Q \in SL_n(\mathbb{Z})$ tels que :

$$PMQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

pour des entiers relatifs $d_1 | d_2 | \dots | d_r$.

Dans la suite, on fixe p un nombre premier, et k un entier ≥ 1

- (e) Soit $b_1, \dots, b_N \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^N$. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}^N$ tels que :
- Pour tout i , $a_i \equiv b_i \pmod{p^k}$
 - Pour tout $i \neq j$; $\text{PGCD}(a_i, a_j)$ est une puissance de p
- (f) En déduire que les applications f_{p^k} sont surjectives.

(g) (Bonus) : Que dire de f_r pour n quelconque ?

Exercice 3. [Métriques invariantes sur certains groupes]

Soit G un groupe ; dont on suppose qu'il existe une suite décroissante de sous-groupes

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots \text{ tels que } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{1\}$$

Pour $g, h \in G$, on note $n(g, h) = \max\{n \geq 0; g^{-1}h \in G_n\}$ (où $n(g, g) = \infty$).

- (1) Montrer que l'appliation $d(g, h) := 2^{-n(g, h)}$ définit une distance ultramétrique
- (2) Montrer que la distance d invariante à gauche et que, si les G_n sont distingués, elle est également invariante à droite
On dit que d est invariante à gauche (resp. droite) si $d(fg, fh) = d(g, h)$ (resp. $d(gf, hf) = d(g, h)$) pour tout $f, g, h \in G$
- (3) On pose $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ et $G_n = \{(g_k)_{k \in \mathbb{N}}, \forall 0 \leq k \leq n-1, g_k = 0\}$.
 Montrer que G_n est distingué. Quelle est la distance ainsi obtenue ?
- (4) Si $G = \text{Sym}(\mathbb{N})$ et $G_n = \{\sigma \in \text{Sym}, \forall 0 \leq k \leq n-1, \sigma(k) = k\}$, montrer que la distance ainsi définie coïncide avec celle vue au TD3. La distance est-elle invariante à droite ?

Exercice 4. [Groupes profinis comme limite projective]

Soit $(I, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné, $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes, et des morphismes de groupes $f_{i,j} : G_j \rightarrow G_i$ dès que $i \leq j$, tels que, pour tout $i \leq j \leq k$; $f_{i,i} = \text{id}_{G_i}$ et $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$.

La **limite projective** des G_i selon I , noté $\varprojlim_I G_i$, est :

$$\varprojlim_I G_i = \left\{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i, \forall i \leq j; f_{i,j}(g_j) = g_i \right\}$$

Les groupes profinis sont, en fait, exactement les limites projectives de groupes finis (avec la topologie discrète) - d'où leur nom.

- (1) Montrer que $\varprojlim_I G_i$ est un sous-groupe de $\prod_{i \in I} G_i$
- (2) On munit tous les G_i d'une topologie qui les rend séparés, et $\prod_{i \in I} G_i$ de la topologie produit. Montrer que $\varprojlim_I G_i$ est un fermé de $\prod_{i \in I} G_i$.
Indication : Si $f, g : X \rightarrow Y$ continues et Y est séparé, alors $\{x \in X, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X
- (3) Soit H un groupe. Montrer que la donnée d'un morphisme $H \rightarrow \varprojlim_I G_i$ revient à se donner une famille de morphismes $\varphi_i : H \rightarrow G_i$ tels que, pour tout $i \leq j$; $f_{i,j} \circ \varphi_j = \varphi_i$