LP- Filtrage en électronique Analogique et Numérique

Références

- Salamito PCSI 2021 -
- Cours Jérémy Neveu

Introduction

L'étude des signaux et leur traitement revêt une importance capitale en physique puisque c'est l'outil de travail premier d'un physicien.
On en trouve beaucoup d'applications :

- dans la vie de tous les jours :
  - communications : téléphone, internet ...
  - plus généralement tout système électronique.
- physique expérimentale :
  - mesure de pression
  - mesure de température

=> essentiellement sous deux formes:

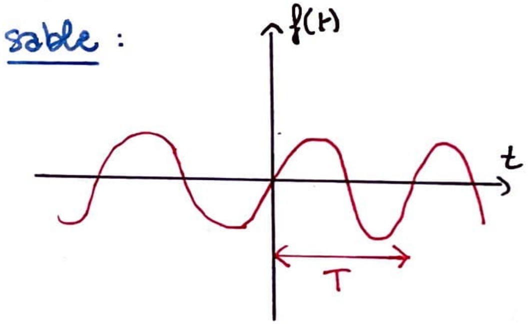
- Analogique : grandeur qui évolue continument
  => température de la pièce
- Numérique : signal discrétisé : une mesure de la température toutes les heures.

Ces signaux passent par une phase de traitement pendant laquelle on les met en forme, notamment en agissant sur leur spectre (on va le voir qui caractérise les variations +/- rapides du signal). Ceci met en jeu alors la notion de Filtrage.

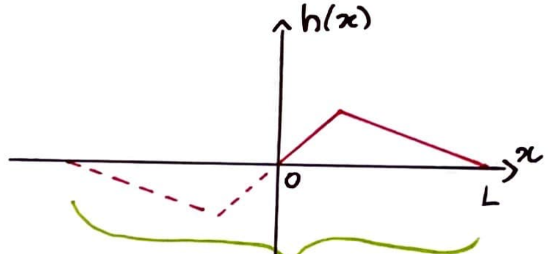
I- Décomposition spectrale d'un signal

I. 1) Décomposition en série de Fourier

. On s'intéresse ici à un signal f périodique ou périodisable :



Fonction périodique (T)



. Pour ces signaux, le théorème de Fourier donne :

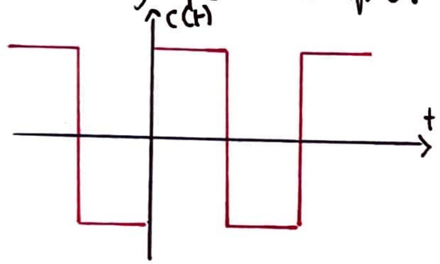
$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}$$

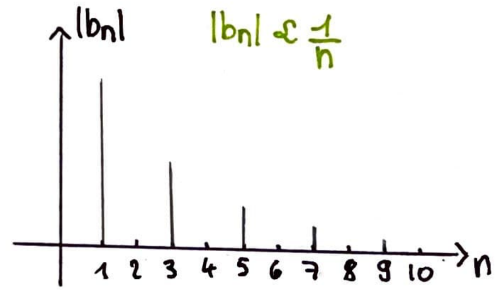
où : $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)$; $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\sin\left(2\pi\frac{nt}{T}\right)$

et $a_0/2$: moyenne de f.

Les fonctions cosinus et sinus forment alors une <u>base</u> de l'ensemble des fonctions T-périodiques. Les coefficients a_n et b_n caractérisent alors la non <u>monochromaticité</u> du signal, ils constituent son <u>spectre</u> : plus il est riche, plus les variations seront "importantes".

On peut faire le lien avec les sons : bruit blanc et La 144 Hz par exemple.





. <u>Exemple du créneau</u> : . $a_n = 0$ car il est impair
. décroissance lente due aux discontinuités

. <u>Script python</u> : on construit progressivement le signal en montrant le <u>phénomène de Gibbs</u> (dû aux sommes finies).

I. 2) <u>Transformée de Fourier</u>

. Quand les signaux ne sont pas <u>périodiques</u>, on introduit une décomposition sur un continuum de fréquences.

