Combinatoire Avancée

1 Structures interdites

Une *forêt* est un graphe acyclique (sans cycle). S'il est de plus connexe, on parle d'*arbre*.

Exercice 1. *1. Montrer que tout arbre ayant au moins deux sommets contient deux* feuilles*, c'est-à-dire deux sommets n'ayant qu'un voisin chacun.*

2. *Montrer les équivalences : $G = (V, E)$ est un arbre $\Leftrightarrow$ G est connexe et $|E| = |V| - 1$ $\Leftrightarrow$ G est acyclique et $|E| = |V| - 1$.*
3. *Montrer que si $|V| \leqslant |E|$, alors G contient un cycle, et que ce cycle est unique si $|E| = |V|$.*

On dit que H est un *sous-graphe induit* de G si on peut obtenir H en supprimant des sommets de G. Si on s'autorise aussi à supprimer des arêtes de G, on dit que H est un *sous-graphe* de G.

Exercice 2. *Montrer que G ne contient pas un chemin à 3 sommets comme sous-graphe induit si et seulement si toute composante connexe de G est une clique.*

Exercice 3. *1. Montrer que les cycles d'un graphe sont tous de longueur paire si et seulement le graphe est* biparti*, c'est-à-dire que l'on peut partitionner les sommets de G en deux ensembles A et B tels que toutes les arêtes de G relient un sommet de A et un sommet de B.*

2. *Est-ce encore vrai si G est un graphe orienté ?*
3. *Et si G est orienté et fortement connexe ?*

Un *stable* dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux non reliés. Une *clique* est un ensemble de sommets deux à deux reliés. La taille maximum d'un stable de G est notée $\alpha(G)$ et la taille maximum d'une clique est notée $\omega(G)$.

Exercice 4. *Un graphe G est dit* chordal *si tous ses cycles induits sont des triangles. Montrer que dans tout graphe chordal, il existe un sommet dont le voisinage est une clique (dit* simplicial*). Pour ce faire, on va montrer plus fortement que si un graphe chordal n'est pas une clique, il existe deux sommets simpliciaux qui ne sont pas reliés.*

1. *Montrer que si G n'est pas une clique, il admet un séparateur (ensemble de sommets dont la suppression déconnecte le graphe) qui est une clique.*
2. *Conclure.*

Exercice 5. ** Montrer que si un graphe G ayant au moins deux sommets n'a pas de sous-graphe induit qui est un chemin à 4 sommets (noté P_4), alors soit G est non connexe, soit le complémentaire de G (obtenu en inversant les arêtes et les non arêtes de G) est non connexe.*

Exercice 6. *La* matrice d'incidence *d'un graphe $G = (V, E)$ est la matrice $V \times E$ dont l'entrée (v, e) est égale à 1 si le sommet v appartient à l'arête e, et 0 sinon. Chaque colonne contient donc exactement deux 1. On remplace arbitrairement dans chaque colonne une de ces deux entrées par un -1 et on appelle cette matrice I.*

1. *Montrer que le rang de I est au plus $n - 1$, avec $n = |V|$.*
2. *Montrer qu'un ensemble de colonnes est une famille libre de vecteurs si et seulement si les arêtes correspondantes forment une forêt.*
3. *Montrer que G est connexe si et seulement si le rang de I est $n-1$. À quoi correspond en général le rang de I ?*
4. *Si on n'avait pas remplacé les entrées par des -1, à quoi correspondraient les familles libres de colonnes ?*

2 Graphes sans triangles et nombre chromatique

Un graphe est k-*colorable* si on peut assigner un entier de $[1, k]$ à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Le plus petit entier k tel que G est k-colorable est le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$. Noter que 2-colorable signifie biparti.

Exercice 7. *Soit G un graphe à n sommets sans triangle et tel que tout sommet a plus de $\frac{2n}{5}$ voisins.*

1. *Montrer que G ne contient pas de cycle de longueur 5.*
2. *Montrer que G est biparti.*

Exercice 8. *Trouver un graphe G sans triangle tel que $\chi(G) = 4$.*

Exercice 9. *(Graphes de Zykov) Soit G un graphe k-chromatique ($\chi(G) = k$). On forme un graphe $Z(G)$ en considérant l'union disjointe de k copies $G_1, \ldots, G_k$ de G et en ajoutant pour chaque k-uplet $v_1, \ldots, v_k$ de sommets choisis dans $G_1, \ldots, G_k$, un nouveau sommet relié seulement à ces k sommets.*

1. *Montrer que si G est sans triangle, alors $Z(G)$ est sans triangle.*
2. *Montrer que le nombre chromatique de $Z(G)$ est $k + 1$. Conclure.*

Exercice 10. *(Graphes de Mycielski) Soit G un graphe k-chromatique. On construit un graphe $M(G)$ comme suit :*

— *Pour chaque sommet $v \in V(G)$, on construit un clone v' adjacent à tous les voisins de v dans G*

— *On ajoute un sommet x adjacent à tous les clones.*

1. *Soit M_2 le graphe à deux sommets et une arête. Construire $M(M_2)$ et $M(M(M_2))$.*
2. *Montrer que si G est sans triangle, alors $M(G)$ est sans triangle.*
3. *Montrer que $M(G)$ est $(k + 1)$-chromatique. Conclure.*

Exercice 11. *** Graphes de Kneser *Le graphe $Kn(n, k)$ a pour sommets l'ensemble $\binom{[n]}{k}$ et pour arêtes les paires X, Y d'ensembles disjoints de taille k de $[n]$.*

