TD6 : Mesure de Haar

Exercice 1. [Continuité de la fonction modulaire]
Soit G un groupe topologique localement compact, μ une mesure de Haar à gauche sur G, et $\Delta : G \to \mathbb{R}_*^+$ la fonction modulaire associée.
On choisit la convention : $\mu(A \cdot g) = \Delta(g)\mu(A)$.

Nous allons établir la continuité de Δ.

I'm following this. Other proofs exist, cf. for example there, but follow from the continuity of the integral over a cartesian product

On fixe $A \subset G$ compact d'intérieur non vide, $\varepsilon > 0$, et U un ouvert de G contenant A tel que $\mu(A) \leq \mu(U) < (1+\varepsilon)\mu(A)$

(1) Montrer qu'il existe V voisinage de 1 tel que $A \cdot V \subset U$
Pour tout $a \in A$, on a $W_a = a^{-1} \cdot U$ est tel que $aW_a \subset U$. Soit V_a voisinage de 1 tel que $V_a \cdot V_a \subset W_a$. Alors $\{a \cdot V_a\}$ recouvre A, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit $V = \cap_{i=1}^n V_{a_i}$. Alors

$$A \cdot V \subset \cup_{i=1}^n a_i V_{a_i} \cdot \cap_{i=1}^n V_{a_i} \subset \cup_{i=1}^n a_i V_{a_i} V_{a_i} \subset \cup_{i=1}^n a_i W_{a_i} \subset U$$

(2) Montrer que, pour $(g,h) \in V \times V^{-1}$; $\Delta(g) \leq 1+\varepsilon$ et $\Delta(h) \geq 1-\varepsilon$
Si $g \in V$, $\Delta(G) = \mu(Ag)/\mu(A) \leq \mu(U)/\mu(A) < 1+\varepsilon$. Si $h \in V^{-1}$, $\mu(Ah)/\mu(A) \leq 1/(1+\varepsilon) > 1-\varepsilon$

(3) Conclure
Soit $W = V \cap V^{-1}$. Pour C'est un voisinage de 1 dont l'envoi est contenu dans $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$

Exercice 2. [Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$]
Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 1$. On va montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

(1) On s'intéresse à la restriction à G de l'action naturelle de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$. Construire un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ G-invariant sur $\mathbb{R}^n$
On fixe produit scalaire quelconque sur $\mathbb{R}^n$, puis $< x|y >_G = \int < gx|gy > \mu(dg)$. Invariant car $\mu(gdx) = \mu(dx)$. Fini car G compact donc de volume fini pour la mesure de Haar sur GL_n.

(2) Soit M la matrice associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Ecrire $M = N^\perp N$ pour un certain $N \in GL_n(\mathbb{R})$. M est symétrique définie positive. Théorème spectral.

(3) Montrer que, pour tout $g \in G$, $g^\perp M g = M$. Conclure
Par définition, $\langle x, y \rangle_G = X^\perp M Y$, donc pour tout g, $(gX)^\perp M(gY) \cong M$, i.e. $g^\perp M g = M$; i.e. $g^\perp N^\perp N g = N^\perp N$. On vérifie $NGN^{-1} \subset O(n)$. En effet, $(NgN^{-1})^\perp (NgN^{-1}) = (N^{-1})^\perp g^\perp N^\perp N g N^{-1} = (N^{-1})^\perp N^\perp N N^{-1} = Id$

Exercice 3. [Mesure de Haar sur un *groupe de Lie Affine*]
Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni d'une structure de groupe $m : G \times G \to G$ et $i : G \to G$ données par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On le munit de la mesure induite par la mesure de Lebesgue dg.

On note $L_g : h \in G \mapsto m(g,h) \in G$.

On suppose que $|\det_x(\mathrm{d}L_g)|$ est indépendant de $x \in G$. On le note $\phi(g)$.

(1) Montrer que $\phi(m(g \cdot h)) = \phi(g) \cdot \phi(h)$
We have $L_g(x) = m(g,x)$, $L_h(x) = m(h,x)$, $L_{gh}(x) = m(gh,x) = m(g, m(hx)) = L_g(L_h(x))$. Alors $d_x(L_{gh}) = d_{hx}L_g \circ d_x L_h$. Une fois qu'on a l'invariance ; et la multiplicité du déterminant ; $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$

(2) Montrer qu'une mesure de Haar invariante à gauche sur G est $\frac{\mathrm{d}g}{|\phi(g)|}$

Version intégrale Si $f \in C_0(G)$, pour T smooth transform $T = L_g$:

$$\int_G f(x)dx = \int_G f(T \cdot x)|det(d_x T)|dx = \int_G f(gx)|det(L_g)|dx = \int_G f(gx)|det(L_g)|dx$$

Avec $h(x) = f(x)/\phi(x)$, on a $\int (f(gx))/\phi(gx)\phi(g)dx = \int f(x)/\phi(x)dx$, et on conclut par la question 2

L'hypothèse d'invariance de $|\det_x(\mathrm{d}L_g)|$ en x est vérifiée dans le cas où les L_g sont donnés par des transformations affines ; i.e. $m(x,y) = A(x) \cdot y + b(x)$

Exercice 4. [Mesure de Haar de matrices triangulaires supérieures]
On note $U_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dont tous les termes diagonaux valent 1.

(1) En utilisant l'exercice précédent, déterminer une mesure de Haar à gauche et à droite sur $U_2(\mathbb{R})$ et $U_3(\mathbb{R})$
Bonus : Traiter le cas $n > 3$.
$U_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, et la multiplication correspond à l'addition. $L_g(x) = g + x$, de différentielle identité en tout point.
$n > 2$: On vérifie que la translation à gauche est une transformation affine matrice de la différentielle, avec les variables ordonnées de gauche à droite et de haut en bas est triangulaire supérieure, avec les termes diagonaux égaux à 1. Le déterminant est donc 1

(2) Calculer le commutateur de $U_n(\mathbb{R})$. En déduire que $U_n(\mathbb{R})$ est nilpotent [1]
Dans le commutateur, on a une surdiagonale de plus nulle à chaque étape. Donc l'itération des commutateurs est l'id at some point.
Soit $P_2(\mathbb{R}) = T_2(\mathbb{R}) \cap SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

(3) Calculer une mesure de Haar à gauche sur $P_2(\mathbb{R})$.
Bonus : Traiter le cas $n > 2$

1. Un groupe est nilpotent si la suite $C^0(G) = G$ et $C^n(G) = [G, C^{n-1}(G)]$ stationne en $\{1\}$

On calcule $m((a,b),(X,Y)) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX & aY + bX^{-1} \\ 0 & cX^{-1} \end{pmatrix} =$ $(aX, aY + bX^{-1})$. C'est pas une transformation affine, mais la matrice des dérivées partielles selon X, Y est $\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a \end{pmatrix}$; donc $det = a^2$ et $\mu = dg/a^2$. Donc une mesure à gauche est $dadb/a^2$, .

(4) Calculer une mesure de Haar à droite sur $P_2(\mathbb{R})$. Ce groupe est-il unimodulaire ?

On calcule $m((X,Y),(a,b)) = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX & bX + a^{-1}Y \\ 0 & cX^{-1} \end{pmatrix} =$ $(aX, bX + a^{-1}Y)$. La matrice des dérivées partielles selon X, Y est $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ Donc la mesure de Lebesgue est Haar à droite