. On introduit la <u>transformée de Fourier</u> :

$$\boxed{\hat{f}(\omega) \equiv \int_{\mathbb{R}} dt\, f(t)\, e^{-2i\pi\omega t}}$$

cette opération est inversible :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \hat{f}(\omega)\, e^{2i\pi\omega t}$$

On retrouve une décomposition analogue à celle du cas étudié précédemment sur les fonctions $e^{2i\pi\omega t}$ <u>monochromatiques</u>. Les coefficients $\hat{f}(\omega)$ constituent alors le <u>spectre</u> du signal.

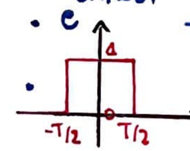
. <u>rem</u> : on donne un sens physique à la quantité $|\hat{f}(\omega)|^2$ comme une <u>densité spectrale d'énergie</u>.

⇒ Lien avec l'égalité de Parseval :

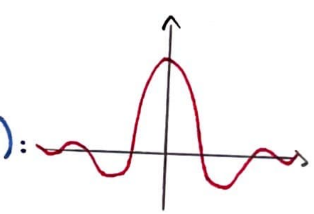
$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}_{\text{énergie instantanée}} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

. <u>Exemples</u> :

. $e^{2i\pi\omega_0 t} \xrightarrow{TF} \delta(\omega-\omega_0)$

. 

$\xrightarrow{TF} T\,\mathrm{sinc}(\pi\omega T)$:

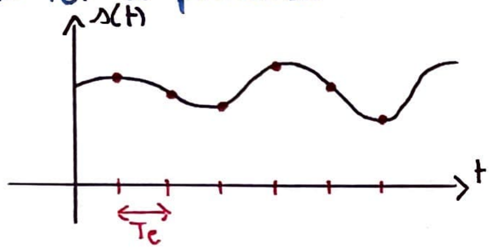


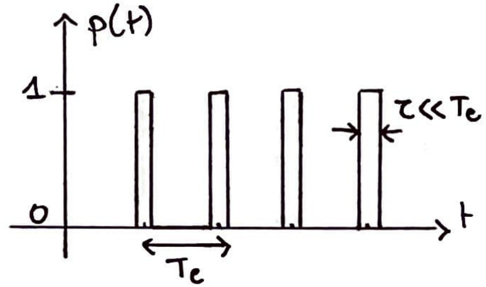
II - <u>Acquisition et filtrage numérique d'un signal</u>

• <u>OPTION 1</u> : numérisation et critère de Shanon

Pour des raisons de mémoire informatique, on doit nécessairement passer par une étape de <u>quantification</u>

d'un signal pour en faire une acquisition. On détaille ici le procédé :





- le signal que l'on acquiert s'écrit $S(t) = s(t)p(t)$ où $p(t)$ est la fonction qui décrit l'étape d'échantillonnage
- Comme on l'a vu précédement, il y a équivalence entre la représentation temporelle et spectrale d'un signal.
- Pour s'assurer que l'on échantillonne proprement, on veut être sûrs que l'on peut extraire le spectre de s de celui de S.
- on note f_{max} la fréquence la plus haute du spectre de s.

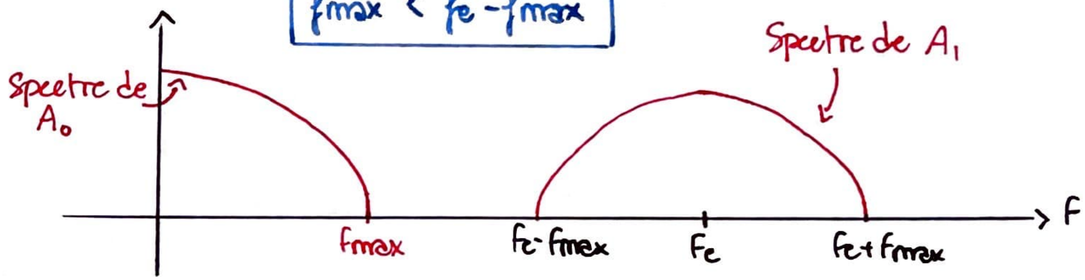
$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(t)\, p_n \cos(2\pi n f_e t) \quad \text{où } f_e \equiv 1/T_e$$
$$\equiv \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)$$