1. *Quels sont les graphes de Kneser lorsque $n = 2k$?*
2. *Construire $Kn(3, 1)$ et $Kn(5, 2)$. Vérifier qu'ils sont 3 colorables.*
3. *Montrer que $Kn(n, k)$ est $n - 2k + 2$ colorable.*
4. *Quelle est la taille maximale d'un stable de $Kn(n, k)$?*
5. *On suppose que $n > 3k - 3$. Proposer un candidat pour une clique maximale de $Kn(n, k)$.*

Exercice 12. ** Soit $\varepsilon > 0$ et $G_{n,\varepsilon}$ un graphe aléatoire à n sommets, où pour chaque paire de sommets, on met une arête avec probabilité $p = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$.*

1. *Si $S \subset V(G)$ est un ensemble de taille k, quelle est la probabilité que S soit un stable ?*
2. *En déduire que la taille $\alpha(G_{n,\varepsilon})$ du plus grand stable de $G_{n,\varepsilon}$ est presque sûrement au plus $n^{1-\varepsilon}$ (c'est-à-dire que la probabilité de cet évènement tend vers 1 quand $n \to +\infty$.)*
3. *Montrer que $\chi(G_{n,\varepsilon}) \geqslant n^{\varepsilon}$ presque sûrement.*
4. *Quelle est l'espérance du nombre de triangles dans $G_{n,\varepsilon}$?*
5. *En déduire une borne inférieure sur le nombre chromatique du graphe obtenu en retirant de $G_{n,\varepsilon}$ tous les sommets appartenant à un triangle. Conclure.*
6. *Généraliser aux cycles de taille supérieure.*

Exercice 13. ** Le but est de montrer que pour tout k, il existe $f(k)$ tel que si un graphe G a nombre chromatique $f(k)$, alors G contient un sous-graphe sans triangle (pas forcément induit) de nombre chromatique k.*

1. *Montrer que si G est l'union des arêtes de deux graphes G_1 et G_2 sur le même ensemble de sommets que G, alors $\chi(G)$ est borné par une fonction de $\chi(G_1)$ et $\chi(G_2)$.*
2. *Montrer l'existence de $f(k)$ lorsque G n'a pas de clique de taille 4. On pourra observer que le voisinage d'un sommet est sans triangle, et considérer alors une coloration des arêtes incidentes à tout sommet.*
3. *Conclure.*

3 Flots et Graphes Bipartis

Dans cette partie $G = (V, E)$ désigne un graphe (E est l'ensemble des *arêtes*) et $D = (V, A)$ désigne un graphe orienté (A est l'ensemble des *arcs*). On distingue deux sommets particuliers s, p respectivement *source* et *puits*. Le but est de démontrer le théorème de Menger qui affirme que le nombre maximal de chemins arc-disjoints de s à p dans un graphe orienté D est égal au nombre minimal d'arcs à supprimer pour qu'il n'existe plus de chemin de s à p.

Exercice 14.
1. *Formuler trois autres énoncés de Menger en jouant sur orienté/non-orienté et arc-disjoint/sommet-disjoint.*
2. *Montrer que la version présentée ci-dessus (orienté/arc-disjoint) implique les trois autres.*
3. *Une* coupe *de D est une partition S, P de V telle que $s \in S$ et $p \in P$. La* taille *de la coupe est le nombre d'arcs de S à P. Que représente une coupe de taille minimale (aka* coupe min*) ?*
4. *On se donne l'algorithme A suivant :*

   1. `Tant que` *il existe un chemin orienté P de s à p, renverser l'orientation de tous les arcs de P.*

   Montrer que le nombre k de passages dans le tant que est égal à la taille d'une coupe min.
5. *Après l'exécution de A, un arc est* actif *si il a été renversé un nombre impair de fois. On considère le sous-graphe D_a de D qui contient tous les arcs actifs. Que dire des degrés sortants et entrants de s et p dans D_a ? Et pour les autres sommets ?*
6. *Déduire qu'il existe au moins k chemins arcs disjoints de s à p dans D.*
7. *Conclure.*
8. ** Proposer un énoncé général de type "flot maximal égal coupe minimale" dans le cas où chaque arc de D a une* capacité *propre à transmettre un flot (d'eau/d'information).*
9. ** Montrer votre énoncé à partir de Menger en supposant que les valeurs de capacités sont tout d'abord entières, puis rationnelles, puis enfin réelles.*

Un *couplage* dans un graphe est un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes. Un couplage est *parfait* s'il couvre tous les sommets. Une *couverture* est un ensemble de sommets qui intersecte toutes les arêtes.

Exercice 15.
1. *Utiliser Menger pour montrer que dans un graphe biparti, la couverture minimale est égale au couplage maximal.*
2. *Montrer que ceci n'est pas forcément le cas dans un graphe quelconque.*
3. *Montrer que tout graphe cubique biparti possède un couplage parfait.*
4. *Est-ce encore vrai si on ne suppose pas le graphe biparti ?*

5. * *Montrer que lorsque* $n = 2k+1$, *il existe une bijection* f *des parties de taille* k *de* $[n]$ *vers celles de taille* $k+1$ *qui vérifie de plus que* $X \subseteq f(X)$ *pour tout* X. *Bonus : trouver une construction explicite de* f *?*

Exercice 16. 1. *Montrer que tout graphe biparti sur* n *sommets vérifie que* $n - c = \alpha(G)$ *où* c *est la taille maximale d'un couplage de* G.

