TD4 : Autour de $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}_p$

Dans tout ce qui suit, p est un nombre premier

On rappelle les définitions suivantes :

1. $\mathbb{Z}_p := \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{(x_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \forall n, x_{n+1} \cong x_n \mod [p^n]\}$, vu comme sous-anneau du produit, muni de la topologie induite, qui est induite par la valuation p-adique $v_p((x_n)_{n\geq 1}) = \inf(\{n \geq 1, x_n \neq 0\} \sqcup \{\infty\})$.
   La distance associée est $d((x_n),(y_n)) = d((x_n)-(y_n),0) = p^{-v_p((x_n)-(y_n))}$
   On a une inclusion naturelle $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ d'image dense, donnée par $x \mapsto (x \mod p^n)_{n\geq 1}$
2. $\mathbb{Q}_p := \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p)$. C'est un corps topologique complet muni d'une distance ultramétrique, induite par l'extension de v_p à $\mathbb{Q}_p$ via $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$.
   On a une inclusion naturelle $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_p$.

Exercice 1. [Convergences]

1. Montrer que, pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p$, la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si $a_n \to 0$.
2. Déduire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_p$ converge ssi $v_p(u_{n+1} - u_n) \to \infty$.
3. Montrer que la suite des $(1/10^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}_p$.
   Pour quelles valeur de p la suite des $(10)^n$ converge-t'elle ?
4. Montrer que la suite des $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{Q}_p$, pour tout p.
   Quelle est la limite ?

Exercice 2. [Mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$]
Soit μ *la* mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$ telle que $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$. Soit A un borélien de $\mathbb{Q}_p$.

(1) Montrer que $\mu(p \cdot \mathbb{Z}_p) = p^{-1}$.

(2) Montrer que, si a est inversible dans $\mathbb{Z}_p^*$, $\mu(aA) = \mu(A)$

(3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ non nul, $\mu(x \cdot A) = p^{-v_p(x)}\mu(A)$.

Exercice 3. [$\mathbb{Z}_p$ comme espace des séries entières en la variable p]
L'objectif de cet exercice est d'établie et de se familiariser avec l'écriture suivante :

$$\mathbb{Z}_p \cong \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i p^i ; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}$$

qui est très utile en pratique. On note provisoirement X l'ensemble ci-dessus, qu'on va munir d'une structure d'anneau topologique.

(1) Trouver une bijection $\varphi : X \to \mathbb{Z}_p$ entre cette présentation.
    Quelle est alors l'injection naturelle $\mathbb{N} \to X$?

(2) Quelle est la distance induite par φ sur X ?

(3) On munit X de la structure d'anneau induite par transfert de structure via φ. Décrire l'addition sur X.

(4) Quelle est la différence entre X et $\mathbb{F}_p[[X]]$, anneau des séries entières à coefficient dans $\mathbb{F}_p$?

(5) Montrer que $\mathbb{Q}_p \cong \{\sum_{i \geq -N} a_i p^i ; N \in \mathbb{N}, 0 \leq a_i \leq p-1\}$.

Exercice 4. [Calculs explicites]

(1) Ecrire -1 dans $\mathbb{Z}_p$ avec les deux écritures ci-dessus. Ecrire -3 dans $\mathbb{Z}_5$.

(2) Quel est l'inverse multiplicatif de $(1-p)$ dans $\mathbb{Z}_p$?

(3) Ecrire $1/3$ dans $\mathbb{Z}_7$
Indication : $3 * 229 \equiv 1 \mod 343$

(4) Soit $\alpha = a_0 + a_1 \cdot 7 + a_2 \cdot 7^2 + \cdots \in \mathbb{Z}_7$ tel que $\alpha^2 = 2$.[1] Quelles sont les valeurs possibles de a_0 ? Pour la plus petite valeur de a_0, calculer a_1, a_2.
Indication : $2060 \equiv 2 \mod 343$

Exercice 5. [Lemme de Hensel]
On va démontrer le résultat suivant :

Lemma. *Soit $f \in \mathbb{Z}_p[X]$, dont la réduction modulo p est notée $\bar{f} \in \mathbb{F}_p[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{F}_p$ tel que $\bar{f}(a) = 0$ et $\bar{f}'(a) \neq 0$.*

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\alpha \equiv a \mod p$ et $f(\alpha) = 0$

Soit $f \in \mathbb{Z}_p[X]$. On suppose par récurrence avoir construit une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{Z}_p$ telle que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_k \equiv a \mod p$ et $f(a_k) \equiv 0 \mod p^{k+1}$.

(1) Montrer que $f(a_n + hp^{n+1}) = f(a_n) + hp^{n+1} f'(a_n) \mod p^{n+2}$ pour $h \in \mathbb{F}_p$.

(2) Construire a_{n+1} tel que $a_{n+1} \equiv a_n \mod p^{n+1}$ et $f(a_{n+1}) \equiv 0 \mod p^{n+2}$

(3) Conclure

Exercice 6. [Reality check]

(a) Montrer que $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes comme corps.

(b) Montrer que, si $p \neq l$, $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_l$ ne sont pas isomorphes comme corps.

Exercice 7. [Un peu d'adèles]
On définit l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \{(x_p) \in \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Q}_p,\ x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ pour presque tout } p\}$$

muni de la topologie induite par la topologie produit.

(a) Montrer que $\mathbb{A}$ est un groupe topologique localement compact

(b) Montrer que l'inclusion diagonale $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ est d'image discrète

(c) Montrer l'inclusion diagonale $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}/\mathbb{R}$ est d'image dense.

1. On admet qu'il existe, c'est vrai d'après l'exercice suivant