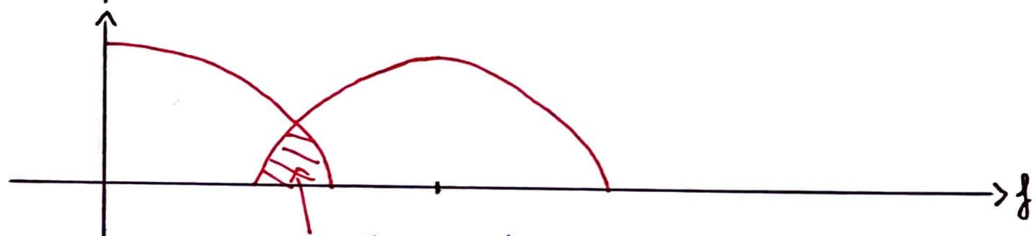
- le spectre de A_0 est celui de s à un coefficient près, c'est celui qui nous intéresse.
- pour $n \geqslant 1$: on développe selon le DSF de f :

$$A_n(t) = \sum_i s_i p_n \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \cos(2\pi n f_e t)$$
$$= \sum_i \frac{s_i p_n}{2} \left\{ \cos(2\pi(f_i - n f_e)t + \phi_i) + \cos(2\pi(f_i + n f_e)t + \phi_i) \right\}$$

le spectre de A_n se trouve donc centré en $n f_e$, de largeur $2 f_{max}$. On souhaite pouvoir couper les hautes fréquences pour récupérer le spectre de A_0 donc s uniquement. Pour cela, il faut que les spectres de A_0 et A_1 ne se recoupent pas. On aboutit au critère de Shanon :

$$\boxed{f_{max} < f_e - f_{max}}$$





repliement de spectre pour un mauvais échantillonnage.

- Il suffit alors de :
  - calculer la TF numérique de S
  - couper les fréquences au dessus de $f_e/2$
  - reconstituer le signal par TF inverse

- remarques :
  - cette méthode naïve de filtrage crée beaucoup d'erreurs via les calculs approchés de TF donc on utilise les transformées en Z :

$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n z^{-n}$: on applique nos filtres directement sur $S \to$ fonct° $Y(z) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n z^{-n}$: les y_n portent l'effet du filtre sur s_n.

- on veut $\tau \ll T_e$ car une fonct° porte a une TF de sinus cardinal : on se retrouve avec un produit de convolution qui ne modifie peu le spectre que si la largeur des $\sin_c$ est grande, et vaut $1/\tau$ en fréquence

OPTION 2 : Principe du Filtrage numérique sur l'exemple d'un signal créneau.

Le principe naïf d'un filtrage numérique d'un signal se décompose en quatre parties :

- Numérisation du signal (via un CAN)
- Calcul de la TF
- Filtrage du spectre
- Obtention du signal original par TF inverse

On se propose de faire ceci sur un créneau dont on veut filtrer les hautes fréquences

Voir Script python

III - Filtrage Analogique

III. 1) Réponse en fréquence d'un système linéaire

On considère un Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT). En notant $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie, avec $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre,

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-t')\, e(t')\, dt' = [h * e](t)$$

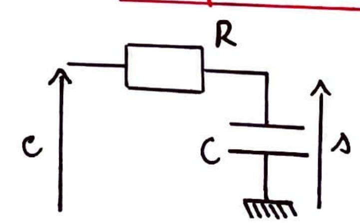
donc par propriétés de la TF : $\hat{s}(\omega) = \hat{h}(\omega)\,\hat{e}(\omega)$

on définit alors la fonction de transfert :

$$\boxed{H(\omega) \equiv h(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{\hat{e}(\omega)}}$$

- Elle nous renseigne sur la réponse du système à une excitation monochromatique, cô on peut décomposer tout signal selon ces modes, on a accès à la réponse pour toute entrée.