2. *En déduire le théorème de Hall : Si* A, B *est la bipartition des sommets d'un graphe biparti, et que pour tout sous-ensemble* A' *de* A, *la taille du voisinage* $N(A')$ *de* A *(dans* B*) est au moins égale à la taille de* A', *alors il existe un couplage qui couvre tous les sommets de* A.
3. *Vérifier la réciproque de l'énoncé précédent.*

Exercice 17. *Soit* G *un graphe biparti. On note* $\chi'(G)$ *l'*index chromatique *de* G, *c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes de* G *de sorte que toute paire d'arêtes partageant une extrémité reçoit des couleurs différentes.*

1. *On suppose que tous les sommets de* G *ont degré* k. *Montrer que* $\chi'(G) \leqslant k$.
2. *En déduire que ce résultat est encore vrai si tous les sommets de* G *ont degré au plus* k.

Exercice 18. *On se donne un ensemble* S *de* n *points du plan* $x_1, \dots, x_n$. *Le but est de trouver un sous-ensemble* X *de* S *de taille maximale tel que deux points* x_i, x_j *de* X *sont à distance au plus 1. Appelons un tel ensemble un* cluster optimal de S.

1. *Montrer que si on connait deux points* x_i, x_j *de* X *les plus éloignés possibles, alors on peut construire un cluster optimal en calculant un stable maximum dans un graphe biparti.*
2. *En déduire un algorithme pour calculer un cluster optimal de* S *qui s'exécute en temps polynomial en* n.

Exercice 19. *Le but est de montrer que dans un graphe* G *sur* n *sommets, si la taille maximum d'un stable est plus grande que* $n/2$ *alors il existe un sommet* v *qui appartient à tous les stables maximum.*

1. *Montrer que cela n'est pas vrai si on remplace par "plus grande ou égale".*
2. *Montrer qu'il existe un stable* S *dont le voisinage* $N(S)$ *vérifie* $|N(S)| < |S|$ *et tel qu'il existe un couplage entre* $N(S)$ *et* S *qui couvre* $N(S)$.
3. *Conclure.*
4. *Montrer que l'on peut calculer un tel sommet* v *en temps polynomial.*

4 Graphes planaires

Exercice 20. *Montrer que tout graphe* (V, E) *vérifie* $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.

Exercice 21. *Soit* G *un graphe planaire connexe à* v *sommets* e *arêtes et* f *faces. On veut montrer que* $v - e + f = 2$.

1. *Montrer qu'il suffit de montrer cette égalité quand toutes les faces de* G *sont triangulaires.*
2. *Si toutes les faces de* G *sont des triangles, montrer la formule par récurrence sur* v.
3. *En déduire que pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{v \in V} (a \deg(v) - 2(a+b)) + \sum_{f \in F} (b \deg(f) - 2(a+b)) = -2(a+b)$$

Exercice 22. *Soit* G *un graphe planaire connexe à* v *sommets* e *arêtes et* f *faces.*

1. *Montrer que* G *peut être dessiné sans aucune arête horizontale.*

On définit une pondération $\omega : V \cup E \cup F \to \mathbb{Z}$ de G par $\omega(v) = \omega(f) = 1$ et $\omega(e) = -1$. On déplace ensuite les poids de chaque sommet et chaque arête vers la face immédiatement à leur droite.

2. *Calculer le poids final de chaque face. En déduire que $v - e + f = 2$.*
3. *En utilisant la même technique, redémontrer les égalités*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e, \quad \sum_{f \in F} \deg(f) = 2e,$$
$$\sum_{v \in V} (a \deg(v) - 2(a+b)) + \sum_{f \in F} (b \deg(f) - 2(a+b)) = -2(a+b)$$

Exercice 23. *Montrer que tout graphe planaire de degré minimum 3 contient un sommet de degré au plus 5 sur un triangle ou un sommet de degré 3 sur une face de longueur au plus 5.*

Exercice 24. *Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de graphes planaires dont tous les sommets ont degré au plus 3 et dont toutes les faces sont de taille au plus 5.*

Exercice 25. *Soit G un graphe planaire à n sommets et m arêtes.*

1. *Montrer que $m \leqslant 3n - 6$.*
2. *Quand y a-t-il égalité ?*
3. *Montrer que si G ne contient pas de triangles, alors $m \leqslant 2n - 4$.*
4. *Montrer que G contient un sommet de degré au plus 5.*
5. *En déduire que $\chi(G) \leqslant 6$.*
6. *Montrer que $\chi(G) \leqslant 5$.*

Exercice 26. *Un* mineur *d'un graphe G est obtenu en itérant des suppressions d'arêtes, suppressions de sommets, et contraction d'arêtes.*

1. *Montrer que tout mineur d'un graphe planaire est planaire.*
2. *Montrer qu'un graphe planaire ne contient pas K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur.*

Exercice 27. *Une fullerene est un graphe planaire dont toutes les faces sont des pentagones ou des hexagones. Montrer qu'une fullerene possède précisément 12 pentagones.*

Exercice 28. *Soit S un solide régulier convexe, c'est-à-dire où*

— *toutes les faces sont identiques, et*

— *tous les sommets appartiennent à un même nombre de faces.*

Soit G_S le graphe associé à S.

1. *Montrer que G_S est planaire.*
2. *On note p le degré des sommets de G_S et q la taille de ses faces. Montrer que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{|E(G_S)|} + \frac{1}{2}$$

3. *En déduire les valeurs possibles pour G_S et identifier les solides associés.*

Exercice 29. *Soit G un graphe planaire dont tous les sommets ont degré pair. Montrer qu'on peut colorer les faces de G avec deux couleurs de sorte que deux faces partageant une arête reçoivent des couleurs différentes.*

Exercice 30. *Soit G un graphe planaire dont toutes les faces sont des triangles. On colorie les sommets de G avec trois couleurs. Montrer que le nombre de faces où les 3 couleurs apparaissent est pair.*

5 Points fixes

Le théorème de Brouwer affirme que toute application continue f de la boule unité B^n de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède un point fixe (i.e. $f(x) = x$).

Exercice 31. *Montrer Brouwer pour $n = 1$.*

Exercice 32. *On se donne un graphe planaire G qui est triangulé, à l'exception de la face externe. Sur cette face, on distingue trois sommets x, y, z. On se donne de plus une coloration c (non nécessairement propre) des sommets de G en trois couleurs telle que $c(x) = 1, c(y) = 2, c(z) = 3$. On suppose de plus que tous les sommets entre x et y sur la face externe sont colorés 1 ou 2, tous les sommets entre y et z sont colorés 2 ou 3 et tous les sommets entre z et x sont colorés 1 ou 3.*

1. *Montrer qu'il existe une face colorée en trois couleurs.*
2. *Déduire Brouwer pour $n = 2$.*
3. ** Généraliser en dimension supérieure.*

Exercice 33. *** Graphes de Borsuk *On se fixe un (petit) réel $\varepsilon > 0$. Les sommets de $Bor(n, \varepsilon)$ sont les points de la sphère S^n de dimension n. Deux sommets u, v sont adjacents si l'angle $(u, 0, v)$ est plus grand que $\pi - \varepsilon$.*

1. *Quel est le nombre chromatique de $Bor(1, \varepsilon)$?*
2. *Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents : a) le nombre chromatique de $Bor(2, \varepsilon)$ est 4 pour tout petit $\varepsilon > 0$. b) Il y a toujours sur terre deux points antipodaux ayant même température et même pression.*

6 Chemins - Graphes eulériens et hamiltonien

Un graphe $G = (V, E)$ est *eulérien* si le degré de tous ses sommets est pair. Un graphe orienté $D = (V, A)$ est *eulérien* si pour tout sommet v, le degré entrant $d^-(v)$ est égal au degré sortant $d^+(v)$.

Exercice 34.

1. *Montrer qu'un graphe (resp. graphe orienté) est eulérien si et seulement si son ensemble d'arêtes se partitionne en cycles (resp. circuits).*
2. *Montrer que si deux sommets seulement d'un graphe non orienté ont degré impair alors les arêtes du graphe se partitionnent en un chemin et une union de cycles. Obtenir un analogue de ce résultat dans le cas orienté.*
3. *Montrer que dans tout graphe connexe, si on se donne un ensemble pair de sommets S, alors il existe $|S|/2$ chemins arêtes-disjoints dont l'ensemble des extrémités est exactement S.*
4. *Déduire que si l'ensemble des arêtes de G se partitionne en deux graphes connexes, alors il existe une collection de cycles qui passe par chaque arête une ou deux fois.*
5. *(Pb ouvert, ne pas (trop) tenter de prouver)* Cycle Double Cover *Tout graphe sans pont admet une collection de cycles qui passe deux fois par chaque arête. Montrer ce résultat lorsque le graphe est cubique et 3-arête colorable.*
6. ** Montrer que la CDC se réduit aux cas des graphes cubiques non 3-arête colorable (*snarks*).*
7. ** Construire un snark.*

Exercice 35. *Montrer que tout graphe eulérien admet une orientation qui est un graphe orienté eulérien. Montrer que tout graphe admet une orientation telle que pour tout sommet, le degré entrant diffère du degré sortant d'au plus 1.*

Exercice 36. *Montrer que si un graphe est eulérien et connexe, alors il existe une marche fermée qui passe par toutes les arêtes exactement une fois.*

Exercice 37. *On pave un rectangle R avec des rectangles dont au moins un côté est entier. Montrer que R a un côté entier.*

Un chemin ou un cycle dans un graphe orienté ou non est *hamiltonien* si il passe par tous les sommets.

Exercice 38. *Un* tournoi *est un graphe orienté dans lequel toute paire de sommets u, v est reliée par un arc (soit uv, soit vu).*

1. *Montrer qu'un tournoi possède un chemin hamiltonien.*
2. *Montrer qu'un tournoi fortement connexe possède un cycle hamiltonien.*
3. *Montrer que l'algorithme suivant termine sur un chemin hamiltonien du tournoi T : Enumérer $v_1, \ldots, v_n$ les sommets de T. Tant qu'il existe un arc $v_{i+1}v_i$, permuter v_{i+1} et v_i dans l'énumération.*
4. *Généraliser l'algorithme précédent au cas fortement connexe et montrer sa terminaison.*

Exercice 39. *(Gallai-Roy) Soit D un graphe orienté. Montrer que si le nombre maximum de sommets dans un chemin orienté de D est k alors D est k-colorable.*

Exercice 40. *(Gallai-Milgram) Montrer que dans un graphe orienté $D = (V, A)$, on peut partitionner l'ensemble des sommets en $\alpha(D)$ chemins. On pourra considérer l'induction suivante : si $P_1, \ldots, P_k$ est un ensemble de chemins partitionnant V tel que $k > \alpha(G)$, alors il existe des chemins $P'_1, \ldots, P'_{k-1}$ partitionnant V dont l'ensemble des sommets terminaux est inclus dans l'ensemble des sommets terminaux de $P_1, \ldots, P_k$.*

Exercice 41. *Montrer que tout graphe cubique (tous les sommets ont degré 3) qui possède un cycle hamiltonien en possède un autre.*