III. 2) Exemple du Filtre RC



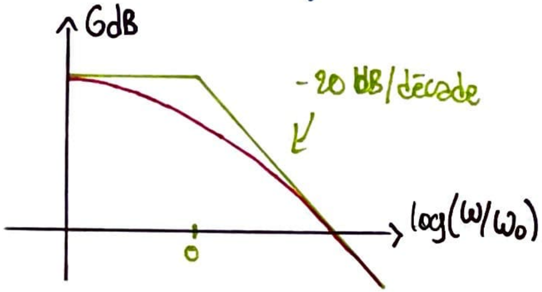
$$e(t) = s + RC\frac{ds}{dt}$$

$\downarrow$ TF

$$\hat{e}(\omega) = \hat{s}(\omega)\,(1 + j\omega RC)$$

donc $\boxed{H(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega/\omega_0}}$ où $\omega_0 \equiv 1/RC$

En définissant le gain en décibels : $G_{dB} = 20\log(|H|)$,



- $\omega \ll \omega_0$: $G_{dB} \simeq 1$
- $\omega \gg \omega_0$: $G_{dB} \simeq -20\log\frac{\omega}{\omega_0}$

on a bien constitué un passe bas.

. rem : . la pente à -20dB / déc traduit un comportement intégrateur : $\hat{s}(\omega) = \hat{e}(\omega) H(\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega}\hat{e}(\omega)$

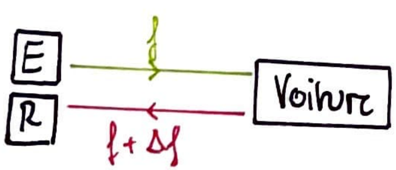
donc $s(t) = \omega_0 \int e(t)dt$

. si on met un signal créneau, on s'attend donc à avoir un signal triangulaire en sortie (cas où le condensateur n'a pas le temps de se charger)

On a constitué un filtre du 1er ordre avec une pente de -20 dB/déc, mais on peut imaginer des filtres plus poussés : RLC série ou utilisation d'un AO pour mettre en cascade des filtres.

II. 3) Application à la détection synchrone

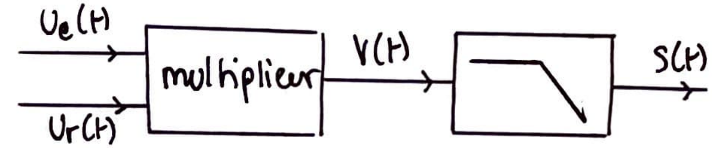
. on étudie l'exemple du radar Doppler : on émet un signal ultrasonore de fréquence f qui se réfléchit sur la voiture en mouvement : elle devient source secondaire.

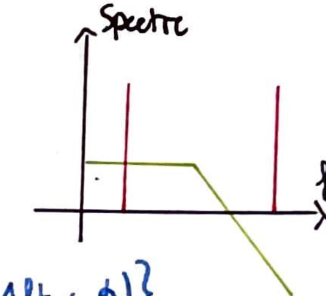


l'écart de fréquence Δf s'écrit $\boxed{\Delta f = \omega \frac{V}{c}}$

. rem : une formule exacte dans ce cas simple 1D sans DL donne $f' = f \times \frac{1}{1 - V/c}$: V peut être proche de c.

. comme $\Delta f \ll f$, une mesure directe de la fréquence du signal reçu n'est pas possible : on passe par de la détection synchrone : $\begin{cases} U_e(t) = A_e \cos(2\pi f t) \\ U_r(t) = A_r \cos(2\pi (f+\Delta f)t + \phi) \end{cases}$





$$V(t) = \frac{A_e A_r}{2}\left\{\cos(2\pi(2f+\Delta f)t + \phi) + \cos(2\pi \Delta f t + \phi)\right\}$$

. en filtrant les hautes fréquences, il reste un signal de fréquence Δf que l'on peut facilement mesurer.

. on peut penser à un filtre :

- Analogique : un RC
- Numérique : coupe plus efficacement les fréquences mais présente des limites dans les calculs + limitation fréquence d'aquisition.

Conclusion :

On peut ouvrir le propos sur d'autres formes de filtrage comme le filtrage optique. On n'a ici que touché du doigt l'importance que revêt la théorie de Fourier dans l'étude des systèmes linéaires → par exemple pour les propagations d'instabilité (Rayleigh - Plateau).

Traitement du Signal - Compléments

- **Convertisseur Analogique - Numérique :**

  on compare la tension à mesurer U_0 à celle $U(t)$ d'un condensateur que l'on charge, en connaissant précisément τ tq $U(\tau) = U_0$, on convertit U_0 en un temps. on dispose à côté d'une horloge de période T : on stocke alors numériquement le rapport τ/T.