Exercice 42. Graphes de de Bruijn *Les graphes $DB(n)$ vérifient : $DB(1)$ est le graphe orienté à un sommet et deux boucles et $DB(n + 1) = L(DB(n))$.*

1. *Construire $DB(4)$.*
2. *Formuler une autre définition des graphes de de Bruijn (un peu à la Kneser) en identifiant les sommets à des mots sur l'alphabet 0,1.*
3. *Montrer que tout graphe de de Bruijn possède un chemin hamiltonien.*
4. *Montrer le* Théorème du Digicode *Pour tout n, k, il existe un mot sur l'alphabet $[k]$ de longueur $k^n + n - 1$ qui contient tous les mots de longueur n sur l'alphabet $[k]$.*

7 Arbres couvrants

Un arbre couvrant d'un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes E de G formant un arbre et tel que tout sommet v de G est couvert par E, c'est-à-dire que v est l'extrémité d'au moins une arête de E.

Exercice 43. *Montrer de deux manières que tout graphe connexe admet un arbre couvrant :*

— *En enlevant une à une les arêtes tant que le graphe est connexe.*

— *Par récurrence sur le nombre de sommets, en montrant qu'on peut toujours retirer un sommet de G en préservant la connexité.*

Exercice 44. *Soit G un graphe connexe et $\omega : E \to \mathbb{R}$ une pondération des arêtes. On considère une suite d'ensembles $E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1}$ vérifiant :*

— $E_1 = \varnothing$

— *Pour tout $2 \leqslant i < n - 1$, E_i est obtenu à partir de E_{i-1} en ajoutant une arête de plus petit poids parmi les arêtes e telles que $E_{i-1} \cup \{e\}$ ne contient pas de cycle.*

Montrer que E_{n-1} est un arbre couvrant de G de poids minimal (parmi les arbres couvrants de G).

Exercice 45. *Tout graphe connexe pondéré avec des poids distincts sur chaque arête admet un unique arbre couvrant minimal.*

Exercice 46. *On note T_n le nombre d'arbres couvrants de K_n.*

1. *Calculer T_n pour $n \leqslant 5$.*
2. *En comptant de deux façons le nombre de couples (T, e) où T est un arbre couvrant de K_n et e est une arête de T, montrer que*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k}$$

Exercice 47. *Soit T un arbre couvrant de K_n. Soit v la plus petite feuille de T et w son voisin dans T. On définit $f(T) = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ où $a_1 = w$ et $(a_2, \ldots, a_{n-1}) = f(T \setminus v)$.*

1. *Montrer que f est injective, c'est-à-dire que si T et T' sont deux arbres distincts, alors $f(T) \neq f(T')$.*
2. *Montrer que pour tout $(n-2)$-uplet d'entiers $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ compris entre 1 et n, il existe un unique arbre T tel que $f(T) = (a_1, \ldots, a_{n-2}, n)$.*
3. *En déduire le nombre d'arbres couvrants de K_n.*

Exercice 48. *Soient $d_1, \ldots, d_n$ des entiers dont la somme est $2n-2$. Montrer que le nombre d'arbres couvrants de K_n où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le sommet i a d_i voisins est*

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!}$$

Exercice 49. *On note $E(k, n)$ le nombre de forêts couvrantes de K_n contenant précisément k arbres et telles que les sommets $1, \ldots, k$ appartiennent à des arbres différents.*

Montrer que

$$k!E(n, k-1) = (k-1)!n(k-1)E(n, k)$$

et en déduire une formule pour $E(n, k)$.

8 Problèmes extrémaux

Exercice 50. *Soit $G = (V, E)$ un graphe à n sommets.*

1. *Quelle est la valeur maximale de $|E|$?*

On suppose maintenant que G ne contient pas de triangles.

2. *Montrer que pour toute arête $uv \in E$, $\deg(u) + \deg(v) \leqslant n$.*
3. *Montrer par récurrence sur n que $|E| \leqslant \frac{n^2}{4}$.*

Exercice 51. *Montrer que tout graphe à n sommets et m arêtes contient au moins $\frac{4m}{3n}(m - \frac{n^2}{4})$ triangles.*

Exercice 52. *Soit G un graphe à n sommets. Montrer que G et $\bar{G}$ contiennent à eux deux au moins $\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ triangles.*

Exercice 53. *Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. On construit un ensemble aléatoire de sommets de la manière suivante :*

- *On tire une permutation σ des sommets au hasard.*
- *On ajoute un sommet à S si tous ses voisins qui le précèdent dans σ sont dans S.*

1. *Montrer que l'ensemble S obtenu est une clique maximale de G.*

2. *Soit v un sommet de G, montrer que $\mathbb{P}(v \in S) \leqslant \frac{1}{1+d(v)}$.*
3. *En déduire que $\mathbb{E}(|S|) \geqslant \frac{n^2}{n+2m}$.*
4. *Si G est sans triangle, montrer que $m \leqslant \frac{n^2}{4}$.*
5. *Généraliser à un graphe sans clique K_r de taille r.*

Exercice 54. *1. Soit G un graphe à n sommets sans C_4. Montrer que G a au plus $\frac{n}{4}(\sqrt{4n-3}-1)$ arêtes.*

Soit G le graphe défini par $V(G) = [1,p]^2 \setminus \{(p,p)\}$ et où il y a une arête entre (a,b) et (c,d) si $ac + bd \equiv 1 \mod p$.

2. *Montrer que G a au moins $\frac{(p-1)(p^2-1)}{2}$ arêtes et ne contient pas de C_4.*

Exercice 55. *$S \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble fini de vecteurs, u, v tirés uniformément indépendamment dans S. Montrer que pour tout $x > 0$*

$$\mathbb{P}(\|u+v\| \geqslant x) \geqslant \mathbb{P}(\|u\| \geqslant x)^2/2$$

Exercice 56. *Tout ensemble de $3n$ points du disque unité contient au moins $\frac{3n(n-1)}{2}$ paires de points à distance au plus $\sqrt{2}$ les uns des autres.*

Exercice 57. *Soit G un graphe ne contenant pas d'étoile à k sommets. Montrer que G a au plus $\frac{n(k-2)}{2}$ arêtes.*

Exercice 58. *Soit G un graphe connexe.*

1. *Montrer que si G est connexe de degré minimal $\delta \geqslant 2$, alors G contient un chemin contenant $\min\{2\delta+1, |V(G)|\}$ sommets.*
2. *En déduire que si G ne contient pas de chemin à k sommets, alors G a au plus $\frac{n(k-2)}{2}$ arêtes.*

Exercice 59. *On considère une matrice $n \times n$ ayant des coefficients dans $\{0,1\}$. Une k-subdivision de la matrice est une partition des lignes en k groupes de lignes consécutives et des colonnes en k groupes de colonnes consécutives. On sépare ainsi la matrice en k^2 blocs rectangulaires. Une k-grille est une k-subdivision où tous les blocs contiennent un 1.*

1. *Combien de coefficients 1 au maximum peut contenir une matrice $n \times n$ sans 2-grille ?*

Le but de la suite de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante c_k tel qu'une matrice sans k-grille contienne au plus $c_k \cdot n$ coefficients 1.

On divise la matrice par groupes de k^2 lignes et colonnes consécutives. Un bloc de taille $k^2 \times k^2$ est dit :

- ***haut** quand il y a k lignes différentes qui contiennent un 1.*
- ***large** quand il y a k colonnes différentes qui contiennent un 1.*
- ***creux** s'il contient un 1 mais n'est pas haut ni large.*

2. *Combien de coefficients 1 contient un bloc creux au maximum ?*
3. *Borner le nombre de blocs hauts et de blocs larges d'une matrice sans k-grille.*
4. *Conclure.*

9 Dimension de Vapnik-Cervonenkis

On considère ici des *hypergraphes*, c'est à dire des couples $H = (V, E)$ où V est un ensemble (possiblement infini) et E est un ensemble de parties de V (appelées *hyperarêtes*).

Par exemple on pourra considérer que V est le plan $\mathbb{R}^2$ et E est l'ensemble des triangles (pleins). Ou alors que $V = [n]$ l'ensemble des entiers $\{1, \dots, n\}$ et que $E = \binom{[n]}{4}$ est l'ensemble des parties de taille 4.

Un sous-ensemble X de sommets d'un hypergraphe $H = (V, E)$ est *pulvérisé* si pour toute partie Y de X, il existe une hyperarête $e \in E$ telle que $e \cap X = Y$. La taille maximale d'un ensemble pulvérisé dans un hypergraphe H est la *dimension de Vapnik-Cervonenkis* de H (aka VC-dimension).

Exercice 60. *Quelle est la VC-dimension des :*

— *segments d'une ligne*

— *carrés du plan*

— *disques du plan*

— *triangles du plan*

— *convexes du plan*

Exercice 61. *Dans cet exercice, $H = (V, E)$ désigne un hypergraphe de VC-dimension d ayant n sommets.*

— *On note $s(n, d) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{d}$. Montrer que l'on peut trouver un tel H qui possède $s(n, d)$ arêtes.*

— *Soit $v \in V$. On note H_v l'hypergraphe contenant toutes les parties e de V telles que $e \in E$ et $e \setminus v \in E$ ou alors $e \notin E$ et $e \cup \{v\} \in E$. Montrer que si $H_v = H$ pour tout $v \in V$, alors la taille de E est au plus $s(n, d)$.*

— *Montrer que H possède au plus $s(n, d)$ hyperarêtes.*

10 Combinatoire polyhédrale

Un *polyèdre* est une intersection d'un ensemble fini de demi-espaces de l'espace $\mathbb{R}^n$. Un *polytope* est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 62. *Exprimer le cube unité de dimension n comme polyèdre et comme polytope.*

Exercice 63. *Exprimer le simplexe régulier de dimension n (segment, triangle, tétraèdre, etc) plongé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ comme polyèdre et comme polytope.*

Exercice 64. *Un* sommet *d'un polyèdre P est un point s de P qui vérifie qu'il existe un demi-espace E tel que $P \cap E = \{s\}$. Trouver une autre caractérisation d'un sommet (plus convex-friendly).*

Une technique algorithmique très puissante consiste à considérer que les solutions d'un problème donné sont des mots de 0 et de 1 de longueur n, ce qui correspond à des points de $\mathbb{R}^d$ (en fait un sous-ensemble des sommets du cube de $\mathbb{R}^d$). L'enveloppe convexe est alors le *polytope des solutions* P du problème.