- **Principe des télécommunications :**

  pour transmettre un signal s basse fréquence, on utilise généralement une porteuse de fréquence plus élevée : c'est plus pratique pour :
  - taille des antennes
  - distinction des signaux

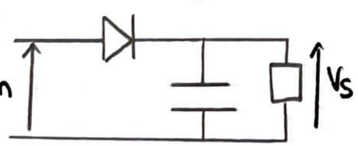
  - **Modulation d'Amplitude** (AM sur les poste radio) :

    on transmet $y(t) = \underbrace{y_0(1 + ms(t))}_{\text{amplitude}} \cos(2\pi f_p t)$

    utilisat° multiplieur ⊕ sommateur

    on démodule avec un détecteur d'enveloppe (Duffait p215) :

    ex boucle à verrouillage de phase

    il ne garde que l'enveloppe qui contient le signal d'intérêt s.

    ⊕ : longue portée et facile à mettre en place

  - **Modulation de Fréquence** (FM sur les postes radio) :

    on transmet ici un signal de fréquence instantanée $\nu(t) = f_p + ms(t)$
    - modulation : Wobbulation d'un GBF
    - démodulation : Boucle à verrouillage de phase

- **Multiplieur :**

  on utilise une diode qui a une caractéristique en exponentielle :

  $$\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \ln(x(t)) \\ \ln(y(t)) \end{matrix} \xrightarrow{\text{sommateur}} \ln(xy) \longrightarrow xy$$

- **Transformée de Laplace**
  - Utile car cô $p \in \mathbb{C}$, on peut s'arranger pour que la transformée converge.
  - Ce n'est cependant pas très utile pour nos signaux physiques à support compact pour lesquels les TF convergent.
  - cela fournit une base adaptée des solut° pour un ordre 2 en régime quelconque : exponentielles amorties avec ou sans oscillations. (cf cours Jeremy Neveu - p79)

- **Calcul des TF numériques :** [Algo FFT en Nlog(N)
  - on utilise les transformées de Fourier discrètes :

    pour des données $\{x_n\}_{n \in}$ on définit

    $$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2ik n/N\pi} \quad ; \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{2ik\pi n/N}$$

  ⇒ x_n est intrinsèquement supposée périodique qd on calcule son spectre.
  - m̂ ds le cas d'un calcul "exact" d'une fonction :

. cô la plage de temps est limitée :

$$\hat{F}(\omega) = \int f(t) \times Rect(t)\, e^{-2i\pi\omega t}\, dt = [\hat{f} \otimes sin_c](\omega)$$

=> plus le rectangle (fonction porte) est étalé, plus le sin_c est resserré et "tend" vers un delta de dirac : identité pour les produits de convolution.

. Filtres divers :

. ordre n : succession de RC avec AO pour mise en cascade

. Boucle à verrouillage de phase

. détecteur d'enveloppe

. Actif : Sallen key : passe bande de meilleure qualité qu'un RLC série car on peut facilement avoir un très grand facteur de qualité
↓
AO

. Non linéaire : . AO en saturat° (comparateur à hystérésis)
. Van der Pol

. DSF : $f(t) = a_0 + \sum a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

$= a_0 + \sum_n c_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ où $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

les coefficients c_n composent le spectre du signal

. Calcul TF numérique :

. plage + grande possible si signal non périodique

. plage multiple de la période du signal ds le cas contraire.

. Radar Doppler : . utilisation d'ultrasons (typiquement 30 kHz)

=> production via un émetteur d'ultrasons :

- piézoélectrique : déformation de lamelles de quartz soumises à un chp électrique : elles créent des ondes acoustiques en vibrant

- magnétostriction : corps ferro ds 1 chp B variable il se contracte dû aux mvt des dipôles locaux qui le composent.

- électrostriction : m̂ principe avec chp E variable.

⚠ : pour gros excès de vitesse, on n'a plus $v \ll c$.

. Bruit de quantification numérique :

. si $s(t)$ varie entre $\pm s_{max}$ et que l'on répartit uniformément, le pas minimal entre deux valeurs est $q = \frac{2s_{max}}{2^N}$ avec N le nombre de bits pour le stockage.

. en supposant une distribut° uniforme sur $[-q/2, q/2]$, on a un bruit de quantificat° $\boxed{\langle b^2 \rangle = \frac{q^2}{12}}$