Généralement, si l'on arrive alors à caractériser P comme un polyèdre, on peut alors utiliser des outils de programmation linéaire pour calculer efficacement une solution. Le jeu est ainsi de trouver les demi-espaces caractérisant P (contraintes du problème). Illustrons sur les couplages :

Exercice 65. *On se donne un graphe biparti $G = (V, E)$ dont la bipartition des sommets est A, B. On suppose que G possède n sommets et m arêtes.*

1. *Proposer une définition du* polytope des couplages *P de G.*
2. *Proposer un ensemble de demi-espaces qui pourrait caractériser P comme polyèdre (penser aux contraintes naturelles du problème). On note P' le polyèdre défini par ces contraintes.*
3. *Soit s un sommet de P'. On considère l'ensemble F des coordonnées de s qui ne sont pas entières. Chacune de ces coordonnées correspondant à une arête de G, on peut considérer que F est un sous-ensemble d'arêtes de G. Montrer que F est ayclique.*
4. *Montrer que F est en fait vide.*
5. *En déduire que tout sommet de P' appartient à P. Conclure que $P = P'$.*
6. *(difficile) Montrer que tout graphe cubique biparti possède un couplage parfait en utilisant la caractérisation du polytope des couplages.*

11 Arbres couvrants et de parcours

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sur n sommets et r un sommet de G appelé *racine*. Etant donné un arbre couvrant T de G, on appelle *longueur* de T la somme $\ell(T)$ de toutes les distances $d(v, r)$ pour tous les sommets v de G. Deux arbres couvrants T, T' sont *voisins* si ils ont $n-2$ arêtes en commun.

Exercice 66. *Soit p une fonction de poids qui associe à chaque arête de G une valeur réelle non négative. Le poids d'un arbre est la somme des poids de ses arêtes.*

1. *On note $ST(G)$ le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arbres couvrants de G et dont les arêtes relient les arbres voisins. Construire $ST(K_4)$.*
2. *Montrer que $ST(G)$ est connexe.*
3. *Montrer que si un arbre couvrant T a un poids inférieur ou égal a celui de tous ses voisins, alors son poids est minimal parmi tous les arbres couvrants.*

Exercice 67. *Soit G un graphe connexe et $\omega : E \to \mathbb{R}$ une pondération des arêtes. On considère une suite d'ensembles $E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1}$ vérifiant :*

— $E_1 = \varnothing$

— *Pour tout $2 \leqslant i < n-1$, E_i est obtenu à partir de E_{i-1} en ajoutant une arête de plus petit poids parmi les arêtes e telles que $E_{i-1} \cup \{e\}$ ne contient pas de cycle.*

Montrer que E_{n-1} est un arbre couvrant de G de poids minimal (parmi les arbres couvrants de G).

Exercice 68. *On dit que T est un* arbre en largeur *de G si sa longueur est inférieure ou égale à celle de tous ses voisins.*

1. *Montrer que tous les arbres en largeur ont même longueur.*
2. *Utiliser la notion d'arbre en largeur pour montrer qu'un graphe est 2-colorable si et seulement si il n'admet pas de cycle impair.*

Exercice 69. *On dit que T est un* arbre en profondeur *de G si sa longueur est supérieure ou égale à celle de tous ses voisins.*

1. *Construire un graphe admettant deux arbres en profondeur de longueurs distinctes.*
2. *Montrer que si T est un arbre en profondeur de G enraciné en r, alors toute arête de G relie deux sommets en relation de descendance pour T.*
3. *Utiliser la notion d'arbre en profondeur pour montrer que tout graphe connexe sans pont admet une orientation fortement connexe.*

12 Constructions classiques de graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle *line graph* de G le graphe $L(G)$ dont les sommets est l'ensemble E, et les arêtes toutes les paires e, f d'arêtes *incidentes*, i.e. telles que $e \cap f \neq \emptyset$.

Exercice 70. *A quoi correspond un ensemble stable dans un line graph ? et une clique ?*

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. On appelle *line graph* de D le graphe $L(D)$ dont les sommets est l'ensemble A, et les arêtes orientées tous les couples ef d'arcs *incidents*, i.e. tels que $e = xy$ et $f = yz$. Lorsque D contient une boucle $x \to x$, noter que l'on obtient une nouvelle boucle $xx \to xx$.

Exercice 71. *Etant donné un graphe orienté D, on note $\chi(D)$ le nombre chromatique du graphe obtenu à partir de D en ne tenant pas compte de l'orientation.*

1. *Montrer que $\chi(D) \leq 2^{\chi(L(D))}$.*
2. *Montrer que $\chi(L(D)) \leq k$, où k est le plus petit entier tel que $\chi(D) \leq \binom{k}{\lceil k/2 \rceil}$.*
3. *Que peut-on dire de la qualité de l'encadrement de $\chi(L(D))$ en fonction de $\chi(D)$?*

13 Outils probabilistes

Exercice 72. *Une technique classique est de tirer uniformément un ordre aléatoire sur l'ensemble des sommets de G. Montrer les énoncés suivants avec cette technique :*

1. *Tout graphe G possède un ensemble stable de taille au moins la somme des $1/(d(v)+1)$ pour tous les sommets v de G.*
2. *Montrer que la clique de taille maximum dans $Kn(n,k)$ a pour taille $\binom{n-1}{k-1}$.*

Exercice 73. *Lemme d'isolation. Montrer que si un hypergraphe $H = (V, E)$ à n sommets possède au moins une arête, et que l'on choisit aléatoirement un poids pour chaque sommet dans l'ensemble $[2n]$, alors avec probabilité au moins 1/2, il existe une unique arête de poids maximal.*

14 Graphes Parfaits

Un graphe G est *parfait* si son nombre chromatique est égal à la taille de sa clique maximum et que cette propriété est aussi vérifiée pour tous les sous-graphes induits de G.

Exercice 74. *Proposer deux familles infinies de graphes* minimalement imparfait*, c'est à dire non parfait mais dont les sous-graphes induits stricts sont parfaits.*

Exercice 75. *Montrer que les familles suivantes sont des graphes parfaits :*

1. *Les graphes bipartis.*
2. *Les complémentaires de graphes bipartis.*
3. *Les line-graph de graphes bipartis.*
4. *Les complémentaires de line graph de graphes bipartis.*

Exercice 76. *Un* graphe de comparabilité *s'obtient en considérant un ordre partiel sur un ensemble V et en reliant deux éléments de V par une arête lorsqu'ils sont comparables.*

1. *Montrer que les graphes de comparabilité sont parfaits.*
2. *Montrer que les complémentaires de graphes de comparabilité sont parfaits.*

Exercice 77. *Montrer que si un graphe n'a pas de P_4 induit, alors il est parfait.*

Exercice 78. *Dans ces exemples de graphes parfaits, montrer que le calcul de la clique maximum et de la coloration optimale peut se faire en temps polynomial.*

15 Noyaux

Un *noyau* dans un graphe orienté $D = (V, A)$ est un stable S qui est dominé par tous les sommets de V (i.e. pour tout $v \in V \setminus S$, il existe $u \in S$ tel que $vu \in A$).

Exercice 79.
1. *Proposer un graphe orienté qui ne possède pas de noyau.*
2. *Montrer que les graphes bi-orientés possèdent un noyau (si on a l'arc uv alors on a l'arc vu).*
3. *Montrer que les graphes orientés acycliques possèdent un noyau.*
4. *Montrer que les graphes orientés bipartis possèdent un noyau.*
5. *Montrer que les graphes orientés dont l'ensemble des arcs est l'union disjointe de deux ordres partiels possèdent un noyau.*

Exercice 80. *(Parcours Sup) Déduire de l'exercice précédent le théorème des mariages stables.*

Exercice 81. *Montrer que si un graphe orienté vérifie que tous ses sous-graphes induits possèdent un noyau, alors son nombre chromatique est au plus le degré sortant maximal plus un.*

Exercice 82. *Montrer que si toutes les cases d'une matrice $n \times n$ sont des ensembles de n entiers, alors on peut choisir un élément par case de telle sorte que toute colonne et toute ligne contienne n entiers distincts.*

16 Divers

Exercice 83. *Soit G un graphe dont les arêtes sont colorées en deux couleurs rouge et bleu.*

1. *Montrer que l'on peut partitionner les sommets de G en un chemin rouge et un chemin bleu.*
2. *Montrer que l'on peut partitionner les sommets de G en un chemin rouge et un cycle bleu. Ici, on considère que vide, le singleton et l'arête sont des cycles.*

Exercice 84. *Un graphe est* d-dégénéré *si tous ses sous-graphes ont un sommet de degré au plus d. Un graphe est une* t-forêt *si ses arêtes se partitionnent en t forêts.*

1. *Montrer que tout graphe d-dégénéré est une d-forêt.*
2. *Montrer que la réciproque est fausse.*
3. *Montrer que toute t-forêt est $2t-1$-dégénérée.*

Exercice 85. *(Graphe de Rado) On dit qu'un graphe sur l'ensemble de sommets $\mathbb{N}$ vérifie la propriété U si pour toute paire d'ensembles finis disjoints A, B de $\mathbb{N}$ il existe un sommet qui est relié à A et pas à B. Un tel graphe est aussi appelé graphe aléatoire dénombrable (car cette propriété est vérifiée si on tire les arêtes aléatoirement).*

1. *Montrer que deux graphes vérifiant la propriété U sont isomorphes.*
2. *Montrer que si G vérifie la propriété U, alors si on partitionne ses sommets en deux, l'une des deux parties induit un graphe isomorphe à G. Trouver d'autres graphes ayant cette propriété.*
3. *Montrer que si f est une bijection de $\mathbb{N}$ vers les parties finies de $\mathbb{N}$ (montrer qu'il en existe une !) alors le graphe obtenu en reliant i à $f(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ vérifie la propriété U.*

Un *stable* dans un graphe (orienté ou pas) est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non reliés. La taille maximum d'un stable de G est notée $\alpha(G)$.

Exercice 86. 1. *Soit H un sous-graphe de G. Montrer que $\chi(G) \geqslant \chi(H)$.*

2. *Soit G un graphe et H le graphe obtenu en fusionnant deux sommets non adjacents de G. Montrer que si $\chi(G) \geqslant k$ alors $\chi(H) \geqslant k$.*

Soient G, H deux graphes. On choisit deux arêtes $uv \in E(G)$ et $u'v' \in E(H)$. On note $G \oplus H$ le graphe obtenu en fusionnant le sommet u de $G \setminus uv$ avec le sommet u' de $H \setminus u'v'$ et en y ajoutant une arête entre v et v'.

3. *Dessiner $K_4 \oplus K_4$.*
4. *Montrer que si $\chi(G) \geqslant k$ et $\chi(H) \geqslant k$ alors $\chi(G \oplus H) \geqslant k$.*

On dit que G est k-constructible si l'une des conditions suivantes est vérifiée

— $G = K_k$

— *G est obtenu en identifiant deux sommets non adjacents d'un graphe k-constructible*

— *$G = H_1 \oplus H_2$ où H_1 et H_2 sont k-constructibles.*

5. *Montrer que si G contient un sous-graphe k-constructible alors $\chi(G) \geqslant k$.*

On s'intéresse maintenant à la réciproque. Supposons que G ne contient pas de sous-graphe k-constructible. Tant qu'il existe deux sommets u, v non adjacents tels que $G \cup \{uv\}$ ne contient pas de sous-graphe k-constructible, on ajoute uv à G. On note H le graphe obtenu.

6. *Montrer que H ne contient pas le graphe à trois sommets et une arête comme sous-graphe.*
7. *En déduire que $\chi(H) < k$.*
8. *Conclure.*